



Finite Differenzen

Tino Kluge

tino.kluge@hrz.tu-chemnitz.de

<http://www.mathfinance.de/seminars/sdgl.html>

January 17, 2002

Zusammenfassung

Dieses Dokument gibt einen Einblick in die Finiten Differenzen Verfahren mit besonderem Augenmerk auf die Black-Scholes Differentialgleichung.

Einleitung

Explizites Finites ...

Implizite Finite ...

Startseite

Titelseite



Seite 1 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



1. Einleitung

1.1. Überblick

- Allgemeine lineare hyperbolische PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

Startseite

Titelseite



Seite 2 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



1. Einleitung

1.1. Überblick

- Allgemeine lineare hyperbolische PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

- Spezialfall Black-Scholes PDE mit Endbedingung

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + (r_d - r_f)su_s - r_d u = 0 \quad s \in [0, \infty)$$

Startseite

Titelseite



Seite 2 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



1. Einleitung

1.1. Überblick

- Allgemeine lineare hyperbolische PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

- Spezialfall Black-Scholes PDE mit Endbedingung

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + (r_d - r_f)su_s - r_d u = 0 \quad s \in [0, \infty)$$

- Black-Scholes PDE in Rückwärtiger Zeitrichtung

$$u_t = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + (r_d - r_f)su_s - r_d u \quad s \in [0, \infty)$$

Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 2 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 3 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Black-Scholes mit log Spot Transformation $x := \log(s)$

$$u_t = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} + (r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)u_x - r_d u \quad x \in \mathbb{R}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 3 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

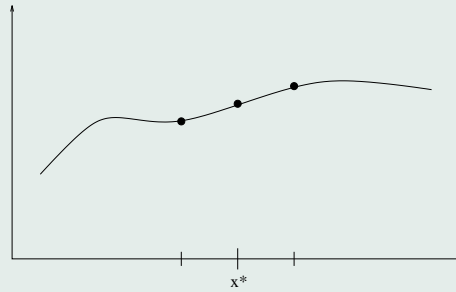
- Black-Scholes mit log Spot Transformation $x := \log(s)$

$$u_t = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{xx} + (r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)u_x - r_d u \quad x \in \mathbb{R}$$

- Lösungsidee: Diskretisierung der x - und der t -Achse und Approximation der Ableitungen durch Differenzen sowie Lösen des diskreten Problems

1.2. Approximation von Ableitungen

- Betrachten eindimensionale Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Einleitung

Explizites Finite...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 4 von 15

Zurück

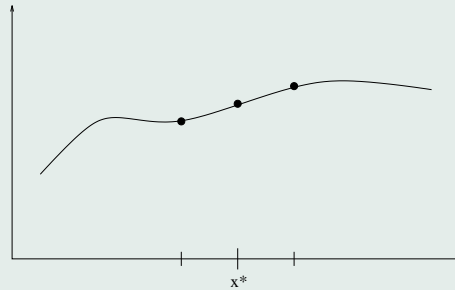
Vollbild

Schließen

Beenden

1.2. Approximation von Ableitungen

- Betrachten eindimensionale Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



- Rechtsseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 4 von 15

Zurück

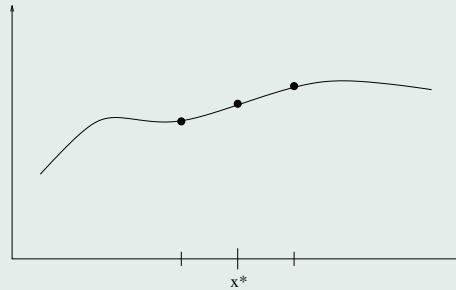
Vollbild

Schließen

Beenden

1.2. Approximation von Ableitungen

- Betrachten eindimensionale Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



- Rechtsseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x}$$

- Linksseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^*) - f(x^* - \Delta x)}{\Delta x}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 4 von 15

Zurück

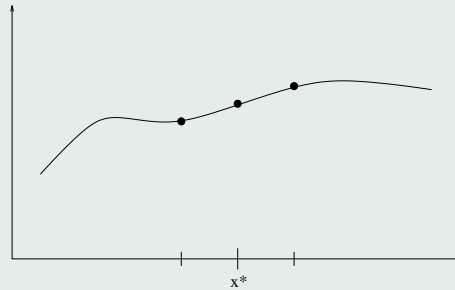
Vollbild

Schließen

Beenden

1.2. Approximation von Ableitungen

- Betrachten eindimensionale Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



- Rechtsseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x}$$

- Linksseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^*) - f(x^* - \Delta x)}{\Delta x}$$

- Beidseitiger Differenzenquotient

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^* - \Delta x)}{2\Delta x}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 4 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 5 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Zweite Ableitung als Hintereinanderausführung von linksseitigen und rechtsseitigen Differenzenquotienten

$$f''(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - 2f(x^*) + f(x^* - \Delta x)}{\Delta x^2}$$



2. Explizites Finites Differenzen Verfahren

- Diskretisierung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_t} = T$ und $x_0 < x_1 < \dots < x_{n_x}$

$$u_i^{(k)} := u(t_k, x_i)$$

Startseite

Titelseite



Seite 6 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



2. Explizites Finites Differenzen Verfahren

- Diskretisierung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_t} = T$ und $x_0 < x_1 < \dots < x_{n_x}$

$$u_i^{(k)} := u(t_k, x_i)$$

- Zeitableitung

$$u_t(t_k, x_i) \approx \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t}$$

Startseite

Titelseite



Seite 6 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

2. Explizites Finites Differenzen Verfahren

- Diskretisierung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_t} = T$ und $x_0 < x_1 < \dots < x_{n_x}$

$$u_i^{(k)} := u(t_k, x_i)$$

- Zeitableitung

$$u_t(t_k, x_i) \approx \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t}$$

- Ortsableitung

$$u_x(t_k, x_i) \approx \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x}$$



Einleitung

Explizites Finites ...

Implizite Finite ...

Startseite

Titelseite



Seite 6 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

2. Explizites Finites Differenzen Verfahren

- Diskretisierung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_t} = T$ und $x_0 < x_1 < \dots < x_{n_x}$

$$u_i^{(k)} := u(t_k, x_i)$$

- Zeitableitung

$$u_t(t_k, x_i) \approx \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t}$$

- Ortsableitung

$$u_x(t_k, x_i) \approx \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x}$$
$$u_{xx}(t_k, x_i) \approx \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2}$$



Einleitung

Explizites Finites ...

Implizite Finite ...

Startseite

Titelseite



Seite 6 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



2.1. Verfahren

- PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

Startseite

Titelseite



Seite 7 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



2.1. Verfahren

- PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

- Betrachten der Punkte (t_k, x_i) und Ersetzen der Ableitung durch Differenzenquotienten liefert

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{\Delta t} &= a \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2} \\ &+ b \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} \\ &+ cu_i^{(k)} + d \end{aligned}$$

Startseite

Titelseite



Seite 7 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 8 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Randbedingungen für Ahnungslose

$$u_{xx}(t, x_0) = u_{xx}(t, x_{n_x}) = 0$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 8 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Randbedingungen für Ahnungslose

$$u_{xx}(t, x_0) = u_{xx}(t, x_{n_x}) = 0$$

- Alternative Randbedingung

$$u(t, x_0) = 0$$

$$u(t, x_{n_x}) = x_{n_x} e^{-r_f t} - K e^{-r_d t}$$

2.2. Numerische Stabilität

- Fatal



Einleitung

Explizites Finites . . .

Implizite Finite . . .

Startseite

Titelseite



Seite 9 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

2.2. Numerische Stabilität

- Fatal
- Explizite FDM ist stabil für $u_t = au_{xx}$ dann und nur dann, wenn

$$\Delta t \leq \frac{1}{2a} \Delta x^2$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 9 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

2.2. Numerische Stabilität

- Fatal
- Explizite FDM ist stabil für $u_t = au_{xx}$ dann und nur dann, wenn

$$\Delta t \leq \frac{1}{2a} \Delta x^2$$

- Mit $a = \frac{1}{2}\sigma^2$ erhält man einen Indikator für Stabilität bei der Black-Scholes PDE (log transformiert)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\sigma^2}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 9 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

2.2. Numerische Stabilität

- Fatal
- Explizite FDM ist stabil für $u_t = au_{xx}$ dann und nur dann, wenn

$$\Delta t \leq \frac{1}{2a} \Delta x^2$$

- Mit $a = \frac{1}{2}\sigma^2$ erhält man einen Indikator für Stabilität bei der Black-Scholes PDE (log transformiert)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\sigma^2}$$

- Mit $a = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2$ erhält man auch einen Indikator für globale Stabilität bei der Black-Scholes PDE (nicht log transformiert)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\sigma^2 x_{max}^2} = \frac{1}{(n_x \sigma)^2}$$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 9 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Beispiel Markt:

Name	r_d	r_f	σ	Spot	Strike	T
EUR/USD	$\ln(1.023)$	$\ln(1.033)$	0.12	0.9	0.9	1

Startseite

Titelseite



Seite 10 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Beispiel Markt:

Name	r_d	r_f	σ	Spot	Strike	T
EUR/USD	$\ln(1.023)$	$\ln(1.033)$	0.12	0.9	0.9	1

- Black-Scholes Preis: 0.037767 USD (0.04196 EUR)

Startseite

Titelseite



Seite 10 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Beispiel Markt:

Name	r_d	r_f	σ	Spot	Strike	T
EUR/USD	$\ln(1.023)$	$\ln(1.033)$	0.12	0.9	0.9	1

- Black-Scholes Preis: 0.037767 USD (0.04196 EUR)
- Berechnungsparameter ($x_0 = \ln(0.9) - 1$, $x_{n_x} = \ln(0.9) + 1$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{\Delta x^2}{\sigma^2}$	Preis
20	5	0.1	0.2	0.694	0.038853

Startseite

Titelseite



Seite 10 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Beispiel Markt:

Name	r_d	r_f	σ	Spot	Strike	T
EUR/USD	$\ln(1.023)$	$\ln(1.033)$	0.12	0.9	0.9	1

- Black-Scholes Preis: 0.037767 USD (0.04196 EUR)
- Berechnungsparameter ($x_0 = \ln(0.9) - 1$, $x_{n_x} = \ln(0.9) + 1$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{\Delta x^2}{\sigma^2}$	Preis
20	5	0.1	0.2	0.694	0.038853
330	365	0.0061	0.00274	0.00255	$-8.4 \cdot 10^{13}$

Startseite

Titelseite



Seite 10 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Beispiel Markt:

Name	r_d	r_f	σ	Spot	Strike	T
EUR/USD	$\ln(1.023)$	$\ln(1.033)$	0.12	0.9	0.9	1

- Black-Scholes Preis: 0.037767 USD (0.04196 EUR)
- Berechnungsparameter ($x_0 = \ln(0.9) - 1$, $x_{n_x} = \ln(0.9) + 1$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{\Delta x^2}{\sigma^2}$	Preis
20	5	0.1	0.2	0.694	0.038853
330	365	0.0061	0.00274	0.00255	$-8.4 \cdot 10^{13}$
320	365	0.0063	0.00274	0.00271	0.037781

Startseite

Titelseite



Seite 10 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 11 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Differentialgleichung nicht log transformiert ($s_0 = 0$, $s_{n_x} = 5$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{1}{(n_x \sigma)^2}$	Preis
160	365	0.0312	0.00274	0.00271	0.037784



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 11 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Differentialgleichung nicht log transformiert ($s_0 = 0$, $s_{n_x} = 5$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{1}{(n_x \sigma)^2}$	Preis
160	365	0.0312	0.00274	0.00271	0.037784
170	365	0.0294	0.00274	0.00240	0.037783



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 11 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Differentialgleichung nicht log transformiert ($s_0 = 0$, $s_{n_x} = 5$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{1}{(n_x \sigma)^2}$	Preis
160	365	0.0312	0.00274	0.00271	0.037784
170	365	0.0294	0.00274	0.00240	0.037783
200	365	0.0250	0.00274	0.00174	0.037657



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 11 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Differentialgleichung nicht log transformiert ($s_0 = 0$, $s_{n_x} = 5$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{1}{(n_x \sigma)^2}$	Preis
160	365	0.0312	0.00274	0.00271	0.037784
170	365	0.0294	0.00274	0.00240	0.037783
200	365	0.0250	0.00274	0.00174	0.037657
300	365	0.0166	0.00274	0.00077	$8.7 \cdot 10^{29}$



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 11 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

- Differentialgleichung nicht log transformiert ($s_0 = 0$, $s_{n_x} = 5$)

n_x	n_t	Δx	Δt	$\frac{1}{(n_x \sigma)^2}$	Preis
160	365	0.0312	0.00274	0.00271	0.037784
170	365	0.0294	0.00274	0.00240	0.037783
200	365	0.0250	0.00274	0.00174	0.037657
300	365	0.0166	0.00274	0.00077	$8.7 \cdot 10^{29}$

- Bemerkung: Ab 170 Gitterpunkten ist die FDM Lösung nicht mehr global stabil.



3. Implizite Finite Differenzen Verfahren

- Idee: Ableitungen nach der x Koordinate werden über den Zeitpunkt t_k und t_{k+1} gemittelt.

Startseite

Titelseite



Seite 12 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



3. Implizite Finite Differenzen Verfahren

- Idee: Ableitungen nach der x Koordinate werden über den Zeitpunkt t_k und t_{k+1} gemittelt.
- Beispiel:

$$u_x(t_k, x_i) \approx \alpha \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + (1 - \alpha) \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k+1)}}{2\Delta x}$$

Startseite

Titelseite



Seite 12 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



3. Implizite Finite Differenzen Verfahren

- Idee: Ableitungen nach der x Koordinate werden über den Zeitpunkt t_k und t_{k+1} gemittelt.
- Beispiel:

$$u_x(t_k, x_i) \approx \alpha \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + (1 - \alpha) \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k+1)}}{2\Delta x}$$

- PDE

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u + d(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 12 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 13 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden

Wir erhalten das implizite Schema

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{(k+1)}}{\Delta t} - (1 - \alpha)a \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - 2u_i^{(k+1)} + u_{i-1}^{(k+1)}}{\Delta x^2} \\ & + (1 - \alpha)b \frac{u_{i+1}^{(k+1)} - u_{i-1}^{(k+1)}}{2\Delta x} + (1 - \alpha)cu_i^{(k+1)} + d \\ & = \frac{u_i^{(k)}}{\Delta t} + \alpha a \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2} \\ & + \alpha b \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + \alpha cu_i^{(k)} + d \end{aligned}$$



Ordnen nach $u_i^{(k+1)}$ liefert

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} + (1 - \alpha) \left(-\frac{2a}{\Delta x^2} + c \right) \right) u_i^{(k+1)} \\ & + \left((1 - \alpha) \left(\frac{a}{\Delta x^2} + \frac{b}{2\Delta x^2} \right) \right) u_{i+1}^{(k+1)} \\ & + \left((1 - \alpha) \left(\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{b}{2\Delta x^2} \right) \right) u_{i-1}^{(k+1)} \\ & = \frac{u_i^{(k)}}{\Delta t} + \alpha a \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2} \\ & + \alpha b \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + \alpha c u_i^{(k)} + d \end{aligned}$$

Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 14 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Ordnen nach $u_i^{(k+1)}$ liefert

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} + (1 - \alpha) \left(-\frac{2a}{\Delta x^2} + c \right) \right) u_i^{(k+1)} \\ & + \left((1 - \alpha) \left(\frac{a}{\Delta x^2} + \frac{b}{2\Delta x^2} \right) \right) u_{i+1}^{(k+1)} \\ & + \left((1 - \alpha) \left(\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{b}{2\Delta x^2} \right) \right) u_{i-1}^{(k+1)} \\ & = \frac{u_i^{(k)}}{\Delta t} + \alpha a \frac{u_{i+1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i-1}^{(k)}}{\Delta x^2} \\ & + \alpha b \frac{u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)}}{2\Delta x} + \alpha c u_i^{(k)} + d \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit einfacher Struktur.

$$\gamma_{-1} u_{i-1}^{(k+1)} + \gamma_0 u_i^{(k+1)} + \gamma_1 u_{i+1}^{(k+1)} = \delta_{-1} u_{i-1}^{(k)} + \delta_0 u_i^{(k)} + \delta_1 u_{i+1}^{(k)}$$

Einleitung

Explizites Finites...

Implizite Finite...

Startseite

Titelseite



Seite 14 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Ausführlicher geschrieben:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \gamma_{-1} & u_0 & + & \gamma_0 & u_1 & + & \gamma_1 & u_2 & + & 0 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ 0 & u_0 & + & \gamma_{-1} & u_1 & + & \gamma_0 & u_2 & + & \gamma_1 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ 0 & u_0 & + & 0 & u_1 & + & \gamma_{-1} & u_2 & + & \gamma_0 & u_3 & + & \gamma_1 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

[Einleitung](#)

[Explizites Finites...](#)

[Implizite Finite...](#)

[Startseite](#)

[Titelseite](#)



Seite 15 von 15

[Zurück](#)

[Vollbild](#)

[Schließen](#)

[Beenden](#)



Ausführlicher geschrieben:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \gamma_{-1} & u_0 & + & \gamma_0 & u_1 & + & \gamma_1 & u_2 & + & 0 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ 0 & u_0 & + & \gamma_{-1} & u_1 & + & \gamma_0 & u_2 & + & \gamma_1 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ 0 & u_0 & + & 0 & u_1 & + & \gamma_{-1} & u_2 & + & \gamma_0 & u_3 & + & \gamma_1 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

Oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Startseite

Titelseite



Seite 15 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden



Ausführlicher geschrieben:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \gamma_{-1} & u_0 & + & \gamma_0 & u_1 & + & \gamma_1 & u_2 & + & 0 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ 0 & u_0 & + & \gamma_{-1} & u_1 & + & \gamma_0 & u_2 & + & \gamma_1 & u_3 & + & 0 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ 0 & u_0 & + & 0 & u_1 & + & \gamma_{-1} & u_2 & + & \gamma_0 & u_3 & + & \gamma_1 & u_4 & + & 0 & u_5 & + & \dots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

Oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \gamma_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Matrix besitzt Tridiagonalform, wenn Randbedingungen keine zweiten Ableitungen enthalten. Gelöst wird dieses Gleichungssystem mit Verfahren, die die Dünnbesetztheit der Matrix ausnutzen, z.B. Tridiagonallöser.

Startseite

Titelseite



Seite 15 von 15

Zurück

Vollbild

Schließen

Beenden