



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 1 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

Finite Differenzen

Tino Kluge

tino.kluge@hrz.tu-chemnitz.de

<http://www.mathfinance.de/seminars/sdgl.html>

January 17, 2002

Zusammenfassung

Dieses Dokument gibt einen Einblick in die Finiten Differenzen Verfahren mit besonderem Augenmerk auf die Black-Scholes Differentialgleichung.



1. Einleitung

1.1. Überblick

- Allgemeine lineare hyperbolische PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

- Spezialfall Black-Scholes PDE mit Endbedingung

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + (r_d - r_f)su_s - r_d u = 0 \quad s \in [0, \infty)$$

- Black-Scholes PDE in Rückwärtiger Zeitrichtung

$$u_t = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + (r_d - r_f)su_s - r_d u \quad s \in [0, \infty)$$

Startseite

Titelseite



Seite 2 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 3 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Black-Scholes mit log Spot Transformation $x := \log(s)$

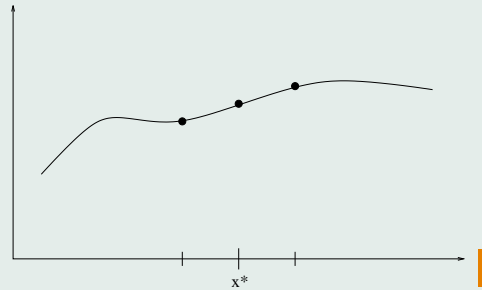
$$u_t = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} + (r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)u_x - r_d u \quad x \in \mathbb{R}$$



- Lösungsidee: Diskretisierung der x - und der t -Achse und Approximation der Ableitungen durch Differenzen sowie Lösen des diskreten Problems

1.2. Approximation von Ableitungen

- Betrachten eindimensionale Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



- Rechtsseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x}$$

- Linksseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^*) - f(x^* - \Delta x)}{\Delta x}$$

- Beidseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^* - \Delta x)}{2\Delta x}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 4 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 5 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Zweite Ableitung als Hintereinanderausführung von linksseitigen und rechtsseitigen Differenzenquotienten

$$f''(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - 2f(x^*) + f(x^* - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

2. Explizites Finites Differenzen Verfahren

- Diskretisierung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_t} = T$ und $x_0 < x_1 < \dots < x_{n_x}$

$$u_i^{(k)} := u(t_k, x_i)$$

- Zeitableitung

$$u_t(t_k, x_i) \approx \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t}$$

- Ortsableitung

$$u_x(t_k, x_i) \approx \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x}$$
$$u_{xx}(t_k, x_i) \approx \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2}$$



Einleitung

Explizites Finites ...

Implizite Finite ...

Startseite

Titelseite



Seite 6 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



2.1. Verfahren

- PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

- Betrachten der Punkte (t_k, x_i) und Ersetzen der Ableitung durch Differenzenquotienten liefert

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} &= a \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2} \\ &+ b \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} \\ &+ cu_i^{(k)} + d \end{aligned}$$

Startseite

Titelseite



Seite 7 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 8 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Randbedingungen für Ahnungslose

$$u_{xx}(t, x_0) = u_{xx}(t, x_{n_x}) = 0$$



- Alternative Randbedingung

$$u(t, x_0) = 0$$

$$u(t, x_{n_x}) = x_{n_x} e^{-r_f t} - K e^{-r_d t}$$

2.2. Numerische Stabilität

- Fatal ■
- Explizite FDM ist stabil für $u_t = au_{xx}$ dann und nur dann, wenn

$$\Delta t \leq \frac{1}{2a} \Delta x^2$$

- Mit $a = \frac{1}{2}\sigma^2$ erhält man einen Indikator für Stabilität bei der Black-Scholes PDE (log transformiert)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\sigma^2}$$

- Mit $a = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2$ erhält man auch einen Indikator für globale Stabilität bei der Black-Scholes PDE (nicht log transformiert)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\sigma^2 x_{max}^2} = \frac{1}{(n_x \sigma)^2}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 9 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Beispiel Markt:

Name	r_d	r_f	σ	Spot	Strike	T
EUR/USD	$\ln(1.023)$	$\ln(1.033)$	0.12	0.9	0.9	1

- Black-Scholes Preis: 0.037767 USD (0.04196 EUR)

- Berechnungsparameter ($x_0 = \ln(0.9) - 1$, $x_{n_x} = \ln(0.9) + 1$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{\Delta x^2}{\sigma^2}$	Preis
20	5	0.1	0.2	0.694	0.038853
330	365	0.0061	0.00274	0.00255	$-8.4 \cdot 10^{13}$
320	365	0.0063	0.00274	0.00271	0.037781

Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 10 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 11 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Differentialgleichung nicht log transformiert ($s_0 = 0$, $s_{n_x} = 5$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{1}{(n_x \sigma)^2}$	Preis
160	365	0.0312	0.00274	0.00271	0.037784
1 70	365	0.0294	0.00274	0.00240	0.037783
2 00	365	0.0250	0.00274	0.00174	0.037657
3 00	365	0.0166	0.00274	0.00077	$8.7 \cdot 10^{29}$

- Bemerkung: Ab 170 Gitterpunkten ist die FDM Lösung nicht mehr global stabil.



3. Implizite Finite Differenzen Verfahren

- Idee: Ableitungen nach der x Koordinate werden über den Zeitpunkt t_k und t_{k+1} gemittelt. ■
- Beispiel:

$$u_x(t_k, x_i) \approx \alpha \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + (1 - \alpha) \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k+1)}}{2\Delta x} \quad \blacksquare$$

- PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

Startseite

Titelseite



Seite 12 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 13 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

Wir erhalten das implizite Schema

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{(k+1)}}{\Delta t} - (1 - \alpha)a \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}}{\Delta x^2} \\ & + (1 - \alpha)b \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k+1)}}{2\Delta x} + (1 - \alpha)cu_i^{(k+1)} + d \\ & = \frac{u_i^{(k)}}{\Delta t} + \alpha a \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2} \\ & + \alpha b \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + \alpha cu_i^{(k)} + d \end{aligned}$$



Ordnen nach $u_i^{(k+1)}$ liefert

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} + (1 - \alpha) \left(-\frac{2a}{\Delta x^2} + c \right) \right) u_i^{(k+1)} \\ & + \left((1 - \alpha) \left(\frac{a}{\Delta x^2} + \frac{b}{2\Delta x^2} \right) \right) u_{i+1}^{(k+1)} \\ & + \left((1 - \alpha) \left(\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{b}{2\Delta x^2} \right) \right) u_{i-1}^{(k+1)} \\ & = \frac{u_i^{(k)}}{\Delta t} + \alpha a \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2} \\ & + \alpha b \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + \alpha c u_i^{(k)} + d \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit einfacher Struktur.

$$\gamma_{-1} u_{i-1}^{(k+1)} + \gamma_0 u_i^{(k+1)} + \gamma_1 u_{i+1}^{(k+1)} = \delta_{-1} u_{i-1}^{(k)} + \delta_0 u_i^{(k)} + \delta_1 u_{i+1}^{(k)}$$

Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 14 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Ausführlicher geschrieben:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \gamma_{-1} & u_0 & + & \gamma_0 & u_1 & + & \gamma_1 & u_2 & + & 0 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\
 0 & u_0 & + & \gamma_{-1} & u_1 & + & \gamma_0 & u_2 & + & \gamma_1 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\
 0 & u_0 & + & 0 & u_1 & + & \gamma_{-1} & u_2 & + & \gamma_0 & u_3 & + & \gamma_1 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\
 \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \ddots
 \end{array}$$

Oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix}
 \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_0 \\
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 \vdots
 \end{pmatrix}$$

Matrix besitzt Tridiagonalform, wenn Randbedingungen keine zweiten Ableitungen enthalten. Gelöst wird dieses Gleichungssystem mit Verfahren, die die Dünnbesetztheit der Matrix ausnutzen, z.B. Tridiagonallöser.

Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 15 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden