

# KUGELEINDRUCKVERSUCH IN GESCHICHTETE MATERIALIEN

von der Fakultät für Naturwissenschaften

der Technischen Universität Chemnitz-Zwickau

genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

von Dipl.-Phys. Norbert Schwarzer

geboren am 07.01.1966 in Eilenburg

eingereicht am 14.11.1997

Gutachter:	Prof. Dr. Frank Richter,	TU-Chemnitz
	Prof. Dr. Bernd Michel,	Fraunhofer-Institut Chemnitz
	Prof. Dr. Reiner Kreißig,	TU-Chemnitz

Tag der Verteidigung: 08.05.1998

## **Bibliografische Beschreibung**

Schwarzer, Norbert

### **KUGELEINDRUCKVERSUCH IN GESCHICHTETE MATERIALIEN**

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Naturwissenschaften

Dissertation, 1998

136 Seiten, 52 Abbildungen, 4 Tabellen, 89 Literaturzitate

Es wird das elastische Feld, das von einem Indentor mit sphärischer Oberfläche in einem geschichtet aufgebauten Probekörper erzeugt wird, berechnet.

Dabei wird neben der Normalkomponente, die bereits in der bekannten Hertzschen Lösung näherungsweise berücksichtigt wird, auch das elastische Feld der Tangentialkomponente für kleine Winkel zwischen Indentordruckkraft und deren Normalkomponente betrachtet. Die zwischen Indentor und Probekörper bestehende Reibung führt zu zusätzlichen Zwangskräften, deren elastische Felder ebenfalls abgeleitet werden. Mit Hilfe eines Ansatzes für die Lösung der Laplace-Gleichung in inhomogenen Räumen, der durch Anwendung der Methode der Spiegel- oder Bildladungen der Potentialtheorie erhalten wird, werden unter Anwendung der Potentialmethode Lösungen für den sphärischen Indentorversuch in geschichtete Probekörper entwickelt.

Schlagwörter: Kugeleindruck, sphärischer Indentor, Hertzscher Kegelbruch, Hertzsches Kontaktproblem, von Mises-Spannung, elastische Deformation, Isotropie, transversale Isotropie, plastische Deformation, Reibung, Potentialtheorie, Potentialmethode, Methode der Spiegelladungen, Finite-Elemente-Methode, Titanitrid

## Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG.....	5
2. DER EINDRUCKVERSUCH MIT KUGELFÖRMIGEN INDENTOREN .....	6
2.1. Warum Kugeleindruck?.....	6
2.2. Beschreibung der Kräfte und ablaufenden Prozesse.....	9
2.2.1. Die an der Oberfläche einwirkenden Kräfte .....	9
2.2.2. Beschreibung der im Körper ablaufenden Prozesse.....	12
2.3. Zielstellung und Überblick zum Inhalt der Arbeit.....	14
2.4. Wichtige theoretische Arbeiten zum Kugeleindruck.....	15
2.5. Gegenüberstellung von Empirie und Theorie.....	18
2.6. Über die Möglichkeit, das Kugelkontaktproblem für geschichtete Materialien mittels FE- Methoden zu behandeln - Schlußfolgerung .....	21
3. EINIGE WICHTIGE GRUNDLAGEN .....	21
3.1. Die Theorie von Hertz zur Deformation beim Kugeleindruckversuch .....	21
3.2. Spannung und Deformation in transversal isotropen Köpern.....	24
3.3. Die Punktkraftlösung für den transversal isotropen Halbraum.....	28
3.3.1. Die Normalkomponente P.....	28
3.3.2. Tangentialkomponente T wirkt als Scherkraft auf $\tau_z$ .....	29
3.3.3. Tangentialkomponente T wirkt als Normalkraft auf $\sigma_{xx}$ und $\sigma_{yy}$ .....	29
3.4. Der Grenzübergang zu isotropen Materialien .....	33
4. DAS ELASTISCHE FELD FÜR DEN KUGELEINDRUCKVERSUCH BEI GRÖßEREN EINDRINGTIEFEN .....	35
4.1. Probleme bei der Formulierung der Randbedingungen bei größeren Eindringtiefen.....	37
4.1.1. Störungstechnische Behandlung des gestellten Problems.....	39
4.1.1.1. Erster Zyklus, Erster Schritt .....	39
4.1.1.2. Erster Zyklus, zweiter Schritt .....	42
4.1.1.3. Erster Zyklus, dritter Schritt .....	42
4.1.1.4. Weitere Zyklen der Störungsrechnung .....	43
4.2. Über die Behandlung des Problems mittels Koordinatentransformation .....	43
4.3. Fazit zum Kugeleindruck bei größeren Eindringtiefen .....	45
5. BERÜCKSICHTIGUNG VON REIBUNGSEFFEKTEN .....	46
5.1. Haftreibung .....	46
5.1.1. Haftreibung beim Hertzschen Kugeleindruck.....	49
5.1.2. Haftreibung beim Kugeleindruck mit größeren Eindringtiefen .....	56
5.2. Gleitreibung.....	57
5.3. Gleit- und Haftreibungsbereiche: Superposition der elastischen Felder.....	59
6. KONTAKTPROBLEME BEI GESCHICHTETEN MATERIALIEN .....	63
6.1. Potentialansatz für transversal isotrope, lateral geschichtete Materialien .....	64
6.2. Die Punktkraftlösung für den lateral geschichteten, querisotropen Halbraum .....	66

6.2.1. Punktkraftlösung für beliebig viele Schichten .....	66
7. BELIEBIGE DRUCKVERTEILUNG AUF DER OBERFLÄCHE EINES GESCHICHTET AUFGEBAUTEN HALBRAUMES.....	69
7.1. Kugeleindruck in lateral geschichtete, transversal isotrope Materialien .....	69
8. EINIGE INTERESSANTE RESULTATE DER THEORIE .....	72
8.1. Homogener Fall (keine Schichten).....	72
8.2. Der einfach geschichtete isotrope Halbraum.....	75
8.2.1. Mathematischer Ansatz für den einfach geschichteten isotropen Halbraum.....	75
8.2.2. Schicht mit geringem E-Modul auf Substrat mit hohem E-Modul .....	77
8.3. Die beschichtete Platte .....	79
8.3.1. Mathematischer Ansatz für die beschichtete, kreisrunde Platte .....	79
8.3.2. Beschichtete kreisrunde Platte, die an den Rändern ideal befestigt ist und in der Mitte durch eine Hertzsche Druckkraft belastet wird.....	80
9. ANWENDUNG DER THEORIE GESCHICHTETER MATERIALIEN IM INDENTORVERSUCH AUF DIE UNTERSUCHUNG VON TiN-SCHICHTEN AUF SILIZIUM .....	81
10. VERGLEICH DER ANALYTISCHEN RECHNUNG MIT EINEM FEM-MODELL .....	97
11. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK .....	108
LITERATURVERZEICHNIS.....	109
ANHANG A .....	113
ANHANG B .....	116
ANHANG C .....	119
ANHANG D .....	121
ANHANG E.....	122
ANHANG F.....	123
F 1. Konkretisierung der Beziehungen von 6.2. für den Schicht-Substrat-Fall .....	123
F 2. Kraftverteilungen des Kugeleindruckversuches auf der Oberfläche eines geschichtet aufgebauten Halbraumes.....	125
F 2.1. Hertzsche Pressung - nur $p_p$ wird berücksichtigt .....	126
F 2.2. Hertzsche Scherkraftverteilung nach Hamilton-Goodmann .....	127
F 2.3. Hertzsche Tangentialkraftverteilung.....	129
F 3. Schlußbemerkung .....	131
ERKLÄRUNG .....	132
DANKSAGUNG.....	133
THESEN.....	134
LEBENS LAUF .....	136

## 1. Einleitung

Immer mehr Werkstoffoberflächen werden heute mit Schutzschichten vergütet, um sie besser an die Erfordernisse ihrer späteren Anwendungen anzupassen. Dabei steht oft das Erreichen guter mechanischer Oberflächeneigenschaften, wie hohe Verschleißfestigkeit, Bruchzähigkeit und große Härte, bei der Auswahl der gewünschten Schichtparameter im Vordergrund. Ziel ist die Erhöhung der Widerstandsfähigkeit der bearbeiteten Oberflächen gegenüber mechanischer Beanspruchung. Nur in besonderen Ausnahmefällen können bei dieser Belastungsart die mechanischen Eigenschaften von Schicht und Substrat getrennt betrachtet werden, da im allgemeinen die von außen einwirkenden Kräfte den gesamten Schicht-Substrat-Verbund beanspruchen. Experimente, die auf einer mechanischen Beanspruchung der Oberfläche beruhen, liefern also stets Verbundinformationen, wie z.B. Verbundhärte, Verbund-Elastizitätsmodul, Bruchzähigkeit und Haftfestigkeit der Schichten. Nur mit Hilfe von Zusatzinformationen kann von diesen Verbundparametern auf die zugehörigen Schicht- und Substratwerte geschlossen werden. Um einen hohen Nutzen bei der Oberflächenvergütung zu erreichen, ist es von großem Interesse, die Komponenten so auszuwählen, daß eine optimale Stabilität des Verbundes gegenüber mechanischer Beanspruchung erreicht wird.

Es sind somit folgende grundsätzliche Aufgaben zu lösen:

- experimentelle Bestimmung der mechanischen Parameter der einzelnen Oberflächenbestandteile aus Kontaktversuchen (z.B. Eindruckversuche),
- Berechnung oder Abschätzung des zu erwartenden mechanischen Verhaltens eines Verbundsystems mit gegebenen Schicht- und Substratparametern gegenüber Beanspruchungen der Oberfläche sowie
- Berechnung der erforderlichen Schichteigenschaften und Auswahl der geeigneten Materialien für eine vorgegebene Beanspruchungsart.

Dafür ist es nötig, mittels genauer und ausgewählter Kontaktexperimente die mechanische Belastbarkeit von Verbunden zu testen sowie mathematische Lösungen - analytisch oder numerisch - für Kontaktprobleme mit inhomogen aufgebauten Körpern zu entwickeln.

Um aus der Vielzahl möglicher Arbeitsrichtungen, mit deren Hilfe man diesem Ziel näher kommen könnte, die erfolgversprechendsten herauszufinden, müssen die möglichen Formen mechanischen Kontaktes und die dabei ablaufenden Prozesse etwas ausführlicher betrachtet werden. Mechanischer Kontakt tritt zumeist als reiner Druckkontakt oder als Druck-Scherkontakt in Erscheinung. Während beim reinen Druckkontakt nur Normalkräfte auf die Werkstückoberfläche einwirken, kommen beim Druck-Scherkontakt noch Scherkräfte hinzu. In beiden Fällen werden durch die einwirkenden Kräfte im Werkstück Spannungen aufgebaut, welche den äußeren Kräften entgegenwirken. Die Spannungen

resultieren aus den Deformationen des Werkstücks, die zunächst rein elastisch, d.h. reversibel, sind und proportional zu den Spannungen anwachsen. Wenn die Spannungen bestimmte kritische Werte überschreiten, z.B. die Fließgrenze bei plastisch deformierbaren Körpern, werden die Deformationen inelastisch und sind nicht mehr reversibel. Bei den weitaus meisten praktischen Anwendungen mit mechanischem Kontakt (z.B. Lagern, Getrieben usw.) besteht das Ziel, die Werkstoffe so auszuwählen bzw. zu kombinieren, daß deren kritische Spannungen weit genug über den auftretenden Belastungen liegen. Von homogenen Materialien sind diese kritischen Parameter im allgemeinen bekannt bzw. durch Standardversuche zu bestimmen. Wurden die Werkstoffoberflächen jedoch mit Schutzschichten vergütet, so verändern sich bestimmte Parameter, wie Elastizitätsmodul, Bruchzähigkeit und Härte des resultierenden Verbundes, oft sehr stark, und es werden zusätzliche Parameter, wie beispielsweise die Haftfestigkeit, zur Charakterisierung benötigt. Die für homogene und massive Materialien zugeschnittenen Standardversuche sind somit oft nicht mehr ausreichend, um die Materialparameter von Verbunden zu bestimmen. Es wurden deshalb zahlreiche experimentelle Methoden speziell für die Bestimmung der mechanischen Parameter von Schicht-Substrat-Systemen entwickelt bzw. optimiert ([1] bis [5]). Von denen soll hier nur ein kleiner Teil, nämlich die sogenannten Indentorversuche, näher betrachtet werden [6], [7].

Die Indentor- oder Eindruckversuche haben den Vorteil, daß sich mit ihnen nahezu jeder mechanische Kontakt modellmäßig erfassen läßt. So können Druck-Scherkontakte [8], [9] ebenso realisiert werden wie Kontakte, bei denen nur Normalkräfte an der Werkstückoberfläche angreifen (reiner Druckkontakt, siehe [10] - [12]).

Ein sehr wichtiges Charakteristikum für jeden Indentorversuch ist die Indentorgeometrie. So unterscheidet man Indentoren mit einer stetigen Oberflächenkrümmung (sogenannte *glatte* Indentoren: Rockwelldiamant, Brinell- oder Kugelindentor) von solchen, deren Oberfläche Kanten und Spitzen aufweist (z. B. *spitze* Indentoren: Vickers-, Knoop-, Berkowich- oder Kegelindentor). Letztere lassen sich durch die Unstetigkeitsstellen an den Kanten, mathematisch wesentlich schwieriger erfassen.

## **2. Der Eindruckversuch mit kugelförmigen Indentoren**

### **2.1. Warum Kugeleindruck?**

In dieser Arbeit soll ausschließlich der sogenannte Kugelindentor behandelt werden. Diese Bevorzugung gegenüber anderen Indentorformen basiert vor allem auf den folgenden Vorteilen des Kugelindentors:

1. Die mathematische Behandlung des Kugeleindrucks ist im Vergleich zu spitzen Indentoren (hier auch Punktindentoren genannt) oder Indentoren mit anderen Oberflächenformen relativ einfach und ermöglicht eine kontinuumsmechanische Beschreibung der realen Bedingungen.
2. Durch Wahl der zahlreichen Freiheitsgrade des Kugeleindrucks können Materialien sehr vielseitig mit ein und demselben Grundexperiment untersucht werden.

3. Er ermöglicht eine Aufspaltung des Eindringvorganges in einen zunächst rein elastischen und einen anschließenden elastisch-inelastischen Teil.
4. Der Kugeleindruck kann auch als Modell für Oberflächenrauigkeiten dienen.

Diese Vorteile sollen im folgenden etwas genauer erläutert werden.

- zu 1.** Da der Kugelindenter eine *glatte* (s.o.) Oberfläche aufweist, entspricht die kontinuumsmechanische Beschreibung des Kugeleindrucks den realen Bedingungen besser als bei spitzen Indentoren (Vickers-, Berkowich- und Knoop-). Denn deren reale Spitzen sind stets etwas abgerundet, was die exakte theoretische Behandlung des entsprechenden Kontaktproblems stark erschwert. Die Kontaktfläche beim senkrechten Kugeleindruck in homogene sowie geschichtet aufgebaute Materialien (die Schichtdicke muß über der gesamten Substratoberfläche konstant sein) ist rotationssymmetrisch. Dies bringt große Vorteile bei der theoretischen Behandlung mit sich. Eine solche Begründung wirkt ohne die Darstellung der Theorie der Kontaktprobleme zunächst recht vage. Sie wird jedoch bei der Vorstellung dieser Theorie in den nachfolgenden Abschnitten deutlicher. Hier soll die Beschränkung auf Kugelindenter nur rein anschaulich mit der hohen Symmetrie der Kontaktfläche und den damit offensichtlich verbundenen mathematischen Vereinfachungen begründet werden. Dabei waren vor allem neueste Resultate der Potentialtheorie [16] und deren Anwendung auf den Hertzschen Kugeleindruck [13] von ausschlaggebender Wichtigkeit für das Entstehen dieser Arbeit.
- zu 2.** Durch die Wahl unterschiedlicher Indentorradien, Indentormaterialien, Belastungszeiten bzw. Wiederholraten der Belastungen kann die Materialbeanspruchung sehr vielseitig getestet werden [12]. So hängt beispielsweise die Tiefe, in welcher bei hohen Lasten der Prozeß des plastischen Fließens beginnt, ganz entscheidend von der Größe des Indentorradius ab. Kleine Indentoren mit einem Indentorradius im Bereich der Schichtdicke führen zu hohen Spannungswerten innerhalb der Schicht, während Indentoren mit Radien von über hundertfacher Schichtdicke kritische, für das Einsetzen des plastischen Fließens notwendige Spannungswerte mit großer Wahrscheinlichkeit im Substrat generieren. Im Gegensatz zu spitzen Indentoren, bei denen plastische Prozesse bereits beim Beginn des Eindruckvorgangs in der Spitzenregion einsetzen, läßt sich der Beginn des plastischen Fließens mit Hilfe des Indentorradius beim Kugelindenter in gewissen Grenzen lokal steuern. Eine weitere Option wäre die Kombination von Normal- und Tangentialkräften (Druck-Scherkontakt: siehe Abb. 1, Abschnitt 2.2.), mit denen der Kugeleindruck noch vielseitiger gemacht werden kann. Von der Stärke der Tangentialkraft hängt es ab, ob man vom winkligen bzw. schrägen Indentorversuch oder vom Scratchtest spricht. Während beim schrägen Indentorversuch die Tangentialkraft unterhalb der Haftgrenze bleibt, es sich also um einen quasistatischen Versuch handelt, wird beim Scratchtest ein Prüfkörper (zumeist Rockwelldiamant) über die Oberfläche des Probekörpers gezogen [8]. Der Scratchtest soll in dieser Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet werden. Die Gründe liegen in der enormen

Komplexität dieses dynamischen Versuches, welche es außerordentlich schwierig macht, reproduzierbare und aussagekräftige Ergebnisse zu Materialparametern zu erhalten (beispielsweise [9]). Der schräge Kugelindentorversuch hingegen scheint als quasistatischer Versuch, insbesondere für die Bestimmung der Haftfestigkeit von Schichten geeignet zu sein (siehe hierzu auch Abschnitt 2.2. sowie Anhang F). Durch die Tangentialkraftkomponente beim schrägen Kugeleindruck erhöhen sich nämlich die Scherspannungen gegenüber dem senkrechten Kugeleindruck im gesamten Probekörper, also auch am Interface zwischen Schicht und Substrat. Überschreiten diese Scherspannungen einen kritischen Wert, der zur Delamination der Schicht führt, so ließe sich dieser Wert als Maß für die Haftfestigkeit verwenden. In homogen aufgebauten Materialien wären die durch den schrägen Eindruck zusätzlich verursachten Scherkräfte, insbesondere für das Studium von oberflächennahen Defekten sowie deren Einfluß auf die Stabilität des Bauteils bedeutsam. Es existieren bereits analytische Modelle, welche den schrägen Kugeleindruck behandeln (z. B. [13], [39]). Leider erfassen diese recht einfachen Modelle nicht die Tatsache, daß durch die zusätzliche Tangentialkraft  $T$  die Rotationssymmetrie des sphärischen Kontaktproblems zerstört wird. Für entsprechend große Kräfte  $T$  wäre dies aber notwendig (siehe Abschnitt 2.5.).

- zu 3.** Formabweichungen von der Idealform haben beim Kugelindentor einen geringeren Einfluß auf die Versuchsbedingungen als bei spitzen Indentoren. Das ist mit dem Auftreten von sehr hohen Spannungen (Spannungssingularitäten) bei scharfen Spitzen, verglichen mit deutlich kleineren, endlichen Spannungen bei abgerundeten Spitzen zu erklären. Geringe Spitzenverrundungen lassen sich bei spitzen Indentoren jedoch grundsätzlich nicht vermeiden. Die glatte Oberfläche der Kugel führt außerdem zu einer größeren mechanischen Stabilität des Indentors selbst, da keine Spannungssingularitäten infolge der Indentorgeometrie auftreten können.
- zu 4.** Die Kugelform des Indentors hat den Vorteil, daß sich die Deformation zunächst vollständig elastisch vollzieht und erst ab einer kritischen Eindringtiefe oder einer kritischen Kraft plastische und andere inelastische Effekte wirksam werden. Somit könnten zunächst elastische Materialparameter aus den Daten des elastischen Regimes des Kugeleindrucks bestimmt werden, und bei höheren Kräften nach dem Übergang zur Inelastizität auch andere Materialparameter, wie Fließgrenze oder Bruchzähigkeit (siehe Abschnitt 2.2.). Elastische und elastoplastische Deformation lassen sich im Gegensatz zu spitzen Indentoren klar trennen.
- zu 5.** Da sich viele Unebenheiten auf der Oberfläche der Probekörper in guter Näherung als sphärisch beschreiben lassen, kann eine vollständige Lösung des Problems zweier Kugeln in Kontakt auch die Grundlage für einen Modellansatz für die Beschreibung von Rauigkeiten und Krümmungen auf der Probenoberfläche sein. Unter Ausnutzung des Prinzips von Saint-Venant ([22], S. 33ff u. 78) könnten so beispielsweise Halbkugeln auf einer ebenen Fläche den Kontakt zu einem anderen Körper vermitteln. Nach dem Prinzip von Saint-Venant würden



dann die Spannungen im Bereich der Halbkugeloberflächen durch den mikroskopischen Kugelkontakt beschrieben werden, während im größeren Maßstab die ursprünglichen Kontaktbedingungen gelten. Ein solches Modell ist sehr bedeutsam, weil in den meisten praktischen Fällen keine ebenen Materialoberflächen vorliegen [14], [15].

Der Kugeleindruckversuch ist ein experimentell relativ einfach durchzuführendes Verfahren zur Bestimmung der Materialeigenschaften des gepreßten Körpers. Üblicherweise werden heute besonders harte Materialien mit hohen Elastizitätsmoduli (meist Diamant) als Indentoren verwendet. Deren Deformation ist dann klein gegenüber der des Probekörpers, was Vorteile bei der theoretischen Betrachtung bringt.

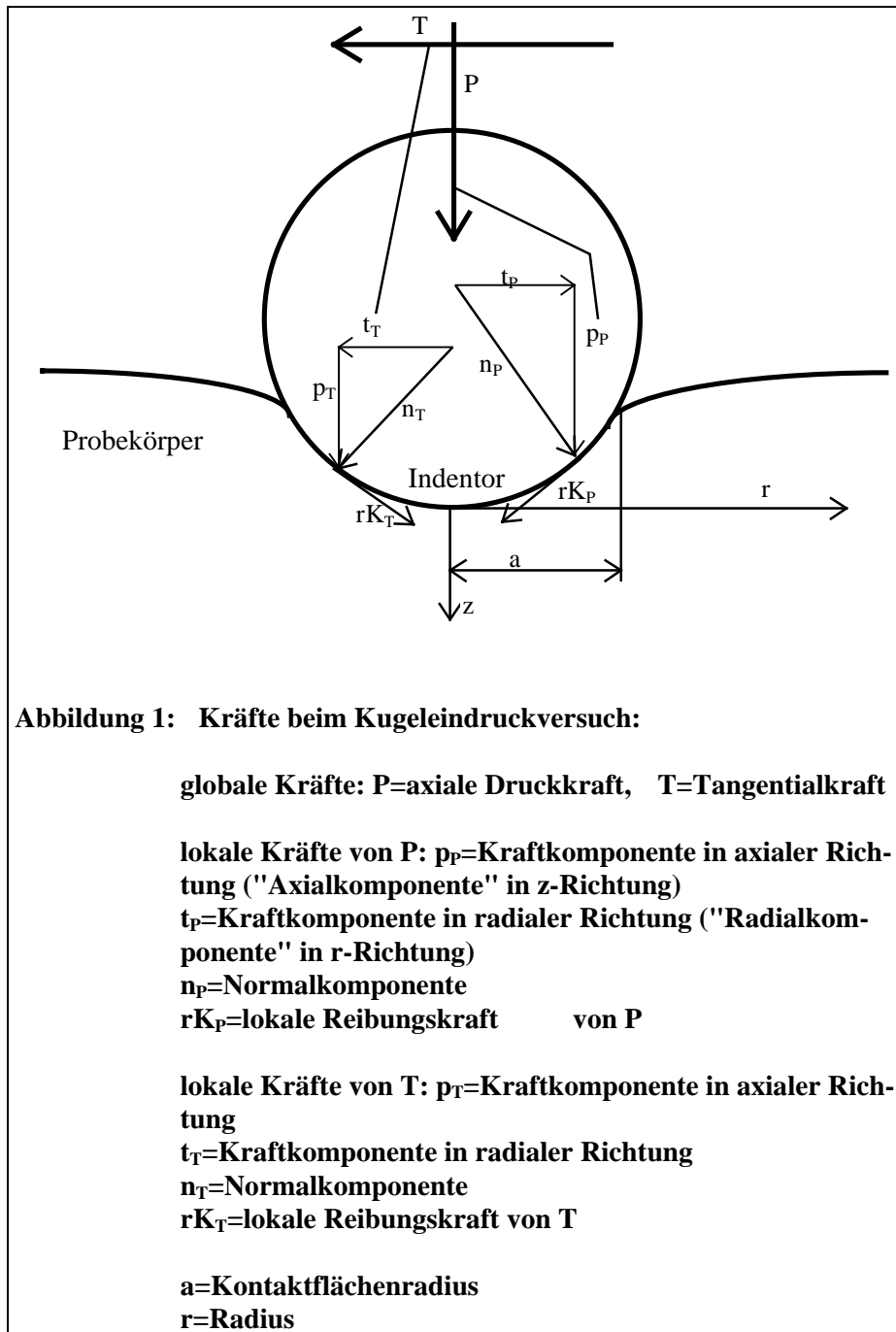
## 2.2. Beschreibung der Kräfte und ablaufenden Prozesse

### 2.2.1. Die an der Oberfläche einwirkenden Kräfte

Bei den folgenden Betrachtungen wird die Kenntnis der grundlegenden Beziehungen der Elastizitätstheorie vorausgesetzt. Es wird grundsätzlich die Gültigkeit des Hookschen Gesetzes angenommen, das von einem linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen ausgeht. Die Darlegungen beruhen weiterhin, neben unmittelbar anschaulichen Tatsachen, im wesentlichen auf den in [6], [7], [12], [20] und [21] dargestellten Resultaten.

Abbildung 1 zeigt schematisch die beim Eindruckversuch wirkenden, äußeren Kräfte.

Zunächst soll der reibungsfreie Fall betrachtet werden, was bedeutet, daß an der Oberfläche beider Körper die Scherkräfte verschwinden müssen. Es wirke in Richtung der Koordinate  $z$  eine Druckkraft  $P$ , welche Probekörper und Indentor zusammendrückt. Dabei werden beide Körper deformiert. Die von außen aufgebrachte Tangentialkraft  $T$  sei zunächst Null. Gefragt wird nun nach der Verteilung der in  $z$ -Richtung wirkenden lokalen Kraft  $p_p$ . Integriert man  $p_p$  über die gesamte Kontaktfläche, so erhält man die Gesamtdruckkraft  $P$ . In diesem Sinne kann  $p_p$  als Dichte von  $P$  mit der Dimension einer Spannung bzw. eines Flächendruckes verstanden werden. Je nach Krümmung der Kontaktfläche bzw. der Größe des Winkels zwischen Kontaktflächennormalen und der lokalen Kraftkomponente  $p_p$  in Richtung von  $P$  bzw. der  $z$ -Achse treten dabei normale und radiale Kraftkomponenten  $n_p$  und  $t_p$  auf (Kräftedreieck in der rechten Hälfte des Indentors in Abb. 1). Dies kann folgendermaßen erklärt werden. Damit die lokale Kraftkomponente  $p_p$  unter Abwesenheit von Reibung auf die schräge Kontaktfläche einwirken kann, ist eine zusätzliche lokale Tangentialkomponente  $t_p$  erforderlich. Vektorielle Addition beider Komponenten führen zur normal zur Kontaktfläche gerichteten lokalen Kraft  $n_p$ . Integriert man  $t_p$  über die gesamte Kontaktfläche, so sollte das Ergebnis Null sein, da global keine Tangentialkraft wegen der obigen Festlegung  $T=0$  wirkt. Tatsächlich erhält man dieses Resultat auch leicht anschaulich aus geometrischen Überlegungen anhand von Abb. 1.



Ebenso verhält es sich mit einer tangential wirkenden Kraft  $T$  bzw. deren lokalem Anteil  $t_T$ , wenn man festlegt, daß  $P=0$  gilt. In Abhängigkeit von der Stärke der Oberflächenkrümmung kommt es lokal zu einer Kräfteaufspaltung von  $t_T$  in eine normal  $n_T$  und eine axial  $p_T$  gerichtete Komponente (Kräftedreieck in der linken Hälfte des Indentors in Abb. 1). Nun muß bei Integration von  $t_T$  über die Kontaktfläche die Gesamtkraft  $T$  herauskommen, während  $p_T$  Null liefert. Die Erklärung entspricht in entsprechend abgewandelter Form der zur Kraft  $P$ . Wichtig ist, daß man erkennt, daß  $T$  auch ohne Reibung auf die Kontaktfläche einwirken kann, da diese gekrümmt ist. Wäre sie eben, so würde der Indentor einfach über die Oberfläche des Probekörpers gleiten, ohne eine tangentielle Kraft auf diesen ausüben zu können. Der Einfachheit der Betrachtung wegen war ausgangs dieser Überlegungen zur Tangenti-

alkraft  $T$   $P=0$  gefordert worden. Die Krümmung der Kontaktfläche müßte in diesem Fall aus der Oberflächenform der nichtdeformierten Körper resultieren. Selbstverständlich gelten obige Überlegungen aber auch für beliebige Superpositionierungen von  $T$  und  $P$ , so daß beispielsweise zunächst eine Kraft  $P$  für die notwendige Krümmung einer zuvor ebenen Oberfläche sorgt, durch welche dann eine Tangentialkraft  $T$  auf den Probekörper einwirken kann, ohne daß die Notwendigkeit irgendwelcher Reibungskräfte besteht.

Durch die Reibung, die zwischen Indentor und Probekörper wirkt, entstehen aber zusätzliche Zwangskräfte  $rK_T$  und  $rK_P$  (Abb. 1), welche den Deformationszustand der Körper beeinflussen. Die Scherspannung ist dann an der Oberfläche beider Körper von Null verschieden. Es muß streng zwischen Haft- und Gleitreibung unterschieden werden. Während bei Haftreibung die Deformation von Indentor und Probekörper gekoppelt ist, hängen die Zwangskräfte der Gleitreibung nur von den Normalkomponenten  $n_P$  bzw.  $n_T$  multipliziert mit dem Gleitreibungskoeffizienten  $r_G$  ab. Die Kopplung im Haftfall wird über die Bedingung vermittelt, daß die Deformationen von Indentor und Probekörper in radialer Richtung (in dieser Arbeit mit  $u$  bezeichnet, siehe Abschnitt 3.2.) gleich sein müssen. Beim Indentorproblem mit Reibung ist zusätzlich zu Druckkraft und Eindringtiefe auch die Richtung der Indentorbewegung (Be- oder Entlastung) zu beachten. In Abb. 1 wurde den Reibungskräften  $rK_T$  und  $rK_P$  darum nur fiktiv eine Richtung zugeordnet. Aus der sogenannten "Nanotribologie" ist bekannt [84], daß bei sehr kleinen Indentoren sowie Kontaktflächen im Nanometerbereich andere Reibungsgesetze als die hier verwendeten ("klassischen") Haft- und Gleitreibungsbeziehungen gelten (Kapitel 5). Insbesondere bei der Betrachtung von mechanischen Kontakten beim Rasterkraftmikroskop ist dies wichtig. Derart kleine Kontaktflächen sollen aber in dieser Arbeit nicht behandelt werden. Von der Stärke der Kraft  $rK=rK_P+rK_T$  hängt es nun ab, ob der Haftreibungsfall überschritten wird. Dies kann sowohl lokal begrenzt als auch innerhalb der gesamten Kontaktfläche der Fall sein. Wird der Indentor beispielsweise während des Eindringens über die Oberfläche gezogen, so herrscht im gesamten Kontaktbereich Gleitreibung, und es wirkt eine tangentielle Kraft  $T$ , die sich sehr einfach als  $T=P*r_G$  darstellen läßt. Im folgenden wird  $T$  dann als Scratchkraft bezeichnet (siehe Abschnitt 2.1.). Lokal gilt in einem solchen Fall  $t_T = p_P * r_G$ . Haftreibung kann hierbei nicht auftreten. Vom schrägen Indentorversuch spricht man, wenn eine Kraft  $T$  wirkt, der Indentor aber annähernd ruht.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß globale Kräfte in axialer  $P$  und radialer Richtung  $T$  durch die Krümmung der Kontaktfläche in dieser Druckverteilungen  $n_T$  und  $n_P$  hervorrufen, wobei jede für sich in Abhängigkeit vom Grad der Krümmung sowohl radiale als auch axiale Komponenten aufweist. Kommen Reibungseffekte hinzu, so führen diese zu Scherkräften in der Kontaktfläche zwischen Probekörper und Indentor.

### **2.2.2. Beschreibung der im Körper ablaufenden Prozesse**

Den beschriebenen äußeren Kräften wirken bis zu einer gewissen Stärke im Inneren der Körper gleich große elastische Kräfte entgegen ([22], S. 2-10). Das bedeutet, daß bei Entlastung ( $P=0$ ,  $T=0$ ) beide Körper wieder ihre ursprüngliche Form annehmen. Die Kräfte resultieren aus Spannungen, welche nach dem Hookschen Gesetz direkt proportional zu den durch die äußeren Kräfte hervorgerufenen Deformationen sind.

Werden die äußeren Kräfte zu stark, so können inelastische Deformationen wie Brüche [24], [25] und plastische Verformungen [26] auftreten. Die inneren Spannungen verhalten sich dann nicht mehr linear zu den Deformationen. Diese Phase des Eindringens wird je nach Art der inelastischen Deformation als elastoplastisch, elastisch-viskoplastisch usw. bezeichnet. An welchen Stellen der Körper nun genau bestimmte inelastische Deformationen zu erwarten sind, hängt in erster Linie von der Art des inelastischen Effekts selbst ab. Dabei können im allgemeinen aus dem Spannungszustand im elastischen Regime Kriterien für das Erscheinen bestimmter inelastischer Deformationen abgeleitet werden. Es würde hier jedoch zu weit führen, sämtliche der möglichen inelastischen Effekte und deren Kriterien (sofern man diese überhaupt kennt) zu diskutieren. Deshalb sollten hier nur kurz die wichtigsten Effekte benannt werden:

#### ***Brüche und Materialablösungen:***

Im Zusammenhang mit Schicht-Substrat-Verbunden werden drei Arten von Brucherscheinungen unterschieden [82]. Es gibt die Ablösung von Schichtbestandteilen als Resultat kleiner Brüche ausschließlich in der Schichtoberfläche ("Chipping"), den reinen Bruch ohne irgendwelche Materialablösungen ("Cracking") und die völlige Schichtablösung bis zum Interface ("Flaking"). So vielfältig diese Brucherscheinungen sind, so schwierig ist es auch, diesbezügliche verlässliche Kriterien aufzustellen. Eine gewisse Sonderstellung nimmt hier das Bruchkriterium für durch Zugspannungen bei Indentorversuchen erzeugte Oberflächenbrüche ein. Dieses soll hier etwas eingehender diskutiert werden. Im Falle eines sphärischen Indentors handelt es sich zumeist um die sogenannten Hertzschen Kegelbrüche, die oberflächlich kreisförmig im Probekörper in der Nähe der Kontaktgrenze beginnen und sich kegelförmig in dessen Inneres ausbreiten (siehe [25], S. 1060 und [20]). Da diese Brüche an der Oberfläche des Probekörpers am Ort maximaler Zugspannung beginnen, lassen sich durch Messung der für die Bruchentstehung nötigen kritischen Druckkraft Aussagen zur Bruchzähigkeit des Materials im Hinblick auf dessen Zugbeanspruchung machen [25], [28]. Das Kriterium für die Bruchentstehung ist in diesem Fall einfach das Maximum der radialen Zugspannung an der Probenoberfläche. Für Schichtablösungen wird hingegen oft die Scherspannung am Interface ([57] und [82]) verantwortlich gemacht. Tritt also Schichtablösung beim Indentorvorgang auf, so könnte die im Moment des Ablösens aktuell wirkende Scherspannung im fraglichen Interfacebereich als Maß für die Schichthaftung dienen. Da jedoch noch andere Spannungen beim Kugeleindruck auftreten, muß nicht zwangsläufig die

Scherspannung die Ursache für die Ablösung sein. Es ist daher stets nötig, das gesamte Spannungsfeld zu betrachten. In diesem Zusammenhang sei nochmals erwähnt, daß zusätzliche Tangentialkräfte an der Verbundoberfläche sehr starken Einfluß auf die Scherspannungen am Interface haben.

### ***Plastische Deformation:***

Der Deformationsprozeß im plastischen Regime schließt sich bei den meisten metallischen sowie auch bei zahlreichen nichtmetallischen Materialien direkt an den Bereich der elastischen Deformation nach dem Überschreiten kritischer Spannungen an. Die Zone, in welcher das Material zu fließen beginnt, hängt stark von der Indentorform ab. Bei einer Kugel beginnt nach Tabor [21] die plastische Deformation zunächst unterhalb der Oberfläche des Probekörpers auf der Indentorachse in einer Tiefe von rund der Hälfte des Kontaktflächenradius. In Abhängigkeit von den Materialparametern breitet sich die plastische nach allen Richtungen aus, bis sie die Oberfläche erreicht. Vom Zustand der "vollen Plastizität" spricht man, wenn die plastische Zone die Oberfläche erreicht. Das eigentliche Kriterium für den Beginn plastischer Deformation ist im Gegensatz zum eben beschriebenen Kriterium für Hertzsche Kegelbrüche etwas komplizierter ([27], S. 164), da es nur durch eine komplizierte Kombination aller Spannungskomponenten berechnet werden kann. Das bekannteste ist wohl das von Mises-Kriterium. Es kann als ein mathematischer Ausdruck verstanden werden, der nur Kräfte berücksichtigt, die benachbarte Ebenen des Körpers gegeneinander verschieben können und damit zum "Fließen" des Materials führen, wenn diese Kräfte einen kritischen Bereich überschreiten. Hydrostatische Anteile des Spannungszustandes, die nicht zu einer Verschiebung von Ebenen des Körpers gegeneinander beitragen (Fließprozeß bzw. plastische Deformation), bleiben hingegen unberücksichtigt.

### ***Viskoplastizität:***

Viskoplastische oder -elastische Materialien sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Deformation zeitabhängig ist. Dies macht die Behandlung von Kontaktproblemen mit derartigen Stoffen mathematisch sehr anspruchsvoll, weil man gemischte Randwertprobleme mit zeitabhängigen Randbedingungen erhält [83].

Treten inelastische Effekte auf, so ist die Versuchsdurchführung im allgemeinen nicht mehr umkehrbar, das heißt, die Vorgeschichte der Deformation beeinflusst die aktuelle Verformung. Um die daraus resultierenden, komplizierten mathematischen Betrachtungen zu vermeiden [29], werden in dieser Arbeit nur Körper betrachtet, bei denen entweder keine oder nur rein elastische Vordeformationen vorlagen. Auch während des Eindruckversuchs sollen nur elastische Deformationen betrachtet werden. Durch geeignete Wahl der Parameter lassen sich die beschriebenen plastischen Effekte während des

gesamten Eindruckversuchs ausschließen. Zeitabhängige Prozesse, wie sie bei Viskoelastizität auftreten, werden vernachlässigt. Die Beschränkung auf elastische Prozesse ist bei dem wichtigen Fall der Anwendung des Modells auf Hartstoffschichten in einem weiten Lastbereich gegeben. Außerdem beziehen sich die diskutierten Berechnungen dieser Arbeit ausschließlich auf das Wirken von Normalkräften. Es gilt  $T=0$ .

### **2.3. Zielstellung und Überblick zum Inhalt der Arbeit**

Ziel dieser Arbeit ist es, handhabbare Lösungen für Spannungen und Deformationen beim elastischen Kugeleindruck in geschichtete Materialien anzugeben, und dabei auch den Bereich großer Eindringtiefe zu erfassen ( $h > R/10$  oder  $a \approx R$ ). Es werden die nötigen Gleichungssysteme für axial wirkende Kräfte (senkrechter Kugeleindruck bzw. reiner Druckkontakt) hergeleitet. Für das Problem tangentialer Kräfte werden die nötigen Gleichungssysteme ebenfalls angegeben. Die komplette Darstellung der Gleichungen zur vollständigen Beschreibung des elastischen Felds ist aufgrund ihres Umfangs in dieser Arbeit nicht praktikabel. Mit den gegebenen Resultaten und Hilfsgleichungen kann diese rein formale Arbeit jedoch ohne größere Schwierigkeiten durchgeführt werden. Eine vollständige Darstellung der Lösung des elastischen Feldes ist in diesem Zusammenhang schon deswegen unzweckmäßig, weil die meisten möglichen Anwendungen ohnehin eine computertechnische Behandlung erfordern werden.

Weiterhin wird in dieser Arbeit nur der senkrechte Kugeleindruck diskutiert. Dementsprechend beinhalten die nächsten Abschnitte:

- einen groben Überblick über die zu diesem Thema erschienenen, theoretischen Arbeiten (2.4.),
- eine Gegenüberstellung der empirischen Befunde zu den wichtigsten theoretischen Arbeiten (2.5.)
- eine Betrachtung der Möglichkeiten von Finite-Element-Methoden und eine vorläufige Schlußfolgerung hinsichtlich des bisher Erörterten (2.6.).

Es folgt eine kurze Zusammenfassung der Theorie von H. Hertz zur elastischen Deformation beim Kugeleindruck (3.1.) sowie der Problematik elastischer Felder und Potentialfunktionen im Falle transversaler Isotropie (3.2.). In Abschnitt 3.3. wird die sogenannte Punktkraftlösung für den transversal isotropen Halbraum vorgestellt. Etwas ausführlicher wird in diesem Abschnitt auf die Einkopplung von Tangentialkräften in den Halbraum ohne Reibung eingegangen, da dieser Ansatz in der gesichteten Literatur nicht berücksichtigt war, wohl aber der Vorgang für das Verständnis und die vollständige Behandlung des Kugeleindrucks von großer Bedeutung ist. Damit die in der weiteren Arbeit hergeleiteten Gleichungen für transversale Isotropie auch auf vollständig isotrope Systeme angewendet werden können, wird im Abschnitt 3.4. der Grenzübergang zu isotropen Materialien betrachtet. Im Kapitel 4 wird eine Erweiterung der Hertzschen Theorie auf der Grundlage der Berechnungen von Hanson [13] und Fabrikant [16] sowie den Betrachtungen von Abschnitt 3.3. für große Eindringtiefen vorgestellt. Hierzu berücksichtigt der Autor die Veränderung der Oberflächenkrümmungen des als eben angesehenen Probekörpers sowie des sphärischen Indentors während der Deformation. Diese Oberflächenkrümmung

führt dazu, daß die wirkende Indentordruckkraft  $P$  (siehe Abbildung 1) auf eine geneigte Oberfläche auftrifft und so tangentielle Kraftkomponenten hervorruft.

Die Einbeziehung von Reibungsprozessen wird in Kapitel 5. erörtert.

Für den Fall geschichteter Materialien sind zunächst einige vorbereitende mathematische Betrachtungen in Kapitel 6. notwendig. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, wurden diese Darlegungen jedoch sehr kurz gehalten und statt dessen Hinweise auf weitere Arbeiten zu dieser Problematik gegeben. Der Leser findet im weiteren eine kurze Darstellung der Grundgleichung der Elastizitätstheorie für inhomogene Räume (Abschnitt 6.1.) und darauf aufbauend, die sogenannten Punktkraftlösungen für transversale Isotropie (auf der Basis von [16], S. 75-79) für geschichtete Materialien (Abschnitt 6.2.). Als Grundlage hierzu dient die sogenannte Methode der Spiegel- oder Bildladungen der Potentialtheorie (siehe beispielsweise: [17], S. 203ff; [18], S. 144ff).

Anschließend werden auf der Basis der neuen Beziehungen von Kapitel 6 die in den Kapiteln 3 bis 5 gewonnenen Gleichungen für den Fall geschichteter Medien erweitert (Kapitel 7 und Anhang F). Zur Beschreibung der Inhomogenitäten (Interfaces) werden sogenannte Heaviside-Funktionen ([19], S. 6 und 38ff) verwendet, die die Abhängigkeit der mechanischen Parameter von den Koordinaten erfassen. Es werden die Fälle Hertzsche Druckverteilung (Anhang F, Abschnitt 2.1.), Hertzsche Scherkraftverteilung nach Hamilton-Goodmann [39] (Anhang F, Abschnitt 2.2.) und Tangentialkraft mit Hertzischem Profil (Anhang F, Abschnitt 2.3.) behandelt. Um die Herleitungen abzukürzen und die Lesbarkeit der Arbeit zu erhöhen, wurden zahlreiche langwierige und rein formale Rechnungen auf den Anhang verschoben. So befinden sich auch die Betrachtungen zur Tangentialkraft an dieser Stelle, da sie für die weiteren Diskussionen in dieser Arbeit nicht benötigt werden. In Kapitel 8 erfolgt eine beispielhafte Anwendung der Gleichungen auf spezielle Systeme, um zumindest einige der interessanten Ergebnisse der neuen Gleichungen vorzustellen. Schließlich folgt noch ein bewertender Vergleich mit experimentellen Ergebnissen (Kapitel 9) und FEM-Rechnungen (Kapitel 10).

#### **2.4. Wichtige theoretische Arbeiten zum Kugeleindruck**

Die größte Bedeutung des allgemeinen Indentorversuchs besteht laut der üblichen Lehrmeinung (siehe beispielsweise Tabor [21]) in seiner Anwendung zur Härtemessung. Somit ist es nicht verwunderlich, daß bereits früheste theoretische Ansätze zur Beschreibung der sogenannten Kontaktprobleme auch auf eine theoretische Beschreibung der Härtemessung selbst abzielten. Als Heinrich Hertz vor mehr als 100 Jahren (1881 und 1882) seine Theorie zum Kontaktproblem krummlinig berandeter Körper veröffentlichte ([30], [31] bzw. siehe auch [32]), war er überzeugt, auch eine Theorie der Härte (insbesondere [31]) vorgestellt zu haben. Obgleich selbst in dem bekannten Lehrbuch von Szabó [33] seine Ergebnisse noch als "Die Theorie der Härte von Heinrich Hertz" angekündigt werden, veröffentlichte Huber [34] schon im Jahre 1904 entscheidende Mängel an der Hertzschen "Theorie der Härte". Er

publizierte die erste nicht ganz vollständige<sup>1</sup> mathematische Behandlung des Kontaktproblems zweier elastischer Körper mit sphärischer Oberfläche für den Fall isotropen Materials. Mit Hilfe dieser Resultate erhielten Fuchs [35] 1913 sowie Morton und Close [36] 1922 erste Darstellungen für die Hauptspannungstrajektorien beim Kugeleindruck. Die im Jahre 1928 von R. von Mises publizierte Arbeit zum plastischen Fließen von Festkörpern [27] zeigte dann auch klar, daß die Hertzschen Resultate keine allgemeine Beschreibung der Größe "Härte" liefern können. Heute wissen wir, daß die Theorie von Hertz als rein elastische Theorie nicht in der Lage sein kann, einen derart nichtlinearen Prozeß wie das Materialverhalten bei der Härtemessung (siehe beispielsweise [29]) adäquat zu beschreiben. Zwar existieren Versuche, den elasto-plastischen Eindruckversuch zumindest halbempirisch zu erfassen [37], jedoch konnte das Gesamtproblem bis zum heutigen Tag nicht befriedigend geklärt werden. Durch diese geschichtliche Verknüpfung des Kugeleindrucks mit dem Begriff der Härtemessung kommt es immer wieder zu Mißverständnissen, wenn von einer analytischen Beschreibung des Kontaktproblems mit Kugeloberflächen gesprochen wird. Der Autor betont deshalb ausdrücklich, daß in dieser Arbeit nur der elastische Anteil des Kugeleindrucks behandelt werden soll. Allenfalls am Rande werden elastische Spannungskriterien diskutiert, die zu inelastischen Effekten führen können (z. B.: v. Mises-Spannung  $\rightarrow$  Beginn der plastischen Deformation oder radiales Zugspannungsmaximum an der Oberfläche  $\rightarrow$  Hertzscher Kegelbruch).

Da neben dem reinen Druckkontaktproblem immer auch zusätzliche Fragen wie inhomogener Aufbau der Probekörper und / oder Scratchkräfte interessant waren, soll hier ein kurzer Überblick über die weiteren wichtigsten Arbeiten zu diesem Thema gegeben werden. Sneddon [38] veröffentlichte 1965 Resultate zu einer Reihe von axialsymmetrischen Kontaktproblemen, wobei er auch Probekörper mit sphärischer Oberfläche, allerdings unvollständig<sup>2</sup>, behandelte. Im Jahre 1966 veröffentlichten Hamilton und Goodman [39] das elastische Spannungsfeld für einen sphärischen Hertzschen Kontakt mit Berücksichtigung einer zusätzlich angreifenden Gleitreibungskraft  $T$  (siehe Abbildung 1). Ihr Ziel war es, eine theoretische Beschreibung für den sogenannten Scratchtest zu geben, bei dem ein kugelförmiger Indentor über die Probenoberfläche gezogen wird. Wegen der bei diesem Prozeß schon für sehr geringe  $P$  auftretenden, inelastischen Effekte ist die Anwendbarkeit dieser Theorie allerdings auf sehr kleine Lasten  $P$  beschränkt (sogenannter subkritischer Scratchtest). Eine Behandlung dieses Problems für transversal isotrope Materialien wurde von Chen 1969 [40] gegeben, um insbesondere keramische Werkstoffe exakt beschreiben zu können. Obgleich Chen dies nicht erwähnte, wurde die dort und auch in späteren Arbeiten verwendete Methode zur Behandlung quer- oder transversal isotroper Materialien zuerst von Elliot [41] vorgestellt. Man nutzt bei diesen anisotropen Materialien aus, daß innerhalb der

---

<sup>1</sup> In der Elastizitätstheorie gilt ein Problem als gelöst, wenn sowohl das Spannungsfeld als auch das Deformationsfeld vollständig berechnet wurden. In der erwähnten Veröffentlichung von Huber wurde jedoch lediglich das Spannungsfeld berechnet. Die für die vollständige Lösung notwendigen Integrale hielt Huber zum damaligen Zeitpunkt für zu kompliziert, um sie geschlossen zu berechnen.



Ebene sechszähliger Symmetrie die Deformationen des Kristalls durch nur zwei Materialkonstanten, also quasi isotrop, beschrieben werden können. So ist dann auch das Elliotsche Verfahren nur auf hexagonale Materialien beschränkt, deren sechszählige Symmetrieachse senkrecht auf der Oberfläche des kristallinen Halbraums steht. Unter Verwendung von Hankel-Transformationen erhielten Dahana und Zarka 1976 [42] ebenfalls eine Lösung des Kontaktproblems sphärischer Körper. Keer und Mowry [43] erweiterten diese Berechnungen auf die Berücksichtigung von Scherkraftbelastung. Es muß allerdings bemerkt werden, daß die Lösungen in [40], [42] und [43] wegen der komplizierten Integraltransformationen sehr unhandlich und damit kaum zur allgemeinen praktikablen Anwendung bei der Auswertung experimenteller Daten geeignet sind. Einen bedeutenden Fortschritt erzielte Hanson [13] durch die Verwendung einiger neuer Ergebnisse in der Potentialtheorie, die von Fabrikant [44], [45] erhalten wurden. Hierbei handelt es sich um einen neuen mathematischen Ansatz zur Lösung gemischter Randwertprobleme in der Potentialtheorie, mit welchem für einen Halbraum mit einer Kreislinie zur Trennung der Randwertbedingungen exakte Lösungen in geschlossener Form hergeleitet werden können. Der Ansatz basiert auf einer Integraldarstellung des reziproken Abstands zweier Punkte. Diese Integraldarstellung war 1971 von Fabrikant erstmalig veröffentlicht worden [46]. Fabrikant selbst veröffentlichte zahlreiche Abhandlungen zu Kontaktproblemen, welche er mit seiner Methode lösen konnte [16], [47], [86]. Mit Hilfe dieser Resultate erhielt Hanson [13] 1992 einfache, in geschlossener Form darstellbare Ergebnisse zum sphärischen Kontaktproblem für transversale Isotropie unter Einbeziehung einer zusätzlichen Gleitreibungskraft (Scratchkraft), welche in der Schreibweise des Abschnitts 2.2. mittels einer Tangentialkraft  $T=P \cdot r_G$  dargestellt werden könnte. Seine Lösung enthält ausschließlich elementare Funktionen (siehe Anhang A) und ist somit ausgezeichnet zur Auswertung experimenteller Daten und der damit verbundenen praktischen Materialanalyse geeignet.

In allen hier erwähnten Publikationen sind die angegebenen Berechnungen nur für den sogenannten Hertzschen Fall gültig, bei welchem die Kontaktfläche klein im Vergleich zum Indentorradius ist. Sei  $a$  der Kontaktflächenradius (siehe Abbildung 1) und  $R_i$  der Krümmungsradius der Spitze des Indentors, so muß also gelten  $R_i \gg a$ . Weiterhin wurde in allen erwähnten Arbeiten, in denen eine Scratchkraft in die Rechnungen mit einbezogen wurde, angenommen, daß diese tangential wirkende Kraft die exakt kreisförmige Kontaktfläche der Hertzlösung nicht bzw. lediglich vernachlässigbar verzerrt (siehe Abschnitt 2.5.). Um die Indentorversuche mit Eindringtiefen, die verglichen mit dem Krümmungsradius des Indentors zu großen Kontaktflächenradien führen, deutlich vom Hertzschen Fall zu unterscheiden, soll hier die Bezeichnung Nichthertzscher Eindruckversuch verwendet werden. Daß dieser Ausdruck in der Literatur auch für die Beschreibung von Kontaktversuchen mit Körpern nichtellipsoider Oberflächen verwendet wird, kann dabei nicht zu Verwechslungen führen, weil nur der Hinweis auf den Nichthertzschen Charakter des Kontaktproblems wesentlich ist und ansonsten aus dem Zusammenhang klar wird, welche Geometrien behandelt werden.

---

<sup>2</sup> Lediglich bestimmte Komponenten des elastischen Feldes werden für den Bereich der Oberfläche

Die Behandlung elastischer, geschichteter Materialien in Kontakt wurde zunächst von Gupta und Walowit [48] für den einfachen Fall eines homogenen elastischen Zylinders, welcher in einen Film-Substrat-Verbund gepreßt wird, vorgestellt. Sie verwendeten eine Darstellung des Problems, die auf relativ komplizierten Integralgleichungen basiert, welche nicht elementar ausgedrückt werden können. Viskoelastische, vielschichtige Zylinder in Kontakt wurden später (1991) von Kalker behandelt [49]. In Ermanglung einer geeigneten theoretischen Lösung für Indentorprobleme bei geschichteten Materialien schlugen Doerner und Nix 1986 [50] effektive Materialkonstanten für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl vor, welche das elastische Verhalten von Substrat und Schicht beim Indentorversuch beschreiben sollten. Gao, Chiu und Lee [51] sowie Gao und Wu [52] verwendeten später Störungsmethoden zur Beschreibung von Indentorvorgängen in geschichtete Materialien. Hierbei wurde die Schicht als Störung des Substrates in erster Näherung behandelt. Es sei hier noch erwähnt, daß in der Literatur Kontaktprobleme mit inhomogenem Probekörper mit einem in die Tiefe  $z$  nach dem Gesetz  $E=E_m \cdot z^m$  variierenden Elastizitätsmodul ( $E_m$ =konstant) behandelt wurden (siehe u.a. [53] oder [16], S. 182). Diese Herangehensweise ist allerdings für die Behandlung geschichteter Materialien ungeeignet. In jüngster Zeit erschienen einige Arbeiten, welche das elastisch plastische Verhalten eines Schicht-Substrat-Verbundes beim Indentorversuch halbempirisch [54] oder mit Hilfe geeigneter Modellansätze (siehe beispielsweise [55]) zu beschreiben suchten.

## 2.5. Gegenüberstellung von Empirie und Theorie

Aus dem in den vorangegangenen Abschnitten Gesagten kann man entnehmen, daß sich das Problem des Eindruckversuchs im Falle kugelförmiger Indentoren und geschichteter Probekörper auf zahlreiche Teilprobleme aufgliedern läßt, von denen nur einige wirklich gelöst sind. Die folgende Tabelle 1 verdeutlicht noch einmal die Problemgebiete des sphärischen Indentorversuchs ohne Reibung und gibt gleichzeitig eine Zuordnung zu den nach dem Wissen des Autors wichtigsten analytischen Lösungen an. Es erscheint wichtig, nochmals darauf hinzuweisen, daß eine in einer bestimmten Richtung resultierende tangential Kraft  $T$  ( $t_T(r)$  sei also nicht rotationssymmetrisch) auch zu einer nicht rotationssymmetrischen Deformation in der Oberfläche führen muß. Die Kontaktfläche kann dann kein Kreis mehr sein, wie man leicht durch folgendes anschauliches Experiment zeigen könnte: Ein einfacher Gummiball wird zweimal auf eine rußgeschwärzte, glatte Glasplatte derart gepreßt, daß keinerlei Verwundungen auftreten können. Während beim ersten Versuch der Ball nur normal zur Plattenoberfläche gepreßt wird, soll beim zweiten Versuch eine zusätzliche tangential Kraftkomponente hinzukommen. Diese darf jedoch nicht so groß sein, daß die Haftgrenze überschritten wird und der Ball quasi über die Platte rutscht. Der erste Versuch liefert die bekannte kreisförmige Kontaktfläche, hingegen erhält man im zweiten eine andere, von der Kreisform signifikant abweichende Kontaktfläche. In den in der Tabelle 1 genannten Veröffentlichungen [13], [39], [40] und [43] wurde jedoch bei der Einbeziehung einer Tangentialkraftkomponente  $T$  weiterhin von einer kreisförmigen Kontaktfläche

---

und entlang der Indentorachse explizit angegeben

ausgegangen, was die angegebenen Resultate auf kleine  $T$  bzw. reine Gleitkräfte beschränkt. Hinweise, wie auch Probleme mit nicht kreisförmigen Kontaktflächen in geschlossener analytischer Form gelöst werden können, fand der Autor bei Fabrikant ([16], S. 350ff).

**Tabelle 1**

Material		isotrop	Transversal isotrop	geschichtete Materialien
globale Kräfte	lokale Kräfte			
P	$p_p$	Hertz / Huber [30], [31], [32], [34]	Dahana und Zarka [42]	Gao und Wu [52]  Näherung, diese Arbeit
	$t_p$	diese Arbeit	Diese Arbeit	diese Arbeit
T	$p_T$	keine Lösung	Keine Lösung	keine Lösung
	$t_T$	Hamilton und Goodman [39]	Chen [40], Keer und Mowry [43], Hanson [13]	keine Lösung

**Kräfte beim Kugeleindruckversuch (siehe auch Abbildung 1):**

**globale Kräfte:  $P$ =wirkende Druckkraft,  $T$ =Tangentialkraft**

**lokale Kräfte:  $p_p$  und  $p_T$ =Kraftkomponenten in axialer Richtung ("Axialkomponenten")**

**$t_p$  und  $t_T$ =Kraftkomponenten in radialer Richtung ("Radialkomponenten")**

Da sich die Radialkomponente  $t_p$  der Druckkraft  $P$  und die Axialkomponente  $p_T$  der Tangentialkraft  $T$  aus der Oberflächenkrümmung ergeben und letztere nach Wissen des Autors bisher in der Literatur nicht berücksichtigt wurde, existieren zu den lokalen Kraftkomponenten  $t_p$  und  $p_T$  keine adäquaten Lösungen. Durch sehr genaue FEM-Rechnungen [56] konnte jedoch gezeigt werden, daß bereits bei Kugeleindruckversuchen mit Hertzischem Charakter (Kontaktflächenradius  $a$ /Indentorradius  $R \approx (2 - 3)/100$ ) die Oberflächenkrümmung eine merkliche Rolle spielt, insbesondere, wenn es sich um einen geschichteten Probekörper handelt. Gerade die für die Hertzischen Kegelbrüche wichtige Spannung in radialer Richtung  $\sigma_r$  wird an der Oberfläche von dieser Krümmung sehr stark beeinflusst. Die resultierende Abweichung vom sogenannten Hertzischen Ansatz, bei dem nur die lokale Komponente  $p_p$  berücksichtigt wird, wurde auch experimentell untermauert [20]. Auch bei der Behandlung des schrägen Indentorversuch ([16], S. 346, 362), bei dem eine Kraft  $T$  wirkt, der Indentor aber quasi ruht, wird im allgemeinen nicht unterschieden, ob die in der Kontaktfläche wirkende und  $T$  entgegengesetzt gerichtete Kraft  $-T$  aus der Haftreibung oder der Oberflächenkrümmung resultiert. Vielmehr wurde bisher in

der Literatur die Oberflächenkrümmung stets vernachlässigt und vom sogenannten "bonded punch problem" ([86], S. 377 - 310) gesprochen, bei welchem  $-T$  einzig von der Scherspannung in der Oberfläche herrührt.

In der einschlägigen Literatur konnten vom Autor nur relativ wenige theoretische Abhandlungen zu Indentorversuchen in geschichteten Materialien gefunden werden. In allen Fällen sind diese dann entweder halbempirische [50] oder störungs-theoretische [52] Näherungen, oder aber die Lösungen basieren auf komplizierten, wenig praktikablen Integralgleichungen [48], [49]. Eine Lösung für geschichtete Materialien in geschlossener Form und elementaren Funktionen existierte bisher hingegen nicht. Weiterhin konnte eine Erwähnung der Tatsache, daß Inhomogenitäten im Probekörper im allgemeinen die Ordnung der Oberflächendeformation beeinflussen, nirgends gefunden werden (siehe hierzu die entsprechenden Bemerkungen von Abschnitt 3.1.).

Für die praktische Anwendung von Indentorversuchen ist es wichtig, auch in-elastische Effekte beschreiben zu können. Obgleich keine geschlossene Theorie für die Einbeziehung inelastischer Effekte existiert, gibt es zahlreiche Möglichkeiten, zumindest den Übergang vom elastischen zum inelastischen Materialverhalten zu beschreiben. So können mit Hilfe des von Mises ([27], siehe auch [33], S. 328) abgeleiteten Kriteriums Ort und Ausbreitungsrichtung des Bereichs beginnender plastischer Deformation bestimmt werden. Weitere wichtige Spannungsbeziehungen im elastischen Fall wären z. B. der hydrostatische Anteil des Spannungszustandes im Hinblick auf rein druckabhängige Phasenumwandlungen oder einfach nur ausgewählte Spannungskomponenten, welche für die Entstehung bestimmter Brüche verantwortlich sind (beispielsweise die Radialspannung im Fall der Hertzschen Kegelbrüche) [28]. Eine adäquate analytische Beschreibung von Kugelkontaktproblemen über solche Effekte hinaus - also im elastoplastischen Bereich - gelang bislang jedoch nicht.

Neben den erwähnten theoretischen Arbeiten, welche sich in der Hauptsache mit der analytischen Behandlung des Kugeleindrucks beschäftigten, wurden aber auch zahlreiche Beiträge zu experimentellen Aspekten sowie Computersimulationen zum sphärischen Kontaktproblem für größere Eindringtiefen in geschichtete Körper veröffentlicht. Als Beispiele seien hier die Arbeiten von Swain und Kollegen ([26] sowie [57] - [62]), in welchen hochgenaue, experimentelle Daten zum Kugeleindruck präsentiert werden, sowie Djabella und Arnell [63], die eine umfassende Analyse von Kugeleindruckversuchen in unterschiedlichste Schicht-Substrat-Systeme mittels Finite-Element-Rechnungen durchführten, genannt. In einigen der Swainschen Arbeiten (beispielsweise [57]) werden auch halbempirische, in erster Linie auf dem Ansatz von Doerner und Nix [50] über effektive Materialparameter basierende Ansätze für die Beschreibung geschichtet aufgebauter Probekörper vorgestellt. Die hier beispielhaft genannte Arbeit [63] aus der Gruppe um Arnell kann als Vorläufer einer Reihe weiterer Arbeiten dieser Gruppe zum Thema "Kugeleindruck und FEM" angesehen werden. Besonders hervorzuheben sind die im Hinblick auf die Genauigkeit der Berechnungen sowie die Feinheit der verwendeten FE-Netzwerke außerordentlich wertvollen Arbeiten [56] und [78].

## 2.6. Über die Möglichkeit, das Kugelkontaktproblem für geschichtete Materialien mittels FE-Methoden zu behandeln - Schlußfolgerung

Wie bereits mehrfach festgestellt wurde, scheint bisher keine handhabbare Theorie zum Kugeleindruckversuch in geschichtete Materialien zu existieren, welche es gestatten würde, sowohl das elastische Feld vollständig zu bestimmen als auch inverse Problemstellungen, wie sie bei der Auswertung von experimentellen Daten oder bei der Materialoptimierung für bestimmte Anwendungen auftreten, zu lösen. Auch die Behandlung des Problems mittels Finite-Element-Methoden stellt aus folgenden Gründen keine optimale Lösung dar, weil:

- eine direkte, inverse Problemlösung zur Datenauswertung und Materialauswahl nicht möglich ist,
- die zugrunde liegenden Softwarepakete (beipielsweise das System ANSYS [64]) zumeist extreme Hardwareanforderungen stellen und auch sehr teuer sind,
- die Verbundparameter insbesondere hinsichtlich Schichtdicke und Indentorgröße durch den finiten Charakter der Systeme und der maximalen Elementzahl (begrenzt durch die Rechenzeit) stark eingeschränkt sind,
- die Aufwendungen an Rechenzeit sehr groß sind.

Der Autor stellt sich daher in dieser Arbeit die Aufgabe, eine Theorie mit den oben genannten Eigenschaften analytisch zu entwickeln.

## 3. Einige wichtige Grundlagen

Der Autor ist gezwungen, sich in diesem Kapitel auf die Darlegung von Inhalten derjenigen Arbeiten zu beschränken, welche nicht ohne weiteres zugänglich sind bzw. deren Thematik noch nicht in dieser für die weitere Arbeit aber wichtigen kompakten Form erörtert wurde. Die benötigten Theorien der mathematischen Physik, die inzwischen zum Inhalt allgemein bekannter Lehrbücher gehören, können hier aus Platzgründen nicht mit aufgeführt werden. Hierzu gehören:

- Potentialtheorie [72], [73], [75],
- die Methode der Bild- oder Spiegelladungen [18],
- die Methode der Greenschen Funktion bzw. des Greenschen Tensors, insbesondere für den unendlichen Halbraum [74], [75],
- die Grundlagen der Elastizitätstheorie [23], [33].

### 3.1. Die Theorie von Hertz zur Deformation beim Kugeleindruckversuch

Die Form der Deformation hängt neben den elastischen Eigenschaften der in Kontakt befindlichen Körper auch von deren geometrischer Oberflächenstruktur ab.

Aus Abbildung 2 kann man unmittelbar entnehmen, daß innerhalb der Kontaktfläche stets folgende Gleichung gilt:

$$h=f(r)+w(r)+w'(r) \quad (1)$$

Handelt es sich bei Indentor und Probekörper um Kugeln, so kann  $f(r)$  in der Form

$$f(r) = \beta * r^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) * r^2 \quad (2)$$

dargestellt werden, wobei  $R$  und  $R'$  den Krümmungsradius für Indentor und Probekörper respektive bezeichnen. Aus Gleichung (1) wird dann:

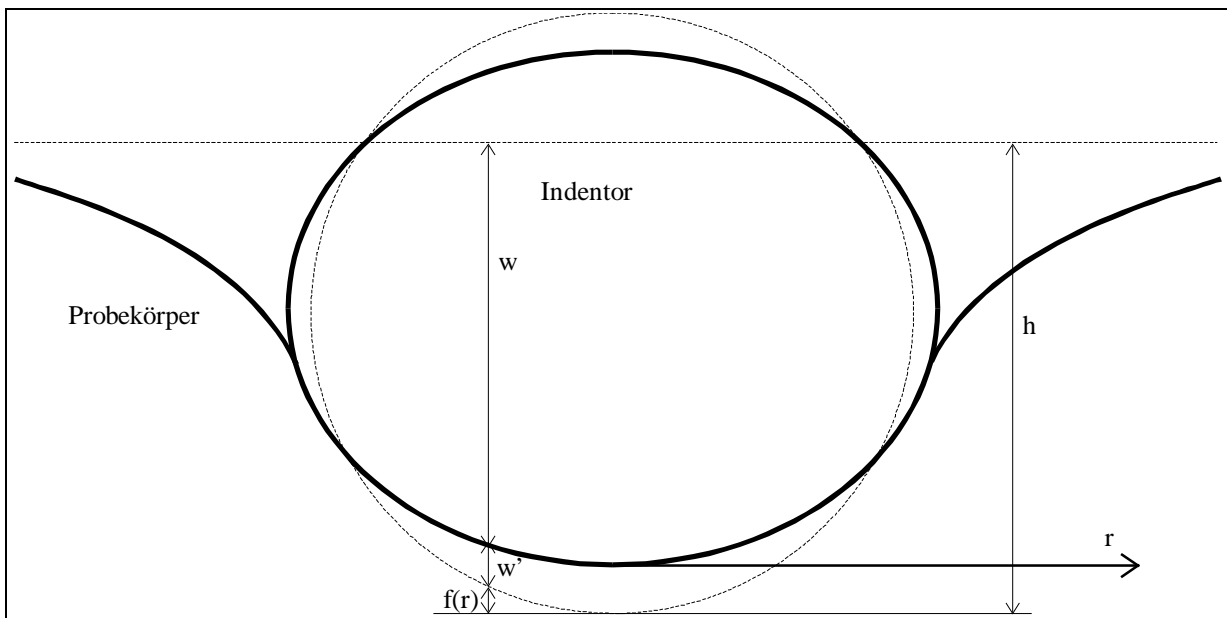
$$w + w' = h - \beta * r^2 \quad (3)$$

Sind weiterhin beide Körper homogen, so ist das Verhältnis  $w/w'$  eine Konstante, die nur von den elastischen Materialkonstanten abhängt. Denn es gilt:

$$\frac{w}{w'} = \frac{\frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x_0, y_0)}{R} dx_0 dy_0}{\frac{1-\nu'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x_0, y_0)}{R} dx_0 dy_0} = \frac{\frac{1-\nu^2}{E}}{\frac{1-\nu'^2}{E'}} \quad (4)$$

([23], S. 30ff). Hierbei sind  $x$ ,  $x_0$ ,  $y$ ,  $y_0$  kartesische Koordinaten mit:  $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$  und  $P_z(x_0, y_0)$  beschreibt die Druckverteilung in der Kontaktfläche. Die Integration ist über die gesamte Kontaktfläche auszuführen. Somit erhalten wir schließlich eine Beziehung für die Struktur von  $w$  und  $w'$  innerhalb der Kontaktfläche und damit auch für die Druckverteilung  $P_z$ :

$$w + w' = \left( \frac{1-\nu^2}{\pi E} + \frac{1-\nu'^2}{\pi E'} \right) \iint \frac{P_z(x_0, y_0)}{R} dx_0 dy_0 = h - \beta * r^2 \quad (5)$$



**Abbildung 2: Körperumrisse vor (gestrichelt) und nach der Deformation (durchgezogen)**

**$r$ =Koordinate**

**$w=w(r)$ =Deformation des Probekörpers in Indentordruckrichtung**

**$w'=w'(r)$ =Deformation des Indentors in Indentordruckrichtung**

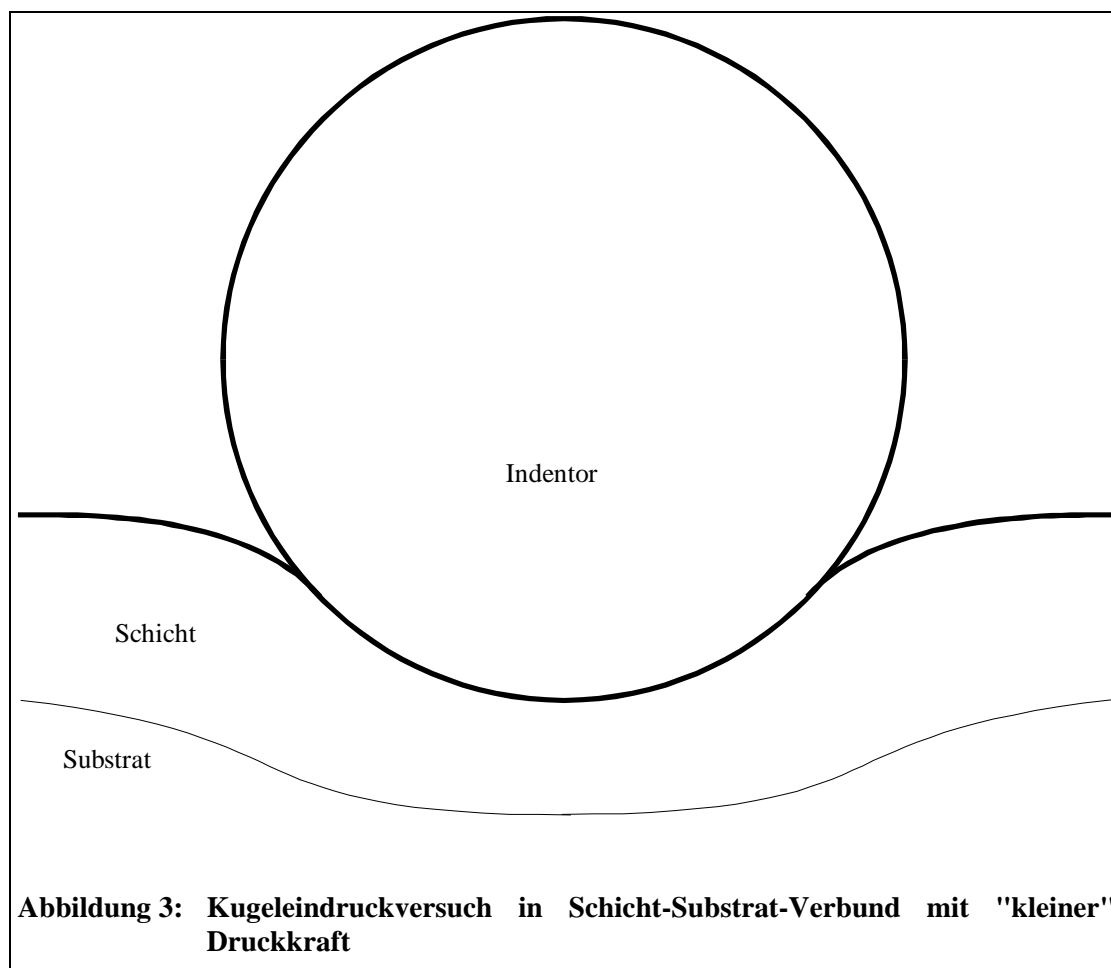
**$f(r)$ =Funktion, welche den Abstand der Oberflächen beider Körper zueinander bei mathematisch punktuellen Kontakt beschreibt**

Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt für die Lösung des Hertz'schen Kontaktproblems im Falle homogener Körper (für das Studium der vollständigen Entwicklung sei [23], S. 29-38 empfohlen). Man erhält also, daß die Deformationen in z-Richtung innerhalb des Kontaktbereiches durch Funktionen zweiter Ordnung in r mit der Gestalt:

$$\begin{aligned} w &= konst * (b - c * r^2) \\ w' &= konst' * (b - c * r^2) \end{aligned} \quad (6)$$

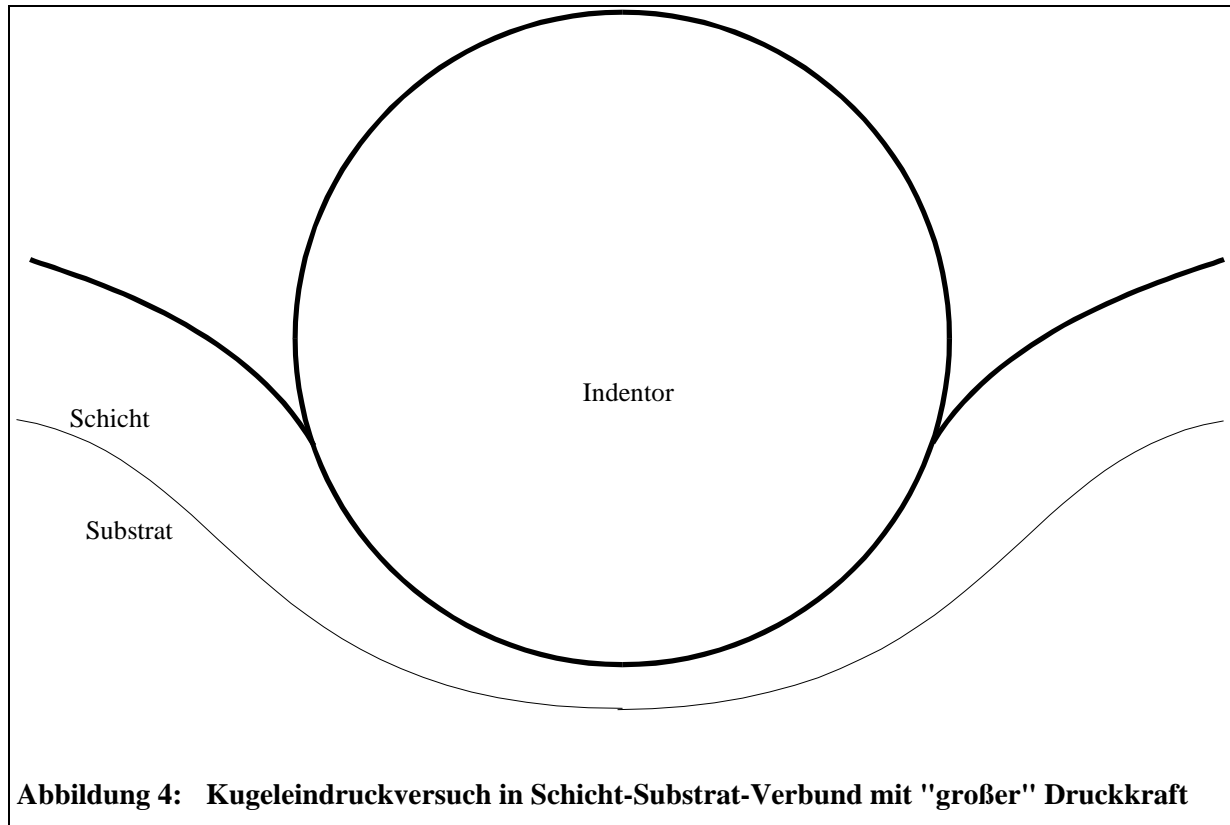
dargestellt werden können.

Bei inhomogen aufgebauten Körpern gilt dies im allgemeinen nicht, da der Einfluß der verschiedenen Bestandteile beispielsweise eines Verbundmaterials auf das elastische Feld mit der Kontaktlast variiert. Die beiden folgenden Abbildungen zeigen diesen Effekt für einen geschichteten Probekörper, bestehend aus Schicht und Substrat.



Wie man deutlich sieht, sind die Volumenanteile der Schicht im Zentrum des Kontaktes gegenüber dem Substrat beim Übergang von "kleinen" (Abbildung 3) zu "großen" (Abbildung 4) Druckkräften kleiner geworden, was dadurch an Einfluß gewinnt. Der jeweilige Einfluß der Komponenten Schicht

und Substrat ist hier also druckkraftabhängig, und das Verhältnis  $w/w'$  kann nun keine Konstante mehr sein. Weiterhin erkennt man an diesem einfachen Beispiel, daß der Einfluß der unterschiedlichen Materialparameter von Schicht und Substrat außerdem  $r$ -abhängig ist. Man vergleiche hierzu die Volumenanteile der Schicht in je einer der beiden Abbildungen an verschiedenen Positionen. Es ist nun unmittelbar klar, daß die Gleichungen (6) im allgemeinen inhomogenen Fall nicht mehr gelten.



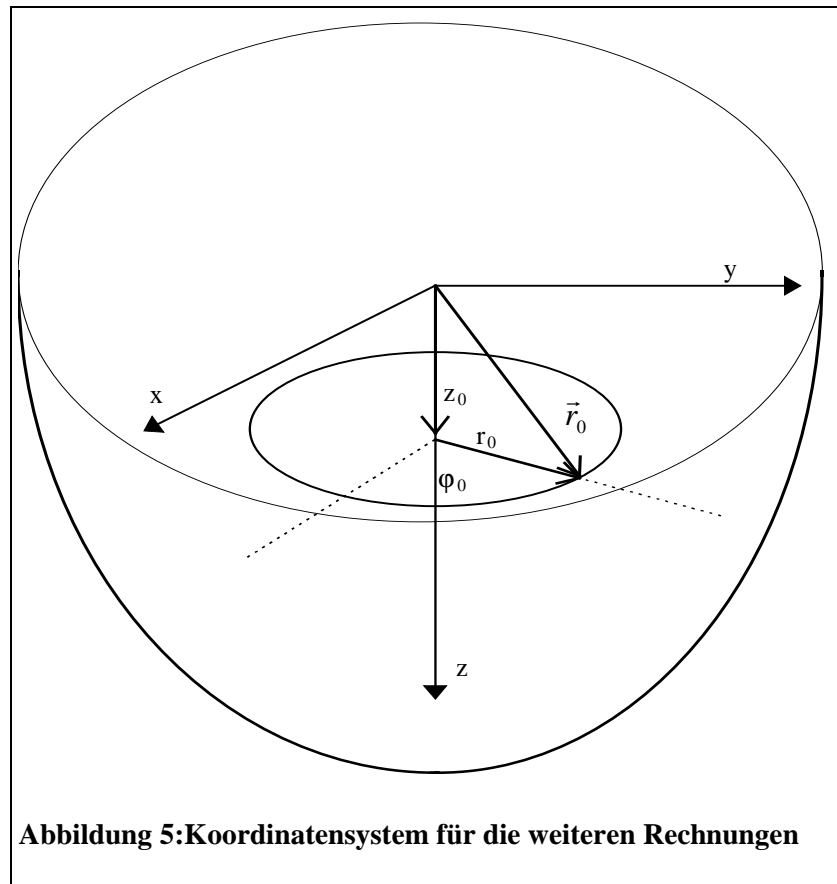
Für das Kontaktproblem von homogen aufgebauten Körpern sei hier noch erwähnt, daß durch das Auftreten inelastischer Effekte im allgemeinen die Homogenität mindestens eines der beiden Körper zerstört wird und somit die Gleichungen (6) ebenso ihre Gültigkeit verlieren, wie dies bei von vorn herein inhomogen aufgebauten Körpern der Fall wäre. Dieser Fakt ist bedeutsam, weil er die Möglichkeit impliziert, inelastische Bereiche als "elastische" Inhomogenitäten mit geeignet gewählten elastischen Parametern bzw. Anschlußbedingungen zu beschreiben. Als Beispiel sei hier ein durch einen Bruch entstandener Hohlraum erwähnt, an dessen Rändern alle Normal- und Scherspannungskomponenten Null zu setzen sind. Es soll allerdings in der Arbeit nicht weiter auf diese Möglichkeit eingegangen werden.

### 3.2. Spannung und Deformation in transversal isotropen Körpern

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Beziehungen der elastischen Felder im Falle transversaler Isotropie (auch Querisotropie) angegeben werden. Da es sich um allgemein bekanntes Material handelt, sind die Erläuterungen knapp gehalten. Dem interessierten Leser seien für weitere Informationen die



Veröffentlichungen von Fabrikant ([16] S. 71-80, [44] -[46] sowie [65] - [66]) und Hanson ([13], [68] - [70]) empfohlen.



Unter Benutzung der Schreibweise von Fabrikant ([16] S. 71-80) erhalten wir für die Spannungs-Dehnungs-Relationen im Falle eines transversal isotropen Halbraums  $z > 0$  (entsprechend Abbildung 5) mit der Oberfläche  $z=0$  parallel zur Isotropieebene in kartesischen Koordinaten

$$\sigma_{xx} = A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial v}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7)$$

$$\sigma_{yy} = (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (8)$$

$$\sigma_{zz} = A_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$\tau_{xz} = A_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = A_{44} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (12)$$

Hier bezeichnen  $u$ ,  $v$  und  $w$  die Deformationen in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und  $A_{11}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{33}$ ,  $A_{44}$ ,  $A_{66}$  die fünf elastischen Konstanten des transversal isotropen Mediums. Weiterhin bezeichnen die Symbole  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  die Normalspannungs- und  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  die Scherspannungskomponenten.

Für praktische Zwecke ist es oft sinnvoll, Zylinderkoordinaten einzuführen. In Abbildung 5 wird gezeigt, wie ein beliebiger Vektor  $\vec{r}_0$  durch die Zylinderkoordinaten  $z_0$ ,  $r_0$  und  $\varphi_0$  (Winkel zwischen den gestrichelten Geraden) dargestellt werden kann. Im weiteren Verlauf werden die folgenden Operatoren  $\Lambda$  und  $\Delta$

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (13)$$

mit

$$i = \sqrt{-1}$$

verwendet. Da wir aus Symmetriegründen in den Rechnungen der nächsten Kapitel Zylinderkoordinaten mit einer komplexen  $x$ - $y$ -Ebene mit den Punkten  $\{x, iy\}$  verwenden wollen, soll die entsprechende Umrechnung der wichtigsten Operatoren vorgeführt werden. Es gilt bekanntlich

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad z = z$$

und die Umkehrung

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctan \left[ \frac{y}{x} \right].$$

Entsprechend können die folgenden Ableitungen berechnet werden

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{r^2}.$$

Für den Operatoren  $\Lambda$  lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial r}{\partial x} + i \frac{\partial r}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \left( \frac{x}{r} + i \frac{y}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left( -\frac{y}{r^2} + i \frac{x}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} = e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

Weitere wichtige Operatoren sind  $\Lambda^2$  und  $\Delta$ . Durch einfache Rechnung erhält man:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

und

$$\Lambda^2 = e^{2i\varphi} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + 2i \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Die Lösung der Gleichgewichtsbedingung der Elastizitätstheorie für den transversal isotropen Fall ([16], S. 72, Gleichung (2.1.4.)):

$$\frac{1}{2} (A_{11} + A_{66}) \Delta u^c + A_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2} (A_{11} - A_{66}) \Lambda^2 \bar{u}^c + (A_{13} + A_{44}) \Lambda \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$A_{44} \Delta w + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2} (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\Lambda} u^c + \Lambda \bar{u}^c) = 0,$$

mit:

$$u + iv \equiv u^c$$

kann nun gegeben werden durch [66]

$$u + iv \equiv u^c = \Lambda (F_1 + F_2 + iF_3); \quad w = m_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial F_2}{\partial z}, \quad (14)$$

wobei  $F_1, F_2, F_3$  die zugehörigen drei Potentialfunktionen, welche der Gleichung

$$\Delta F_k + \gamma_k^2 \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (15)$$

genügen, bezeichnen.

Für die elastischen Konstanten  $\gamma_k$  gilt:  $\gamma_3^2 = A_{44}/A_{66}$  und  $\gamma_k^2 = n_k$  für  $k=1, 2$ , wobei  $n_k$  die zwei (realen oder komplex konjugierten) Wurzeln der Gleichung

$$A_{11} A_{44} n^2 + [A_{13} (A_{13} + 2A_{44}) - A_{11} A_{33}] n + A_{33} A_{44} = 0 \quad (16)$$

bezeichnet. Die Konstanten  $m_k$  für  $k=1, 2$  sind mit den  $\gamma_k$  durch die Identität

$$\frac{A_{11} \gamma_k^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}} = \frac{(A_{13} + A_{44}) \gamma_k^2}{A_{33} - \gamma_k^2 A_{44}} = m_k \quad (17)$$

verknüpft. Um die Zahl der Indizes zu begrenzen, wird im folgenden  $u = u^c$  gesetzt. Es sei weiterhin noch die Konstante  $H$  wie folgt definiert:

$$H = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) A_{11}}{2\pi (A_{11} A_{33} - A_{13}^2)} \quad (18)$$

Um die Gleichung des elastischen Spannungsfeldes zu vereinfachen, führte Fabrikant die folgenden Kombinationen ein [66]:  $\sigma_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\tau_{xy}$ ,  $\tau_z = \tau_{xz} + i\tau_{yz}$ .

Somit kann das Spannungsfeld durch

$$\sigma_1 = (A_{11} - A_{66})(\bar{\Lambda}u + \Lambda\bar{u}) + 2A_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (19)$$

$$\sigma_2 = 2A_{66}\Lambda u, \quad (20)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}A_{13}(\bar{\Lambda}u + \Lambda\bar{u}) + A_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (21)$$

$$\tau_z = A_{44} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \Lambda w \right) \quad (22)$$

dargestellt werden.

Die Vereinfachung der letzten vier Gleichungen unter Benutzung der Identität (15) ergibt schließlich

$$\sigma_1 = 2A_{66} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( [\gamma_1^2 - (1+m_1)\gamma_3^2] F_1 + [\gamma_2^2 - (1+m_2)\gamma_3^2] F_2 \right), \quad (23)$$

$$\sigma_2 = 2A_{66}\Lambda^2 (F_1 + F_2 + iF_3), \quad (24)$$

$$\sigma_{zz} = A_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \gamma_1^2 (1+m_1) F_1 + \gamma_2^2 (1+m_2) F_2 \right), \quad (25)$$

$$\tau_z = A_{44}\Lambda \frac{\partial}{\partial z} \left( (1+m_1) F_1 + (1+m_2) F_2 + iF_3 \right). \quad (26)$$

### 3.3. Die Punktkraftlösung für den transversal isotropen Halbraum

Der Autor folgt hier zunächst den Darlegungen von Fabrikant ([16], S. 75-79), wobei die Betrachtung für den in dieser Arbeit nicht benötigten Gesamttraum weggelassen wird.

Das in Abbildung 5 dargestellte Koordinatensystem sei so in den Halbraum gelegt, daß dieser durch die  $z=0$  Ebene begrenzt werde. Am Punkt  $x_0, y_0, z=0$  greife eine Kraft  $\vec{F}$  mit den Komponenten  $P$  normal und  $T=T_x+iT_y$  tangential zur  $z=0$  Ebene an. Diese Kraft koppelt über die Halbraumoberfläche in den Halbraum ein. Für die Spannungen sind nun bei  $z=0$  Randbedingungen so zu fordern, daß die elastischen Kräfte des Halbraummaterials mit der Kraft  $\vec{F}$  im Gleichgewicht sind. Es werden ohne Herleitung die Gleichungen für die Einkopplung dieser Kraft in den Halbraum angegeben<sup>3</sup>.

#### 3.3.1. Die Normalkomponente $P$

Die Punktkraftlösung für das elastische Feld einer Normalkraft  $P$  kann durch die entsprechenden Ableitungen (siehe 3.1.) der beiden Potentialfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  mit

$$\begin{aligned} F_1 &= c_1 P \ln[R_1 + z_1] = \frac{H\gamma_1}{(m_1 - 1)} P \ln[R_1 + z_1] \\ F_2 &= c_2 P \ln[R_2 + z_2] = \frac{H\gamma_2}{(m_2 - 1)} P \ln[R_2 + z_2] \end{aligned} \quad (27)$$

<sup>3</sup> Diese ist für die weitere Arbeit unwichtig und kann anderweitig eingesehen werden. Zur Herleitung siehe [16], S. 75 - 81 bzw. [85] für transversale Isotropie; [23], S. 29 - 38 für isotrope Körper.

$$\text{mit } R_k = R(z_k), \quad z_k = \frac{z}{\gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3$$

dargestellt werden. R ist hierbei gegeben durch:

$$R(x, x_0, y, y_0, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} \quad (28)$$

bzw. in Zylinderkoordinaten, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch häufig verwendet werden sollen:

$$R(r, r_0, \varphi, \varphi_0, z) = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos[\varphi - \varphi_0] + z^2}. \quad (29)$$

### 3.3.2. Tangentialkomponente T wirkt als Scherkraft auf $\tau_z$

Die Spannungen und Deformationen des elastischen Feldes einer punktuell wirkenden Scherkraft  $T = T_x + iT_y$  können als Ableitungen der folgenden Potentialfunktionen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} F_1 &= c_1 (\Lambda \bar{T} + \bar{\Lambda} T) \chi_1 = \frac{H \gamma_1}{(m_1 - 1)} \frac{\gamma_2}{2} (\bar{T} \Lambda + T \bar{\Lambda}) \chi_1, \\ F_2 &= c_2 (\Lambda \bar{T} + \bar{\Lambda} T) \chi_2 = \frac{H \gamma_2}{(m_2 - 1)} \frac{\gamma_1}{2} (\bar{T} \Lambda + T \bar{\Lambda}) \chi_2, \\ F_3 &= -c_3 (\bar{\Lambda} T - \Lambda \bar{T}) \chi_3 = i \frac{\gamma_3}{4\pi A_{44}} (T \bar{\Lambda} - \bar{T} \Lambda) \chi_3, \end{aligned} \quad (30)$$

mit

$$\chi_k = z_k \ln[R_k + z_k] - R_k, \quad k = 1, 2, 3$$

### 3.3.3. Tangentialkomponente T wirkt als Normalkraft auf $\sigma_{xx}$ und $\sigma_{yy}$

Eine weitere bisher in der Literatur scheinbar nicht berücksichtigte<sup>4</sup> Möglichkeit, Tangentialkräfte in einen elastischen Halbraum einzukoppeln, bestünde bei gekrümmter Oberfläche des Halbraums. Die Einkopplung würde dann über die Normalspannungen  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  und die Scherspannung  $\tau_{xy}$  in x- und y-Richtung erfolgen, ohne daß die Notwendigkeit von Reibungskräften<sup>5</sup> besteht.

Die Randbedingungen für den Fall, daß eine punktuelle Tangentialkraft  $T = T_x + iT_y$  ohne Reibung über  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  bei  $z=0$  in den Halbraum einkoppelt, können wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + i\tau_{xy} \right]_{z=0} &= \sigma_{yy}|_{z=0} = -\xi_y = \begin{cases} -T_y & x = y = 0 \\ 0 & x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \\ \left[ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]_{z=0} &= \sigma_{xx}|_{z=0} + i\tau_{xy}|_{z=0} = -\xi_x - i\xi_y = \begin{cases} -T_x - iT_y & x = y = 0 \\ 0 & x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \\ \tau_z|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Zur Lösung wird aus Gründen späterer Vereinfachungen der Ansatz

<sup>4</sup> Der Autor bezieht sich hier auf die von ihm gesichtete einschlägige Literatur zu diesem Thema. Dort konnten jedoch keinerlei Hinweise auf eine derartige Krafteinkopplung gefunden werden.

$$\begin{aligned} F_1 &= c_1 \bar{\Lambda}^2 \chi_1, & F_2(x, y, z) &= c_2 \bar{\Lambda}^2 \chi_2, \\ F_3(x, y, z) &= c_3 \bar{\Lambda}^2 \chi_3 \end{aligned} \quad (32)$$

mit

$$\chi_k = \chi(x, y, z_k) \quad z_k = \frac{z}{\gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3$$

verwendet. Die Beziehung für die Scherspannung  $\tau_z$  (Gleichung (20)) liefert zusammen mit der obigen Randbedingung zunächst:

$$0 = A_{44} \left[ \left[ \frac{c_1(m_1 + 1)}{\gamma_1} + \frac{c_2(m_2 + 1)}{\gamma_2} + \frac{ic_3}{\gamma_3} \right] \bar{\Lambda} \Delta \frac{\partial \chi}{\partial z} \Big|_{z=0} \right]. \quad (33)$$

Weiterhin wird gefordert, daß:

$$0 = \left( \frac{[\gamma_1^2 - (1 + m_1)\gamma_3^2]}{\gamma_1^2} c_1 + \frac{[\gamma_2^2 - (1 + m_2)\gamma_3^2]}{\gamma_2^2} c_2 \right) \quad (34)$$

gilt, woraus folgt, daß  $\sigma_1(z=0) = \sigma_{xx}(z=0) + \sigma_{yy}(z=0) = 0$  ist. Damit erhält man für die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \Big|_{z=0} &= -\sigma_{yy} \Big|_{z=0}, \\ [\sigma_{xx} + i\tau_{xy}]_{z=0} &= -\xi = -\xi_x - i\xi_y = \frac{\sigma_2}{2} \Big|_{z=0} = A_{66}(c_1 + c_2 + ic_3)\Delta\Delta\chi \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (35)$$

Hier könnte nun gefordert werden:

$$\{\Delta\Delta\chi \Big|_{z=0}\} = \frac{\partial^4}{\partial z^4} \chi \Big|_{z=0} = -2\pi\xi, \quad (36)$$

wobei die Eigenschaft von Potentialfunktionen ( $\Delta\chi = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$ ) verwendet wurde. Unter Verwendung des Potentials der einfachen Schicht kann geschrieben werden:

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} \chi = U = \iint_S \frac{\{\xi_x(x_0, y_0) + i\xi_y(x_0, y_0)\} dx_0 dy_0}{R(x, x_0, y, y_0, z)} \quad (37)$$

Dreimalige Integration nach  $z$  liefert schließlich:

$$\chi = \iint_S G(x, x_0, y, y_0, z) \{\xi_x(x_0, y_0) + i\xi_y(x_0, y_0)\} dx_0 dy_0 \quad (38)$$

mit

$$G(x, x_0, y, y_0, z) = \frac{-3zR(x, x_0, y, y_0, z)}{4} - \frac{V^2(x, x_0, y, y_0) \ln[R(x, x_0, y, y_0, z) + z]}{4} + \frac{z^2 \ln[R(x, x_0, y, y_0, z) + z]}{4}$$

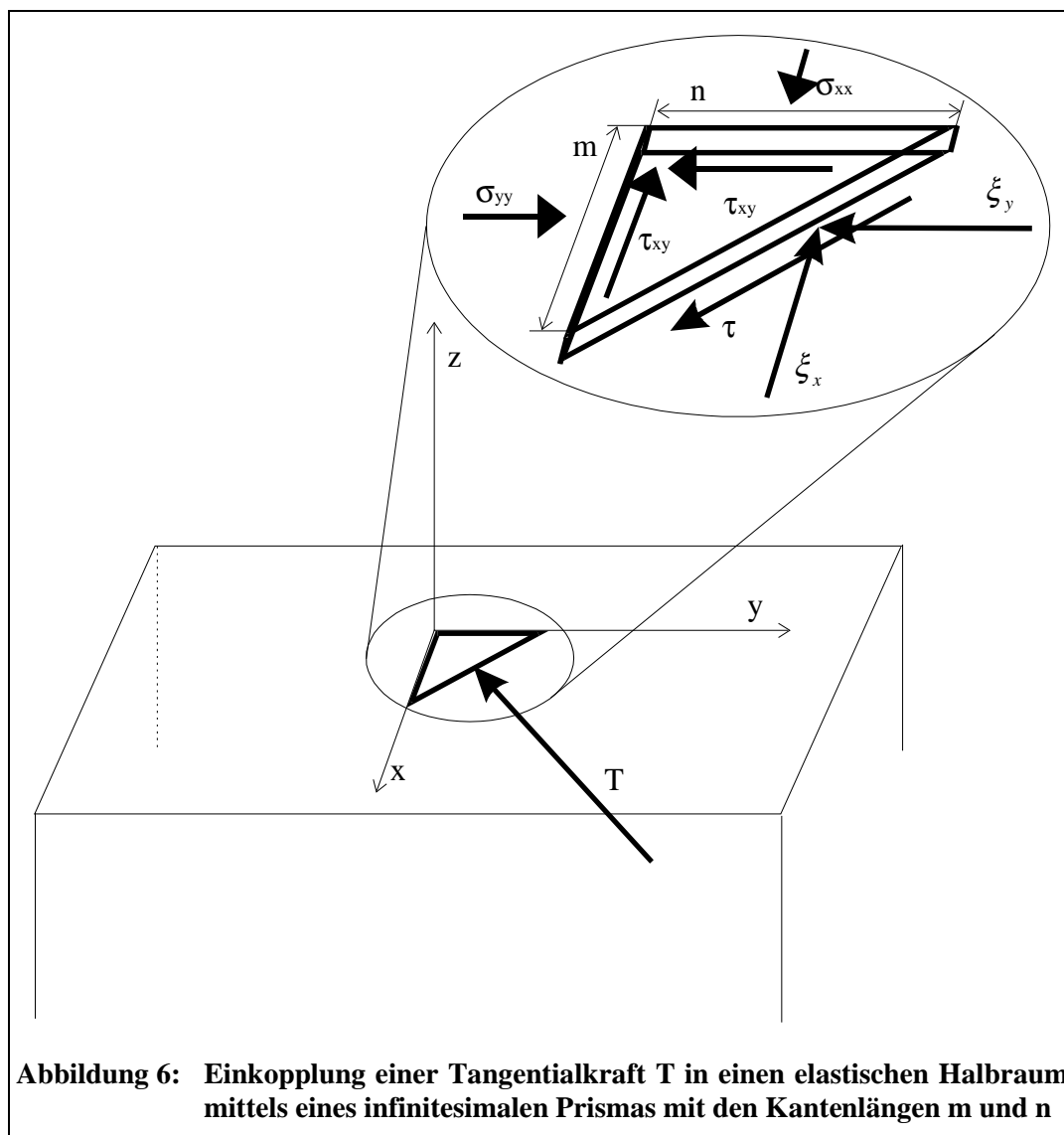
---

<sup>5</sup> Diese wären bei der Einkopplung von Scherkräften  $\tau_z$  nötig, sofern der Indentor nicht am Halbraum „angeklebt“ ist (siehe Kapitel 5).

und

$$V^2(x, x_0, y, y_0) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

Die Einkopplung der Tangentialkraft  $T$ , welche als punktuelle Kraft im Punkt  $x=y=z=0$  über  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  einwirkt, kann man sich, wie im Bild 6 dargestellt, veranschaulichen.



Hierbei ragt ein infinitesimales Prisma mit dreieckiger Grundfläche der Kantenlängen  $m$  und  $n$  (siehe Abbildung 6) aus dem elastischen Halbraum heraus. Das Prisma wird so gelegt, daß der rechtwinklige Schenkel der Grundfläche exakt im Punkt  $x=y=z=0$  liegt und  $T$  rechtwinklig an der Hypotenuse angreift. Das Prisma sei so klein, daß Variationen der Spannungen über die Höhe oder die Seitenlängen vernachlässigt werden können. Die Seitenlängen  $m$  und  $n$  sind so zu wählen, daß die Spannungen an der Hypotenuse als eine reine Scherspannung  $\tau$  und eine Normalspannung  $\sigma$  betrachtet werden können. Da die Kräfte, welche an das Prisma unter diesen Bedingungen angreifen, durch Multiplikation der Seitenflächen mit den Spannungen bestimmt werden können, gelten die folgenden Gleichungen für das Kräftegleichgewicht (z.B.: [22], S. 13f):

$$\begin{aligned} -A\xi_x &= A \cos(T, x) \sigma_{xx} \Big|_{z=0} + A \sin(T, y) \tau_{xy} \Big|_{z=0} \\ -A\xi_y &= A \sin(T, y) \sigma_{yy} \Big|_{z=0} + A \cos(T, x) \tau_{xy} \Big|_{z=0}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} -\xi_x &= \cos(T, x) \sigma_{xx} \Big|_{z=0} + \sin(T, y) \tau_{xy} \Big|_{z=0} \\ -\xi_y &= \sin(T, y) \sigma_{yy} \Big|_{z=0} + \cos(T, x) \tau_{xy} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (39)$$

wobei  $\cos(T, x)$  den Kosinus des Winkels zwischen der Kraft  $T$  und der  $x$ -Achse und  $\cos(T, y)$  den Kosinus des Winkels zwischen der Kraft  $T$  und der  $y$ -Achse bezeichnet. Die bisher verfolgte Bezeichnungsweise von Fabrikant ([16], S. 74), bei welcher bestimmte Scheranteile mit der imaginären Einheit  $i$  multipliziert werden, kann bei der Kombination der Gleichgewichtsgleichung mit der Darstellung für  $\sigma_2$  zu Verwirrungen führen. Da sich durch diese Darstellung aber gerade für Kontaktprobleme in der weiteren Behandlung Vereinfachungen ergeben, verzichtet der Autor hier auf eine Umwandlung zum "gewohnten Gleichungstyp" (ohne imaginäre Anteile, vergleiche [22], S. 13). Sei der Winkel zwischen der Kraft  $T$  und der  $x$ -Achse mit  $\alpha$  bezeichnet, so gilt wenn  $\tau=0$ :

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \tan 2\alpha. \quad (40)$$

Durch Hauptachsentransformation können  $x$  und  $y$  leicht auf die sogenannten Hauptspannungsrichtungen gebracht werden, für die  $\tau_{xy}=0$  gilt. Wählt man beispielsweise  $T=T_x+iT_y$  mit  $T_y=0$  sowie  $\alpha=0$ , so wird aus Gleichung (35):

$$-T_x = \frac{\sigma_2}{2} \Big|_{z=0} = A_{66} (c_1 + c_2 + ic_3) \Delta \Delta \chi \Big|_{z=0}. \quad (41)$$

Da  $T_x$  eine Punktkraft ist, die durch  $T_x(x, y) = T_x \delta(x, y)$  dargestellt werden kann (mit  $\delta(x, y)$ , die sogenannte Diracsche Deltafunktion, z.B. [18]), ist die obige Gleichung leicht zu integrieren. Man erhält mit Hilfe der oben gemachten Ansätze:

$$\chi = T_x G(x, y, z) \quad (42)$$

mit

$$G(x, y, z) = \frac{-3zR}{4} - \frac{(x^2 + y^2) \ln[R + z]}{4} + z^2 \ln[R + z]$$

sowie  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Nun können die Potentialfunktionen  $F_i$  bestimmt werden. Die Konstanten  $c_i$  ( $i=1,2,3$ ) ergeben sich aus den Bedingungen (33), (34) und

$$1 = 2\pi A_{66} (c_1 + c_2 + ic_3), \quad (43)$$

was aus (35) und dem Ansatz für  $\chi$  folgt. Als Endresultat erhält man:

$$F_i = c_i T_x \bar{\Lambda}^2 G(x, y, z_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (44)$$

mit



$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\gamma_1^2 [\gamma_3^2 (1 + m_2) - \gamma_2^2]}{2\pi A_{66} \left\{ \gamma_3 \left( \gamma_1 \gamma_2^2 - \gamma_2 \gamma_1^2 + \gamma_3 \gamma_1^2 - \gamma_3 \gamma_2^2 + 2\gamma_3^2 (\gamma_2 - \gamma_1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. m_2 (\gamma_3 \gamma_1^2 + \gamma_2 \gamma_1^2 + \gamma_2 \gamma_3^2 - \gamma_1 \gamma_3^2) + m_1 (-\gamma_3 \gamma_2^2 + \gamma_2 \gamma_1^2 + \gamma_2 \gamma_3^2 - \gamma_1 \gamma_3^2) \right) \right\}} \\
c_2 &= \frac{\gamma_2^2 (\gamma_1 + \gamma_3 (1 + m_1))}{2\pi A_{66} \left\{ \gamma_2 [\gamma_3 (1 + m_2) - \gamma_2] (\gamma_1 + \gamma_3 (1 + m_1)) - \gamma_1 [\gamma_3^2 (1 + m_2) - \gamma_2^2] \right\}} \\
c_3 &= \frac{-i [\gamma_2 \gamma_3^2 - \gamma_2 \gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_3^2 + m_1 (\gamma_1 \gamma_2^2 + \gamma_2 \gamma_3^2 - \gamma_1 \gamma_3^2)]}{2\pi A_{66} \left\{ \gamma_3 \gamma_1^2 - \gamma_2 \gamma_1^2 - \gamma_1 \gamma_3^2 + \gamma_2 \gamma_3^2 + m_1 (-\gamma_3 \gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_2^2 + \gamma_2 \gamma_3^2 - \gamma_1 \gamma_3^2) \right\}}
\end{aligned} \tag{45}$$

Für einige Fälle ist der alternative Ansatz:

$$\begin{aligned}
F_1 &= c_1 \bar{\Lambda} \chi_1, & F_2(x, y, z) &= c_2 \bar{\Lambda} \chi_2, \\
F_3(x, y, z) &= c_3 \bar{\Lambda} \chi_3
\end{aligned} \tag{46}$$

mit

$$\chi_k = \chi(x, y, z_k) \quad z_k = \frac{z}{\gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3$$

zur Einkopplung von Tangentialkräften zu bevorzugen. Es läßt sich zeigen [85], daß dieser Ansatz ebenfalls die geforderten Randbedingungen erfüllt und zu denselben Resultaten hinsichtlich des elastischen Feldes führt.

### 3.4. Der Grenzübergang zu isotropen Materialien

Für zahlreiche praktische Anwendungen ist es nötig, die für den transversal isotropen Fall hergeleiteten Gleichungen im Fall isotroper Räume zu betrachten. Der dabei durchzuführende Grenzübergang vom transversal isotropen zum isotropen Fall ist nicht ganz einfach und in der Literatur nur sehr unvollständig dokumentiert [65]. Er soll darum an dieser Stelle für einige wichtige Fälle vollständig dargelegt werden. Zunächst benötigen wir den Limes der Materialkonstanten beim Übergang von transversaler zu echter Isotropie

$$\begin{aligned}
A_{13} = A_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\
A_{33} = A_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\
A_{44} = A_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)}.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet E den Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querkontraktions- oder Poissonzahl. Man kann leicht nachrechnen, daß damit die folgenden Identitäten erhalten werden können:

$$m_1 = m_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \quad H = \frac{1 - \nu^2}{\pi E}. \quad (47)$$

Ebenso erhält man die Grenzwerte

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow 1} \left[ \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1} \right] = 2(1 - \nu); \quad \lim_{\gamma_2 \rightarrow 1} \left[ \frac{\partial m_2}{\partial \gamma_2} \right] = 2(1 - \nu). \quad (48)$$

Benutzt man weiterhin die auch im Falle transversaler Isotropie geltende Identität

$$m_1 m_2 = 1,$$

so kann nun der Übergang zur vollständigen Isotropie durchgeführt werden.

Mit Hilfe der Regel von L'Hôpital erhalten wir unter Berücksichtigung der oben gegebenen Identitäten und Grenzwerte die folgenden Grenzübergänge für eine beliebige Funktion  $f=f(z_k)$

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \left[ \frac{\gamma_1 f(z_1)}{m_1 - 1} + \frac{\gamma_2 f(z_2)}{m_2 - 1} \right] = - \frac{(1 - 2\nu)f(z) + z \frac{\partial}{\partial z} f(z)}{2(1 - \nu)}, \quad (49)$$

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \left[ \frac{m_1 f(z_1)}{m_1 - 1} + \frac{m_2 f(z_2)}{m_2 - 1} \right] = \frac{(2 - 2\nu)f(z) - z \frac{\partial}{\partial z} f(z)}{2(1 - \nu)}, \quad (50)$$

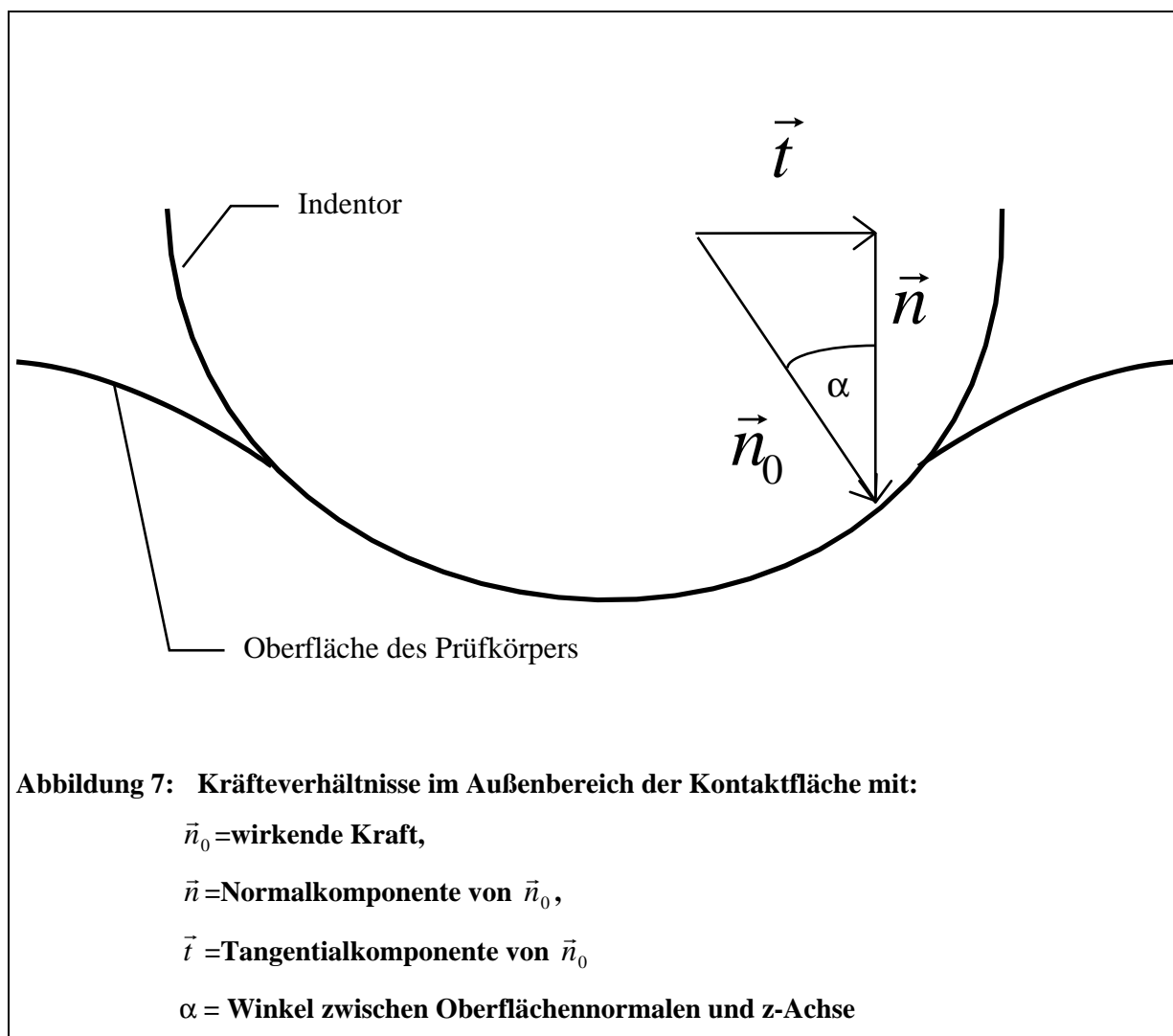
$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \left[ \frac{m_1 f(z_1)}{(m_1 - 1)\gamma_1} + \frac{m_2 f(z_2)}{(m_2 - 1)\gamma_2} \right] = \frac{(1 - 2\nu)f(z) - z \frac{\partial}{\partial z} f(z)}{2(1 - \nu)}, \quad (51)$$

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \left[ \frac{\gamma_2 \gamma_1 f(z_1)}{m_1 - 1} + \frac{\gamma_2 \gamma_1 f(z_2)}{m_2 - 1} \right] = - \frac{2(1 - \nu)f(z) + z \frac{\partial}{\partial z} f(z)}{2(1 - \nu)}. \quad (52)$$

Wegen der nicht unerheblichen Schwierigkeiten, die bei der Ableitung dieser Gleichungen auftreten können, wird im Anhang D beispielhaft ein derartiger Grenzübergang vorgerechnet. Weitere benötigte Grenzübergänge können dann leicht nach diesem Schema berechnet werden.

Hiermit können nun leicht die Gleichungen für den isotropen Fall aus den in den nachfolgenden Kapiteln hergeleiteten elastischen Feldern abgeleitet werden. Da das im wesentlichen formale Schreibearbeit ist, soll in dieser Arbeit auf die Darstellung der elastischen Felder im vollständig isotropen Fall verzichtet werden.

#### 4. Das elastische Feld für den Kugeleindruckversuch bei größeren Eindringtiefen



Wie bereits erwähnt wurde, bezeichnet der Nindhertzsche Eindruckversuch einen Indentorversuch, bei welchem der Radius der Kontaktfläche in der selben Größenordnung wie der Indentorradius liegt. Die bereits vorhandene bzw. beim Eindruckversuch entstehende Oberflächenkrümmung ist dann nicht mehr vernachlässigbar. Insbesondere bei den in der Praxis verwendeten sehr steifen Diamantindentoren mit kleinen Krümmungsradien führen schon relativ geringe Druckkräfte bzw. Eindringtiefen zu starken Oberflächenkrümmungen im Kontaktflächenbereich. Die auf eine derartige Oberfläche in Indentorachsrichtung wirkende Kraft führt ihrerseits zu resultierenden Kräften in radialer (tangentialer) Richtung. Aber auch außerhalb der Kontaktfläche müssen durch die Oberflächenkrümmung zusätzliche Randbedingungen berücksichtigt werden. So wird im Hertzschen Fall, bei welchem die gesamte Oberfläche des Halbraums als annähernd eben angesehen wird, die Normalspannung in Indentorachsrichtung  $\sigma_{zz}$  bei  $z=0$  gleich der negativen Normaldruckkraft  $P_n$  gesetzt, woraus sich

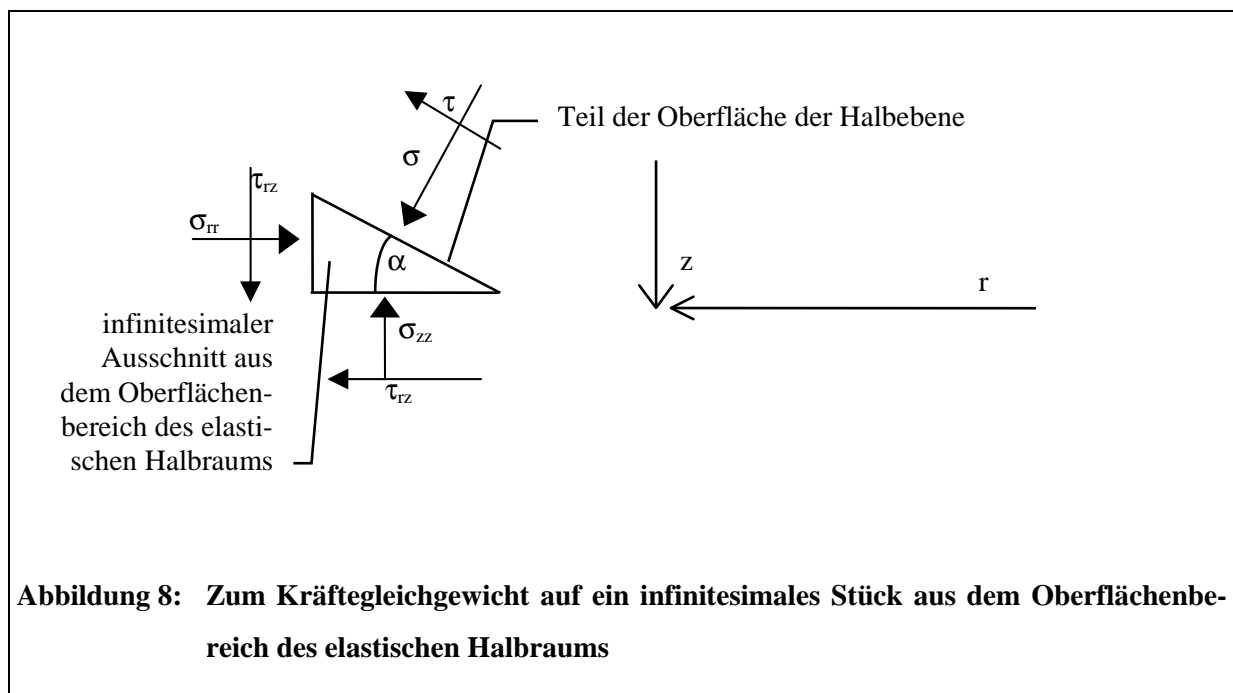
außerhalb der Kontaktfläche automatisch  $\sigma_{zz}(r>a, z=0)=0$  ergibt. Bei krummliniger Begrenzung des elastischen Halbraums gilt hingegen, daß außerhalb der Kontaktfläche senkrecht zur Oberfläche keine Normal- und tangential keine Scherspannungen auftreten können. Die Oberflächennormale zeigt nun aber nicht mehr in z-Richtung, was zu

$$\sigma_{zz} \cos^2 \alpha - \sigma_{rr} \sin^2 \alpha = 0 \quad (53)$$

führt. Man erhält diese Gleichung mit Hilfe der folgenden Beziehungen, wenn man  $\tau$  und  $\sigma$  gleich Null setzt (s. [33], S 139f):

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \cos^2 \alpha + \sigma_{rr} \sin^2 \alpha - 2\tau_{rz} \sin \alpha \cos \alpha &= \sigma \\ \tau_{rz} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - (\sigma_{zz} - \sigma_{rr}) \sin \alpha \cos \alpha &= \tau \end{aligned}$$

Dies kann durch die folgende Abbildung verdeutlicht werden:



Die übliche (in der Literatur verfolgte) Lösungsstrategie für Kontaktprobleme mit dem Modell des unendlichen Halbraums besteht darin, die Druckverteilungen als Randbedingungen für die Begrenzungsfläche des Halbraums zu definieren. Aus Gründen der Vereinfachung werden dabei im allgemeinen kartesische oder Zylinderkoordinaten verwendet und die Randbedingungen für die  $z=0$ -Ebene (entsprechend Abbildung 5) definiert. Wie man aber leicht einsieht, ist in diesen Koordinatensystemen die  $z=0$ -Ebene im allgemeinen nicht die Begrenzungsfläche für den mit einem Indentor belasteten, elastischen Halbraum. Letztere ist nämlich im Gegensatz zur  $z=0$ -Ebene eine gekrümmte Fläche. Kontaktaufgaben mit kartesischen oder Zylinderkoordinaten sowie Randbedingungen für  $z=0$  sind demnach nicht korrekt formuliert.

#### 4.1. Probleme bei der Formulierung der Randbedingungen bei größeren Eindringtiefen

Das Dilemma, welche Randbedingungen nun exakt zu stellen sind, beruht also im wesentlichen auf dem Problem, welches Koordinatensystem für die vorliegende Kontaktaufgabe zugrunde gelegt wird. Die bisher vom Autor recherchierten und in der Literatur vollständig gelösten Kontaktaufgaben, insbesondere solche zum Kugleindruck (beispielsweise [30] - [35], [39] sowie [65] - [71]), weisen ohne Ausnahme diese Unexaktheit auf.

Um die Problematik zu verdeutlichen, sei hier der Kugleindruck in Zylinderkoordinaten unter Berücksichtigung der Oberflächenkrümmung behandelt. Bezeichnet man mit  $P_j^I$  und  $P_j^A$  die Druckverteilungen innerhalb und außerhalb der Kontaktfläche ( $j=n,t$ ) sowie entsprechend I und A den Kontaktflächen- bzw. außerhalb liegenden Oberflächenbereich, so kann man mit den in Abschnitt 3.1. gemachten Darlegungen über die Verschiebung  $w(z=0)$  das gemischte Randwertproblem des Kugleindrucks in einen homogenen, elastischen Halbraum vollständig wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
 w(z=0, r < a) &= \text{konst}1(b - cr^2) = \\
 &\iint_S \frac{P_n}{R_0} H dS + \iint_S (c_1 m_1 + c_2 m_2) P_t \bar{\Lambda}^2 \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} dS \\
 &= \iint_S \frac{P_n}{R_0} H dS + \iint_S J P_t \bar{\Lambda}^2 (z \ln[R_0 + z] - R_0) dS \\
 &= \iint_I \frac{P_n^I}{R_0} H dI + \iint_A \frac{P_n^A}{R_0} H dA \\
 &+ \iint_I J P_t^I \bar{\Lambda}^2 (z \ln[R_0 + z] - R_0) dI + \iint_A J P_t^A \bar{\Lambda}^2 (z \ln[R_0 + z] - R_0) dA
 \end{aligned} \tag{54}$$

Der Term hinter dem ersten Gleichheitszeichen folgt dabei aus geometrischen Überlegungen (siehe Abschnitt 3.1.) entsprechend der Hertzchen Theorie für den Innenbereich  $r < a$ :

$$w(z=0, r < a) \Big|_{\text{Hertz}} = \frac{3HP\pi}{8a^3} (2a^2 - r^2).$$

Es wurde ausgenutzt, daß mit Hilfe des Greenschen Tensors (siehe [23], S. 31 sowie [74], S. 358) eine Punktlösung durch Integration auf beliebige Druckverteilungen übertragen werden kann. Während  $c_1$  und  $c_2$  durch Gleichung (58) und  $G$  durch (65) definiert sind, gilt für  $R_0$ :

$$R_0^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Die Integration in den Flächenintegralen ist wie folgt zu lesen:

$$\iint_I dI = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho d\rho d\varphi_0; \quad \iint_A dA = \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \rho d\rho d\varphi_0.$$

Unter alleiniger Berücksichtigung einer Normalkraft erhielt Hertz dann die bekannte Druckverteilung

$$P_n^I \sim \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Die Integralgleichung (54) wäre also zu lösen, um das Problem des elastischen Kugeleindrucks vollständig zu behandeln. Dabei ist zu beachten, daß die einzelnen Größen  $P_j^i$  ( $i=I,A$ ;  $j=n,t$ ) auf komplizierte Weise miteinander verknüpft sind. So erhält man aus geometrischen Überlegungen:

$$P_t^I = P_n^I \Lambda w(z=0) = e^{i\varphi} P_n^I \tan \alpha.$$

Durch diese Beziehung scheint also  $P_t^I$  bereits bestimmt zu sein. Da andererseits Gleichung (54) für  $P_n^I$  nur die bekannte Hertzische Lösung mit:  $P_n^I \sim \sqrt{a^2 - r^2}$  (zur Herleitung siehe [23], S. 33 - 37) zuläßt, muß der Beitrag von  $P_t^I$  für die Deformation  $w$  Null sein, weil  $P_t^I$  ansonsten doppelt bestimmt wäre. Tatsächlich gilt:

$$\iint_I J P_t^I \bar{\Lambda}^2 (z \ln[R_0 + z] - R_0) dI = 0, \quad \iint_A J P_n^A \bar{\Lambda}^2 (z \ln[R_0 + z] - R_0) dA = 0,$$

da im Integranden Terme der  $e^{i\varphi}$  stehen bleiben, welche bei der Integration  $\int \dots e^{i\varphi} d\varphi$  in den Grenzen von 0 bis  $2\pi$  Null liefern. Die Gleichung (54) vereinfacht sich somit etwas, weist aber noch unbekannte Größen, insbesondere für den Außenbereich auf.

Weitere Beziehungen hierzu liefert Gleichung (53) zusammen mit den Grundlagen von Abschnitt 3.2.:

$$\sigma_{rr} \Big|_{z=0, r \geq a} = -P_t^A = P_n^A [\Lambda w(z=0)]^2 = e^{i\varphi} P_n^A (\tan \alpha)^{-2}, \quad (55)$$

$$P_t^A \Big|_{r=a} = P_t^I \Big|_{r=a}; \quad P_n^A \Big|_{r=a} = P_n^I \Big|_{r=a}.$$

Da  $\tan \alpha = \partial w_{(z=0)} / \partial r$  nur im Innenbereich, also für  $r < a$  bekannt ist, bestimmt erst die obige Gleichung (55) das Problem vollständig. Allerdings führt diese Identität auf keinen praktikablen Lösungsansatz, da  $\sigma_{rr}$  ja selbst wieder eine komplizierte Funktion der Druckverteilungen  $P_j^i$  ( $j=n,t$ ;  $i=I,A$ ) und der Deformation  $w$  bei  $z=0$  ist.

Ein vernünftig scheinender Ausweg wäre es, im Außenbereich eine Deformation  $w(z=0)$  so anzusetzen, daß diese in ihrer Struktur der Hertzischen Lösung im Außenbereich

$$w(z=0, r \geq a) \Big|^{Hertz} = \frac{3HP}{4a^3} \left[ (2a^2 - r^2) \sin^{-1} \left[ \frac{a}{r} \right] + a(r^2 - a^2) \right]$$

entspricht. Eine derartige Annahme wird durch die Tatsache gestützt, daß die wirkenden Druckkräfte  $P_n^i$  ( $i=I,A$ ) ja auch im Innenbereich zur lange bekannten Deformation entsprechend Gleichung (6) führen, obgleich bisher nur  $P_n^I$  berücksichtigt worden war. Mit dieser Annahme kann man nun schreiben:

$$w(z=0, r \geq a) = konst 2 \left[ (2a^2 - r^2) \sin^{-1} \left[ \frac{a}{r} \right] + a(r^2 - a^2) \right] = \iint_I \frac{P_n^I}{R_0} H dI + \iint_A \frac{P_n^A}{R_0} H dA \quad (56)$$

Die Integration der Gleichungen (54) und (56) kann nun mit Hilfe des von Fabrikant gegebenen Algorithmus ([16], S. 25-59) durchgeführt werden. Dies führt jedoch auf komplizierte, stellenweise nicht in elementarer Form angebbare Ausdrücke, die für eine weitere Behandlung in dieser Arbeit sehr unpraktisch wären. Es erscheint somit vorteilhafter, die Aufgabe näherungsweise zu bearbeiten.

#### 4.1.1. Störungstechnische Behandlung des gestellten Problems

Eine Möglichkeit bestünde darin, ausgehend von der Hertzschen Lösung, mittels Störungsmethoden eine schrittweise Annäherung an die exakte Lösung durchzuführen. Dabei werden mehrere Zyklen von Rechenvorschriften durchlaufen, die aus jeweils immer den gleichen Einzelschritten bestehen. Die Anzahl der zu durchlaufenden Zyklen hängt von der gewünschten Rechengenauigkeit ab.

##### 4.1.1.1. Erster Zyklus, Erster Schritt

Zunächst soll nur der Innenbereich betrachtet werden. Die oberen Indizes der Druckverteilungen werden daher im weiteren weggelassen. Die in der Kontaktfläche auftretende Tangentialkraftverteilung  $P_t$  wird somit in erster Näherung als Resultat der Oberflächenkrümmung und einer Hertzschen Normalkraftverteilung  $P_n^{\text{Hertz}}=P_n$  bestimmt. Dies entspräche also einem Hertzschen Kontaktproblem mit einer in erster Näherung berücksichtigten Oberflächenkrümmung, die hier als Störung der Hertzschen Druckverteilung zu verstehen ist. Eine auf diese Weise hervorgerufene Tangentialkraft  $P_t$  kann durch

$$|\vec{P}_t| = P_n \frac{\partial}{\partial r} w_{(z=0)} = P_n \tan \alpha \quad (57)$$

dargestellt werden, wobei genau wie bei der Hertzschen Theorie jegliche Form von Reibung (siehe 3.3.) vernachlässigt worden ist und  $P_n$  die Kraftverteilung parallel zur Indentorachse (innerhalb der Kontaktfläche) bezeichnet. Es sei das Koordinatensystem aus dem vorherigen Abschnitt zugrunde gelegt. Man erhält Gl. (57) durch die nachfolgende Überlegung. Bezeichnet man mit  $\alpha$  den Winkel zwischen dem Normalenvektor der Kontaktfläche und der z-Richtung, so führt eine Kraft  $\vec{n}_0$ , die auf diese Fläche in Richtung der Oberflächennormalen einwirkt, zu den Kraftkomponenten  $|\vec{t}| = |\vec{n}_0| \sin \alpha$  und  $|\vec{n}| = |\vec{n}_0| \cos \alpha$ , welche senkrecht bzw. parallel zur Indentorachse wirken.

Weiterhin läßt sich der Betrag der Tangentialkomponente  $\vec{t}$ , wie folgt aus  $\vec{n}$  berechnen

$$|\vec{t}| = t = |\vec{n}| \tan \alpha = n \tan \alpha, \quad (58)$$

wobei n und t die Beträge der Vektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{t}$  bedeuten. Mit  $\tan \alpha = \partial w_{(z=0)} / \partial r$  erhält man somit direkt Gl. (57). Verwendet man nun die Ergebnisse von Hanson [13] für das elastische Feld eines sphärischen Hertzschen Kontaktproblems, die im Anhang A gegeben sind, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial r} w_{(z=0)} = -\pi r \frac{3HP}{4a^3}. \quad (59)$$

P bezeichnet die wirkende Gesamtdruckkraft und H eine elastische Konstante entsprechend Gl. (18). Weiterhin entnehmen wir der Hertzschen Theorie (siehe [23], S. 32 sowie Abschnitt 3.1. dieser Arbeit), daß

$$[w_1 + w_2]_{z=0} = h - \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} r^2 = h - \beta r^2 \quad (60)$$

gilt. Hierbei sind  $w_1$  und  $w_2$  die Oberflächendeformationen in z-Richtung des gepreßten Körpers  $w_1$  und des Indentors  $w_2$ , h ist die Gesamtannäherung der beiden Körper aneinander und  $R_1$  und  $R_2$  sind die Krümmungsradien der Oberflächen beider Körper.

Mit  $w_2|_{z=0} = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \frac{3P}{8a^3} (2a^2 - r^2)$  sowie durch Umstellen ergibt sich:

$$[w_1]_{z=0} = h - \beta r^2 - w_2|_{z=0} = h - \beta r^2 - \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \frac{3P}{8a^3} (2a^2 - r^2) .$$

Anschließende Differentiation nach r liefert:

$$\frac{\partial [w_1]_{z=0}}{\partial r} = 2r \left( \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \frac{3P}{8a^3} - \beta \right) \equiv 2r(\zeta - \beta) .$$

Der Autor verwendet hier die bekannteren Terme des isotropen Halbraums. Diese können aber leicht

mittels  $H_2\pi = \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$  für den quer- oder transversal isotropen Halbraum umgeschrieben werden (siehe

Gleichung (18)).

Rein anschaulich kann man feststellen, daß bei positivem Anstieg der Verschiebung  $w_1$  an der Oberfläche ( $\zeta > \beta$ ) die Tangentialkraft  $\vec{P}_t$  radial nach außen, also weg vom Kontaktzentrum, während sie im umgekehrten Fall ( $\zeta < \beta$ ) radial nach innen gerichtet ist.

Unter der Annahme, daß die nichtdeformierte Oberfläche des gepreßten Körpers eine Ebene und der Krümmungsradius des Indentors gleich  $R_i$  ist, ergeben die Gleichungen (59) und (60) also für die tangentielle Kraftkomponente  $P_t$

$$\begin{aligned} P_t &= re^{i\varphi} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{3\pi P H_i}{4a^3} \right) P_n \\ &\equiv re^{i\varphi} P_n(r) T \equiv f_t(r, \varphi) T \end{aligned} \quad (61)$$

$H_i$  ist die Materialkonstante für den Indentor entsprechend Gleichung (18). Aus [34] entnehmen wir die bekannte Verteilung der Normalkraft innerhalb der Druckfläche im Hertzchen Fall

$$P_n = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - r^2} . \quad (62)$$

Verwenden wir außerdem die von Fabrikant [16] entwickelte Methode sowie die Resultate des Abschnitts 3.3., können wir leicht die Potentiale für das elastische Feld, das von einer Tangentialkraft  $P_t$  erzeugt wird, aufschreiben (siehe auch Hanson [13] und [85])

$$F_1(r, \varphi, z) = c_1 \frac{3P}{4\pi a^3} T \lambda_1 , \quad (63)$$

$$F_2(r, \varphi, z) = c_2 \frac{3P}{4\pi a^3} T \lambda_2 , \quad (64)$$

$$F_3(r, \varphi, z) = c_3 \frac{3P}{4\pi a^3} T \lambda_3 , \quad (65)$$

$$\lambda_k = \iint_S \bar{\Lambda} G_k \bar{\Lambda}_{x_0, y_0} f_t dS \equiv \int [z_k \Psi_k - \Phi_k] dz_k , \quad (66)$$



wobei  $dS$  die Integration über das Kontaktgebiet bezeichnet und ansonsten  $\lambda_k = \lambda(r, \varphi, z_k)$ ,  $G_k = G(r, \varphi, z_k)$  (zur Definition von  $G$  und  $c_i$  ( $i=1,2,3$ ) siehe Abschnitt 3.3., Gleichungen (65) und (58)),  $\Psi_k = \Psi(r, \varphi, z_k)$ ,  $\Phi_k = \Phi(r, \varphi, z_k)$ ,  $z_k = z/\gamma_k$  ( $k=1,2,3$ ) gilt.

Mit

$$R_k^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi_0) + z_k^2 \quad (67)$$

haben wir für  $\Psi(r, \varphi, z)$  und  $\Phi(r, \varphi, z)$

$$\Psi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{\Lambda} \ln[R + z] \rho(\bar{\Lambda} f_i(\rho, \varphi_0)) d\rho d\varphi_0, \quad (68)$$

$$\Phi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{\Lambda} R \rho(\bar{\Lambda} f_i(\rho, \varphi_0)) d\rho d\varphi_0. \quad (69)$$

Daß der Operator  $\bar{\Lambda}$  dabei unter dem Integral bleibt, ist wichtig für die Fälle, in welchen ein Term der Gestalt  $e^{i\varphi}$  erhalten bleibt, da in diesen Fällen die Integration über  $\varphi$  in den Grenzen von 0 bis  $2\pi$  Null ergibt. In den Fällen aber, in denen beispielsweise der Term  $e^{-i\varphi}$  des Operators  $\bar{\Lambda}$  durch  $e^{i\varphi}$  des Operators  $\Lambda$  "neutralisiert" wird, kann  $\bar{\Lambda}$  auch vor das Integral gezogen werden. Hiervon wird im folgenden Gebrauch gemacht, um einige Darstellungen zu vereinfachen. Die Integrale werden im Anhang B berechnet. Das elastische Feld kann nun durch Differentiation der Potentialfunktionen hergeleitet werden. Unter Verwendung der im Anhang C gegebenen Ableitungen nach  $r$  und  $z$  sowie den folgenden Identitäten

$$\Delta f(r) = \bar{\Lambda} \Lambda f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2}, \quad (70)$$

$$\Lambda^2 f(r) = e^{2i\varphi} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} \right), \quad (71)$$

$$\Lambda f(r) = e^{i\varphi} \frac{\partial f(r)}{\partial r}, \quad (72)$$

kann das elastische Feld nun leicht angegeben werden:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{3TP}{4\pi a^3} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k \Lambda \bar{\Lambda} \int [z_k \Psi_k - \Phi_k] dz_k + ic_3 \Lambda \bar{\Lambda} \int [z_3 \Psi_3 - \Phi_3] dz_3 \right] = \\ &= -\frac{3TP}{4\pi a^3} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k \gamma_k^2 \frac{\partial^2}{\partial z_k^2} \int [z_k \Psi_k - \Phi_k] dz_k + ic_3 \gamma_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \int [z_3 \Psi_3 - \Phi_3] dz_3 \right] =, \quad (73) \\ &\quad -\frac{3TP}{4\pi a^3} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k \gamma_k^2 \Psi_k + ic_3 \gamma_3^2 \Psi_3 \right] \end{aligned}$$

$$w_t = \frac{3TP}{4\pi a^3} \sum_{k=1}^2 \frac{c_k m_k}{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial z_k} \int [z_k \Psi_k - \Phi_k] dz_k = 0, \quad (74)$$

$$\sigma_{1r} = 0, \quad (75)$$

$$\sigma_{2t} = -\frac{3TPA_{66}}{2\pi a^3} e^{i\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k \Psi_k + ic_3 \Psi_3 \right], \quad (76)$$

$$\sigma_{zz} = 0, \quad (77)$$

$$\tau_{zt} = -\frac{3TPA_{44}}{4\pi a^3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{k=1}^2 (c_k (1+m_k) \Psi_k) + ic_3 \Psi_3 \right). \quad (78)$$

Es ist wichtig anzumerken, daß die genäherte Verzerrung der Oberfläche in z-Richtung  $w_{t(z=0)}$

$$w_{t(z=0)} = 0, \quad (79)$$

die durch die Tangentialkraft  $P_t$  selbst hervorgerufen wird, stets gleich Null ist. Die als Störung angesetzte Größe  $P_t$  verändert somit die beobachtete Verzerrung  $w(z=0)$  entsprechend Gleichung (6) nicht.

#### 4.1.1.2. Erster Zyklus, zweiter Schritt

Betrachtet man jetzt auch den Außenbereich (die oberen Indizes I und A werden wieder mitgeführt), so kann mit Hilfe der Bedingung (53) bzw. (55) die Druckverteilung  $P_n^A = \sigma_{zz}(z=0, r>a)$  aus dem in erster Näherung berechneten  $\sigma_{rr}(z=0)$  bestimmt werden:

$$P_n^A = \sigma_{rr} \tan^2 \alpha = \sigma_{rr} \left[ \frac{\partial w(z=0, r>a)}{\partial r} \right]^2 \quad (80)$$

Anmerkung: Für die hier im ersten Zyklus (1. Schritt) verwendete Hertzsche Druckverteilung  $P_n^I$  ergibt sich wegen  $P_n^I(r=a)=0$  und  $P_n^A(r=a) \neq 0$  eine Anschlußdifferenz bei  $r=a$ . Durch die weiteren Störungszyklen wird diese Differenz abgebaut.

Mit Hilfe des bekannten Potentialansatzes für ein Potential der einfachen Schicht ([16], S. 338):

$$F_k = c_k \int_0^{2\pi} \int_a^\infty P_n^A \ln[R(z_k) + z_k] r dr d\varphi; \quad z_k = \frac{z}{\gamma_k}; \quad c_k = \frac{H\gamma_k}{m_k - 1}; \quad k = 1, 2 \quad (81)$$

wird nun durch Ableitung desselben entsprechend Abschnitt 3.2. das vollständige elastische Feld für die Druckverteilung  $P_n^A$  im Außenbereich bestimmt.

#### 4.1.1.3. Erster Zyklus, dritter Schritt

Man erhält dabei auch einen aus  $P_n^A$  resultierenden Deformationsterm  $w^I$  für den Innenbereich:

$$w^I = \frac{m_1 c_1}{\gamma_1} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{P_n^A}{R(z_1)} r dr d\varphi + \frac{m_2 c_2}{\gamma_2} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{P_n^A}{R(z_2)} r dr d\varphi; \quad z_k = \frac{z}{\gamma_k}; \quad c_k = \frac{H\gamma_k}{m_k - 1}; \quad k = 1, 2 \quad (82)$$

der von der Hertzchen Deformation für den Innenbereich  $w^{Hertz} \sim 2a^2 - r^2$  abweicht. Dies ist der Ansatzpunkt für das nächste Störungsglied  $P_{2n}^I$  der Druckverteilung im Innenbereich. Es wird nämlich  $P_{2n}^I$  so angesetzt, daß sich eine Deformation  $w$  mit  $w = -w^I$  ergibt, die also die von  $P_n^A$  verursachte Deformationsterm  $w^I$  exakt aufhebt. Die entsprechenden Gleichungen findet man bei Fabrikant ([16], S. 339-341):

$$\begin{aligned}
P2_n^I(r, \varphi) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 F(r, \varphi, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\partial^2 K(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} [-w(r_0, \varphi_0)] r_0 dr_0 d\varphi_0, \quad (83) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{\partial^2 K(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \left[ \int_0^{2\pi} \int_a^\infty \frac{P_n^A(r_{00}, \varphi_{00})}{R(r_0, \varphi_0, z_0=0; r_{00}, \varphi_{00})} r_{00} dr_{00} d\varphi_{00} \right] r_0 dr_0 d\varphi_0
\end{aligned}$$

wobei  $R(r_0, \varphi_0, z_0=0; r_{00}, \varphi_{00})$  durch:

$$R(r_0, \varphi_0, z_0=0; r_{00}, \varphi_{00}) = \sqrt{r_0^2 + r_{00}^2 - 2r_0 r_{00} \cos(\varphi_0 - \varphi_{00}) + z_0^2} \Big|_{z_0=0}$$

und K im Anhang A gegeben wird. Die für die vollständige Berechnung des elastischen Feldes von  $P2_n^I$  nötigen Ableitungen von K werden ebenfalls im Anhang A ab Gleichung (A16) gegeben.

#### 4.1.1.4. Weitere Zyklen der Störungsrechnung

Die einzelnen Schritte eines Zyklus der Störungsrechnung werden also wie folgt ausgeführt:

1.  $Pi_i^I$  (i Nummer des Störungszyklus) mittels (57) (im 1. Zyklus: (61), also:

$$P1_i^I = re^{i\varphi} \left( \frac{1}{R_i} - \frac{3\pi PH_i}{4a^3} \right) P1_n^I \text{ ansetzen und entsprechendes elastisches Feld berechnen,}$$

2. Berechnung des von  $Pi_n^A$  entsprechend Gleichung (55) erzeugten elastischen Feldes bzw. von  $w^i$  (i Nummer des Störungszyklus),

3.  $Pi+1_n^I$  (i Nummer des Störungszyklus) aus  $w^i$  nach Gleichung (83) sowie zugehöriges elastisches Feld berechnen.  $Pi+1_n^I$  dient dann als Ausgangspunkt für den ersten Schritt des nächsten Zyklus', wobei zunächst  $Pi+1_i^I$  mit Hilfe von Gleichung (57) zu bestimmen ist.

Auf diese Weise könnten also sukzessiv immer exaktere Ergebnisse aus den jeweils vorhergehenden Resultaten bestimmt werden.

Am Schluß sind dann die elastischen Felder aller Schritte, aller Zyklen zu addieren, um das resultierende Gesamtfeld zu erhalten.

In dieser Arbeit wurden zur Begrenzung der Rechenzeit nur maximal 2 Zyklen durchlaufen. In sämtlichen Zyklen wurden die Integrale in den Gleichungen (82) und (83) lediglich numerisch berechnet. Gewisse Abweichungen von hochgenauen FEM-Rechnungen [78] (auch [56]) oder evtl. späteren genaueren analytischen Rechnungen sind deshalb wahrscheinlich.

## 4.2. Über die Behandlung des Problems mittels Koordinatentransformation

Eine weitere Möglichkeit der Berücksichtigung der durch einen Indentor verursachten Oberflächenkrümmung des elastischen Halbraums bei einfacheren als den obigen Randbedingungen wäre die Verwendung von geeigneten krummlinigen Koordinatensystemen. Praktisch wird ja auch davon Gebrauch gemacht, da die Randbedingungen der Kontaktaufgaben üblicherweise für  $z=0$  in kartesischen oder Zylinderkoordinaten gegeben werden, jedoch  $z=0$  wegen der Deformation  $w(z=0)$  gar nicht die Oberfläche bezeichnet. Soll eine Koordinate  $z^+=0$  tatsächlich die Oberflächenkoordinate sein, so handelt es sich ge-

nau betrachtet um eine allgemeine, krummlinige Koordinate, welche der Oberflächenform sowie der Deformation des Körpers angepaßt ist. Das entsprechende krummlinige Koordinatensystem sei mit  $r^+$ ,  $\varphi^+$ ,  $z^+$  bezeichnet. Näherungsweise können die Deformationen  $w$  und  $u$  dann in vielen praktischen Fällen vernachlässigt werden, und die Resultate (beispielsweise der Spannungsberechnung) werden wie bisher üblich in kartesischen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  oder Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  angegeben. Aber gerade für die Fälle, in denen größere Deformationen vorhanden sind oder beispielsweise ein Vergleich mit FEM-Rechnungen durchgeführt werden soll, kommt man an einer Umrechnung der Koordinaten nicht vorbei.

Betrachtet sei nun ein unendlicher Halbraum mit einer vor der Deformation durch eine rotationssymmetrischen Last ebenen Oberfläche. Unmittelbar sieht man, daß für die Umrechnung der Koordinaten  $z$  und  $r$  folgendes gilt:

$$z = z^+ + w^+(r^+, z^+), \quad (84)$$

$$r = r^+ + u^+(r^+, z^+), \quad (85)$$

$$\varphi = \varphi^+, \quad (86)$$

wenn  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $r^{+2} = x^{+2} + y^{+2}$  (lies:  $x^{+2} = (x^+)^2$ ). Mit der Festlegung

$$w(r, z) = w^+(r^+, z^+); \quad u(r, z) = u^+(r^+, z^+) \quad (87)$$

erhält man die folgenden Gleichungen für die Bestimmung der Ableitungen der Deformationen  $w$  und  $u$ , welche zur Berechnung der Spannungen  $\sigma_z$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\tau_z$  in Zylinderkoordinaten nötig sind.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\frac{\partial w^+}{\partial z^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial u^+}{\partial r^+}}}{1 + \frac{\frac{\partial w^+}{\partial z^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial u^+}{\partial r^+}}} \quad (88)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left( 1 - \frac{\frac{\frac{\partial w^+}{\partial z^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial u^+}{\partial r^+}}}{1 + \frac{\frac{\partial w^+}{\partial z^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial u^+}{\partial r^+}}} \right) \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+}}{1 + \frac{\partial u^+}{\partial r^+}} \quad (89)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\frac{\frac{\partial u^+}{\partial r^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial w^+}{\partial z^+}}}{1 + \frac{\frac{\partial u^+}{\partial r^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial w^+}{\partial z^+}}} \quad (90)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \left( 1 - \frac{\frac{\frac{\partial u^+}{\partial r^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial w^+}{\partial z^+}}}{1 + \frac{\frac{\partial u^+}{\partial r^+} - \frac{\frac{\partial u^+}{\partial z^+} \frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial w^+}{\partial z^+}}} \right) \frac{\frac{\partial w^+}{\partial r^+}}{1 + \frac{\partial w^+}{\partial z^+}} \quad (91)$$

Da die Methode der Koordinatentransformation im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Anwendung finden wird, sei hier lediglich auf die entsprechende ausführliche Herleitung in [85] verwiesen.

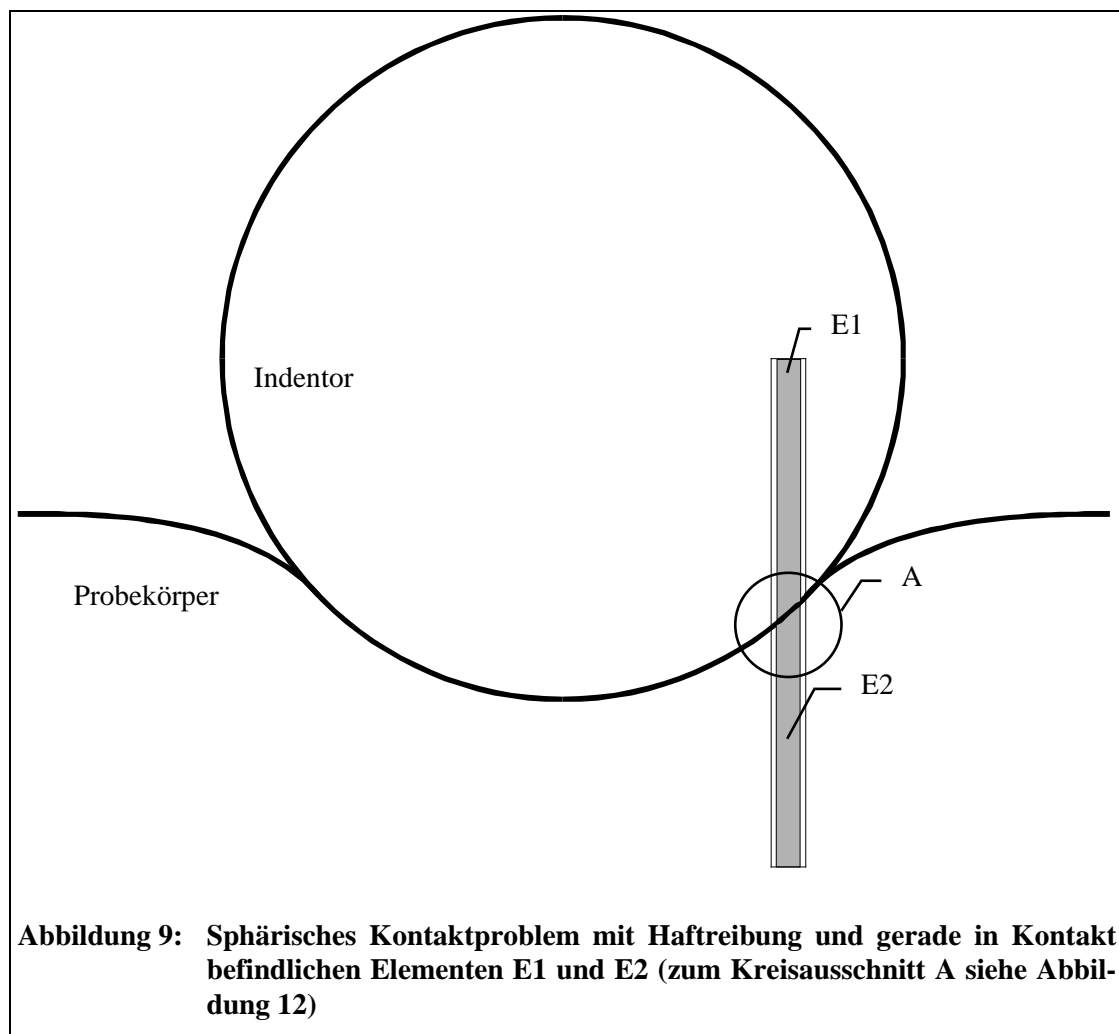
### 4.3. Fazit zum Kugeleindruck bei größeren Eindringtiefen

Zusammenfassend kann man also feststellen, daß eine direkte Berechnung des elastischen Feldes eines Hertzschen Kugeleindrucks in Zylinderkoordinaten bei starker Deformation sehr kompliziert ist (Abschnitt 4.1.), man jedoch mit Hilfe geeigneter Näherungen bzw. störungstheoretischen Ansätzen sukzessive hinreichende Resultate erzielen kann. Weiterhin steht die Methode der Koordinatentransformation zur Verfügung, auf die in diesem Abschnitt lediglich hingewiesen wurde. Dabei wird die Kontaktaufgabe zunächst auf die aus der einschlägigen Literatur bekannten Art und Weise in den krummlinigen Koordinaten  $r^+$ ,  $\varphi^+$  und  $z^+$  gelöst (beispielsweise [13]). Anschließend erfolgt eine Transformation des elastischen Feldes zu kartesischen oder Zylinderkoordinaten mittels der in 4.2. angegebenen Gleichungen. Die Spannungen können dabei ohne Näherung aus den bekannten Potentialfunktionen  $F_1^+$  der in den krummlinigen Koordinaten  $r^+$ ,  $\varphi^+$ ,  $z^+$  vorliegenden Lösung bestimmt werden.

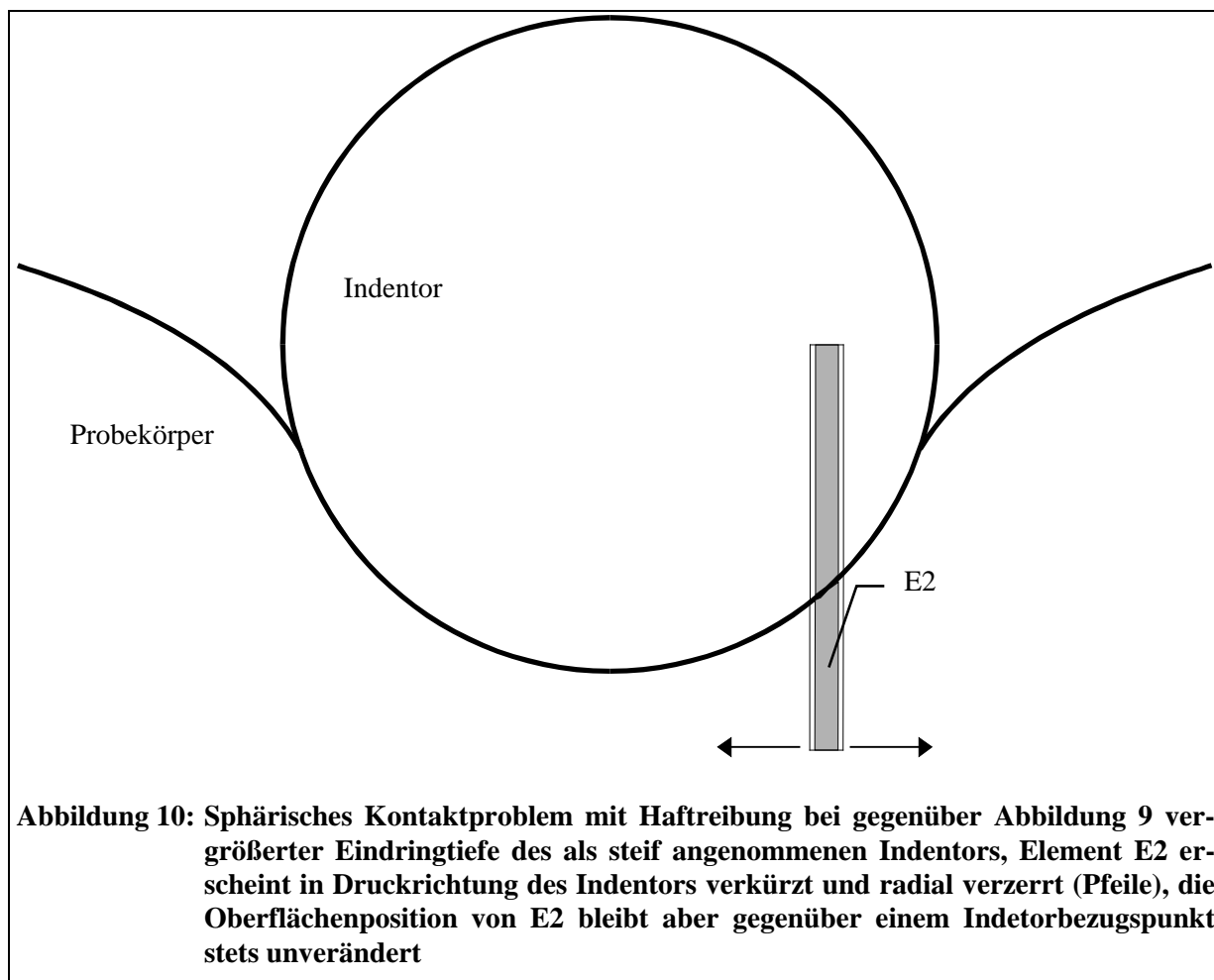
## 5. Berücksichtigung von Reibungseffekten

### 5.1. Haftreibung

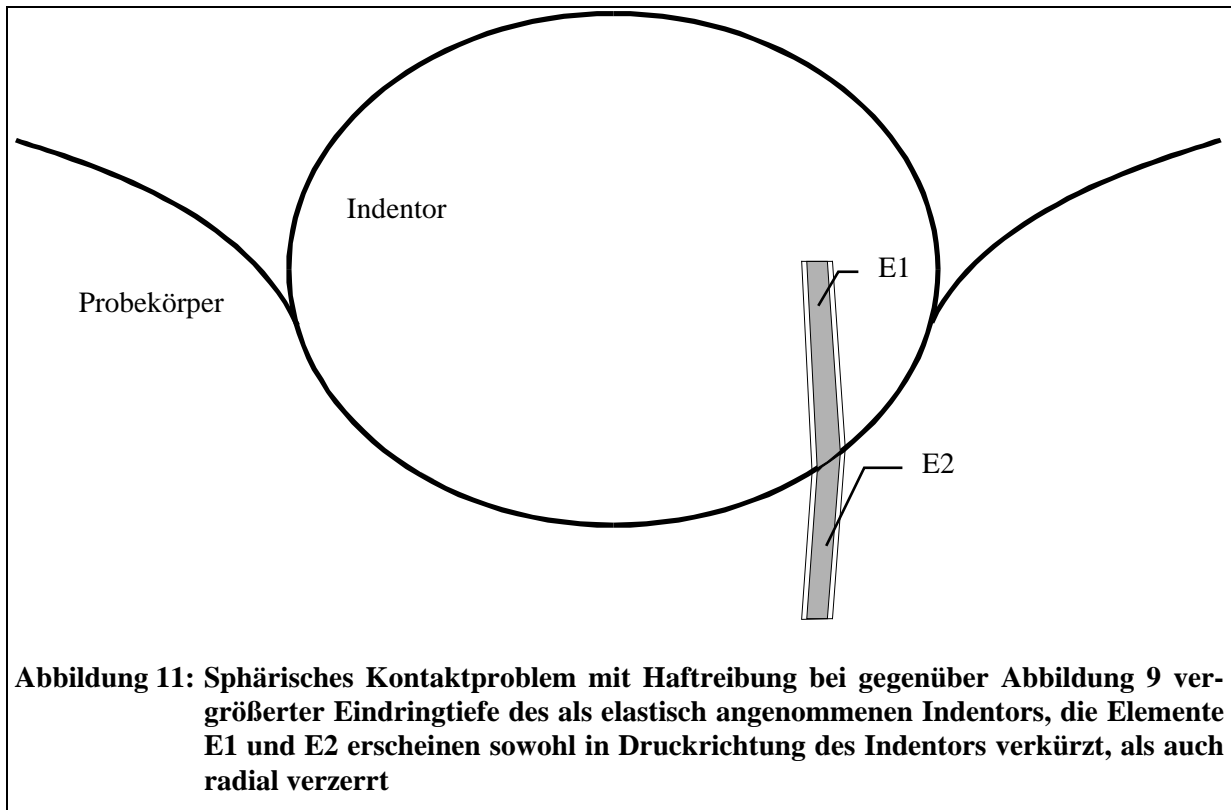
Bisher wurde bei der Behandlung sphärischer Kontaktprobleme angenommen, daß sich beide Körper auch während des Kontaktes so deformieren können, daß nur die normalen bzw. durch die Oberflächenform verursachten tangentialen Kraftkomponenten zur Deformation beitragen. In der Realität ist dies aber nicht der Fall, weil Reibungsprozesse die in Kontakt befindlichen Oberflächen bis zu einem bestimmten Maß zu einer gemeinsamen Deformation zwingen. Die Abbildungen 9 bis 11 verdeutlichen dies für ein stark vereinfachtes sphärisches Kontaktproblem.



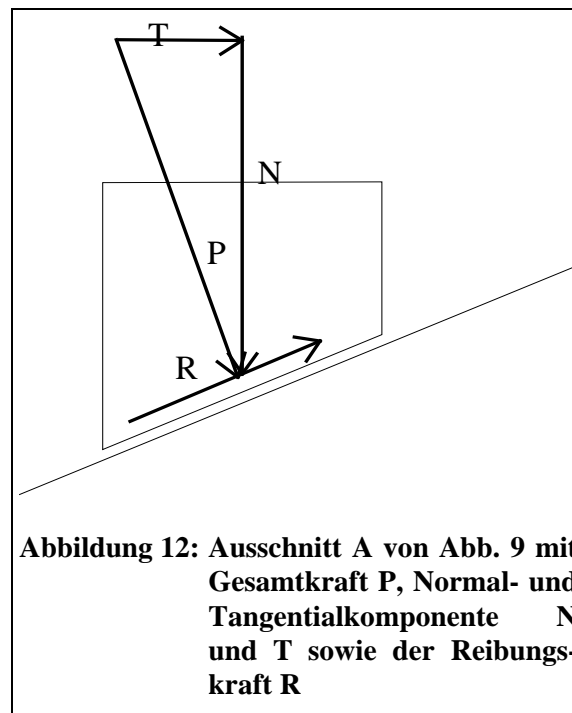
Dabei drückt in Abbildung 9 der Indentor derart auf den Probekörper, daß die Elemente E1 des Indentors und E2 des Probekörpers gerade in Kontakt kommen. Herrscht zwischen diesen beiden Elementen Haftreibung, so können sich deren Oberflächen bei weiterem Eindringen des Indentors und damit verbundener weiterer Deformation nicht unabhängig voneinander bewegen. Die Abbildungen 10 und 11 zeigen dies deutlich, wobei in Abbildung 10 ein absolut steifer, in Abbildung 11 hingegen ein elastischer Indentor angenommen wurde.



Gut erkennt man, daß bei einem steifen Indentor (Abbildung 10) in der Oberflächenschicht ( $z^+=0$ ) des Probekörpers nur Deformationen in Achsrichtung des Indentors auftreten, da radiale Verformung durch die Steifheit des Indentors ausgeschlossen wird und somit die Oberflächenposition von E2 nach Kontakt mit dem Indentor relativ zu selbigem konstant bleibt. Die eingezeichneten absoluten Deformationen sind lediglich als Demonstrationen zu verstehen. In der Praxis hängen sie von den gegebenen Materialparametern beider Körper ab.



Betrachten wir nun die Kräfte, die am Element E1 und dem zugehörigen Oberflächenelement angreifen (Kreisausschnitt A von Abbildung 9), so erkennen wir leicht den Unterschied zwischen einem reibungsfreien System und einem System mit Reibung zwischen Oberfläche und Indentorausschnitt (in Abbildung 12 als Stempel dargestellt).





So läßt sich zunächst, wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten dieser Arbeit erläutert, die Druckkraft  $P$  in eine Tangential-  $T$  und eine Normalkomponente  $N$  aufspalten. Zusätzlich wirkt die Reibungskraft  $R$ . Während bei der Hertzschen Behandlung des sphärischen Kontaktproblems nur die Normalkomponente zu berücksichtigen ist, existiert hier eine Vielfalt unterschiedlichster Kräfte, denen im Gleichgewichtsfall stets gleichgroße, elastische Kräfte entgegenwirken. Diese werden durch die den Körpern aufgezwungenen elastischen Deformationen verursacht. Während Tangential-  $T$  und Normalkräfte  $N$  hierbei zu Deformationen (Kapitel 3, 4 und Anhang A) führen, bei welchen Indentor und Probekörper getrennt betrachtet werden können, nimmt die Reibungskraft eine Sonderstellung ein, da hier beide Körper nicht unabhängig voneinander behandelt werden können.

### 5.1.1. Haftreibung beim Hertzschen Kugeleindruck

Betrachten wir beispielsweise ein Hertzsches Kontaktproblem mit vernachlässigbarer Tangentialkraftkomponente, aber großer Reibung zwischen den Oberflächen von Probekörper und Indentor, so ist die Deformation der Oberfläche des Probekörpers in tangentialer Richtung nicht unabhängig von der des Indentors. Vielmehr muß innerhalb der Kontaktfläche  $r < a(P)$  bei weiterer Erhöhung der Druckkraft  $P$  um  $\Delta P$  gelten:

$$u_1(P + \Delta P) - u_1(P) = u_2(P + \Delta P) - u_2(P),$$

bzw. ausführlicher geschrieben:

$$u_1^R(P + \Delta P) - u_1^R(P) + u_1^N(P + \Delta P) - u_1^N(P) = u_2^R(P + \Delta P) - u_2^R(P) + u_2^N(P + \Delta P) - u_2^N(P).$$

Es stehen die Indizes 1 und 2 für Indentor und Probekörper sowie  $R$  und  $N$  für Normal- und Reibungsdeformation. In diesem Fall symbolisiert  $u$  nur die Deformation an der Oberfläche, also für  $z=0$ . Dies bedeutet, daß die weitere Deformation von bereits in Kontakt befindlichen Oberflächen nur gleich groß sein kann. Teilen wir nun beide Seiten der Gleichung durch  $\Delta P$  und führen den Grenzübergang  $\Delta P \rightarrow dP$  durch, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dP}(u_1^R + u_1^N) = \frac{d}{dP}(u_2^R + u_2^N)$$

Die Integration nach  $dP$  liefert:

$$u_1^R(P) + u_1^N(P) = u_2^R(P) + u_2^N(P) + C$$

Zur Bestimmung von  $C$  betrachten wir die letzte Identität bei  $P=0$  und erhalten mit  $C=0$ :

$$u_1^R + u_1^N = u_2^R + u_2^N \quad (92)$$

Im Falle eines absolut steifen Indentors würde demnach folgen:

$$u_2^R = -u_2^N$$

Da die Reibungskraft eine reine Scherkraft ist, können wir mit Hilfe der bekannten Gleichungen für die tangentialer Deformation  $u$  unter Berücksichtigung der Gleichungen von Fabrikant [66] (Abschnitt 3.2.) schreiben:

$$\Lambda(F_1^R + F_2^R)\Big|_{z=0} = -\Lambda(F_1^N + F_2^N)\Big|_{z=0}, \quad (93)$$

mit

$$F_1^N = H \frac{3P}{2\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1}{m_1 - 1} \right) \Psi(r, \varphi, z_1), \quad (94)$$

$$F_2^N = H \frac{3P}{2\pi a^3} \left( \frac{\gamma_2}{m_2 - 1} \right) \Psi(r, \varphi, z_2), \quad (95)$$

$$F_1^R = H \frac{3P}{4\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{m_1 - 1} \right) \chi(r, \varphi, z_1), \quad (96)$$

$$F_2^R = H \frac{3P}{4\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{m_2 - 1} \right) \chi(r, \varphi, z_2) \quad (97)$$

und  $z_i = z/\gamma_i$  ( $i=1,2$ ). Für die Funktionen  $\Psi$  und  $\chi$  erhalten wir mit Fabrikant [16]:

$$\Psi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi a} \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \ln[R + z] \rho d\rho d\varphi_0 \quad (98)$$

$$\chi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi a} \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} (z \ln[R + z] - R) \rho (\bar{\Lambda} f_R(\rho, \varphi_0) + \Lambda \bar{f}_R(\rho, \varphi_0)) d\rho d\varphi_0, \quad (99)$$

wobei R durch

$$R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi_0) + z^2. \quad (100)$$

Da die Reibungskraft rotationssymmetrisch ist, kann die Funktion  $f_R$  nur vom Radius  $\rho$  und nicht mehr vom Winkel  $\varphi_0$  abhängen. In (93) wurde dieser Fakt bereits berücksichtigt, da wegen (Abschnitt 3.3., Gleichung (30)):

$$F_3^R \sim \bar{\Lambda} f_R - \Lambda \bar{f}_R = 0$$

$F_3^R$  wegfällt. Vernachlässigen wir weiterhin jene Terme, die auch nach der Differentiation unter dem Integral in (99) noch  $e^{i\varphi}$ -Glieder enthalten (diese verschwinden bei der Integration über den vollen Flächenwinkel  $\varphi_0$ ), so folgt aus (93) die folgende Gleichung zur Bestimmung der Funktion  $f_R$ :

$$\left( H \frac{3P}{4\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{m_1 - 1} \right) \chi(r, \varphi, z_1) + H \frac{3P}{4\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{m_2 - 1} \right) \chi(r, \varphi, z_2) \right) \Big|_{z=0} =$$

$$\left( -H \frac{3P}{2\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1}{m_1 - 1} \right) \Psi(r, \varphi, z_1) - H \frac{3P}{2\pi a^3} \left( \frac{\gamma_2}{m_2 - 1} \right) \Psi(r, \varphi, z_2) \right) \Big|_{z=0}$$

Daraus folgen unter Berücksichtigung des oben Gesagten die beiden Integralgleichungen:

$$-\Psi(r, \varphi, z_1) \Big|_{z=0} = 2\gamma_2 \left( \int_0^{2\pi a} \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} (z_1 \ln[R_1 + z_1] - R_1) \rho \left( \frac{\partial}{\partial \rho} f_{R1}(\rho) \right) d\rho d\varphi_0 \right) \Big|_{z=0}, \quad (101)$$

$$-\Psi(r, \varphi, z_2) \Big|_{z=0} = 2\gamma_1 \left( \int_0^{2\pi a} \int_0^0 (z_2 \ln[R_2 + z_2] - R_2) \rho \left( \frac{\partial}{\partial \rho} f_{R_2}(\rho) \right) d\rho d\varphi_0 \right) \Big|_{z=0} \quad (102)$$

Wir erinnern in diesem Zusammenhang an die Darstellung des  $\Lambda$ -Operators in Polarkoordinaten:

$$\Lambda = e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

Während auf der linken Seite von (101) und (102) die bekannte sogenannte Hauptpotentialfunktion von Fabrikant [66] (Lösung in Anhang A) steht, befindet sich auf der rechten Seite beider Gleichungen ein recht komplizierter Integralterm mit der unbekanntenen Reibungsfunktion  $f_R$ . Um ihn zu bestimmen, lassen wir im folgenden die Indizes 1 und 2 der transversalen Isotropie unberücksichtigt und benutzen die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial z} (z \ln[R+z] - R) = \ln[R+z],$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln[R+z] = \frac{1}{R}.$$

Wir differenzieren (101) und (102) und erhalten:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} = 2\gamma \left( \int_0^{2\pi a} \int_0^0 (\ln[R+z]) \rho \left( \frac{\partial}{\partial \rho} f_R(\rho) \right) d\rho d\varphi_0 \right) \Big|_{z=0},$$

bzw.

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} = 2\gamma \left( \int_0^{2\pi a} \int_0^0 \frac{\rho}{R} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} f_R(\rho) \right) d\rho d\varphi_0 \right) \Big|_{z=0}. \quad (103)$$

Nun können wir die Integraldarstellung für den reziproken Abstand zwischen zwei Punkten, der von Fabrikant mittels [66]

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{dx}{\{(r^2 - x^2)(\rho^2 - g^2(x))\}^{1/2}} L\left(\frac{x^2}{r\rho}, \varphi - \varphi_0\right) \quad (104)$$

gegeben ist, benutzen. Hierbei gilt:

$$L\left(\frac{x^2}{r\rho}, \varphi - \varphi_0\right) = \frac{1 - \left(\frac{x^2}{r\rho}\right)^2}{1 + \left(\frac{x^2}{r\rho}\right)^2 - 2\frac{x^2}{r\rho} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$g^2(x) = x^2 \left[ 1 + \frac{z^2}{r^2 - x^2} \right]$$

$$l_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+a)^2 + z^2} - \sqrt{(r-a)^2 + z^2} \right).$$

Jetzt setzen wir (104) in (103) ein, ändern die Ordnung der Integration nach Fabrikant (siehe [16, S. 27]) und erhalten nach Integration über  $\varphi_0$  in den Grenzen von 0 bis  $2\pi$

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} = \gamma \left( 8 \int_0^l \frac{dx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^a \left[ \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \rho} f_R(\rho) \right)}{(\rho^2 - g^2(x))^{1/2}} \right] \rho d\rho \right) \Big|_{z=0}. \quad (105)$$

Auf beide Seiten wenden wir nun den Operator  $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\zeta d\zeta}{(t^2 - \zeta^2)^{1/2}}$  an und erhalten

unter Verwendung folgender bekannter Eigenschaften von Operatoren vom Abelschen Typ

$$\int_g^a \frac{dt}{(t^2 - g^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \int_t^a \frac{f(\zeta) \zeta d\zeta}{(\zeta^2 - t^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2} f(g)$$

$$\int_g^a \frac{F(t) dt}{(t^2 - g^2)^{1/2}} = f(g)$$

mit der Lösung

$$\frac{d}{dt} \int_t^a \frac{f(\zeta) \zeta d\zeta}{(\zeta^2 - t^2)^{1/2}} = -\frac{\pi}{2} F(t):$$

$$-\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\zeta d\zeta}{(t^2 - \zeta^2)^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\zeta, \varphi, z) \Big|_{z=0} = \gamma \left( 4\pi \int_t^a \left[ \frac{\left( \frac{\partial}{\partial \rho} f_R(\rho) \right)}{(\rho^2 - g^2(x))^{1/2}} \right] \rho d\rho \right) \Big|_{z=0} \quad (106)$$

Hierbei benutzen wir die Tatsache, daß innerhalb der Kontaktfläche, also für  $z=0$  und  $r < a$ ,  $l_1 = \zeta = r$  und

$g(x)=x$  gilt. Der nächste anzuwendende Operator ist  $\frac{d}{dy} \int_y^a \frac{tdt}{(t^2 - y^2)^{1/2}}$ . Wir erhalten:

$$-\frac{d}{dy} \int_y^a \frac{tdt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\zeta d\zeta}{(t^2 - \zeta^2)^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\zeta, \varphi, z) \Big|_{z=0} = -2\gamma\pi^2 y \left( \frac{\partial}{\partial y} f_R(y) \right), \quad (107)$$

bzw.

$$\frac{1}{2\gamma\pi^2 y} \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{tdt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\zeta d\zeta}{(t^2 - \zeta^2)^{1/2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\zeta, \varphi, z) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial y} f_R(y). \quad (108)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß  $y$  jetzt die Bedeutung des Radius hat, also  $y=r$  gilt. Wir spalten das innere Integral unter Benutzung der Gleichung

$$\int_0^t \frac{f(\zeta)d\zeta}{(t^2 - \zeta^2)^{1/2}} = \frac{2}{\pi} t \int_0^a \frac{dy}{t^2 - y^2} \int_y^a \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta^2 - y^2)^{1/2}}$$

auf und erhalten mit

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\zeta, \varphi, z) \right|_{z=0} = -2\pi\sqrt{a^2 - r^2} :$$

$$\frac{1}{2\gamma\pi^2 y} \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{tdt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} \frac{2}{\pi} t \int_0^a \frac{dy}{t^2 - y^2} \int_y^a \frac{-2\pi\sqrt{a^2 - \zeta^2}d\zeta}{(\zeta^2 - y^2)^{1/2}} = \frac{\partial}{\partial y} f_R(y).$$

Das innere Integral wurde bereits von Fabrikant [66] gelöst. Durch Verwendung dieser Lösung bekommen wir

$$-\frac{1}{2\gamma\pi y} \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{tdt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \frac{d}{dt} t \int_0^a \frac{(a^2 - y^2)dy}{t^2 - y^2} = \frac{\partial}{\partial y} f_R(y)$$

Mit der folgenden Lösung für das Integral nach dy

$$\int_0^a \frac{(a^2 - y^2)dy}{t^2 - y^2} = a + \frac{a^2 - t^2}{t} \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right]$$

erhält man

$$-\frac{1}{\gamma\pi y} \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{\left( a - t \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right] \right) t dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} = \frac{\partial}{\partial y} f_R(y).$$

Das nun noch verbliebene Integral konnte vom Autor bisher nicht vollständig gelöst werden. Nach teilweiser Lösung erhält man

$$\frac{1}{\gamma\pi y} \frac{d}{dy} \left( \int_y^a \frac{t^2 \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} - a\sqrt{a^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_R(y) \quad (109)$$

Die Funktion  $f_R$  finden wir schließlich durch Integration von (109) nach y in den Grenzen von 0 bis y

$$\int_0^y \left[ \frac{1}{\gamma\pi y} \frac{d}{dy} \left( \int_y^a \frac{t^2 \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} - a\sqrt{a^2 - y^2} \right) \right] dy + f_R(0) = f_R(y).$$

Partielle Integration führt zu

$$\left[ \frac{1}{\gamma\pi y} \left( \int_y^a \frac{t^2 \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right]_0^y + \int_0^y \left[ \frac{1}{\gamma\pi y^2} \left( \int_y^a \frac{t^2 \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right] dy - \int_0^y \left[ \frac{a}{\gamma\pi y} \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right] dy + f_R(0) = f_R(y).$$

Aus Symmetriegründen muß die Reibungskraft bei  $y=r=0$  Null sein. Eine weitere einfache Rechnung liefert daher

$$\frac{1}{\gamma\pi} \left( \left[ \frac{1}{y} \left( \int_y^a \frac{t^2 \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right]_0^y + \int_0^y \left[ \frac{1}{y^2} \left( \int_y^a \frac{t^2 \operatorname{ar} \tanh \left[ \frac{a}{t} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right] dy \right) - \frac{a}{\gamma\pi} \arcsin \left[ \frac{y}{a} \right] = f_R(y). \quad (110)$$

Die verbliebenen Integralausdrücke lassen sich numerisch behandeln. Dies ist allerdings schwierig und bedarf größter Sorgfalt. Da eine weitere Betrachtung von  $f_R$  in dieser Darstellung sehr unbequem ist, soll versucht werden, eine andere Form der Lösung der Integralgleichung zu finden. Wir können das innere Integral der Gleichung (108) lösen, wenn wir die Substitution

$$g = \frac{t^2 - \zeta^2}{a^2 - \zeta^2}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{ga^2 - t^2}{g-1}}, \quad d\zeta = \frac{(a^2 - t^2)dg}{2(g-1)^2 \sqrt{\frac{ga^2 - t^2}{g-1}}}$$

anwenden. Das neue Integral lautet

$$\int \frac{1}{2} \frac{a^2 - t^2}{\sqrt{g}(g-1)^2} dg.$$

Es läßt sich ohne weiteres auswerten, und man erhält

$$\frac{1}{2} \left( \frac{(t^2 - a^2)\sqrt{g}}{g-1} + \frac{1}{2}(t^2 - a^2) \left( \ln[1 - \sqrt{g}] - \ln[1 + \sqrt{g}] \right) \right).$$

Nach Einsetzen der Grenzen und Bildung der Ableitung wird aus (108)

$$-\frac{1}{\gamma\pi^2 y} \frac{d}{dy} \int_y^a \frac{tdt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \left( a + it \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_R(y),$$

wobei wir Gebrauch von der Identität  $\arctan[x] = -\frac{i}{2} \ln \left[ \frac{1+ix}{1-ix} \right]$  gemacht haben. Die teilweise Lösung liefert

$$\frac{1}{\gamma\pi} \frac{d}{dy} \left( - \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} - a \sqrt{a^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} f_R(y) \quad (111)$$

Nach Integration über  $y$  in den Grenzen von 0 bis  $y$  finden wir

$$- \frac{1}{\gamma\pi} \left( \left[ \frac{1}{y} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right]_0^y + \int_0^y \left[ \frac{1}{y^2} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right] dy \right) - \frac{a}{\gamma\pi} \arcsin \left[ \frac{y}{a} \right] = f_R(y).$$

Der nun noch vorhandene Integralausdruck läßt sich numerisch wesentlich besser handhaben als die vorherige Lösung. Im isotropen Fall würde  $\gamma=1$  gelten. Bei transversaler Isotropie erhalten wir für die Potentialfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  hingegen die zwei folgenden Reibungskraftfunktionen

$$- \frac{1}{\gamma_2\pi} \left( \left[ \frac{1}{y} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right]_0^y + \int_0^y \left[ \frac{1}{y^2} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right] dy \right) - \frac{a}{\gamma_2\pi} \arcsin \left[ \frac{y}{a} \right] = f_{R1}(y) \quad (112)$$

$$- \frac{1}{\gamma_1\pi} \left( \left[ \frac{1}{y} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right]_0^y + \int_0^y \left[ \frac{1}{y^2} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right] dy \right) - \frac{a}{\gamma_1\pi} \arcsin \left[ \frac{y}{a} \right] = f_{R2}(y). \quad (113)$$

Die Funktion  $i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right]$  läßt sich in eine Reihe entwickeln, deren Glieder leicht integrierbar sind.

Wir finden mit der Reihenentwicklung

$$i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 - \frac{t}{a}}{1 + \frac{t}{a}} \right] = \frac{t}{a} + \frac{1}{3} \left( \frac{t}{a} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{t}{a} \right)^5 + \frac{1}{7} \left( \frac{t}{a} \right)^7 + \dots$$

folgende Darstellung für  $f_R$

$$-\frac{1}{\gamma\pi} \left( \frac{y}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2 y + 2y^3}{9a^3} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{3a^4 y + 4a^2 y^3 + 8y^5}{75a^5} \sqrt{a^2 - y^2} + \dots \right) - \frac{a}{\gamma\pi} \arcsin \left[ \frac{y}{a} \right] = f_R(y).$$

Die Entwicklung wurde nach dem 3. Glied abgebrochen (siehe Pfeile).

Im Falle eines elastischen Indentors müssen die Reibungskräfte auch von den Materialeigenschaften beider Körper abhängen. Nach entsprechender Auflösung und der zusätzlichen Überlegung, daß im Falle gleicher tangentialer Verzerrungen bei Indentor und Prüfkörper keine Reibung auftreten kann, erhalten wir aus Gleichung (92)

$$f_{R1}(r) = \frac{K_1^I - K_1}{2\gamma_2 K_1} \Theta(r),$$

$$f_{R2}(r) = \frac{K_2^I - K_2}{2\gamma_1 K_2} \Theta(r),$$

wobei

$$\frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{1}{y} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right]_0^y + \int_0^y \left[ \frac{1}{y^2} \left( \int_y^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - y^2)^{1/2}} \right) \right] dy \right) + \frac{2a}{\pi} \arcsin \left[ \frac{y}{a} \right] = \Theta(y)$$

Die  $K_i$  ( $i=1,2$ ) sind dabei durch

$$K_i = \frac{H\gamma_i}{m_i - 1}$$

definiert. Ein zusätzlicher hochgestellter Index I bezeichnet die entsprechenden Indentorkonstanten. Die Konstante H ist durch Gleichung (18) gegeben.

### 5.1.2. Haftreibung beim Kugeleindruck mit größeren Eindringtiefen

Ist die Kraft, mit welcher der Indentor in den Probekörper gepreßt wird, so groß, daß auch Tangentialkräfte mit berücksichtigt werden müssen, so entsteht die zusätzliche Bedingung

$$u_1^{Rt} + u_1^T = u_2^{Rt} + u_2^T. \quad (114)$$



Hierbei bezeichnet  $u^T$  die zur tangentialen Kraftkomponente gehörende Verzerrung und  $u^{Rt}$  die zugehörige durch die Reibung verursachte Deformation. Die Reibungskraft koppelt hierbei wiederum als Scherkraft über  $\tau_z$  ein, während die Tangentialkraft über  $\sigma_{\tau}$  einkoppelt. Man erhält also erneut eine Integralgleichung, die, wie in 5.1.1. vorgeführt, nach den Zwangskräften aufzulösen wäre. Da es, wie in Abschnitt 4.2. gezeigt wurde, möglich ist, die vollständige Lösung eines Kugeleindrucks für große Eindringtiefen durch eine geeignete Koordinatentransformation zu gewinnen, ist es hier nicht nötig, die Gleichungen für diese Zwangskräfte abzuleiten. Es ist wesentlich einfacher, das Problem des Nichthertzchen Kugeleindrucks mit Reibung zunächst im Koordinatensystem  $+$  zu lösen (5.1.1.) und anschließend entsprechend der in Abschnitt 4.2. angegebenen Formeln zu transformieren.

## 5.2. Gleitreibung

Übersteigen die Zwangskräfte  $f_{Rti}$  (Reibungskraft der Tangentialkraft) und  $f_{Ri}$  (Reibungskraft der Hertzschen Normalkraft) in ihrer Summe den zugehörigen Reibungswiderstand, der durch

$$r_H P_n(r) = r_H \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - r^2} \equiv r_H \frac{3P}{2\pi a^3} f_n(r) \quad (115)$$

(mit  $r_H$  als Haftreibungskoeffizient) gegeben ist, so kommt es zu Gleiteffekten. Die zugehörige Bedingung für den Gleitbeginn lautet also

$$\sum_{i=1}^2 [f_{Rti} + f_{Ri}] = r_H f_n(r). \quad (116)$$

Gleichung (116) dient auch zur Bestimmung der Grenze des Bereiches, in dem noch Haftreibung vorliegt.

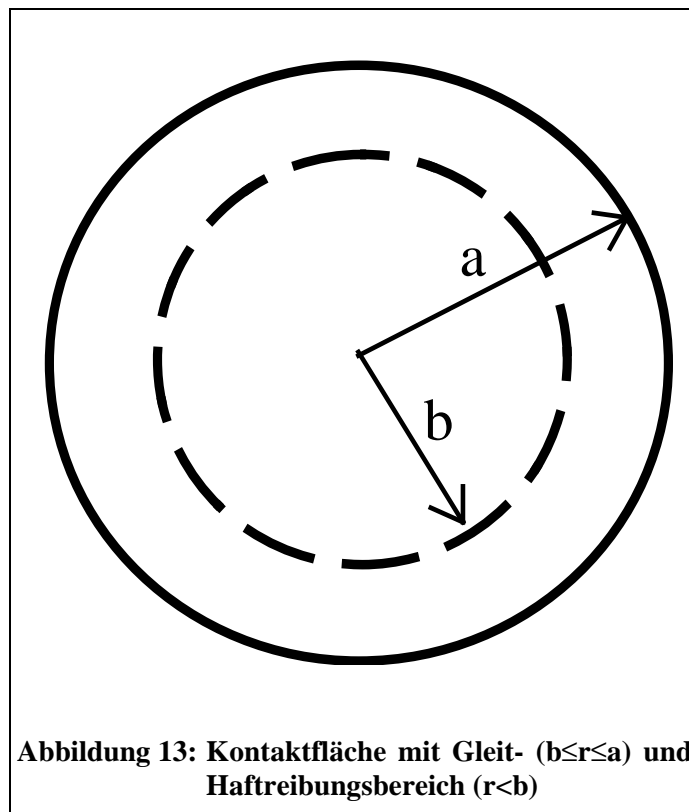


Abbildung 13 verdeutlicht den Zustand nach einem derartigen Gleitvorgang. Während innerhalb des Bereiches  $r < b$  noch Haftreibung wirkt und die Gleichungen (92) und (114) Gültigkeit haben, konnten im Bereich  $b \leq r \leq a$  die Oberflächen beider Körper soweit, wie es die dort wirkende Gleitreibung zuließ, verrutschen. Die innerhalb dieses Streifens auf die Körper einwirkenden Kräfte sinken dann während des Gleitvorgangs gegenüber den zuvor durch die Haftreibung verursachten Zwangskräften ab. Wegen der beim Gleitvorgang noch immer wirksamen Gleitreibung bleiben die Deformationsmöglichkeiten in tangentialer Richtung aber weiterhin eingeschränkt. Die neue Zwangskraft ist entgegengesetzt gleich der Gleitreibungskraft, deren Betrag durch

$$r_G P_n(r) = r_G \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - r^2} \equiv r_G \frac{3P}{2\pi a^3} f_n(r) \quad (117)$$

gegeben ist. Ihre Wirkungsrichtung hingegen ist von den Materialkonstanten abhängig und gleich der Wirkungsrichtung der entsprechenden Zwangskräfte im Haftungsfall. Die zugehörigen Potentialfunktionen lauten

$$F_1 = r_G H \frac{3P}{2\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{m_1 - 1} \right) \frac{\partial}{\partial r} \chi(r, \varphi, z_1), \quad (118)$$

$$F_2 = r_G H \frac{3P}{2\pi a^3} \left( \frac{\gamma_1 \gamma_2}{m_2 - 1} \right) \frac{\partial}{\partial r} \chi(r, \varphi, z_2), \quad (119)$$

mit

$$\chi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_b^a (z \ln[R + z] - R) \rho \sqrt{a^2 - r^2} dp d\varphi_0. \quad (120)$$

Die Konstante  $r_G$  wird hier so verwendet, daß sie je nach Wirkungsrichtung der Zwangskraft entweder  $+|r_G|$  oder  $-|r_G|$  ist. Bis auf das Vorzeichen ist somit die Kopplung zwischen Indentor und Prüfkörper verschwunden. Die auftretenden Integrale wurden bereits von Hanson [13] gelöst. Es ist allerdings zu beachten, daß die Lösungen für das zugehörige elastische Feld wegen der unteren Integrationsgrenze  $b$  in Gleichung (120) durch

$$\chi(r, \varphi, z) = \chi(l_1(a), r, \varphi, z) - \chi(l_1(b), r, \varphi, z)$$

gegeben ist, wobei  $l_1(x)$  hier in der Form

$$l_1(x) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+x)^2 + z^2} - \sqrt{(r-x)^2 + z^2} \right)$$

verwendet wird.

Die Umsetzung der Lösungen von Hanson ist reine, allerdings recht umfangreiche Schreibearbeit und soll darum hier nicht vorgeführt werden. Im Anhang E wird eine Darstellung der Resultate gegeben. Das aus der neuen Zwangskraft folgende elastische Feld kann leicht mit Hilfe dieser Ableitungen sowie der Gleichungen (23) bis (26) von Abschnitt 3.2. berechnet werden.

### 5.3. Gleit- und Haftreibungsbereiche: Superposition der elastischen Felder

Dem elastischen Feld der Gleitreibung muß noch das Feld des Haftbereiches im Zentrum des Kontaktes (Abbildung 13) hinzugefügt werden. Jedoch ist die direkte Berechnung desselben, ausgehend von den Zwangskräften, wegen der nur numerisch faßbaren Integralausdrücke etwas komplizierter. Die Potentialfunktionen für die Zwangskraft im Haftungsfall sind durch die Gleichungen (96), (97) und (99) gegeben. Das Integral in (99) ergibt mit der nun bekannten Zwangskraft  $f_R$

$$\chi(r, \varphi, z) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a (z \ln[R+z] - R) \rho \left( \frac{1}{\pi \rho} \frac{d}{d\rho} \left( - \int_{\rho}^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} - a \sqrt{a^2 - \rho^2} \right) \right) d\rho d\varphi_0, \quad (121)$$

wobei bei der Anwendung des  $\Lambda$ -Operators berücksichtigt werden muß, daß

$$f_R(\rho, \varphi_0) = e^{i\varphi_0} f_R(\rho).$$

Außerdem haben wir sämtliche Materialkonstanten von  $f_R$  weggelassen, da sie später leicht wieder hinzumultipliziert werden können. Vereinfachung und zweimaliges Ableiten nach  $z$  liefert

$$\chi(r, \varphi, z) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho}{R} \left( \frac{1}{\pi \rho} \frac{d}{d\rho} \left( - \int_{\rho}^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right) + \frac{a}{\pi \sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) d\rho d\varphi_0.$$

Nun können wir wieder die Integraldarstellung für den reziproken Abstand zweier Punkte anwenden und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi(r, \varphi, z) = 8 \int_0^{l_1} \frac{dx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^a \left[ \frac{\frac{1}{\pi \rho} \frac{d}{d\rho} \left( - \int_{\rho}^a \frac{t^2 i \arctan \left[ i \frac{t}{a} \right] dt}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}} \right) + \frac{a}{\pi \sqrt{a^2 - \rho^2}}}{(\rho^2 - g^2(x))^{1/2}} \right] \rho d\rho.$$

Die Ausführung der Differentiation unter dem Integral liefert singuläre Terme, so daß man auf diese Weise, d.h. durch direkte Berechnung der Potentialfunktionen, nicht weiterkommt. Jedoch kann man unter Verwendung von Sätzen der Potentialtheorie eine wesentlich einfachere Integraldarstellung erhalten. Bei Vernachlässigung der Faktoren der Materialkonstanten und mit der Identität

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(\zeta, \varphi, z) \Big|_{z=0} = -2\pi \sqrt{a^2 - r^2}$$

entnehmen wir aus Gleichung (103)

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Psi(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} = 2\pi \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi(r, \varphi, z) \Big|_{z=0}.$$

Mit Hilfe der aus der Potentialtheorie bekannten Gleichung

$$f(r, \varphi, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial z} f(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} r d\varphi dr$$

für eine beliebige Potentialfunktion  $f$ , die im unendlichen Halbraum definiert und deren Ableitung bei  $z=0$  gegeben ist ([73], S. 185), ist es möglich zu schreiben

$$\frac{\partial}{\partial z} \chi(r, \varphi, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi(r, \varphi, z) \Big|_{z=0} r d\varphi dr = -\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{R} \sqrt{a^2 - r^2} r d\varphi dr.$$

Die Lösung liefert exakt die negative, sogenannte Hauptpotentialfunktion  $\Psi$  nach Fabrikant [66], welche auch das Hertz-Feld beschreibt. Einsetzen der Konstanten liefert die vollständigen Potentiale

$$F_1^R = H \frac{3P}{2\pi a^3} \frac{K_1^I - K_1}{2K_1} \left( \frac{\gamma_1}{m_1 - 1} \right) \Psi(r, \varphi, z_1), \quad (122)$$

$$F_2^R = H \frac{3P}{2\pi a^3} \frac{K_2^I - K_2}{2K_2} \left( \frac{\gamma_2}{m_2 - 1} \right) \Psi(r, \varphi, z_2). \quad (123)$$

Die Wirkung der Zwangskräfte, die aus der Haftung zwischen Indentor und Probekörper resultieren, auf das elastische Feld ist also derart, daß sie der Deformation in Abhängigkeit von den Materialkonstanten entgegenwirkt. Ähnliche Resultate erhielten auch Eason und Shield [81] für kegelförmige Indentoren sowie Faulkner und Tang für Kugelindentoren ([56], [78], FEM-Rechnungen). Das zugehörige elastische Feld läßt sich aus den im Anhang A gegebenen Gleichungen herleiten.

$$u_n = \frac{3HP}{2a^3} r e^{i\varphi} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \frac{K_k^I - K_k}{2K_k} \left\{ -z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \left( 1 - \frac{l_{1k}^2 + 2a^2}{3r^2} \right) + \frac{2a^3}{3r^2} \right\}, \quad (124)$$

$$w_n = \frac{3HP}{4a^3} \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \frac{K_k^I - K_k}{2K_k} \left\{ (2a^2 + 2z_k^2 - r^2) \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + (l_{2k}^2 - a^2)^{1/2} \left( \frac{3l_{1k}^2 - 2a^2}{a} \right) \right\}, \quad (125)$$

$$\sigma_{1n} = \frac{6HPA_{66}}{a^3} \sum_{k=1}^2 \frac{[\gamma_k^2 - (1+m_k)\gamma_3^2]}{(m_k - 1)\gamma_k} \frac{K_k^I - K_k}{2K_k} \left\{ z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} - (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\}, \quad (126)$$

$$\sigma_{2n} = -\frac{2HP}{a^3} \frac{e^{2i\varphi}}{r^2} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \frac{K_k^I - K_k}{2K_k} \left\{ 2a^3 - (l_{1k}^2 + 2a^2)(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\}, \quad (127)$$

$$\sigma_{zn} = \frac{3P}{2\pi a^3 (\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \gamma_k \frac{K_k^I - K_k}{2K_k} \left\{ z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} - (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\}, \quad (128)$$

$$\tau_{zn} = \frac{3P}{4\pi a^3(\gamma_1 - \gamma_2)} r e^{i\varphi} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{K_k' - K_k}{2K_k} \left\{ -\sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2} \right\}, \quad (129)$$

wobei die Abkürzungen

$$l_{1k} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+a)^2 + z_k^2} - \sqrt{(r-a)^2 + z_k^2} \right)$$

$$l_{2k} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+a)^2 + z_k^2} + \sqrt{(r-a)^2 + z_k^2} \right)$$

verwendet wurden.

Bei einem steifen Indentor können die Gleichungen nicht direkt übertragen werden, sondern es muß in Gleichung (92) der entsprechende Grenzübergang durchgeführt werden.

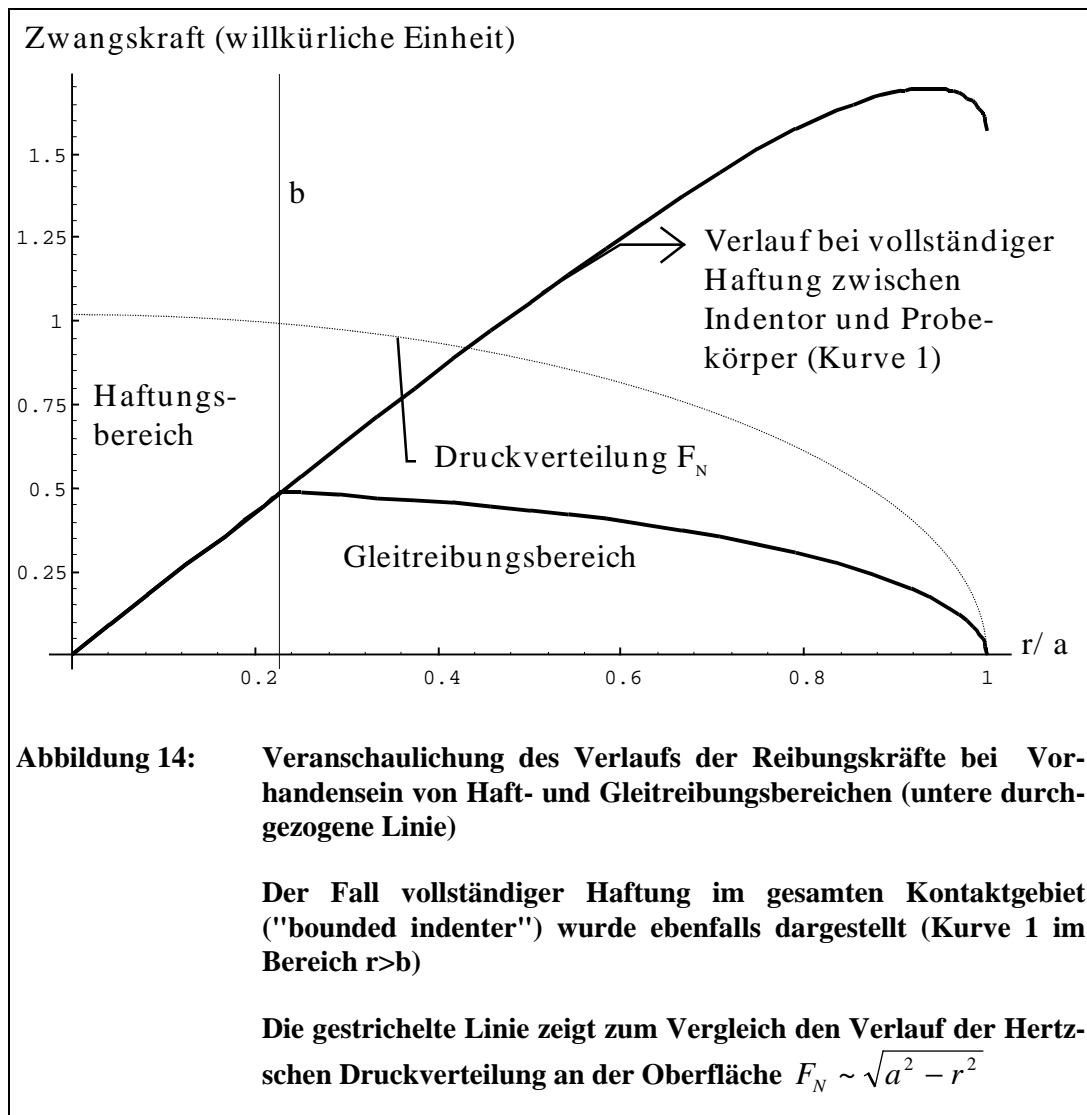
Wie bereits erwähnt, kann die Lösung für das Nichthertzsche Problem auch hinsichtlich der Reibung durch Koordinatentransformation erhalten werden.

Für den Fall, daß bereits Gleiteffekte aufgetreten sind, gilt die Haftungsbedingung im Bereich  $r < b$ . In den korrespondierenden Feldgleichungen ist dann  $a$  durch  $b$  zu ersetzen. Im Außenbereich wirkt nur noch die Gleitreibung, deren Feld im Anhang E hergeleitet wird.

Abbildung 14 zeigt den Verlauf der Reibungskräfte für die Fälle:

1. Haftung im gesamten Kontaktgebiet (Kurve 1, "bounded indenter" [86], S. 302ff),
2. Haftreibung im Bereich  $r < b$  und Gleitreibung im Bereich  $b \leq r \leq a$  (Reibungskoeffizient  $\mu=0.5$ ).

Aus dem Verlauf der Kurve von 1. wird klar, daß wegen Gleichung (116) keine Reibungskraft der Gestalt  $F_R = \mu * F_N$  (Reibungskraft = Faktor \* Normalkraft) mit  $\mu < 1$  eine derartige Haftung verursachen kann, wie sie für 1. notwendig wäre. Dies funktioniert nur durch regelrechtes Verkleben ("sticking") des Indentors mit dem Probekörper.



Insgesamt setzt sich das elastische Feld beim Kugeleindruck also aus mehreren separaten Feldern zusammen, die von unterschiedlichen Kräften erzeugt werden. So wirken im gesamten Kontaktbereich  $r < a$  Normal-  $n$  (Anhang A) und Tangentialkomponente  $t$  (Kapitel 4) der Druckkraft  $P$  (Abbildung 7). Zusätzlich wirkt die Zwangskraft der Normal- und die Zwangskraft der Tangentialkomponente im Innenbereich  $r < b$  (siehe Abbildung 13, Haftreibungsbereich) sowie der Gleitkraft im Bereich  $b < r < a$  (Gleitbereich). Superpositioniert man sämtliche wirkenden Kräfte und deren elastische Felder, so erhält man die vollständige Lösung des sphärischen Kontaktproblems. Wegen der notwendigen Störungsrechnung (4.1.) ist diese Vorgehensweise allerdings recht umständlich.

Wie bereits am Ende von Abschnitt 5.1.1. erwähnt, kann dasselbe Resultat aber auch einfacher durch eine Berechnung der Normal- sowie der zugehörigen Zwangs- und Gleitkräfte im Koordinatensystem  $+$  und anschließender Koordinatentransformation in Zylinderkoordinaten gewonnen werden [85].

## 6. Kontaktprobleme bei geschichteten Materialien

Kontaktprobleme lassen sich mathematisch als Potentialprobleme mit Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen formulieren ([16], S. 71ff und S. 337ff). Unter Zuhilfenahme der Methode von Fabrikant ([16], S. 9 - 70) können diese Probleme inzwischen sehr vorteilhaft mit Hilfe der Greenschen Funktion behandelt werden. Ein allgemeiner Übergang von homogenen Materialien zu solchen, welche geschichtet aufgebaut sind, erfordert daher die Betrachtung der Methode der Greenschen Funktion im Falle inhomogener Räume [87]. Eine derartige Betrachtung hier anzustellen, hätte wenig Sinn, da sie

1. den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde,
2. bereits ausgiebig in anderen Bereichen behandelt wurde<sup>6</sup>.

Für unsere Zwecke genügt es, die für die Lösung notwendigen Ansätze ohne allgemeine Herleitungen und Beweise direkt anzugeben. Die Rechtfertigung für dieses Vorgehen liefert der sogenannte Eindeutigkeitssatz der Potentialtheorie ([18], S. 49), der besagt, daß eine einmal - gleichwie - gefundene Lösung eines Potentialproblems mit Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen auch die einzige Lösung für dieses konkrete Problem sein muß. Durch eine Probe kann die Richtigkeit des Ansatzes jederzeit überprüft werden. Eine weitere Rechtfertigung liefert die Tatsache, daß jede der im folgenden dargestellten Ansätze einfach durch konsequente Anwendung der "Methode der Bildladungen" (siehe Fußnote) erhalten werden kann.

Ein Kontaktproblem mit einer normal auf die Oberfläche einwirkenden Kraft  $P$ , die zu einer Kontaktspannung  $\sigma_{zz}(z=0)$  in der Oberfläche führt, kann allgemein wie folgt formuliert werden ([16], S. 338, Gleichung (5.1.4), sowie Kapitel 3):

$$F_k = konst * c_k \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_{zz}(z=0) \ln[R_k + z_k] r dr d\varphi$$

$$R_k = R(z_k); \quad z_k = \frac{z}{\gamma_k}; \quad c_k = \frac{H\gamma_k}{m_k - 1}; \quad k = 1, 2$$

Die Konstante *konst* ist dabei so zu wählen, daß die Integration

$$konst \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_{zz}(z=0) r dr d\varphi$$

gerade die Gesamtdruckkraft  $P$  ergibt. Nun sind neben den Randbedingungen bei  $z=0$  aber noch zusätzliche Bedingungen (im Weiteren Anschlußbedingungen genannt) bei  $z=z_i$  (mit  $z_i$ =Ort eines Interfaces im geschichtet aufgebauten Material=Halbraum) hinsichtlich der Stetigkeit bestimmter Größen des elastischen Feldes zu fordern. Diese müssen für  $w$ ,  $u$ ,  $\tau_z$  sowie  $\sigma_{zz}$  für alle Potentialfunktionen an sämtlichen Interfaces  $i$  ( $i=1,2,\dots,t-1$ , mit  $t$  = Anzahl der unterschiedlichen Schichtbereiche) formuliert

<sup>6</sup> z.B. Räume mit unterschiedlichen Elektrizitätskonstanten, welche in der Elektrostatik auf die sogenannte "Methode der Bildladungen" ([18], S. 47 - 72 sowie 125 - 153) führen

werden. Es gilt nun, einen Ansatz zu finden, der sowohl diese Anschlußbedingungen als auch die Dirichletschen bzw. Neumannschen Randbedingungen befriedigt.

### 6.1. Potentialansatz für transversal isotrope, lateral geschichtete Materialien

Um die Beschriftungen nicht unnötig zu verkomplizieren, soll in diesem Abschnitt das  $z^+$ -Koordinatensystem (Abschnitt 4.2.) derart verwendet werden, daß  $z=z^+$  gelte.  $z=0$  bezeichnet dann, wie in der Literatur üblich ([30] - [35], [39] sowie [65] - [71]), die Halbraumbegrenzung bzw. die Oberfläche des elastischen Körpers.

Wie bereits von der Methode der Bildladungen ([18], S. 66) her bekannt, lassen sich durch die Einführung bestimmter neuer Potentialfunktionen Lösungen für Dirichletsche und Neumannsche Potentialprobleme in homogenen Räumen auf inhomogene übertragen. Im Falle von Kontaktproblemen für geschichtete, querisotrope Räume wird diese Prozedur allerdings dadurch erschwert, daß stets mehrere Potentialfunktionen  $F_k=F(z/\gamma_k)$  an der Lösung des Problems beteiligt sind. Diese Struktur der Lösungen führt zu Besonderheiten bei der Behandlung von lateral geschichteten Halbräumen mit Querisotropie.

Bestehe der Halbraum aus insgesamt  $m$  Schichten, wobei die  $t$ -te Schicht ( $t=n+1$ ) das Substrat und die erste Schicht die Oberflächenschicht bezeichnen, so sei die Konstante  $\gamma_k$  ( $k=1,2,3$ ) für die  $i$ -te Schicht mit  $\gamma_k^i$  ( $i=1,2,\dots,t$ ) bezeichnet. Bei  $z=z_i$  ( $z_0=0$ ) befinde sich der Übergang von der  $i$ -ten zur  $(i+1)$ -ten Schicht. Für die Lösung eines Potentialproblems mit Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingungen in diesem Raum sei der folgende Ansatz gewählt:

$$F_k^{inh}(r, \varphi, z) = \sum_{i=1}^t \left[ \sum_{n_i=0}^{\infty} \left\{ a^j_{q\dots n\dots} * \left[ F_{q\dots n\dots}^+ \right]_k^j + b^j_{q\dots n\dots} * \left[ F_{q\dots n\dots}^- \right]_k^j \right\} \right] \quad (130)$$

$$k = 1,2,3; \quad q\dots, n\dots = q_1, q_2, \dots, q_t, n_1, n_2, \dots, n_t$$

für  $z_{j-1} < z < z_j$ , wobei:  $\left[ F_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^j(x, y, z) = F(x, y, \left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^j)$  mit  $F_k$  als Potentiallösung des entsprechenden Problems für den homogenen Raum.

Es gelten folgende Festlegungen:



$$\begin{aligned}
\left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^i &= \sum_{l=1}^i z_l \left( \frac{2q_l}{\gamma_3^l} + \frac{2n_l}{\gamma_k^l} \right) \pm \frac{z}{\gamma_k^i} + \sum_{l=1}^{i-1} z_l * \left[ \frac{1}{\gamma_k^l} - \frac{1}{\gamma_k^{l+1}} \right] \\
k &= 1, 2 \\
\left[ z_{q\dots}^\pm \right]_k^i &= \sum_{l=1}^i \left( z_l \frac{2q_l}{\gamma_3^l} \right) \pm \frac{z}{\gamma_3^i} + \sum_{l=1}^{i-1} z_l * \left[ \frac{1}{\gamma_3^l} - \frac{1}{\gamma_3^{l+1}} \right], \quad (131) \\
k &= 3 \\
\left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_3^i &= \sum_{l=1}^i z_l \left( \frac{2q_l}{\gamma_3^l} + \frac{2n_l}{\gamma_k^l} \right) \pm \frac{z}{\gamma_3^i} + \sum_{l=1}^{i-1} z_l * \left[ \frac{1}{\gamma_k^l} - \frac{1}{\gamma_k^{l+1}} \right] + z_i * \left[ \frac{1}{\gamma_k^i} - \frac{1}{\gamma_3^i} \right] \\
k &= 1, 2
\end{aligned}$$

$$\left[ z_{0\dots\dots 0}^+ \right]_k^j = \left[ z_{0,0,\dots,0,0,0,\dots,0}^+ \right]_k^j \equiv z_k^j = \frac{z}{\gamma_k^j} + \sum_{l=1}^{j-1} z_l \left[ \frac{1}{\gamma_k^l} - \frac{1}{\gamma_k^{l+1}} \right], \quad (132)$$

Wesentlich einfacher wird es im vollständig isotropen Fall, denn hier muß die z-Koordinate lediglich wie folgt transformiert werden.

$$z_{n_1, n_2, \dots, n_t}^+ = \begin{cases} 2 \sum_{l=1}^t n_l * (z_l - z_{l-1}) + z \\ n_j = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \\ n_m = \Theta(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_{m-1} - 1) * \{0, 1, 2, \dots, \infty\}; \\ m = i, i+1, i+2, \dots, t \end{cases} \quad \begin{matrix} z_{i-1} \leq z < z_i; \\ i = 1, 2, 3, \dots, t+1 \end{matrix}, \quad (133)$$

$$z_{n_1, n_2, \dots, n_t}^- = \begin{cases} 2 \sum_{l=1}^t n_l * (z_l - z_{l-1}) - z \\ n_j = 1, 2, 3, \dots, \infty; \quad j = 1, 2, \dots, i \\ n_m = \Theta(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_{m-1} - 1) * \{0, 1, 2, \dots, \infty\}; \\ m = i+1, i+2, \dots, t \end{cases} \quad \begin{matrix} z_{i-1} \leq z < z_i; \\ i = 1, 2, 3, \dots, t \end{matrix}, \quad (134)$$

mit:

$$\Theta(n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_{m-1} - 1) = \Theta(n_1 - 1) * \Theta(n_2 - 1) * \dots * \Theta(n_{m-1} - 1)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}; \quad z_0 = 0; \quad z_{t+1} = \infty$$

Es ist weiterhin zu beachten, daß die  $a_{q\dots n\dots}^j, b_{q\dots n\dots}^j$  überall dort automatisch Null zu setzen sind, wo die entsprechenden  $z_{q\dots n\dots}^\pm$  nach den oben gegebenen Gleichungen (131) bis (134) nicht existieren. Die Größen  $a_k^j, b_k^j$  können nun aus den konkreten Anschluß- und Randbedingungen bestimmt werden.

Ein Beispiel zum besseren Verständnis:

Es sei definiert:

$$[F_{0\dots 0\dots}^+]_k^j \equiv F_k^i = F\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^i} + \sum_{l=1}^{i-1} z_l \left[ \frac{1}{\gamma_k^l} - \frac{1}{\gamma_k^{l+1}} \right]\right). \quad (135)$$

Der Leser überzeuge sich durch Nachrechnen, daß der obige Ansatz die folgende allgemeine Anschlußbedingung

$$F_k^i \Big|_{z=z_{i-1}} = F_k^{i-1} \Big|_{z=z_{i-1}} = F\left(\sum_{l=1}^{i-2} z_l \left[ \frac{1}{\gamma_k^l} - \frac{1}{\gamma_k^{l+1}} \right] + \frac{z_{i-1}}{\gamma_k^{i-1}}\right) \quad (136)$$

bei  $z=z_{i-1}$  erfüllt.

## 6.2. Die Punktkraftlösung für den lateral geschichteten, querisotropen Halbraum

Es sind die Lösungen für folgende Punktkräfte, die in einen aus  $t$  Schichten aufgebauten, transversal isotropen Halbraum eingekoppelt werden, zu finden:

- Normalkraft  $P$ ,
- Scherkraft  $S$  (eingekoppelt über  $\tau_z$ ) sowie
- Tangentialkraft  $T$  (eingekoppelt über  $\sigma_{\tau\tau}$ , siehe Abschnitt 3.3.).

Die Gesamtlösung  $\Pi_k$  ( $k=1,2,3$ ; siehe entsprechend  $F_k$  im vorangegangenen Abschnitt) setzt sich dabei additiv aus den Potentialfunktionen  $F_k, G_k, I_k$  für die Punktkräfte  $N, S, T$  respektive zusammen. Beim Aufstellen der Randbedingungen ist zu beachten, daß die Potentiale  $F_k, G_k, I_k$  an der Halbraumoberfläche (also  $z=0$ , die Krümmung der Oberfläche infolge der Kräfte wird vernachlässigt [85]) den negativen Wert der einwirkenden Kräfte generieren.

### 6.2.1. Punktkraftlösung für beliebig viele Schichten

Es sind nun mit Hilfe der Gleichungen (14) sowie (23) bis (26) die entsprechenden Rand- und Anschlußbedingungen zu konstruieren. Um die dafür erforderliche Anzahl von zusätzlichen Potentialen zu erhalten, mit denen alle diese Rand- und Anschlußbedingungen befriedigt werden können, müssen für die Deformationen  $u$  und  $w$  jeweils getrennte Ansätze, nämlich  $F_k+Fu_k$  für  $u$  und  $F_k$  für  $w$ , gemacht werden, welche nach wie vor die Differentialgleichung von Abschnitt 3.2. erfüllen. Physikalisch bedeutet dies, daß die Deformationen  $w$  und  $u$  sich jeweils in gewissen Grenzen, nämlich denen, die durch die Differentialgleichung vorgegeben sind, unabhängig voneinander verändern, wenn von einer homogenen Lösung zu einer Lösung in einem inhomogen aufgebauten Raum übergegangen wird. Man kann sich diesen Fakt leicht veranschaulichen, wenn man sich unterschiedliche Geometrien von Inhomogenitäten vorstellt. Beispielsweise sei der elastische Halbraum einmal zylindrisch-, also in  $r$ -Richtung und zum anderen quer-, also in  $z$ -Richtung geschichtet. Es ist unmittelbar einzusehen, daß die Wirkung einer Querschichtung auf die Deformation  $w$  eine andere sein muß als die Wirkung, welche der selbe inhomogene Aufbau auf die Deformation  $u$  hat. Andererseits sind der unabhängigen Veränderung von  $w$  und  $u$  dadurch Grenzen gesetzt, daß sämtliche Transformationen der homogenen Lösung im Hinblick auf die Differentialgleichung von Abschnitt 3.2. invariant sein müssen.

Zunächst seien die Anschlußbedingungen angegeben. Diese müssen für  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_z$ ,  $u$  sowie  $w$  für alle Potentialfunktionen an sämtlichen Interfaces  $i$  ( $i=1,2,\dots,t-1$ ) formuliert werden:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (A_{13}(F_1 + Fu_1) + m_1 * A_{33}F_1 + A_{13}(F_2 + Fu_2) + m_2 * A_{33}F_2) \right]_{z=z_i-0} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (A_{13}(F_1 + Fu_1) + m_1 * A_{33}F_1 + A_{13}(F_2 + Fu_2) + m_2 * A_{33}F_2) \right]_{z=z_i+0}, \quad (137)$$

$$\left[ A_{44}\Lambda \frac{\partial}{\partial z} (((F_1 + Fu_1) + m_1F_1) + ((F_2 + Fu_2) + m_2F_2) + iF_3) \right]_{z=z_i-0} = \left[ A_{44}\Lambda \frac{\partial}{\partial z} (((F_1 + Fu_1) + m_1F_1) + ((F_2 + Fu_2) + m_2F_2) + iF_3) \right]_{z=z_i+0}, \quad (138)$$

$$F_1 + Fu_1 + F_2 + Fu_2 + iF_3 \Big|_{z=z_i-0} = F_1 + Fu_1 + F_2 + Fu_2 + iF_3 \Big|_{z=z_i+0}, \quad (139)$$

$$\left[ m_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial F_2}{\partial z} \right]_{z=z_i-0} = \left[ m_1 \frac{\partial F_1}{\partial z} + m_2 \frac{\partial F_2}{\partial z} \right]_{z=z_i+0}. \quad (140)$$

Ebenso sind in diese 4 Gleichungen statt der  $Fu_k$ ,  $F_k$  auch die Potentialfunktionen  $Gu_k$ ,  $G_k$  und  $Iu_k$ ,  $I_k$  einzusetzen, was hier aus Platzgründen nicht extra hingeschrieben werden soll. Es ist zu beachten, daß die Materialkonstanten in den obigen Gleichungen  $z$ -abhängig sind. Als Randbedingungen sind zu fordern:

$\tau_z(z=0)=0$  für  $Fu_k$ ,  $F_k$  und  $Iu_k$ ,  $I_k$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} (((F_1 + Fu_1) + m_1F_1) + ((F_2 + Fu_2) + m_2F_2)) \right]_{z=0} = 0, \quad (141)$$

$$F_3 = 0$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} (((I_1 + Iu_1) + m_1I_1) + ((I_2 + Iu_2) + m_2I_2) + iI_3) \right]_{z=0} = 0, \quad (142)$$

$\tau_z(z=0)=-S$  für  $G_k$  (bzw.  $Gu_k$ ):

$$\left[ A_{44}\Lambda \frac{\partial}{\partial z} (((G_1 + Gu_1) + m_1G_1) + ((G_2 + Gu_2) + m_2G_2) + iG_3) \right]_{z=0} = -S, \quad (143)$$

wobei sich mit dem Ansatz  $G_k = \Lambda \bar{g}_k + \bar{\Lambda} g_k$  ( $k=1,2$ ) und  $G_3 = \bar{\Lambda} g_3 - \Lambda \bar{g}_3$  die folgenden zwei Bedingungen:

$$\left[ A_{44}\Lambda^2 \frac{\partial}{\partial z} (((g_1 + gu_1) + m_1g_1) + ((g_2 + gu_2) + m_2g_2) + ig_3) \right]_{z=0} = 0, \quad (144)$$

$$\left[ A_{44}\Delta \frac{\partial}{\partial z} (((g_1 + gu_1) + m_1g_1) + ((g_2 + gu_2) + m_2g_2) + ig_3) \right]_{z=0} = -S, \quad (145)$$

ergeben.

$\sigma_1(z=0)=0$  für  $I_k$ :

$$\left[ 2 * \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( (A_{11} - A_{66})(I_1 + Iu_1) + m_1 * A_{13}I_1 + (A_{11} - A_{66})(I_2 + Iu_2) + m_2 * A_{13}I_2 \right) \right]_{z=0} = 0, \quad (146)$$

$\sigma_2(z=0)/2=-T$  für  $I_k$ :

$$\left[ A_{66}\Lambda^2(I_1 + Iu_1 + I_2 + Iu_2 + iI_3) \right]_{z=0} = -T, \quad (147)$$

$\sigma_{zz}(z=0)=0$  für  $G_k$ :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (A_{13}(G_1 + Gu_1) + m_1 * A_{33}G_1 + A_{13}(G_2 + Gu_2) + m_2 * A_{33}G_2) \right]_{z=0} = 0, \quad (148)$$

$\sigma_{zz}(z=0)=-N$  für  $F_k$ :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (A_{13}(F_1 + Fu_1) + m_1 * A_{33}F_1 + A_{13}(F_2 + Fu_2) + m_2 * A_{33}Fs_2) \right]_{z=0} = -N, \quad (149)$$

Um die Anschlußbedingungen bei transversaler Isotropie überhaupt erfüllen zu können, muß die Koordinate  $z$  speziell betrachtet werden. Im vorherigen Abschnitt wurde dies bereits eingehend erörtert. Hier treten nun aber wegen der Randbedingungen zusätzliche Forderungen auf, die zu komplizierteren Darstellungen führen. Setzt man nun entsprechend der homogenen Lösung für die Normalkraft (Abschnitt 3.3., Gleichung (27))  $\Xi=P*\ln(R+z)$  (bezüglich der Definition von  $R$  und  $z_k$  siehe ebenfalls Abschnitt 3.3.), so findet man die Lösung für  $F_k$  und  $Fu_k$  mit dem Ansatz:

$$\begin{aligned} F_k(r, \varphi, z) &= \sum_{i=1}^t \left[ \sum_{q_i, n_i=0}^{\infty} \left\{ a^j_{q_i, n_i} * [\mathfrak{F}_{q_i, n_i}^+]_k^j + b^j_{q_i, n_i} * [\mathfrak{F}_{q_i, n_i}^-]_k^j \right\} \right] \\ Fu_k(r, \varphi, z) &= \sum_{i=1}^t \left[ \sum_{q_i, n_i=0}^{\infty} \left\{ au^j_{q_i, n_i} * [\mathfrak{F}_{q_i, n_i}^+]_3^j + bu^j_{q_i, n_i} * [\mathfrak{F}_{q_i, n_i}^-]_3^j \right\} \right] \end{aligned} \quad (150)$$

$k = 1, 2$

$$\left[ \mathfrak{F}_{q_i, n_i}^{\pm} \right]_k^j(x, y, z) = \Xi(x, y, \left[ z_{q_i, n_i}^{\pm} \right]_k^j) = \Xi(x, y, \pm \frac{z}{\gamma_k^j} + \dots)$$

für  $z_{j-1} < z < z_j$ , wobei:

$$\left[ \mathfrak{F}_{q_i, n_i}^{\pm} \right]_3^j(x, y, z) = \Xi(x, y, \left[ z_{q_i, n_i}^{\pm} \right]_3^j) = \Xi(x, y, \pm \frac{z}{\gamma_3^j} + \dots)$$

Die vollständige Angabe der  $z$ -Abhängigkeit der Potentialfunktion  $\Xi$  für den allgemein geschichteten Fall kann aus den Gleichungen (131) bis (134) entnommen werden. Die weitere Herleitung ist rein formal durch schrittweise Betrachtung sämtlicher Rand- und Anschlußbedingungen zu erhalten. Für den Fall einer einzelnen Schicht auf einem Substrat findet der Leser den vollständigen Ansatz im Anhang F.

Mit  $\Psi=S*(z*\ln(R+z)-R)$  (siehe 3.3., Gleichung (30)) erhält man den Lösungsansatz für  $g_k$  und somit auch für  $G_k$ ,

$$\begin{aligned}
g_k(r, \varphi, z) &= \sum_{i=1}^t \left[ \sum_{q_i, n_i=0}^{\infty} \left\{ a^j_{q, \dots, n, \dots} * [\Psi^+_{q, \dots, n, \dots}]^j_k + b^j_{q, \dots, n, \dots} * [\Psi^-_{q, \dots, n, \dots}]^j_k \right\} \right] \\
k &= 1, 2, 3 \\
gu_k(r, \varphi, z) &= \sum_{i=1}^t \left[ \sum_{q_i, n_i=0}^{\infty} \left\{ au^j_{q, \dots, n, \dots} * [\Psi^+_{q, \dots, n, \dots}]^j_3 + bu^j_{q, \dots, n, \dots} * [\Psi^-_{q, \dots, n, \dots}]^j_3 \right\} \right], \\
k &= 1, 2
\end{aligned} \tag{151}$$

für  $z_{j-1} < z < z_j$ , mit dem bereits oben zu Gleichung (150) Gesagten.

Und schließlich erhält man mit  $\Theta = T^*(\bar{\Lambda}^2 G)$  (siehe 3.3., Gleichungen (44) und (45)) die Potentialfunktionen  $I_k$ , wenn man einfach in Gleichung (150)  $\Xi$  durch  $\Theta$  ersetzt.

Ein eher formaler, wenn auch sehr aufwendiger Vorgang ist nun die Berechnung der Konstanten für die Potentialfunktionen anhand der oben gegebenen Rand- und Anschlußbedingungen. Das elastische (Gesamt-) Feld kann dann mit Hilfe der Gleichungen (14) sowie (23) bis (26) für die Potentiale  $\Pi_k = F_k + G_k + I_k$  berechnet werden. Da N, S, T nur Konstanten sind, treten lediglich Ableitungen nach den Größen R, G und z in den oben gemachten Ansätzen für  $\Psi$ ,  $\Xi$ ,  $\Theta$  auf, welche sehr einfach zu berechnen sind und daher hier nicht angegeben werden sollen.

## 7. Beliebige Druckverteilung auf der Oberfläche eines geschichtet aufgebauten Halbraumes

Mit Hilfe des Formalismus der Greenschen Funktion ([23], S. 31) kann ausgehend von der Punktkraftlösung unmittelbar aus den Resultaten des letzten Abschnittes die Lösung für eine beliebige Spannungsverteilung auf der Oberfläche eines geschichtet aufgebauten Halbraumes angegeben werden, sofern die entsprechende homogene Lösung bekannt ist. So ist dann in dem allgemeinen Ansatz (130) für  $F_k$  die jeweilige homogene Lösung einzusetzen. Für den Fall einiger wichtiger Druckverteilungen, die auf einen einfachen Schicht-Substrat-Verbund einwirken, wird dieser formale Rechengang im Anhang F vorgeführt.

### 7.1. Kugeleindruck in lateral geschichtete, transversal isotrope Materialien

Für den Kugeleindruck ergibt sich aber das Problem, daß im Falle eines inhomogenen Aufbaus des Probekörpers (oder Indentors) die von Hertz bei der Herleitung der Oberflächendruckverteilung  $\sigma_{zz}^{Hertz}(z=0) \sim \sqrt{a^2 - r^2}$  gemachten Annahmen (Abschnitt 3.1. insbesondere die Gleichungen (4) und (5)) nicht mehr allgemein gültig sind. Nach wie vor gilt Gleichung (3), aber nicht mehr die nur wegen (4) mögliche Schlußfolgerung (6). So können  $w$  und  $w'$  nun durchaus von der Hertzischen Deformationsform (6) abweichen, wichtig ist lediglich, daß die Summe von  $w+w'$  gerade die rechte Seite von (3) ergibt. Es erweist sich als günstig, die Gesamtdeformation  $w$  und  $w'$  als Summe einer Hertzischen  $w_H$  bzw.  $w'_H$  und einer Nichthertzischen Deformationsform  $\psi$  und  $\psi'$  anzusetzen. Werden die  $[\Xi^{\pm}_{q, \dots, n, \dots}]^j_k$  in Gleichung (150) in der Form

$$\begin{aligned}
\left[ F_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^1 &= \frac{H^1 \gamma_k^1}{m_k^1 - 1} * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \ln \left[ \left[ R_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^1 + \left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^1 \right] r dr d\varphi \\
\left[ F_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^2 &= \frac{H^2 \gamma_k^2}{m_k^2 - 1} * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \ln \left[ \left[ R_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^2 + \left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^2 \right] r dr d\varphi \\
&\vdots \\
\left[ F_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^j &= \frac{H^j \gamma_k^j}{m_k^j - 1} * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \ln \left[ \left[ R_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^j + \left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^j \right] r dr d\varphi
\end{aligned}$$

k=1,2

mit:

$$\left[ R_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^j = R \left( x, y, \left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^j \right),$$

angesetzt, so erhält man die Lösung für eine Hertzsche Druckverteilung auf der Oberfläche eines geschichtet aufgebauten Materials. Dies löst aber nicht das Problem des Kugeleindrucks, da man mit Gleichung (14) für die Deformation  $w$  eines durch den obigen Ansatz sowie Gleichung (150) folgendes erhält:

$$w(r_0, \varphi_0, z) = \sum_{k=1}^2 m_k \frac{\partial}{\partial z} \sum_{i=1}^i \left[ \sum_{q_i, n_i=0}^{\infty} \left\{ a^{j_{q\dots n\dots}} * \left[ F_{q\dots n\dots}^+ \right]_k^j + b^{j_{q\dots n\dots}} * \left[ F_{q\dots n\dots}^- \right]_k^j \right\} \right] \quad (152)$$

für  $z_{j-1} \leq z < z_j$ .

Für  $z=0$  ergibt sich unter Berücksichtigung des obigen Ansatzes sowie der Tatsache, daß

$$\left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_{k=1}^1 \Big|_{z=0} = \left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right]_{k=2}^1 \Big|_{z=0} \equiv \left[ z_{q\dots n\dots}^\pm \right] \Big|_{z=0} \quad \text{unmittelbar:}$$

$$w(r_0, \varphi_0, 0) = \sum_{i=1}^i \left[ \sum_{q_i, n_i=0}^{\infty} \left\{ a^{j_{q\dots n\dots}} * \left[ \mathcal{Q}_{q\dots n\dots}^+ \right]_k^1 + b^{j_{q\dots n\dots}} * \left[ \mathcal{Q}_{q\dots n\dots}^- \right]_k^1 \right\} \right] \quad (153)$$

mit:

$$\left[ \mathcal{Q}_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^1 = H^1 * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\left[ R_{q\dots n\dots}^\pm \right]_k^1} r dr d\varphi,$$

wobei

$$\left[ \mathcal{Q}_{0\dots 0\dots}^+ \right]_k^1 = H^1 * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\left[ R_{0\dots 0\dots}^+ \right]_k^1} r dr d\varphi =$$

$$H^1 * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)}} r dr d\varphi = H^1 * \frac{3P}{8\pi a^3} (2a^2 - r^2) \quad \text{für } r \leq a$$

gerade die Hertzsche Deformationsform  $w_H$  ist. Ziehen wir also die Größe

$a^{j_{0\dots 0\dots}} \left[ \mathcal{Q}_{0\dots 0\dots}^+ \right]_k^1 \equiv \left[ \mathcal{Q}_{0\dots 0\dots}^+ \right]_k^1$  aus der Doppelsumme in Gleichung (153) heraus, so erhalten wir, wie

gewünscht, eine Darstellung der Art  $w=w_H+\psi$ . Nun könnte einfach geschlossen werden, daß  $\psi$  eine Nichthertzsche Druckverteilung  $\theta$  auf der Oberfläche hervorruft, die ihr selbst, also mittels " $\psi_\theta = -\psi$ ", entgegenwirkt, wenn nicht der Indentor wäre. Im allgemeinen ist es gerechtfertigt, diesen als homogen anzunehmen, was hier im Weiteren auch geschehen soll. Ist  $\theta$  ein Druckverteilung auf dem Probekörper und  $\theta'$  eine auf dem Indentor, so muß im Gleichgewichtsfall  $\theta+\theta'=0$  gelten. Eine Druckverteilung  $\theta$  führt also beim Probekörper zur Deformation  $\psi_\theta$  und beim Indentor zu  $\psi'_\theta$ . Im Anhang A (ab Gleichung (A16)) werden die notwendigen Identitäten gegeben, um von einer gegebenen Deformation  $\psi$  das resultierende elastische Feld zu berechnen. Wegen der Forderung  $\theta+\theta'=0$  erhält man aber ein  $\psi'_\theta$ , das mit  $\psi$  im allgemeinen nicht linear übereinstimmt, d.h., es ist unmöglich, eine Gleichung der Art " $\psi'_\theta = konst * \psi$ " zu erfüllen. Dies wäre aber zur Befriedigung von Gleichung (3) notwendig. Einziger Ausweg ist erneut die Addition einer weiteren Druckverteilung  $\theta_2$ , welche der Deformation  $\psi'_\theta$  entgegenwirkt. Führt man diese Betrachtungen fort, so kommt man schließlich zu einer unendlichen Reihe von Druckverteilungen  $\theta_i$  (mit  $\theta_1=\theta$ ), deren Glieder konvergieren. Aus Gleichung (3) entnehmen wir dann

$$\Rightarrow \psi + \sum_{i=1}^{\infty} \{\psi_{\theta_i} + \psi'_{\theta_i}\} = 0.$$

Die beschriebene Rechnung ist formal, aber sehr umständlich. Sie soll darum hier nicht vorgeführt werden. Die für ihre Ausführung notwendigen Gleichungen sind aber komplett im Anhang A gegeben.

In dieser Arbeit werden im allgemeinen nur kleine Deformationen  $w$  betrachtet. Die Abweichungen der Deformationsform von der Hertzchen Deformation sind ebenfalls klein, so daß im Weiteren mit guter Näherung  $w=w_H (=w_{Hertz})$  gesetzt werden kann. Dies wurde durch numerische Berechnungen für die hier verwendeten Beispiele hinreichend gut bestätigt.

Die noch ausstehende Aufstellung der Gleichungssysteme für die Bestimmung der Koeffizienten  $a^j_{q,\dots,n,\dots}, b^j_{q,\dots,n,\dots}$  mit Hilfe der Gleichungen (14) sowie (23) bis (26) ist formaler Natur und wird auf den Anhang F verschoben. Dort wird der einfache Schicht-Substrat-Fall (nur ein Interface) für die Beanspruchungen:

- Hertzsche Druckkraftverteilung:  $\sigma_{zz}^{Hertz}(z=0) \sim \sqrt{a^2 - r^2}$ ,
- Hertzsche Scherkraftverteilung nach Hamilton/Goodman [39]:  $\tau_z^{Hertz}(z=0) \sim \sqrt{a^2 - r^2}$ ,
- Tangentialkraft nach Abschnitt 4.1. (1. Zyklus, 1. Schritt), die über  $\sigma_r$  einkoppelt,

$$\sigma_{rr}^{Hertz}(z=0) \sim \frac{\partial w}{\partial r} * \sqrt{a^2 - r^2}$$

behandelt. Mit den Lösungen dieser Gleichungssysteme können in den durch die Näherung  $w=w_H$  bedingten Grenzen sowohl der senkrechte Kugeleindruckversuch (Hertzsche und Nichthertzsche Fall mit und ohne Reibung) als auch der subkritische Scratchversuch für einen Schicht-Substrat-Verbund diskutiert werden. In dieser Arbeit soll allerdings, wie schon in der Einleitung gesagt, aus Platzgründen nur der senkrechte Kugeleindruck betrachtet werden. Ebenfalls aus Platzgründen wird auf die explizite Darstellung der Formeln der Deformationen und Spannungen für den Hertzschen und Nichthertzsche Kugeleindruck mit und ohne Reibung verzichtet, da

1. die hierzu nötigen Formeln aus den Resultaten von Anhang F im Zusammenhang mit den Gleichungen (14) sowie (23) bis (26) gebildet werden können,
2. ohnehin zumeist angestrebt wird, die mathematischen Terme mittels Computertechnik weiter zu bearbeiten, so daß eine seitenlange Darstellung der vollständigen Lösung (selbst bei größtmöglicher Vereinfachung wären dies ca. 30 A4 Seiten) innerhalb dieser Arbeit dem Autor nicht sinnvoll erscheint,
3. die hier gewählte allgemeine Darstellung sogar günstiger ist für die Fälle, in denen andere Druckverteilungen als solche, wie sie beim Kugeleindruck auftreten, für geschichtete Materialien untersucht werden sollen (siehe hierzu das zu Beginn dieses Kapitels Gesagte).

## **8. Einige interessante Resultate der Theorie**

Die in diesem und den folgenden Kapiteln vorgestellten Ergebnisse wurden mit Hilfe von Computerrechnungen gewonnen. Um den Rechenaufwand zu begrenzen, wurden dabei Näherungen gemacht, die dazu führen können, daß die dargestellten Resultate von den tatsächlichen Lösungen geringfügig abweichen. Prinzipiell sollten aber die angegebenen Spannungsverläufe den tatsächlichen Gegebenheiten recht gut entsprechen. Dies kann aus Vergleichen mit sehr genauen FEM-Rechnungen geschlußfolgert werden.

### **8.1. Homogener Fall (keine Schichten)**

Es soll zunächst der Verlauf der  $\sigma_{rr}$ -Spannung entlang der Oberfläche eines homogenen Probekörpers untersucht werden. Als Beispiel nehmen wir an, daß ein sphärischer Diamantindentor mit einem Spitzenradius von  $5\mu\text{m}$  in das homogene Material mit einem Elastizitätsmodul von  $600\text{GPa}$  eingedrückt wird. Wir normieren die Spannungen, indem wir durch die maximale Druckspannung im Kontaktzentrum  $p_0$  dividieren.



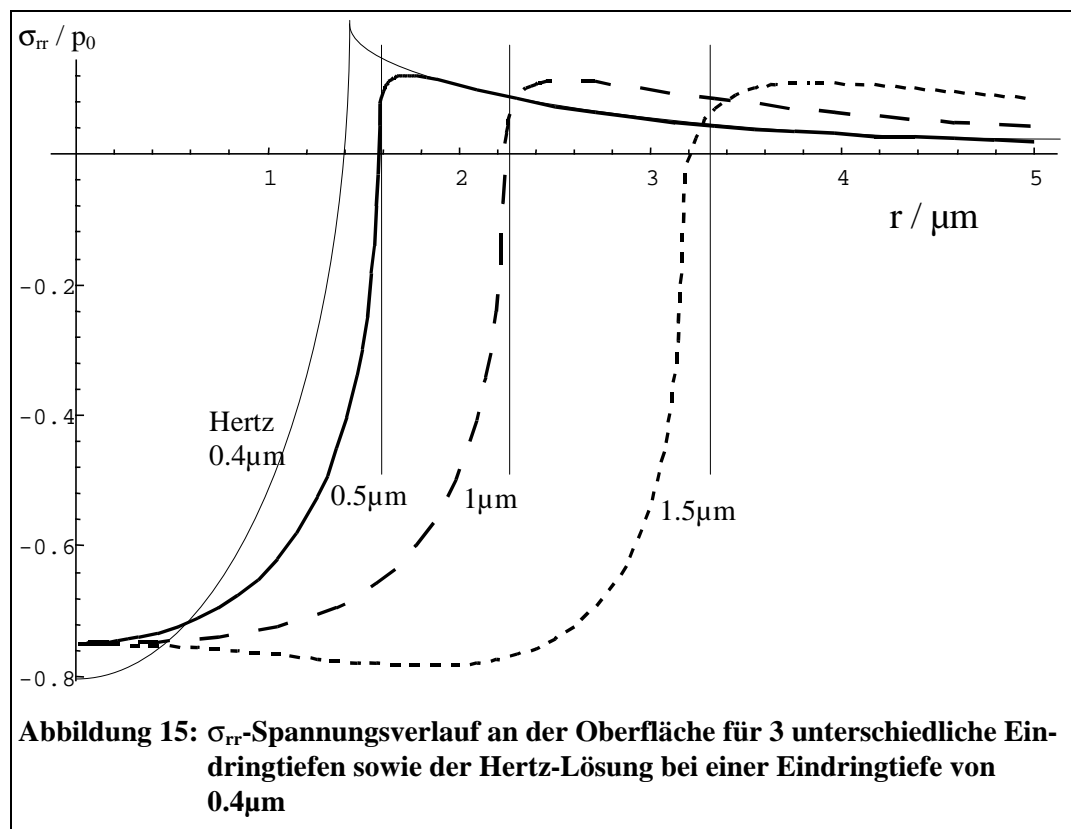


Abbildung 15 zeigt den Spannungsverlauf an der Oberfläche des Probekörpers für drei unterschiedliche Eindringtiefen ( $0,5\mu\text{m}$ : dicke durchgezogene Linie,  $1\mu\text{m}$ : grob gestrichelte Linie,  $1,5\mu\text{m}$ : fein gestrichelte Linie) sowie die Hertz'sche Näherung für ein konkretes Beispiel (dünne durchgezogene Kurve). Die senkrechten Linien bezeichnen die Lage des Randes der Kontaktfläche.

Es ist deutlich zu erkennen, daß sich das Zugspannungsmaximum für größere Eindringtiefen außerhalb der Kontaktfläche und nicht, wie laut Hertz'scher Theorie, direkt am Kontaktflächenrand befindet. Ein solches Resultat wurde auch von Johnson, O'Connor und Woodward [20] (siehe auch [7]) auf experimentellem Wege durch Messung der Radien von Hertz'schen Kegelbrüchen für spröde Materialien gefunden. Das Ergebnis ist bedeutend, weil angenommen wird, daß die Zugspannung in radialer Richtung für die bekannten Hertz'schen Kegelbrüche verantwortlich ist und die Maximalwerte der Zugspannungen im Bruchfall als Maß für die Bruchzähigkeit des Materials verwendet werden könnten. In [20] wurden für die Abweichung der Radien der Brüche von der Hertz'schen Theorie in erster Linie Reibungseffekte verantwortlich gemacht, welche bei der Berechnung in Abbildung 15 aber gar nicht berücksichtigt worden waren (Reibung an der Oberfläche = Null). Dies legt eine eingehende Betrachtung der Entstehung der Hertz'schen Kegelbrüche nahe. Es ist allgemein bekannt, daß Brüche unter unterschiedlichen Öffnungsmoden wachsen bzw. erzeugt werden können. Von der Material- und Oberflächenbeschaffenheit hängt es ab, welche Spannungs- und damit Modenkombinationen besonders leicht zu Brüchen führen. Bislang ging man davon aus, daß Hertz'sche Kegelbrüche vor allem durch Mode-I-Belastungen am Maximum der radialen Zugspannung  $\sigma_{rr}$  erzeugt werden. Die hier vorliegenden Rechnungen scheinen eher eine kombinierte Mode-I-Mode-II-Belastung nahezulegen (Ab-

bildungen 15 - 17). Um dieses Problem genauer zu untersuchen, wären allerdings noch weitere experimentelle Untersuchungen und Berechnungen anzustellen.

Ebenso bedeutsam ist die Tatsache, daß die Normalspannung in z-Richtung  $\sigma_{zz}$  außerhalb der Kontaktfläche nicht so plötzlich verschwindet, wie es aus der Hertzischen Theorie folgt, sondern für sehr kleine z allmählich gegen Null konvergiert. Abbildung 16 zeigt dies für drei Eindringtiefen und den Hertzischen Grenzfall für ein konkretes Beispiel (Kennzeichnung wie bei Abbildung 15).

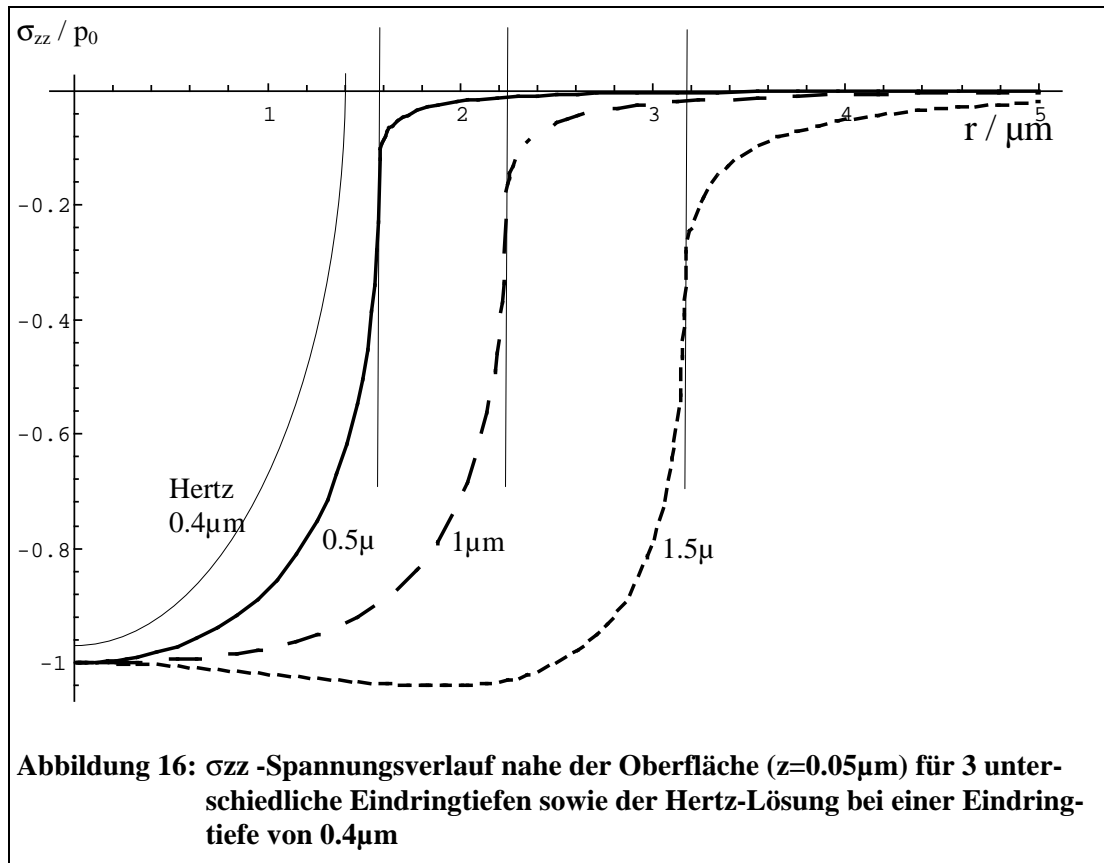
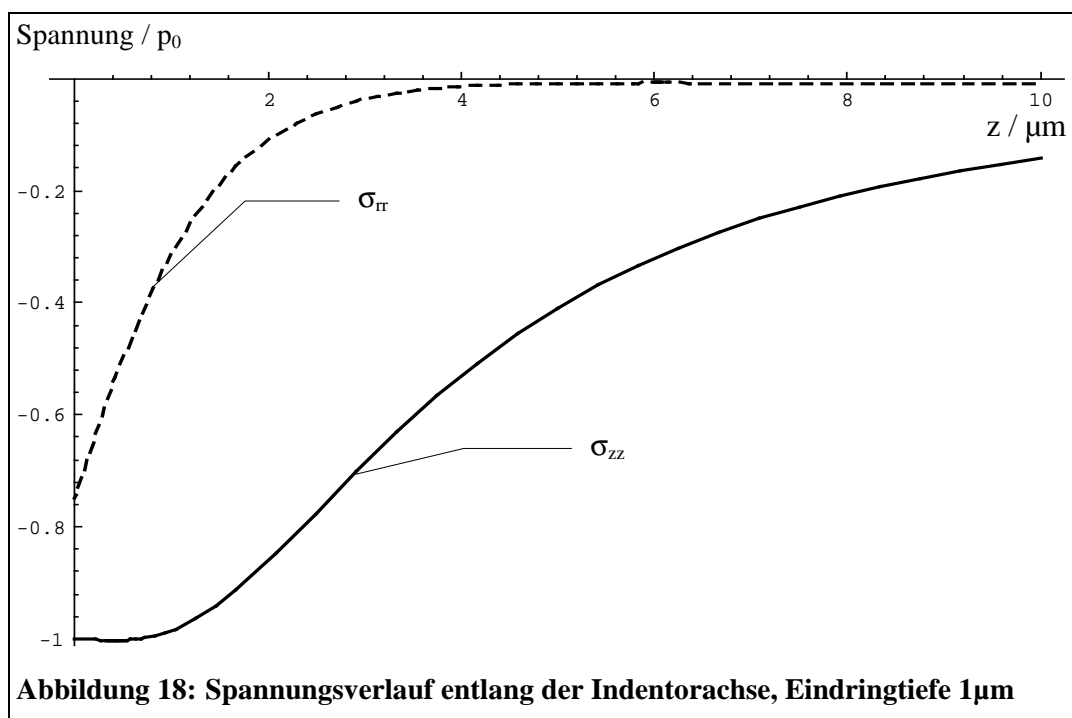
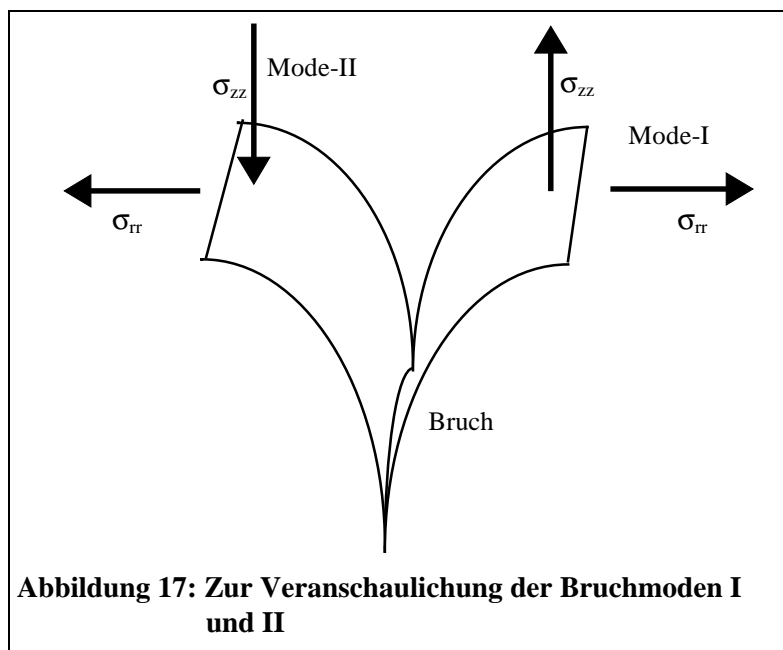


Abbildung 18 zeigt den Verlauf beider Spannungskomponenten entlang der Indentorachse für eine Eindringtiefe von  $1\mu\text{m}$ .



## 8.2. Der einfach geschichtete isotrope Halbraum

### 8.2.1. Mathematischer Ansatz für den einfach geschichteten isotropen Halbraum

Im gesamten isotropen Halbraum bestehend aus Schicht (Dicke  $h$ ) und Substrat (restlicher Halbraum) gilt die folgende Differentialgleichung:

$$\text{grad div } \vec{u} + (1 - 2\nu)\Delta\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (1 - 2\nu)(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = 0 \quad (154)$$

mit:  $\vec{u} = (u, v, w)$  Deformation in  $(x, y, z)$ -Richtung

Weiterhin seien wichtige Materialparameter für Schicht- und Substrat definiert:

$$H_j = \frac{1-\nu_j^2}{\pi E_j}; \quad h^j = -\frac{1}{2(1-\nu_j)}; \quad g^j = h^j(1-2\nu_j) \quad (155)$$

$j = 1(\text{Schicht}), 2(\text{Substrat})$

Den mathematischen Ansatz um Gleichung (154) für den geschichtet aufgebauten isotropen Halbraum zu lösen, findet man durch konsequente Anwendung des in den Kapiteln 6 und 7 Gesagten unter Berücksichtigung des Grenzübergangs von transversaler zu vollständiger Isotropie (Abschnitt 3.4.). Sei  $P(x,y,z)$  die Potentialfunktion, welche das Hertzsche Kontaktproblem im homogenen Fall löst (Anhang A), so findet man die Lösung für das entsprechende Problem im Schichtfall mit dem Ansatz:

$$u + iv \equiv u^c = \left[ \begin{array}{l} \Lambda \left( g^1 P^1 + h^1 z \frac{\partial P^1}{\partial z} \right) + \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( a1_n^{\pm} g^1 P_n^{1\pm} + b1_n^{\pm} h^1 z_n^{\pm} \frac{\partial P_n^{1\pm}}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + id1_n^{\pm} P_n^{1\pm} + iX1_n^{\pm} \frac{\partial P_n^{1\pm}}{\partial z} \right\} \end{array} \right] \text{ Schicht} , \quad (156)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \Lambda \left( \alpha g^2 P^2 + \beta h^2 z \frac{\partial P^2}{\partial z} \right) + \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( a2_n^+ g^2 P_n^{2+} + b2_n^+ h^2 z_n^+ \frac{\partial P_n^{2+}}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + id2_n^+ P_n^{2+} + iX2_n^+ \frac{\partial P_n^{2+}}{\partial z} \right\} \end{array} \right] \text{ Substrat}$$

$$w = \left[ \begin{array}{l} \left[ \frac{\partial P^1}{\partial z} + h^1 z \frac{\partial^2 P^1}{\partial z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( c1_n^{\pm} \frac{\partial P_n^{1\pm}}{\partial z} + b1_n^{\pm} h^1 z_n^{\pm} \frac{\partial^2 P_n^{1\pm}}{\partial z^2} \right) \right\} \right] \text{ Schicht} \\ \left[ \alpha_w \frac{\partial P^2}{\partial z} + \beta h^2 z \frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( c2_n^+ \frac{\partial P_n^{2+}}{\partial z} + b2_n^+ h^2 z_n^+ \frac{\partial^2 P_n^{2+}}{\partial z^2} \right) \right\} \right] \text{ Substrat} \end{array} \right] , \quad (157)$$

mit:  $P_n^{j\pm} = P^j(\varphi, r, z_n^{\pm}) = P^j(\varphi, r, 2nh \pm z); \quad j = 1, 2 \text{ und}$

$$\alpha_w = \alpha g^2 + \beta h^2 (4\nu_2 - 3); \quad j = 1, 2; \quad c_j^+ = g^j a_j^+ + h^j b_j^+ (4\nu_j - 3);$$

$$c_j^- = g^j a_j^- - h^j b_j^- (4\nu_j - 3); \quad X_j^{\pm} = e_j^{\pm} * z_n^{\pm} (z = h)$$

Die Spannungskomponenten werden durch folgende Identitäten bestimmt:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left( u_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{ll} \delta_{ik} \right) \quad \text{mit} \quad i, k = x, y, z; \quad u_{xk} = \frac{\partial u}{\partial k}; \quad u_{yk} = \frac{\partial v}{\partial k}; \quad u_{zk} = \frac{\partial w}{\partial k}. \quad (158)$$

Die Koeffizienten  $a1, b1, e1, f1, a2, b2, e2, f2, \alpha$  und  $\beta$  müssen nun aus den folgenden Gleichungen bestimmt werden

$$\tau_{rz}|_{z=0} = 0; \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_{\text{Hertz}}$$

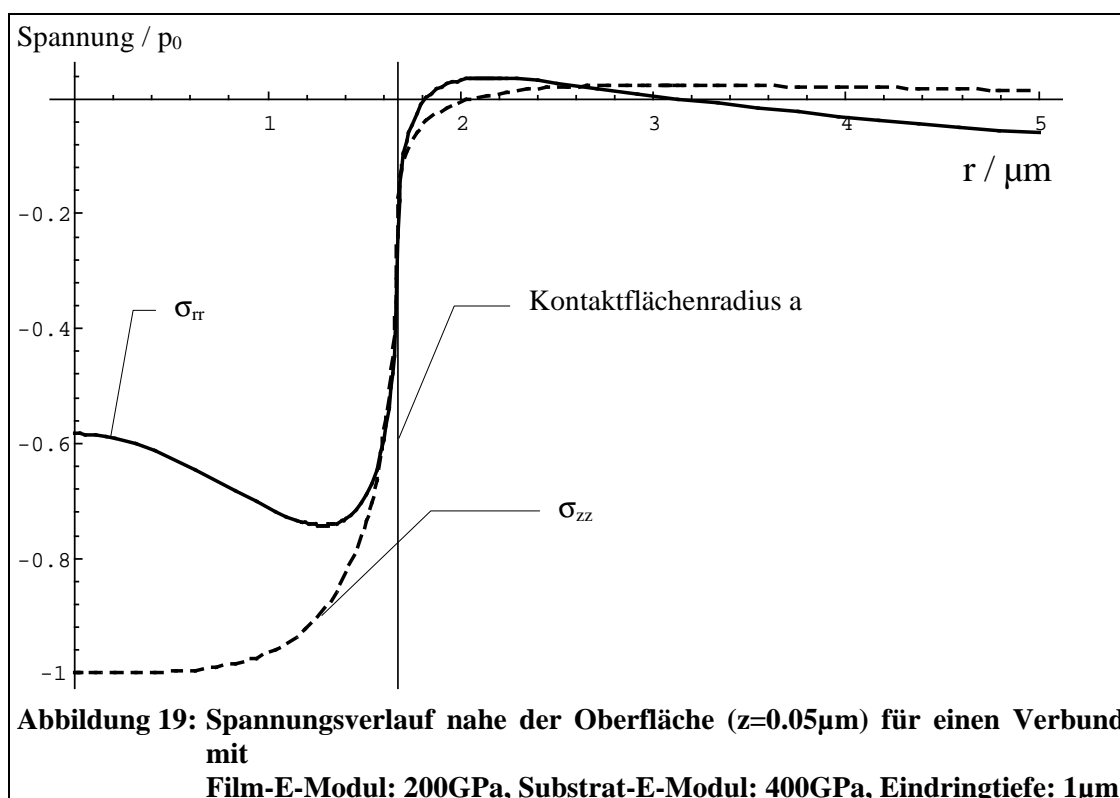
$$\sigma_{zz}|_{z=h+0} = \sigma_{zz}|_{z=h-0}; \quad \tau_{rz}|_{z=h+0} = \tau_{rz}|_{z=h-0}; \quad w|_{z=h+0} = w|_{z=h-0}; \quad u_{z=h+0} = u|_{z=h-0}$$

$\sigma_{\text{Hertz}}$  bezeichnet die Hertz'sche Druckverteilung an der Halbraumoberfläche bei  $z=0$ .

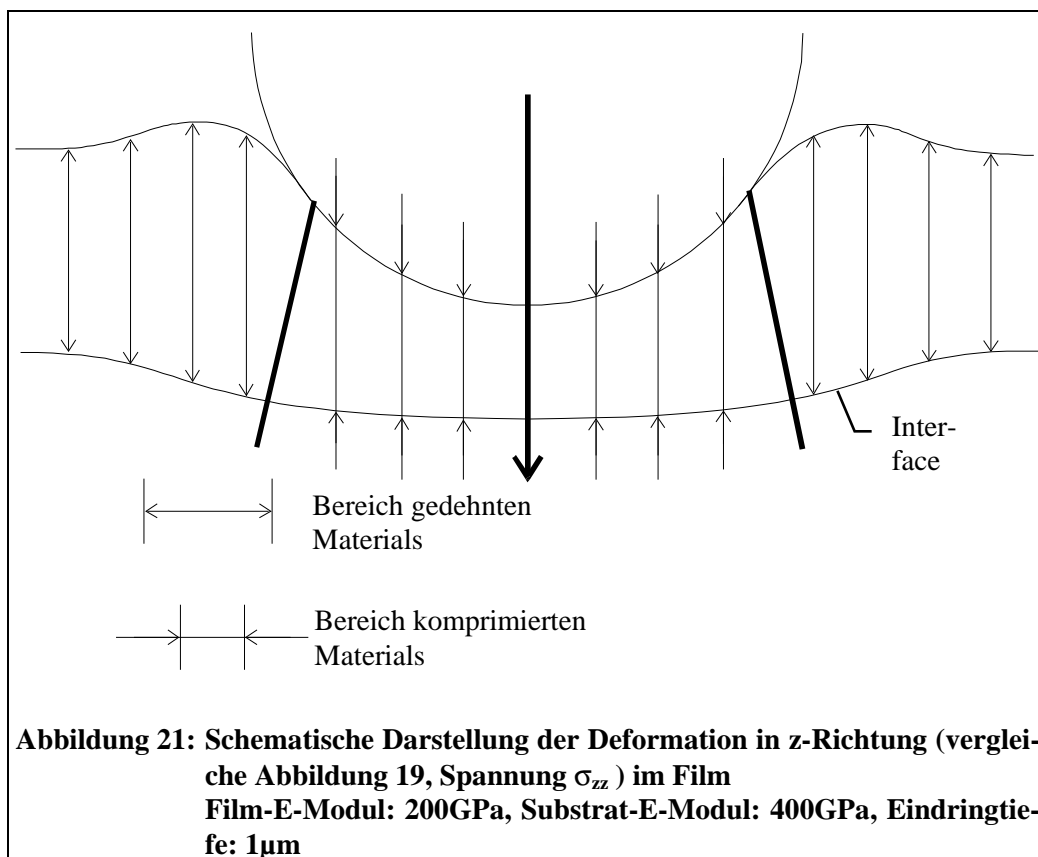
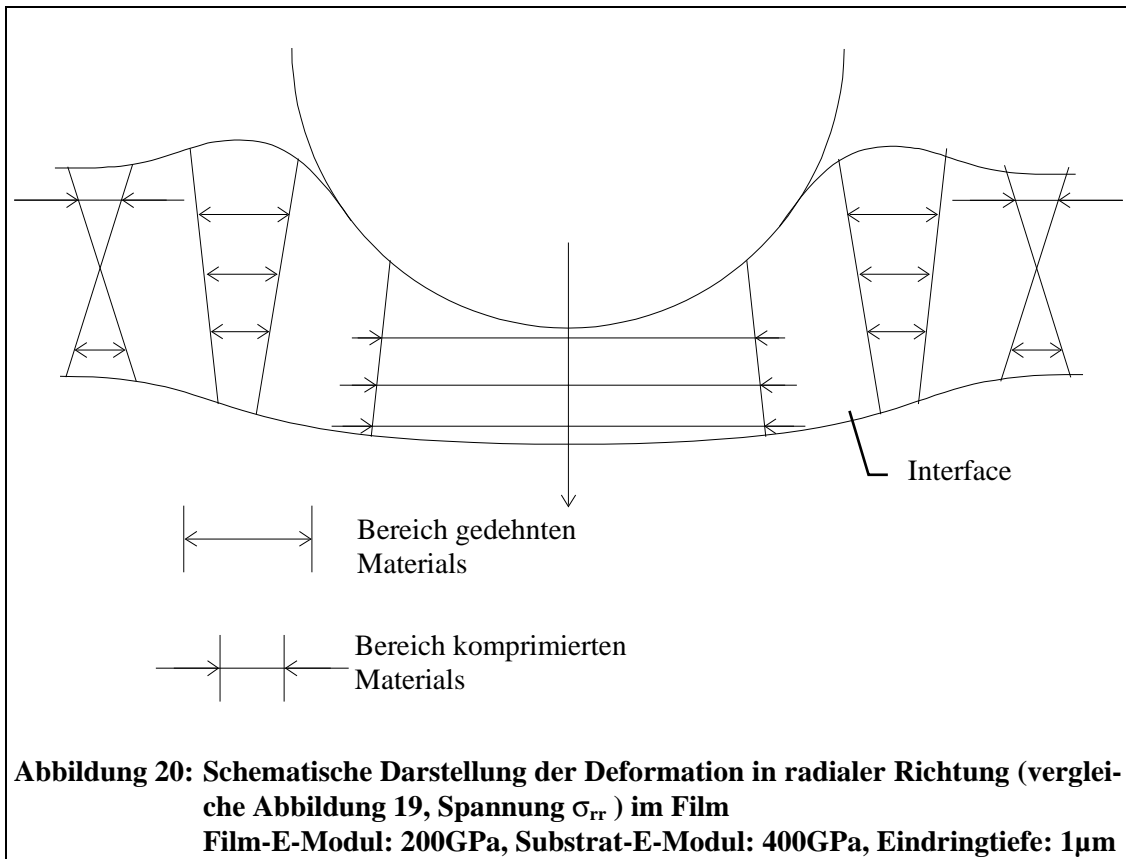
Im Fall der über  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  einkoppelnden Tangentialkraft wählen wir den selben Ansatz, jedoch andere (siehe 3.3. bzw. 6.2.1.) Randbedingungen. Die Potentialfunktion für die entsprechende homogene Lösung kann den Anhängen B und C entnommen werden.

### 8.2.2. Schicht mit geringem E-Modul auf Substrat mit hohem E-Modul

Als nächstes betrachten wir einen etwas ungewöhnlichen Verbund, bestehend aus Substrat und Schicht. Die Schichtdicke betrage  $3\mu\text{m}$ , die E-Module seien  $200\text{GPa}$  für den Film und  $400\text{GPa}$  für das Substrat. Dies entspräche in etwa einem Stahlfilm auf einem Saphirsubstrat. Abbildung 19 zeigt den Verlauf von  $\sigma_{rr}$  und  $\sigma_{zz}$  bei einer Eindringtiefe von  $1\mu\text{m}$ .



Interessant ist vor allem der Wechsel von Zug- zu Druckspannung bei  $\sigma_{rr}$  (Radialspannung) sowie der Zugspannungsanteil der Normalspannung in  $z$ -Richtung  $\sigma_{zz}$  außerhalb der Kontaktzone. Dies entsteht durch Aufwölbung des weichen Filmmaterials außerhalb der Kontaktfläche (siehe Abbildungen 20 und 21). Während der Film im Kontaktzentrum ebenso wie im homogenen Fall ausschließlich Druckspannungen aufweist, führen Ausweichbewegungen des Filmmaterials, die durch das härtere Substratmaterial aufgezwungen werden, zu diesem Effekt im Außenbereich. Im homogenen Fall könnte das Filmmaterial nach "unten" (in Richtung wachsenden  $z'$ , siehe Abbildungen 20 und 21) ausweichen, was aber hier durch das Substrat verhindert wird. Die somit verstärkt erzwungene Deformation in radialer Richtung zwingt das Filmmaterial nach "oben" in Richtung des geringsten Widerstandes.



### 8.3. Die beschichtete Platte

#### 8.3.1. Mathematischer Ansatz für die beschichtete, kreisrunde Platte

Folgt man den Darlegungen von Abschnitt 8.2.1. für den einfach beschichteten Halbraum, so erhält man im Fall der beschichteten, kreisrunden, isotropen Platte (Schichtdicke  $h$ , Gesamtdicke  $d$ , Plattenradius  $s$ ) folgenden Ansatz.

$$u + iv \equiv u^c = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \Lambda \left( g^1 P^1 + h^1 z \frac{\partial P^1}{\partial z} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( a1_{\ln k}^{\pm\pm} g^1 P_{\ln k}^{1\pm\pm} + b1_{\ln k}^{\pm\pm} h^1 z_{nk}^{\pm} \frac{\partial P_{\ln k}^{1\pm\pm}}{\partial z} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + id1_{\ln k}^{\pm\pm} P_{\ln k}^{1\pm\pm} + iX1_{\ln k}^{\pm\pm} \frac{\partial P_{\ln k}^{1\pm\pm}}{\partial z} \right\} \right] \text{ Schicht} \\ \left[ \Lambda \left( \alpha g^2 P^2 + \beta h^2 z \frac{\partial P^2}{\partial z} \right) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( a2_{\ln k}^{\pm\pm} g^2 P_{\ln k}^{2\pm\pm} + b2_{\ln k}^{\pm\pm} h^2 z_{nk}^{\pm} \frac{\partial P_{\ln k}^{2\pm\pm}}{\partial z} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + id2_{\ln k}^{\pm\pm} P_{\ln k}^{2\pm\pm} + iX2_{\ln k}^{\pm\pm} \frac{\partial P_{\ln k}^{2\pm\pm}}{\partial z} \right\} \right] \text{ Substrat} \end{array} \right. , \quad (159)$$

$$w = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\partial P^1}{\partial z} + h^1 z \frac{\partial^2 P^1}{\partial z^2} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( c1_{\ln k}^{\pm\pm} \frac{\partial P_{\ln k}^{1\pm\pm}}{\partial z} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + b1_{\ln k}^{\pm\pm} h^1 z_{nk}^{\pm} \frac{\partial^2 P_{\ln k}^{1\pm\pm}}{\partial z^2} \right\} \right] \text{ Schicht} \\ \left[ \alpha_w \frac{\partial P^2}{\partial z} + \beta h^2 z \frac{\partial^2 P^2}{\partial z^2} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \Lambda \left( c2_{\ln k}^{\pm\pm} \frac{\partial P_{\ln k}^{2\pm\pm}}{\partial z} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + b2_{\ln k}^{\pm\pm} h^2 z_{nk}^{\pm} \frac{\partial^2 P_{\ln k}^{2\pm\pm}}{\partial z^2} \right\} \right] \text{ Substrat} \end{array} \right. , \quad (160)$$

mit:  $P_{\ln k}^{j\pm\pm} = P^j(\varphi, r_l^{\pm}, z_{nk}^{\pm}) = P^j(\varphi, 2ls \pm r, 2nh + 2k(d-h) \pm z)$ ;  $j = 1, 2$  und

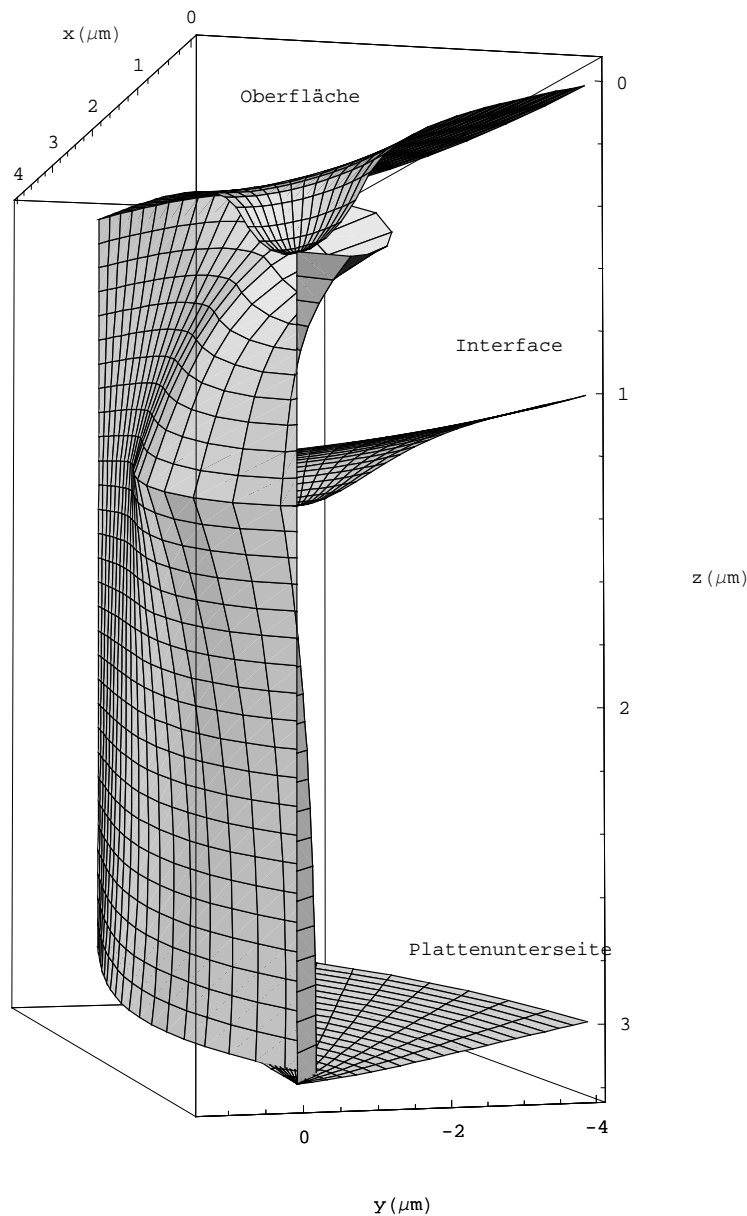
$$\alpha_w = \alpha g^2 + \beta h^2 (4\nu_2 - 3); \quad j = 1, 2; \quad cj_{\ln k}^{\pm\pm} = g^j aj_{\ln k}^{\pm\pm} + h^j bj_{\ln k}^{\pm\pm} (4\nu_j - 3);$$

$$cj_{\ln k}^{\pm} = g^j aj_{\ln k}^{\pm} - h^j bj_{\ln k}^{\pm} (4\nu_j - 3); \quad Xj_{\ln k}^{\pm\pm} = ej_{\ln k}^{\pm\pm} * z_{nk}^{\pm} (z = h)$$

Die Koeffizienten  $a1, b1, e1, d1, a2, b2, e2, d2, \alpha$  und  $\beta$ , sind im Falle einer für die praktische Rechnung recht günstigen Fixierung der Platte am Rand  $r=s$ , aus den folgenden Bedingungen zu bestimmen.

$$\begin{array}{l} \tau_{rz}|_{z=0} = \tau_{rz}|_{z=d} = w|_{r=s} = u|_{r=s} = 0; \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma_P; \quad \sigma_{zz}|_{z=d} = 0 \\ \sigma_{zz}|_{z=h+0} = \sigma_{zz}|_{z=h-0}; \quad \tau_{rz}|_{z=h+0} = \tau_{rz}|_{z=h-0}; \quad w|_{z=h+0} = w|_{z=h-0}; \quad u|_{z=h+0} = u|_{z=h-0} \end{array}$$

**8.3.2. Beschichtete kreisrunde Platte, die an den Rändern ideal befestigt ist und in der Mitte durch eine Hertzsche Druckkraft belastet wird**



**Abbildung 22: Deformation  $w$  und  $u$  einer beschichteten am Rand fixierten Platte, in deren Zentrum eine Hertzsche Druckkraft angreift (siehe Text). Gezeigt wird  $\frac{1}{4}$  der Platte. Die beschrifteten Flächen zeigen die Deformation  $w$  für die Ober- und Unterseite sowie das Interface. Die unbeschriftete Fläche zeigt die Deformation  $u$ , wobei Flächenpunkte im positiven  $y$ -Bereich gedehntes und solche im negativen  $y$ -Bereich in  $r$ -Richtung komprimiertes Material anzeigen. Der Indentor wirkt von oben ( $z=0$ ).**

Für ein System, bestehend aus Schicht ( $E=400\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ) und Substrat ( $E=200\text{GPa}$ ,  $\nu=0.2$ ) zeigt Abbildung 22 die Deformationen  $w$  und  $u$  für einen Ausschnitt der Platte. Das Interface befindet sich bei  $z=1\mu\text{m}$ , die Gesamtdicke der Platte beträgt  $3\mu\text{m}$ . Die Platte ist an ihrem Rand  $r=s=4\mu\text{m}$  derart eingespannt, daß sowohl  $w(r=s,z)=0$ , als auch  $u(r=s,z)=0$  für  $0 \leq z \leq 3\mu\text{m}$  gilt. Im Zentrum der Platte

wirkt eine Hertzsche Druckverteilung der Stärke  $\sigma_{\text{Hertz}}(r) = \frac{3N}{2\pi(1\mu\text{m})^3} \sqrt{(1\mu\text{m})^2 - r^2}$ .



Wie man erwarten würde, ist die Platte bis auf den festgehaltenen Rand  $r=s$  in Richtung der Indentorkraft verschoben. Die gegenüber  $w$  in der Darstellung 30fach verstärkte Deformation  $u$  zeigt am Interface ein ausgeprägtes Maximum. In der Nähe der Indentorachse gibt es interessanter Weise auch an der Plattenunterseite Bereiche, in denen das Material radial komprimiert ist, obgleich die reine Anschauung hier wohl eher Dehnung erwarten ließe.

Eine detaillierte Behandlung des Problems gebogener Platten würde hier allerdings zu weit führen. Der Leser findet sowohl den vollständigen Ansatz für die Lösung derartiger Aufgabenstellungen, als auch weitere Resultate in [88] bzw. [89].

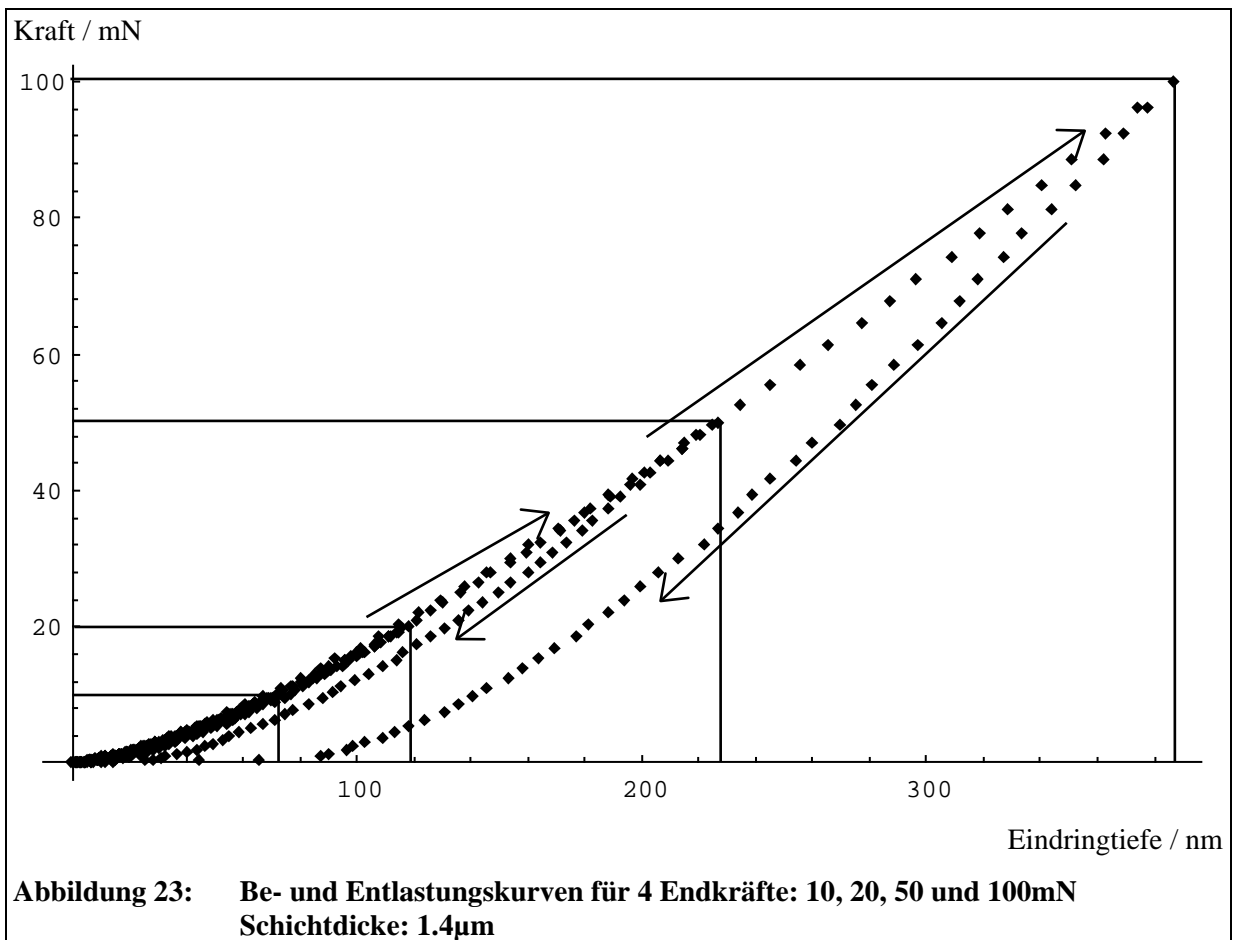
### **9. Anwendung der Theorie geschichteter Materialien im Indenterversuch auf die Untersuchung von TiN-Schichten auf Silizium**

Die den folgenden Betrachtungen zugrunde liegenden experimentellen Messungen wurden von M. Whitting und M. V. Swain vom CSIRO (Div. Appl. Phys. PO Box 218, Lindfield, NSW 2070) in Australien durchgeführt. Es wurden TiN-Si-Verbunde mit dem Kugeleindruckverfahren untersucht. Als Indentor diente ein Diamantindentor mit sphärischer Spitze, die nach Herstellerangaben einen Krümmungsradius von ca.  $5\mu\text{m}$  aufwies. Bei der verwendeten Indenterapparatur handelte es sich um ein sogenanntes UMIS 2000-Meßsystem mit hoher Auflösung, wie es beispielsweise in [26] beschrieben wird. Die Verbunde waren durch Beschichtung von Siliziumsubstraten mit einem reaktiven, ionenunterstützten Vakuum-Bogenverfahren hergestellt worden [76].

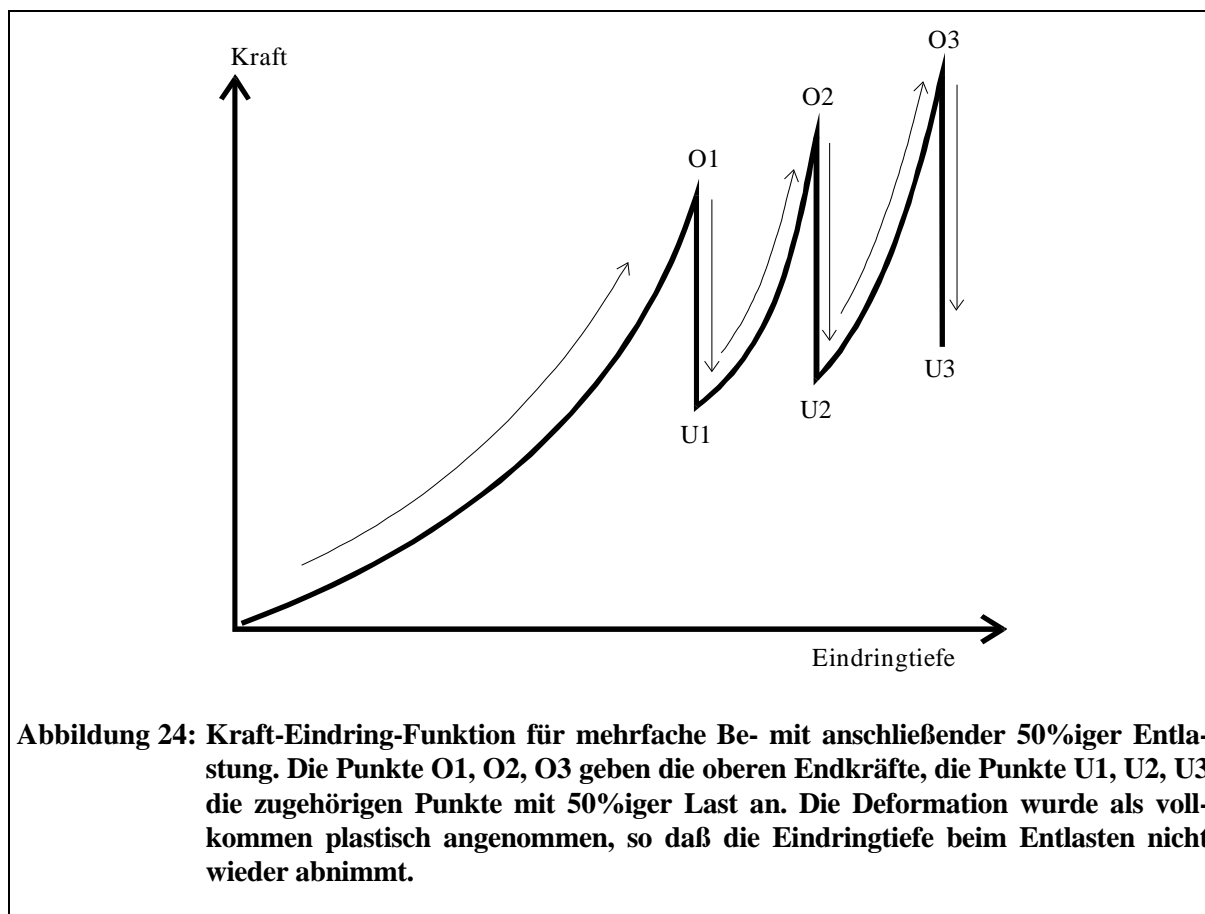
Es wurden grundsätzlich zwei Meßwertaufnahmeverfahren angewandt:

1. Bestimmung der Kraft-Eindringtiefe-Funktion für einfache Be- und anschließender Entlastung (Abb. 23). In äquidistanten Schritten wurden dabei die Kraft-Weg-Paare aufgezeichnet.
2. Bestimmung der Kraft-Eindringtiefe-Funktion für mehrfache Be- und jeweils anschließender 50%iger Entlastung, wobei bei jedem neuen Belastungsschritt die Endkraft gesteigert wurde. Aufgezeichnet wurden die Kraft-Weg-Paare jeweils beim Erreichen der neuen Endkraft und der zugehörigen partiellen Entlastung. In Abbildung 24 wird ein solcher Meßvorgang schematisch am Beispiel eines absolut plastischen Probekörpers demonstriert. Dabei geben die Punkte  $O_1, O_2, O_3$  die oberen Endkräfte, die Punkte  $U_1, U_2, U_3$  die zugehörigen Punkte mit 50%iger Last an.

Während mit dem Verfahren 1 Meßreihen zur Bestimmung der elastischen Schichteigenschaften aufgezeichnet wurden, dienten die Meßreihen nach Verfahren 2 zur Detektierung des Beginns nichtelastischen Verhaltens der untersuchten Verbunde. Um dies zu verstehen, betrachten wir die Abbildungen 23 und 25. Abbildung 23 zeigt einfache Eindringtiefe-Kraft-Kurven für einen  $1.4\mu\text{m}$ -TiN-Si-Verbund für 4 unterschiedliche Endkräfte.



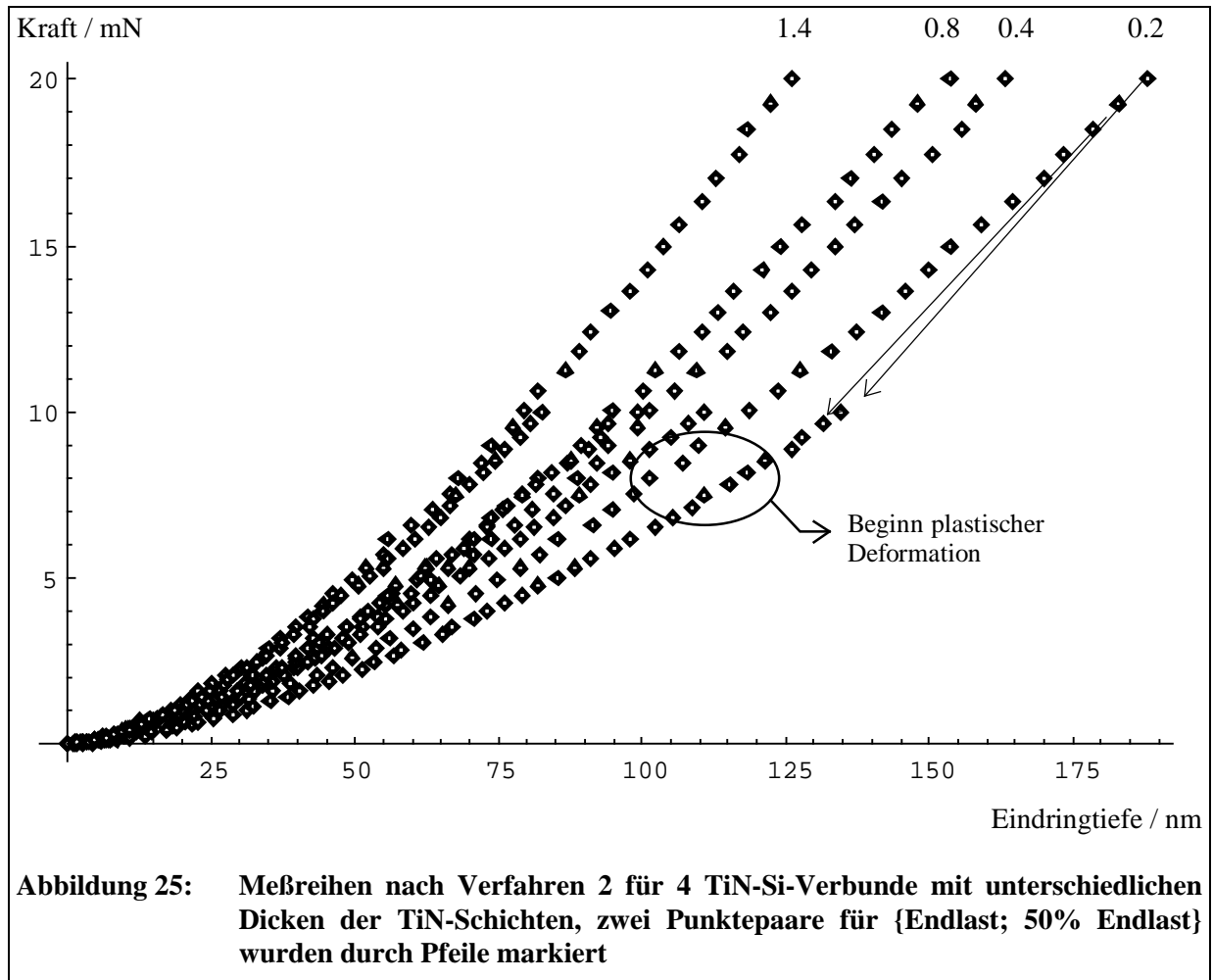
Die Pfeile verdeutlichen dabei die Bewegungsrichtung (auf oder ab) des Indentors für zwei ausgewählte Kurven mit relativ hohen Endkräften, die deutlich nichtelastisches Verhalten zeigen. Dies erkennt man am unterschiedlichen Verlauf von Be- und Entlastungskurve. Je größer dabei die Differenz der beiden Kurven, desto größer ist auch der nichtelastische Anteil am gesamten Deformationsprozeß. Wir vermeiden hier absichtlich den Begriff der plastischen Deformation, da die Natur des nichtelastischen Anteils an der Gesamtdeformation aus den Indentormessdaten allein nicht abgelesen werden kann und sich aus Fließprozessen, Bruchbildung, Phasenumwandlungen u. a. zusammensetzen kann. Der Beginn nennenswerter nichtelastischer Deformationsanteile kann relativ leicht aus den Meßreihen nach Verfahren 2 (Abb. 25) abgelesen werden.



Hierzu wird ein kritischer Differenzwert zwischen Be- und Entlastungskurvenpunkten definiert, ab dem die Deformation nicht mehr als quasielastisch angesehen wird. Eventuell vorherige kleinere Nichtelastizitäten, die auf Oberflächenrauigkeiten, Defekte usw. zurückzuführen sind, werden somit vernachlässigt. In Abbildung 25 werden die Be-teilweise-Entlastungskurven für 4 TiN-Si-Verbunde mit unterschiedlichen Dicken der TiN-Schichten dargestellt. Beim Verbund mit der dünnsten Schicht ( $0.2\mu\text{m}$ ) sind zwei zusammengehörige Punktepaare, jeweils bestehend aus Endkraft und zugehöriger 50%iger Entlastung, durch Pfeile gekennzeichnet. Weiterhin ist für diesen Punkt der Bereich, ab dem die Differenz der Kurven dauerhaft einen kritischen Wert überschreitet, durch eine Ellipse gekennzeichnet (in Abb. 25 bei ca.  $8\text{mN}$ ). Die zugehörige kritische Endkraft liegt dementsprechend bei  $16\text{mN}$ . Die in diesem Diagramm dargestellten Kurven für die dickeren Filme überschreiten gleichgroße kritische Differenzbeträge hingegen erst bei Endkräften, die in dieser Abbildung nicht mehr erfaßt sind. Andererseits machen die gleichgroßen Endkräfte die 4 Verbunde in Abbildung 25 gut unterscheidbar. Die größeren Endkräfte, die zum Erreichen gleicher Eindringtiefen bei dickeren Schichten notwendig sind, bestätigen, daß, wie zu erwarten, die TiN-Schichten einen deutlich höheren Elastizitätsmodul als das Si-Substrat aufweisen.

Um jedoch die exakten E-Module der Schichten zu berechnen, muß beachtet werden, daß sich die Gesamteindringtiefe aus der Deformation in  $z$ -Richtung bei  $z=0$  (hier mit  $\alpha$  bezeichnet) aus den Einzeldeformationen für den Indentor  $w'$ , der Apparatur  $w_a$  und dem Schicht-Substrat-Verbund  $w$

zusammensetzt. Korrigiert man durch Eichung an geeigneten Standardproben die rein elastische Deformation der Apparatur  $w_a$  aus den Meßwerten heraus, so erhält man für den Fall Hertzscher Pressung die Gleichung (3).



Nach dem in Kapitel 7 Dargelegten ist diese nach wie vor gültig. Durch Einsetzen der "homogenen Lösung" für den Indentor (für  $w'$ , siehe Anhang A, Gleichung (A1)) und  $w$  für den geschichteten Probekörper (Gleichung (153)) an den Stellen  $r=0$  und  $r=a$  erhält man die Bestimmungsgleichung für  $h$  und den Kontaktflächenradius  $a$  mit

$$w(r=0) + w'(r=0) = h, \quad (161)$$

$$w(r=a) + w'(r=a) = h - \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2} a^2, \quad (162)$$

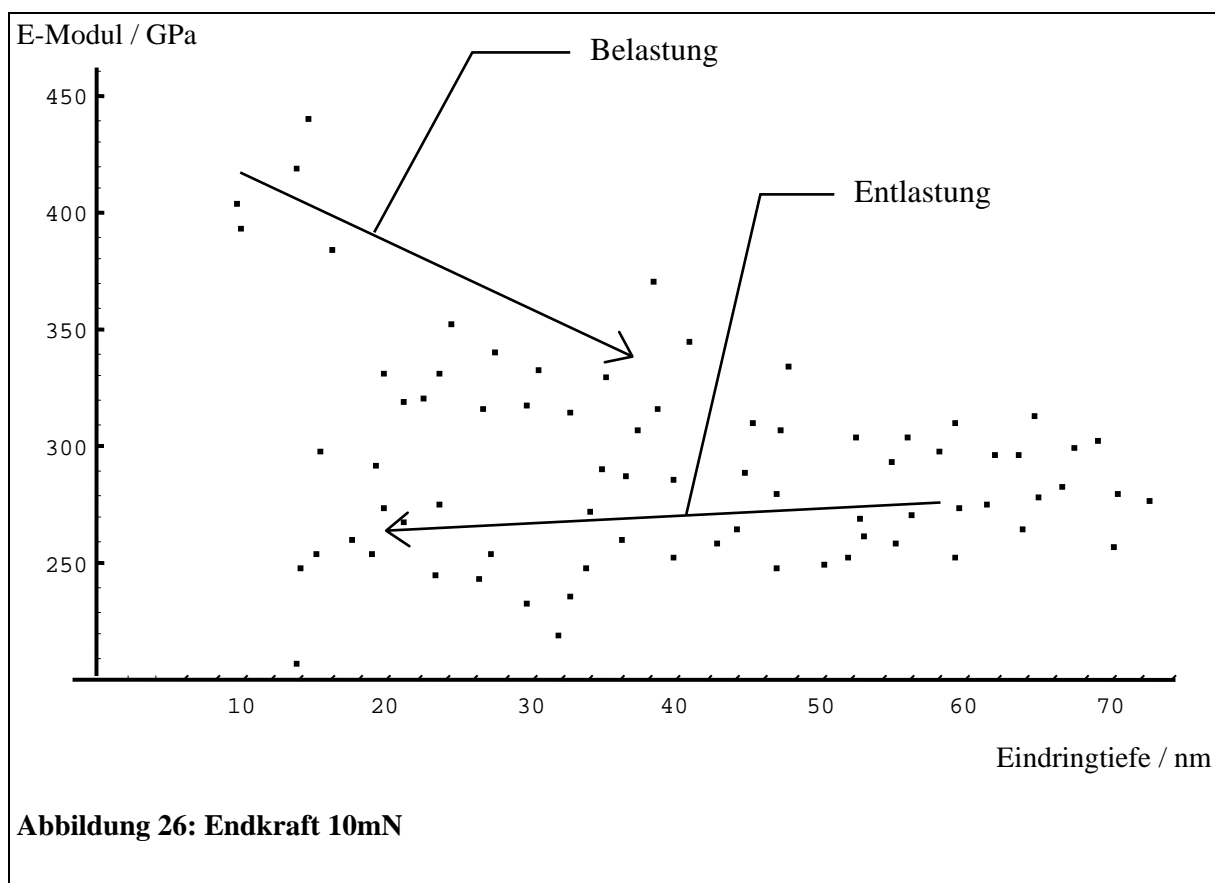
Das Gleichungssystem ist wegen der Inhomogenitäten des Verbundkörpers bezüglich  $a$  transzendent und muß numerisch gelöst werden.

Werden in das Gleichungssystem die gemessenen Werte für die Druckkraft  $P$  und die Gesamteindringtiefe  $h$  eingesetzt, so können bei bekannten Substratparametern unter Einbeziehung der Schichtdicke Aussagen zu den mechanischen Eigenschaften der Schichten gemacht werden. Dazu

benutzen wir die im Abschnitt 3.4. hergeleiteten Grenzübergänge zu isotropen Materialien. Elastizitätsmodul und Poissonzahl von Substrat und Indentor betrachten wir als gegeben. Mit einem geschätzten Poissonwert von 0.25 für den Film können nun die Elastizitätsmoduli der Filme numerisch aus dem oben gegebenen Gleichungssystem für jedes Wertepaar der Eindringtiefe-Kraft-Kurve bestimmt werden.

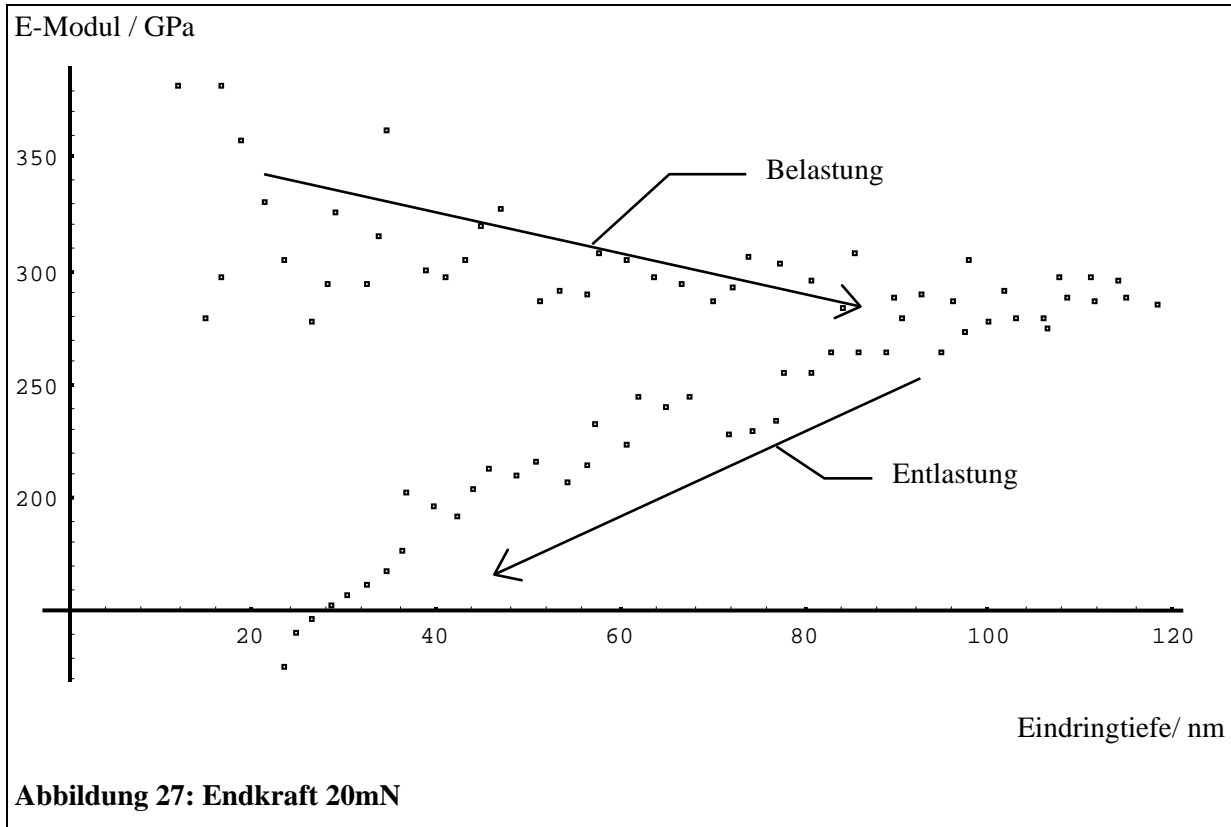
Es ist wichtig zu bemerken, daß die maximalen, berechneten Kontaktradien bei etwa  $0.9\mu\text{m}$  für die größten Endkräfte lagen und somit die für das Koordinatensystem  $+$  geltenden Gleichungen näherungsweise in Zylinderkoordinaten verwendet werden konnten. Aus dieser Vereinfachung ergaben sich vor allem Verkürzungen der Rechenzeiten bei der Berechnung der Spannungen. Mögliche, etwas größere Abweichungen von der Realität ergeben sich für Druckkräfte über 30mN.

Die folgenden Abbildungen 26 bis 29 zeigen die berechneten E-Module der TiN-Schicht bei einem Verbund mit einer Schichtdicke von  $1.4\mu\text{m}$  für jedes Eindringtiefe-Kraft-Paar für 4 unterschiedliche Endkräfte.

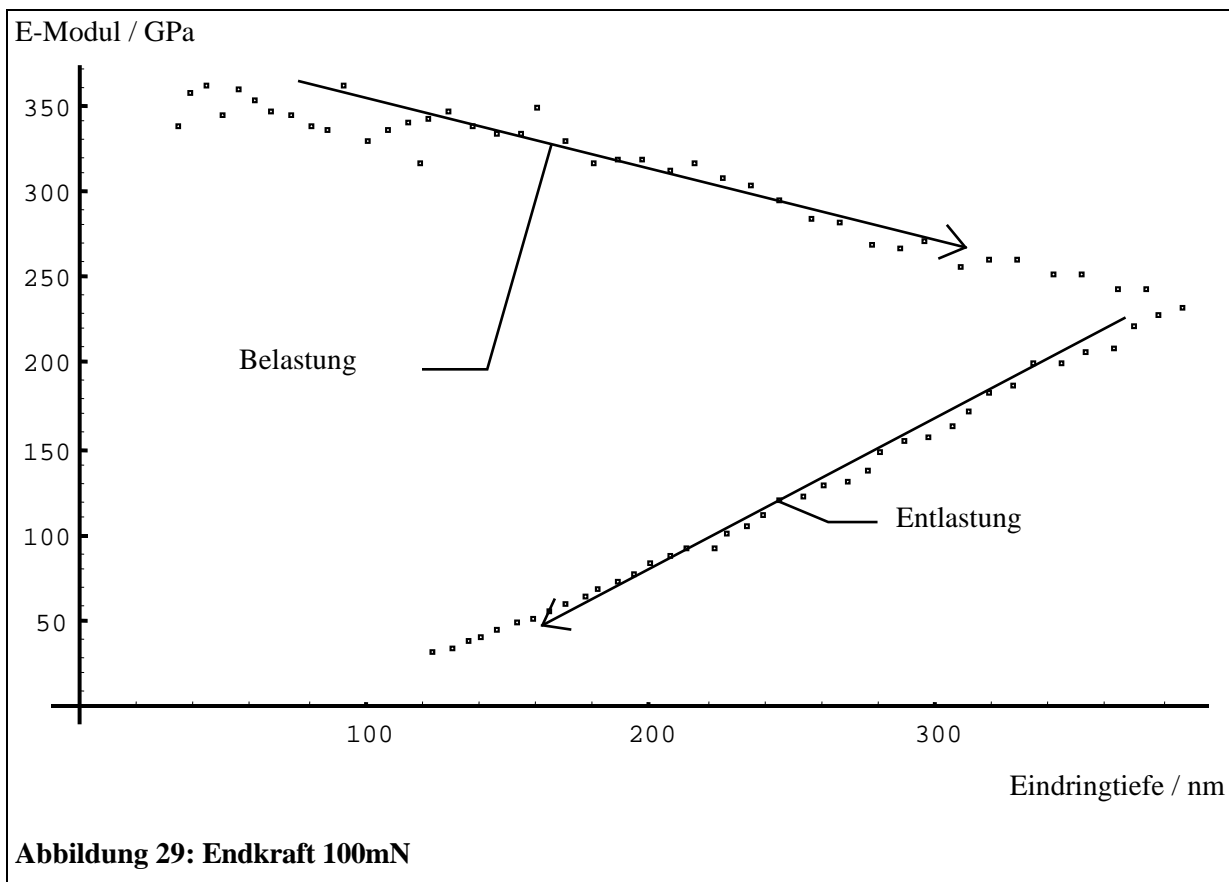
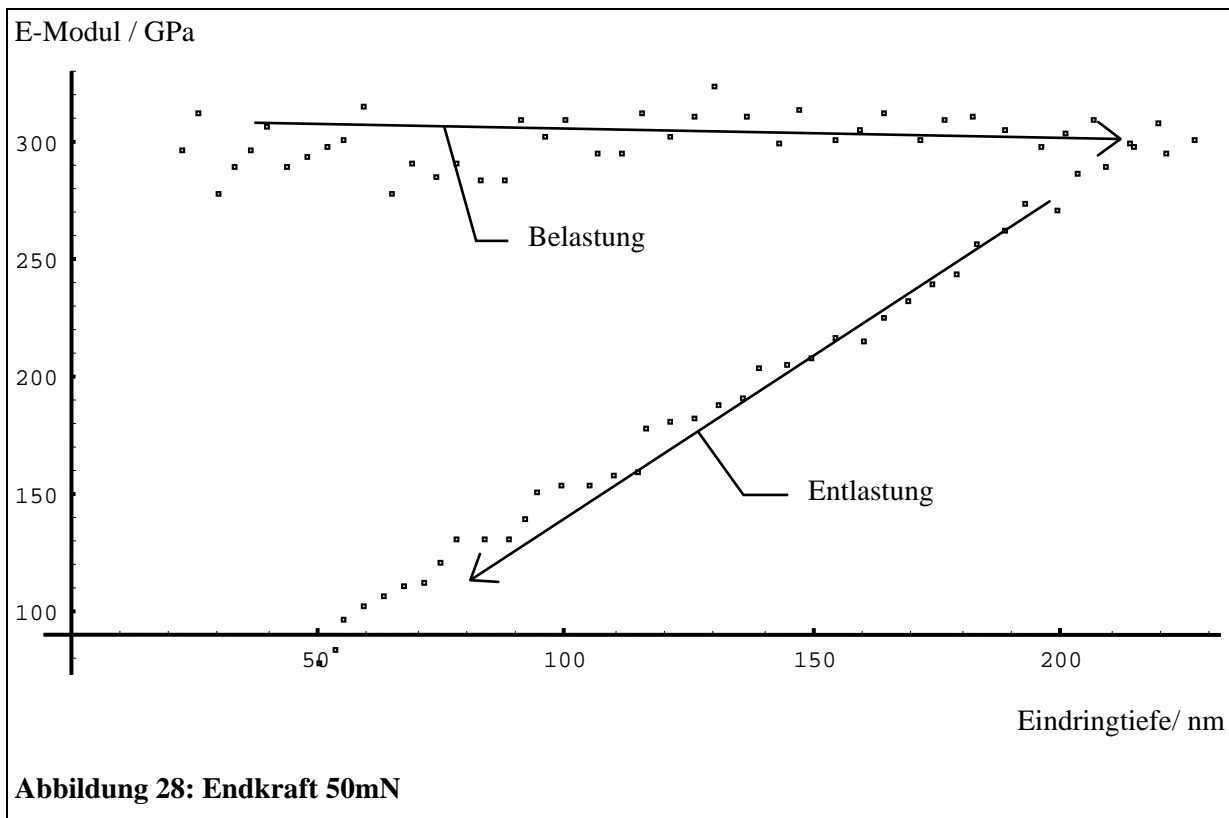


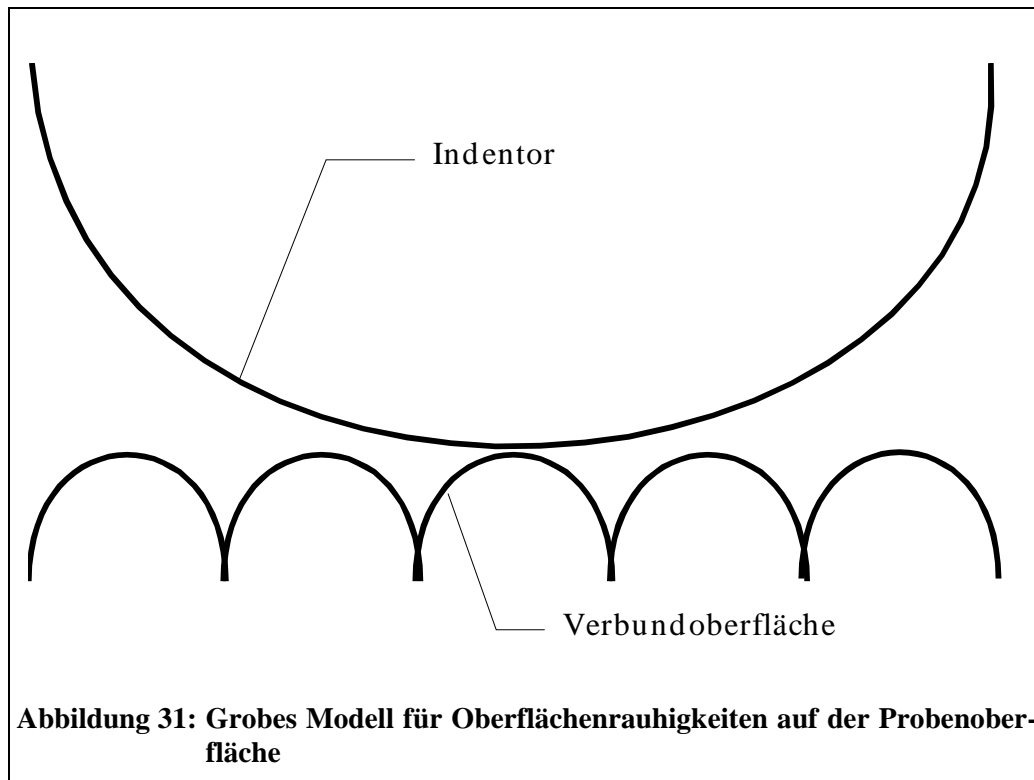
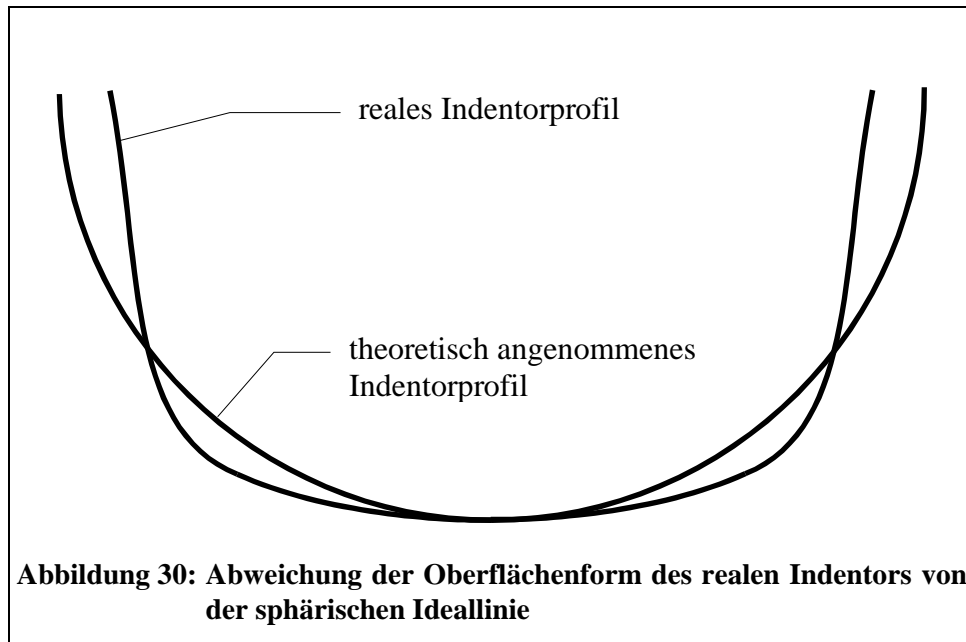
Die Pfeile geben wiederum die Bewegungsrichtung des Indenters innerhalb der Punkteschar an. Insbesondere Messungen mit kleinen Endkräften, welche am Limit der Meßgenauigkeit des UMIS-Indentors durchgeführt wurden, weisen große Schwankungen hinsichtlich der berechneten Elastizitätsmoduli auf. Trotz der Tatsache, daß hier deshalb auch Meßfehler eine Rolle spielen könnten, sind nach Ansicht des Autors vor allem Oberflächeneffekte (Rauigkeiten, siehe Abbildung 31) für die

starken Schwankungen verantwortlich zu machen. Die Berechnung des Schicht-E-Moduls an einzelnen Eindringtiefe-Kraft-Paaren ist in solchen Fällen eigentlich nicht mehr zweckmäßig, jedoch kann die Häufung der Meßwerte in Abbildung 26 um den Wert von ca. 300GPa durchaus als Mittelwert mit einer Schwankung von  $\pm 50$ GPa interpretiert werden.



Um Fehlinterpretationen zu vermeiden, weist der Autor auf die unterschiedlichen Maßstäbe der Abbildungen bei der Darstellung der eindringabhängigen Elastizitätsmoduli hin. Die bei allen Kurven zu beobachtende Abnahme des Schicht-E-Moduls mit steigender Eindringtiefe läßt sich neben der Abweichung der Oberflächenform des Indentors von der sphärischen Ideallinie (Abbildung 30) vor allem durch die Oberflächenrauigkeit der Prüflinge erklären.





Wie in Abbildung 31 extrem vereinfacht gezeigt, wird dabei angenommen, daß auf der Schichtoberfläche halbkugelförmige Strukturen aufsitzen, in denen Spannungsspitzen auftreten, die zu nichtelastischem Verhalten führen. Mit Hilfe der im Anhang A gegebenen Gleichungen kann man dies leicht nachprüfen, indem man statt der Krümmung Null einer planen Oberfläche den mittleren Radius der Halbkugeln einsetzt. In Abhängigkeit von der Größe der Strukturen erhält man dann bis zu mehrfach höhere Spannungsmaxima gegenüber dem planen Fall (beispielsweise 5-fach bei einem Krümmungsradius  $R=0.5 \cdot R_i$ , mit dem Krümmungsradius des Indentors  $R_i$ ). Dieser Fakt konnte bisher jedoch nicht weiter



untersucht werden. Bestätigt wurde jedoch die angenommene Abweichung des Indentors von der sphärischen Idealform [77] (Abbildung 30). So liefert die Spitzenabplattung des Indentors zunächst zu große Elastizitätsmoduli für die Schicht, welche dann beim weiteren Eindringen durch die Verringerung des effektiven Krümmungsradius abnehmen. Berücksichtigt man dies sowie die lineare Korrektur des Gerätes, welche aus Vergleichsmessungen an reinen Si-Proben ermittelt wurden, so ergeben sich weit höhere Elastizitätsmodule für die Schichten (Tabelle 2).

Die Abnahme des Elastizitätsmoduls beim Entlasten kann hingegen nicht zweifelsfrei erklärt werden. Der Autor vermutet, daß hier neben nichtelastischen Verformungen, die eine Abnahme des Elastizitätsmoduls aufgrund des elastischen Ansatzes der Rechnungen vortäuschen, auch Haftungseffekte zwischen Indentor und Prüfkörper eine Rolle spielen.

Da die zugrunde liegende Theorie rein elastisch ist, verlieren eigentlich sämtliche im nichtelastischen Bereich berechnete E-Module ihren Sinn. Jedoch kann der große Einfluß dieser Prozesse auf das berechnete Schichtmodul ein wesentlich empfindlicheres Instrumentarium zur Interpretation des Indentorversuchs geschichteter Materialien liefern, als dies bei der reinen Eindring-Kraft-Kurve der Fall ist. Für die Berechnung der durchschnittlichen E-Module in Tabelle 2 wurden somit nur die jeweils ersten ein bis zwei (je nach Endkraft und Kurvenverhalten) Drittel der Belastungskurven herangezogen.

Für den Verbund mit der dünnsten 0.2µm-TiN-Schicht konnte wegen des mit sinkender Schichtdicke steigenden Fehlereinflusses (Rauigkeit, Schwankungen usw.) der Schicht-E-Modul nur aus den Resultaten der anderen Schichten abgeschätzt werden.

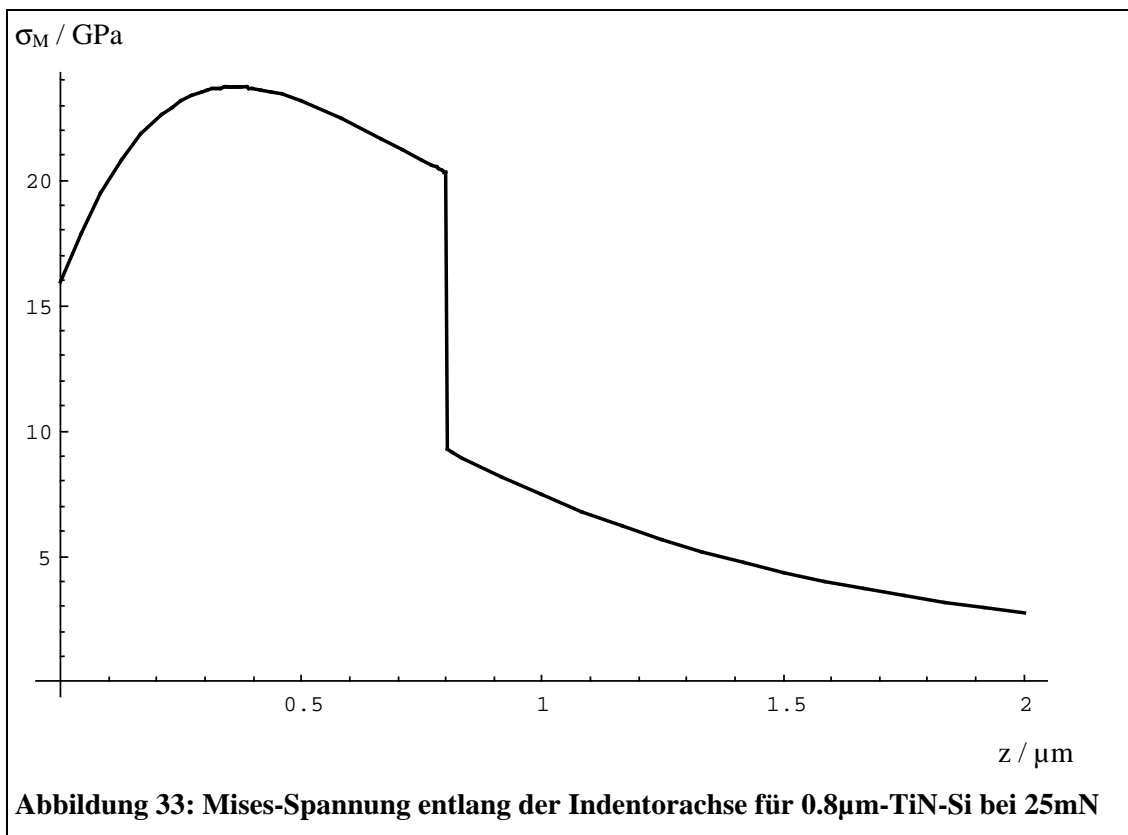
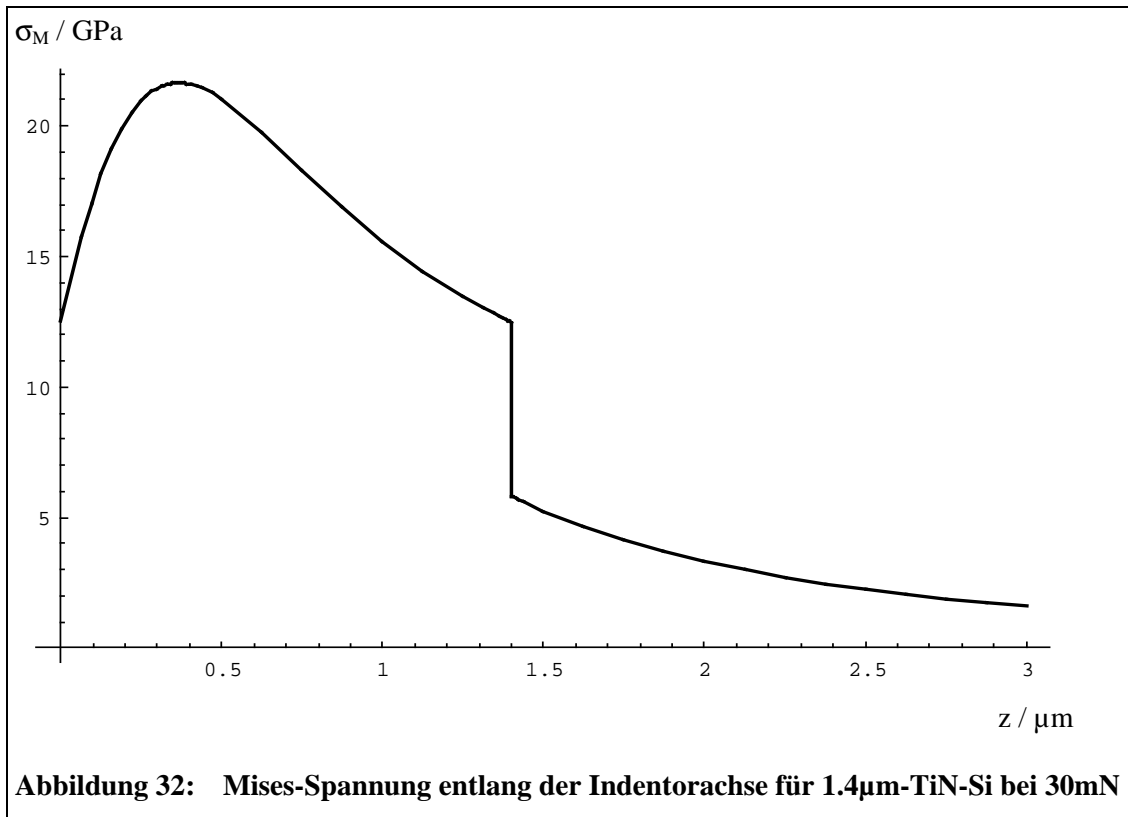
Unter Verwendung der nun bestimmten Schichtparameter (Tabelle 2) können mit Hilfe der aus den Meßkurven nach Verfahren 2 ermittelten kritischen Lasten die zugehörigen Spannungsverteilungen bestimmt werden.

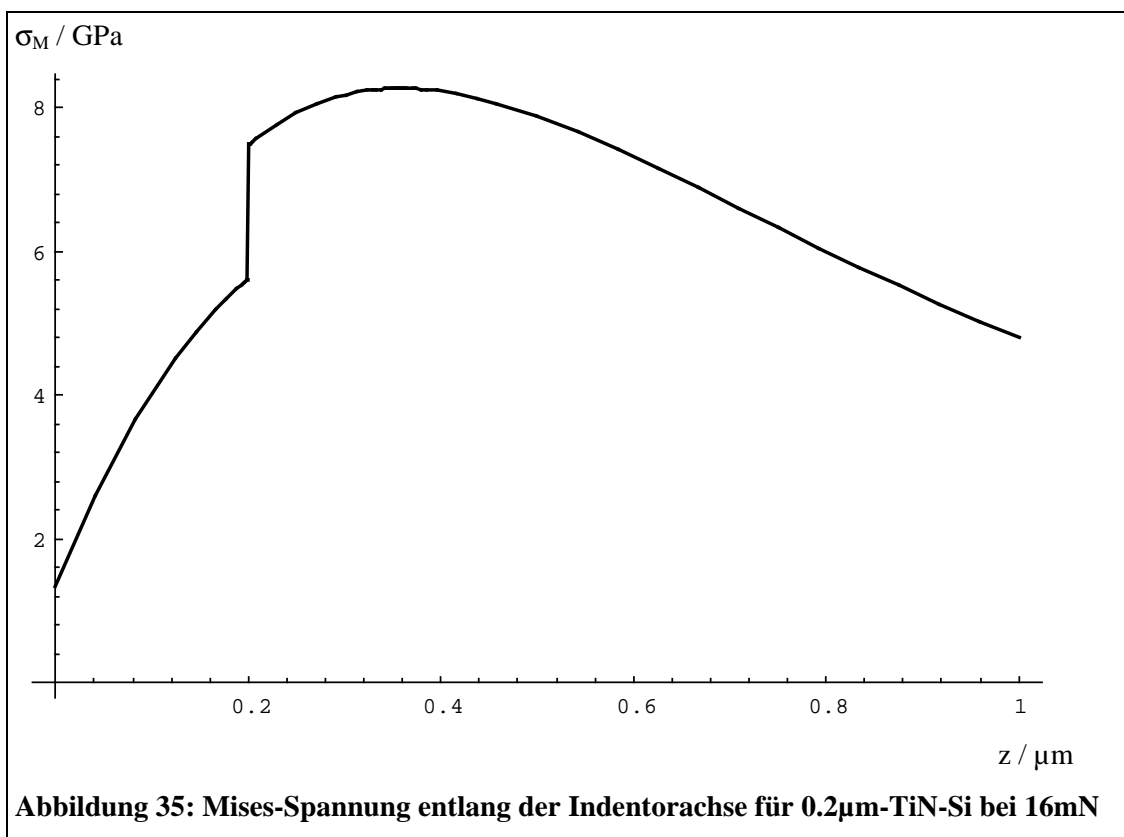
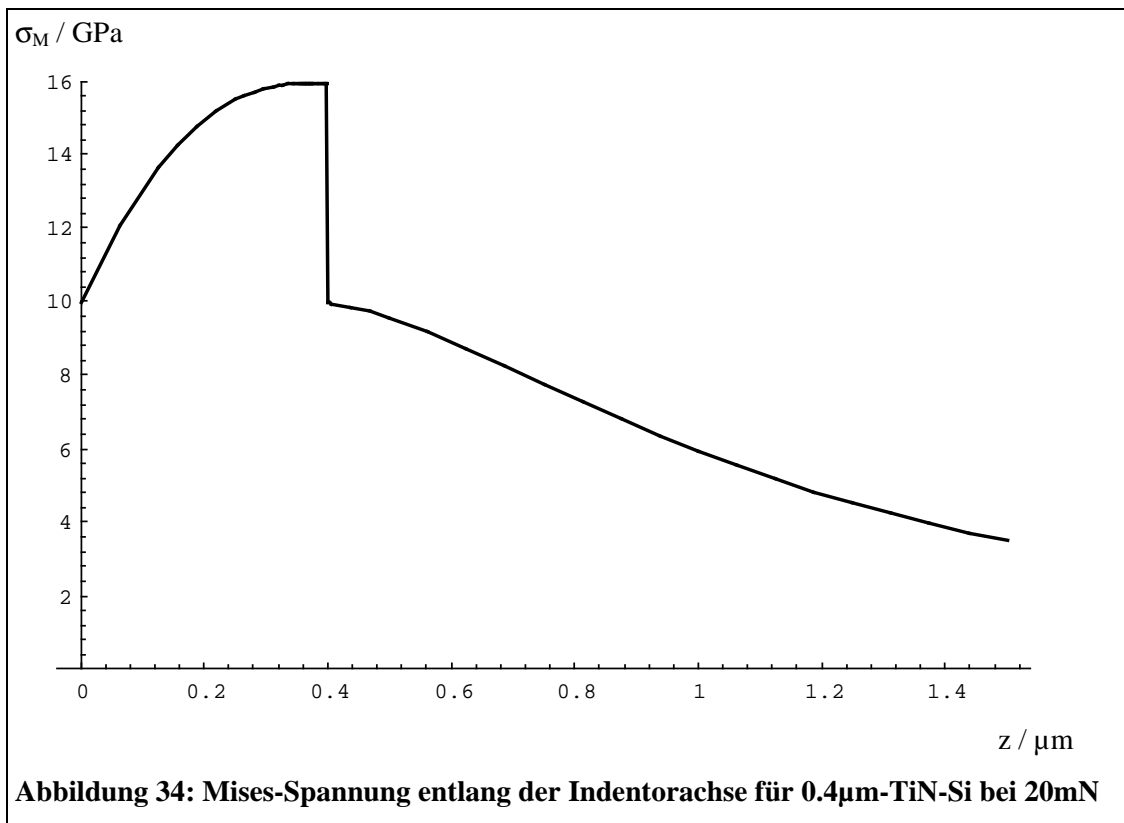
Insbesondere die nach dem von Mises-Kriterium

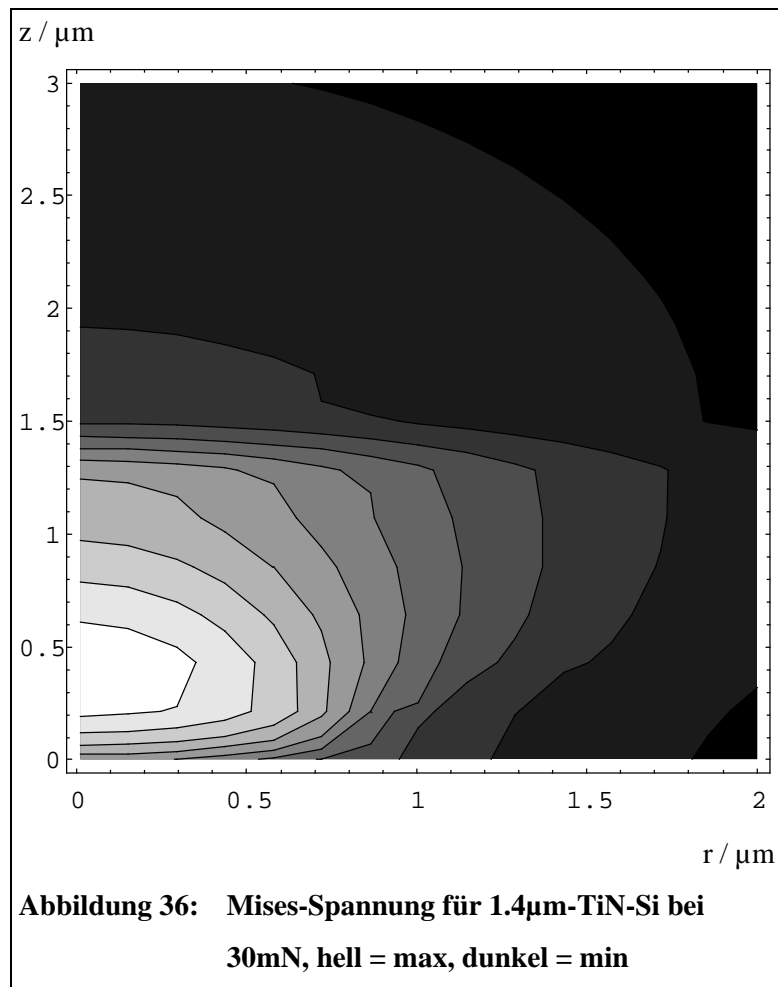
$$\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6 * (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{zy}^2) \right)}$$

bestimmte Vergleichs- oder von Mises-Spannung  $\sigma_M$  (hier kurz Mises-Spannung) ist dabei von großem Interesse, da sie ein skalares Maß für den Beginn plastischer Deformation darstellt [33].  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  bezeichnen hierbei die Normal- und  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy}$  die Scherspannungen in kartesischen Koordinaten.

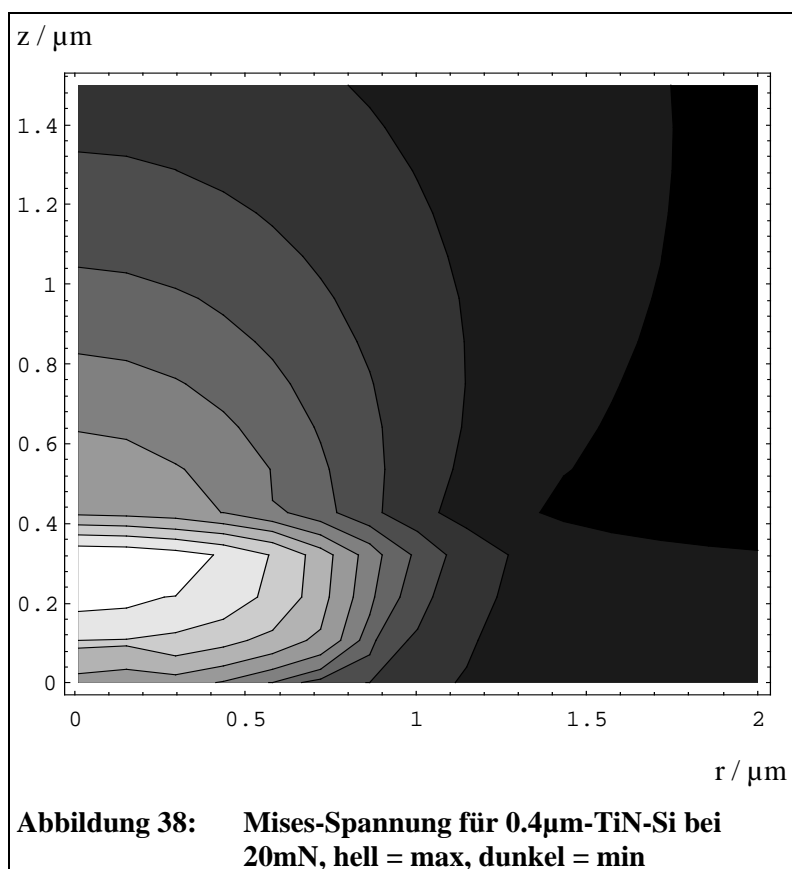
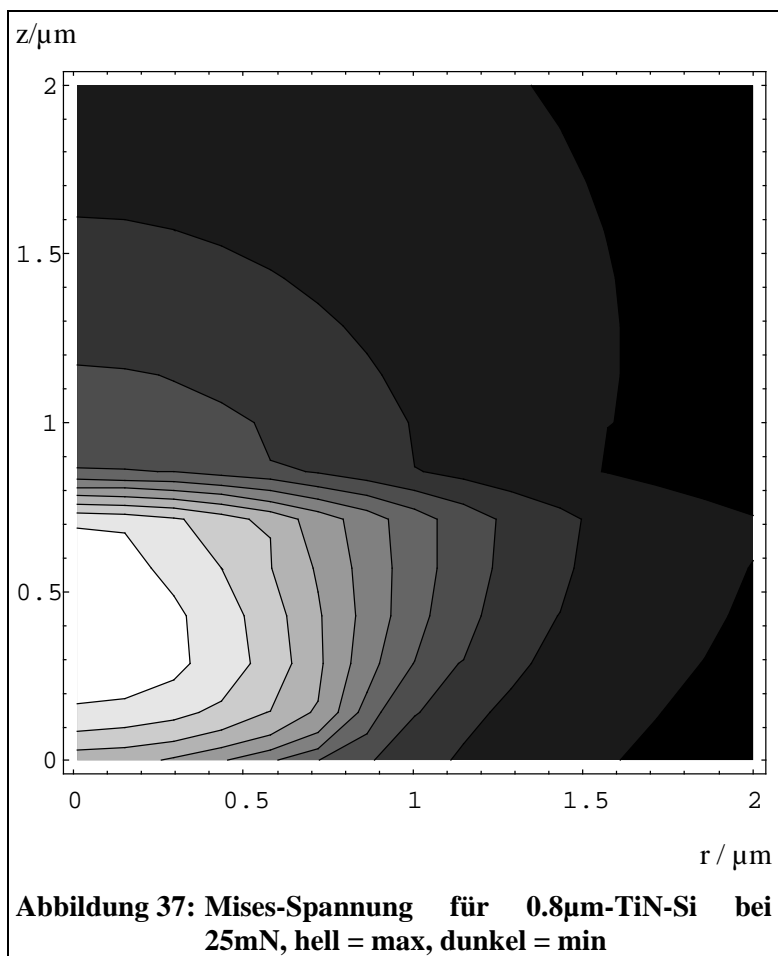
Die Abbildungen 32 bis 39 zeigen die Verteilung der Mises-Spannung für die ermittelten kritischen Druckkräfte sämtlicher 4 TiN-Si-Verbunde entlang der Indentorachse z (Abbildungen 32 bis 35) und als Konturdiagramm innerhalb einer Halbebene der Indentorachse (r-z-Ebene, Abbildungen 36 bis 39). Für die Berechnungen wurden die Werte der Tabelle 2 sowie  $E_{Si}=169\text{GPa}$ ,  $\nu_{Si}=0.27$  und  $\nu_{Ti}=0.25$  verwendet. Für den Indentor wurden die Werte  $E_I=1100\text{GPa}$  und  $\nu_I=0.1$  angesetzt.



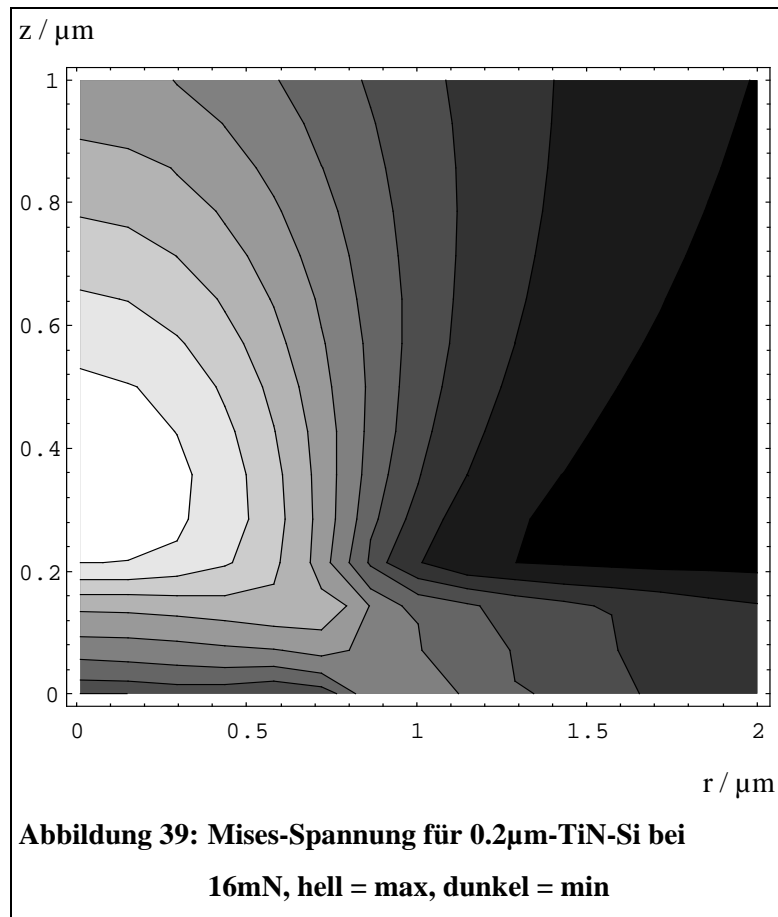




Interessant sind vor allem die unterschiedlich lokalisierten Maxima der Mises-Spannung in Abhängigkeit von der Schichtdicke. So liegt bei Schichten größer  $0.8\mu\text{m}$  das Maximum deutlich innerhalb der Schicht, während es sich bei den beiden Verbunden mit den dünneren Schichten im Interfacebereich ( $0.4\mu\text{m}$ ) bzw. Substrat ( $0.2\mu\text{m}$ ) ausmachen läßt. Da die zugehörigen Druckkräfte, für welche die Spannungsverteilungen berechnet worden sind, gerade die für den Beginn nichtelastischen Verhaltens kritischen Werte darstellen, liegt der Schluß nahe, daß diese Maxima auch tatsächlich die Orte bezeichnen, an denen nichtelastische Effekte zuerst auftreten. Dies gilt allerdings nicht, wenn wegen des inhomogenen Aufbaus der Probekörper in Bereichen mit weit geringerer Misesspannung kritische Materialwerte bereits überschritten wurden. So muß beispielsweise der Maximalwert der Misesspannung im  $1.4\mu\text{m}$ -TiN-Film (Abbildung 32) nicht unbedingt auch mit dem nichtelastischen Verhalten der Eindringtiefe-Kraft-Kurve zusammenhängen. Dieses Verhalten könnte auch vom Substrat herrühren, das eine wesentlich geringere Härte und damit eine kleinere kritische Misesspannung als TiN aufweist.

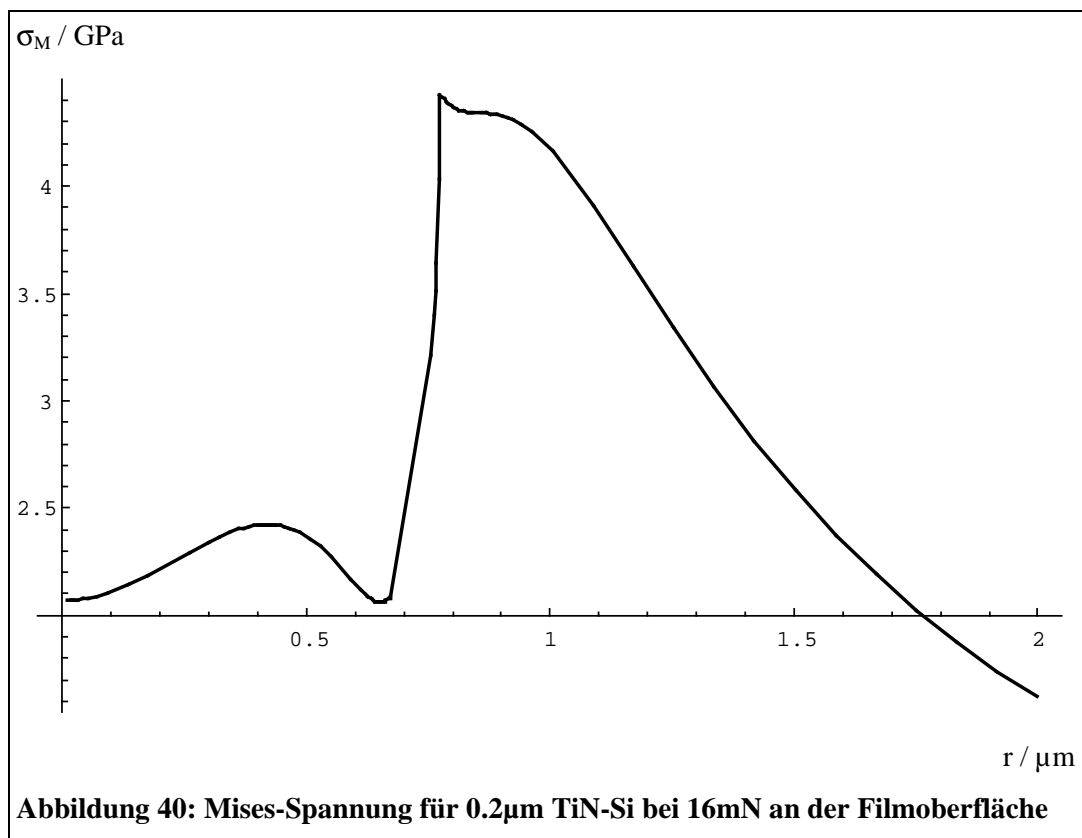


Das Mises-Kriterium liefert somit lediglich eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fließvorgängen, also rein plastischen Deformationen. Auf die wahre Ursache der nichtelastischen Verformung kann aus den Indentordaten allein nicht geschlossen werden. Hierzu wären weitere Untersuchungen, die die Struktur vor und nach dem Eindringversuch in Schicht und Substrat analysieren können, notwendig.



Weiterhin sind die Ursachen für nichtelastisches Verhalten bei kristallinen Materialien wie Silizium oft eher Brüche oder Phasenumwandlungen als reine Fließprozesse. Es müssten also neben dem Mises-Kriterium noch weitere Spannungsverteilungen untersucht werden. So könnte beispielsweise der hydrostatische Anteil des Spannungstensors Hinweis auf eine Phasenumwandlung im Substrat geben.

Betrachten wir Abbildung 39 genauer, so können wir eine Erhöhung der Mises-Spannung an der Filmoberfläche knapp außerhalb des Kontaktradius bei ca. 1 $\mu$ m registrieren. Abbildung 40 zeigt dies deutlicher.



Neben dem absoluten Maximum der Mises-Spannung, das, wie von homogenen Materialien bekannt (siehe beispielsweise [7]), entlang der Indentorachse auftritt, erscheint dieses Maximum in bestimmte Richtungen ausgezogen. Dieser Effekt wird allein durch die Inhomogenität, also den geschichteten Aufbau, hervorgerufen und kann interessante Folgen haben. Steigt nämlich bei weiterer Druckerhöhung das Sekundärmaximum im Schichtmaterial an und überschreitet schließlich den kritischen Wert, so entstünde neben dem ellipsoiden Bereich plastisch deformierten Materials in Achsnähe noch ein torusförmiges Gebiet in der Nähe der Grenze der Berührungsfläche zwischen Indentor und geschichtetem Probekörper. Da der sphärische Indentorversuch ein gutes Modell zur Modellierung realer Beanspruchung darstellt, ist dieser Effekt für die Beurteilung der zu erwartenden Verbundstabilität und damit der Materialauswahl sehr bedeutsam.

In Tabelle 2 sind die wichtigsten elastischen Parameter, die durch die Indentorversuche ermittelt wurden, angegeben. Als kritische Last wurde die Indentordruckkraft angenommen, bei welcher die nach Verfahren 2 aufgenommene obere Punktreihe O1, O2 ... in ihrem Kurvenverlauf dauerhaft von der Kurve der unteren Punktreihe U1, U2 ... (siehe Abbildung 24) abweicht.

**Tabelle 2:**

Filmdicke / $\mu\text{m}$	E-Modul/ GPa direkt / korrigiert	kritische Last/ mN
1.4	340 / 445	30
0.8	375 / 490	25
0.4	360 / 470	20
0.2	355 <sup>*)</sup> / 465 <sup>*)</sup>	16

<sup>\*)</sup> geschätzter Wert

Die korrigierten Werte der E-Module wurden nach Einbeziehung der in [77] gegebenen Geräte- und Indentorfehler ermittelt und stimmen sehr gut mit den Erwartungswerten für das Schichtmaterial TiN sowie Vergleichsmessungen mit einem Berkowichindentor von Wittling, BenDavid, Martin und Swain [76] überein. Der Elastizitätsmodul für die 0.2 $\mu\text{m}$ -TiN-Schicht wurde durch Wichtung der Meßergebnisse der dickeren Filme abgeschätzt. Gewichtet wurde dabei über sämtliche zur E-Modulbestimmung herangezogenen Werte. Da aber die elastischen Anteile an den Indentorkurven, welche zur E-Modulbestimmung verwendet werden können, für jeden Verbund unterschiedlich waren, entspricht der ermittelte E-Modul nicht dem arithmetischem Mittel der Werte für die anderen Schichten.

In Tabelle 3 werden die Ergebnisse der Auswertung der Mises-Spannungsverteilung dargestellt. Neben dem auf der Indentorachse gelegenen absoluten Maximum der Mises-Spannung wird auch das Vorkommen eventueller Sekundärmaxima an der Verbundoberfläche dargestellt.

**Tabelle 3:**

Filmdicke / $\mu\text{m}$	Maximum auf der Indentorachse /GPa	Position des Maximums	Maximum auf der Oberfläche /GPa
1.4	21.8	Film	keines
0.8	24	Film	Keines
0.4	16	Interface	sehr schwach
0.2	8.3s	Substrat	4.5

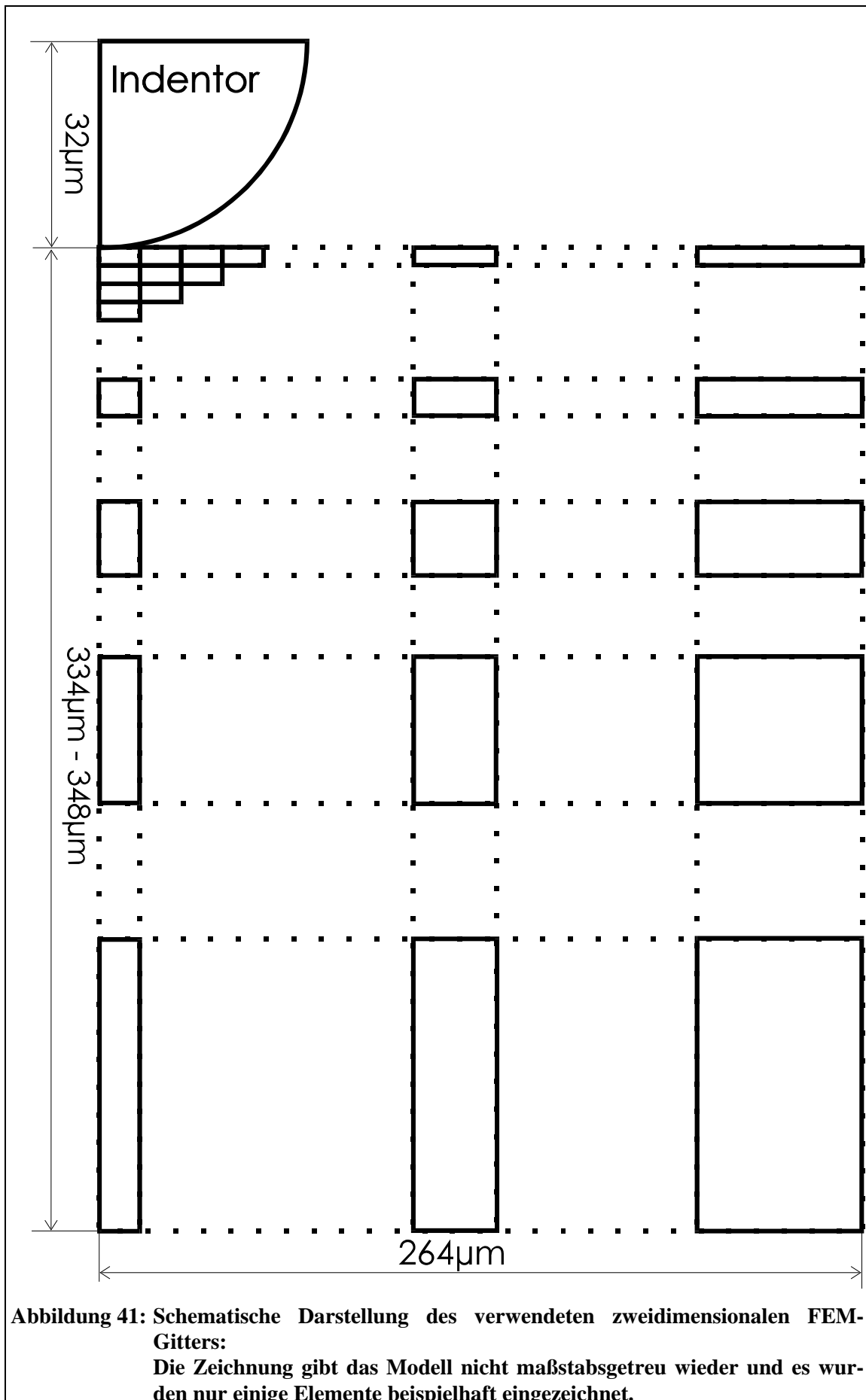
Es ist interessant festzustellen, daß bei den dünneren TiN-Schichten die Misesmaxima nicht nur am bzw. im Substrat zu finden sind, sondern daß dieser Effekt auch mit einer Abnahme der kritischen Mises-Spannungen verbunden ist. Dies stimmt auch mit dem Fakt überein, daß TiN eine größere Härte als Silizium aufweist.



## **10. Vergleich der analytischen Rechnung mit einem FEM-Modell**

Die finiten Elemente-(FEM-)Rechnungen der im folgenden vorgestellten Ergebnisse wurden zusammen mit H. Djabella und R. D. Arnell vom "Department of Aeronautical and Mechanical Engineering" der University of Salford in Salford (Manchester/Großbritannien) durchgeführt.

Der Vergleich der analytischen Berechnung von Kontaktproblemen mit FEM-Modellen kann wegen der unterschiedlichen Voraussetzungen beider Verfahren nur bedingt als Kriterium für die Richtigkeit des einen oder anderen Verfahrens dienen. Dies resultiert vor allem aus dem grundsätzlich unterschiedlichen Untersuchungsgegenstand, aber auch aus Verfahrensunterschieden. Während die analytische Methode direkt das elastische Feld zu einem gegebenen sphärischen Kontaktproblem zu berechnen vermag, müssen beim FEM-Verfahren viele kleinere Deformationsschritte sukzessive ausgeführt werden, die dann in ihrer Summe zur Gesamtdeformation führen. Automatisch werden dabei durch Maschinenfehler Parameterkanten, -sprünge und -inhomogenitäten quasi geglättet. Fehler werden außerdem durch die Beschränkung der einzelnen Deformationsschritte verursacht, da sie nicht beliebig klein gemacht werden können. Da die Anzahl der Schritte dennoch einen gewissen Mindestwert aufweisen muß, überschreiten die resultierenden Gesamtdeformationen oft den Gültigkeitsbereich des zugehörigen analytischen Modells. Weitere Ungenauigkeiten werden naturgemäß durch den Aufbau der zu untersuchenden elastischen Körper aus einzelnen Elementen verursacht. So konnten in unserem Fall nur Schichten mit einer minimalen Dicke von  $4\mu\text{m}$  untersucht werden, da die kleinsten Elemente eine z-Ausdehnung von minimal  $1\mu\text{m}$  aufwiesen (wir behalten hier die z-Achse als Indentorachse bei). Die Ausdehnung dieser Elemente in radialer Richtung betrug  $2\mu\text{m}$ . Abhängig vom Abstand von der Kontaktfläche werden die Elemente dann größer gewählt, um dadurch deren Anzahl und die Rechenzeit herabzusetzen (Abbildung 41). Als besonders restriktiv für einen Vergleich mit analytischen Verfahren erwies sich die Beschränkung der FEM-Methode auf die Untersuchung endlich ausgedehnter Körper. Während beim analytischen Verfahren unendliche Halbräume betrachtet werden, kann die FEM-Methode nur Modelle untersuchen, deren horizontale und vertikale Ausdehnung beschränkt ist. Insbesondere die Forderung nach einer vertretbaren Rechenzeit führt dazu, daß nur verhältnismäßig kleine Modelle mit relativ wenigen Elementen untersucht werden können.



In unserem Fall wurde zur FEM-Rechnung das System ANSYS 5.0 [64] verwendet. Das gesamte Netz finiter Elemente bestand aus einer Anordnung von 330 Elementen (es handelte sich um sogenannte quadrilaterale, acht-Knoten, isoparametrische Elemente) und einer Gesamtzahl von 1088 Knoten. Um die Kontaktbedingungen zu simulieren, wurden 3-Knoten-Interfaceelemente verwendet. Während die horizontale Ausdehnung des Netzes stets bei 264 $\mu\text{m}$  lag, betrug das vertikale Maß in Abhängigkeit von der Schichtdicke zwischen 334 und 348 $\mu\text{m}$ . Wegen der Symmetrie des Kontaktproblems wurde nur die Hälfte einer Schnittebene betrachtet, in welcher die Indentorachse vollständig liegt (Abbildung 41). Das Netzwerk ist an der Basis in vertikaler und an der Indentorachse in horizontaler Richtung fixiert. Der Radius des simulierten Indentors betrug 32 $\mu\text{m}$ . Sein Elastizitätsmodul lag bei 600GPa. Untersucht wurden Verbunde mit einem Substrat-E-Modul von 200GPa. Die Werte für die Filme sind in Tabelle 4 zusammengefaßt.

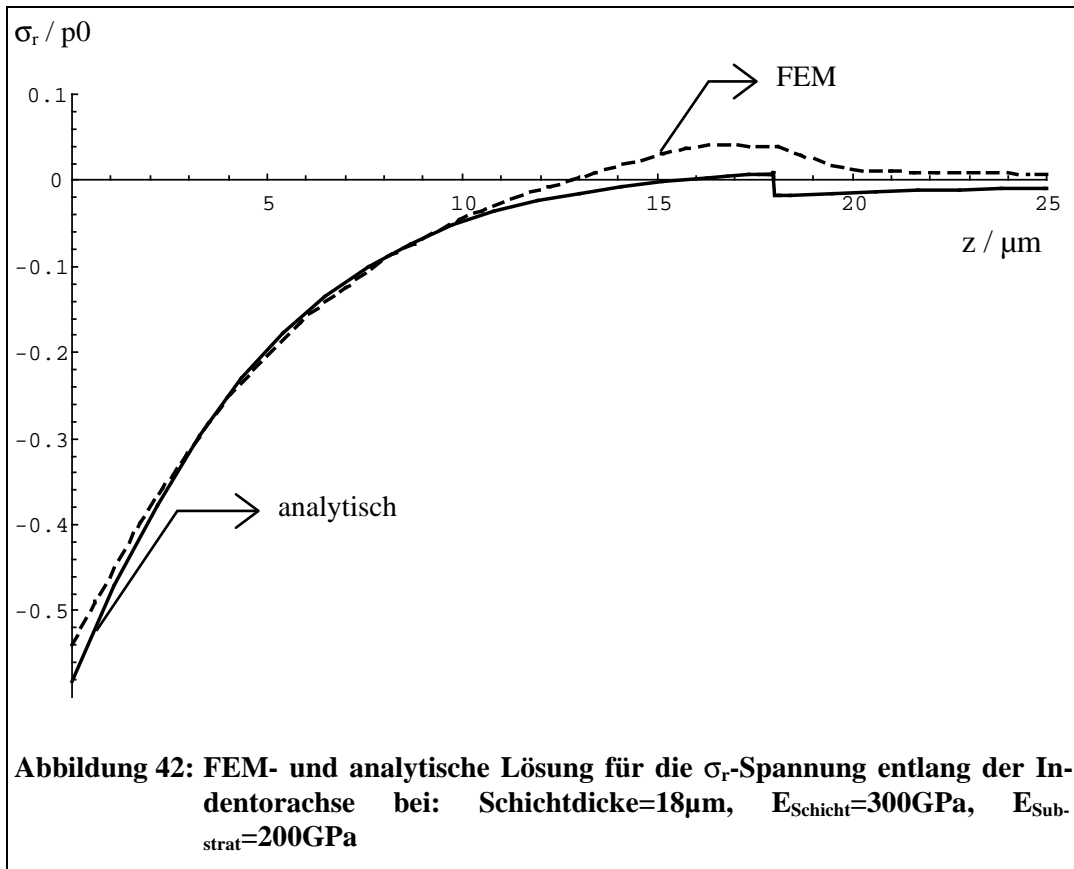
**Tabelle 4:**

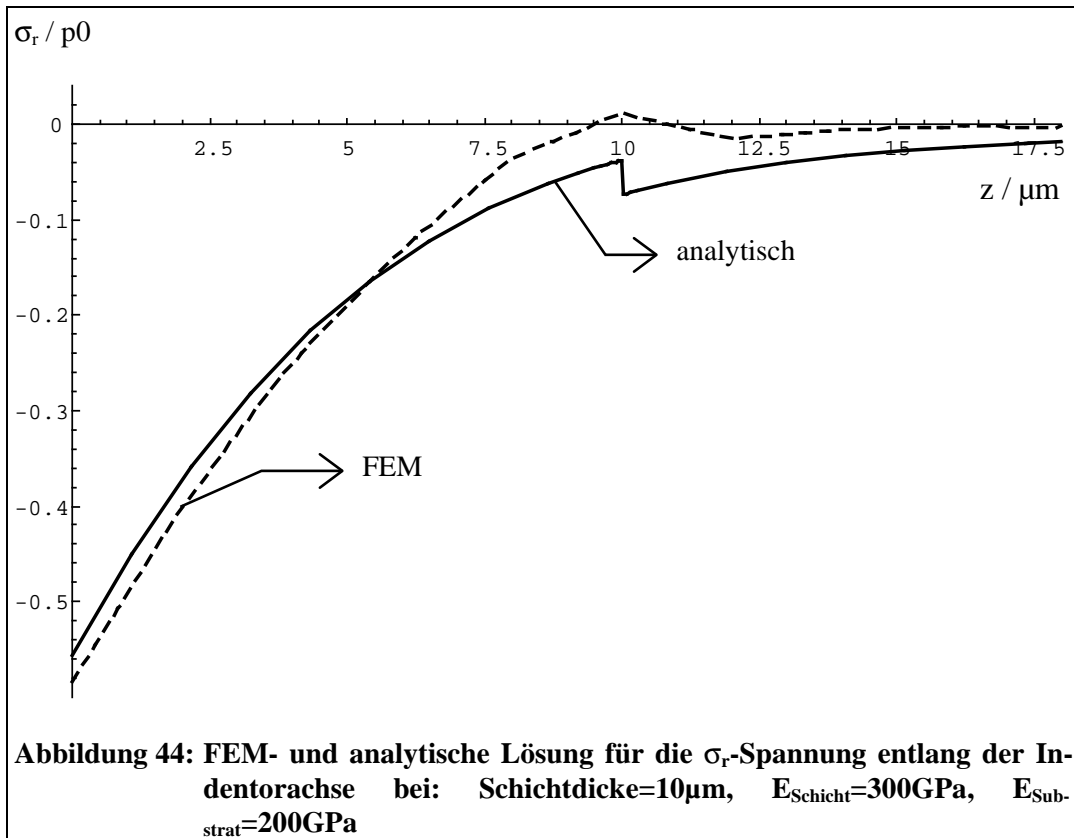
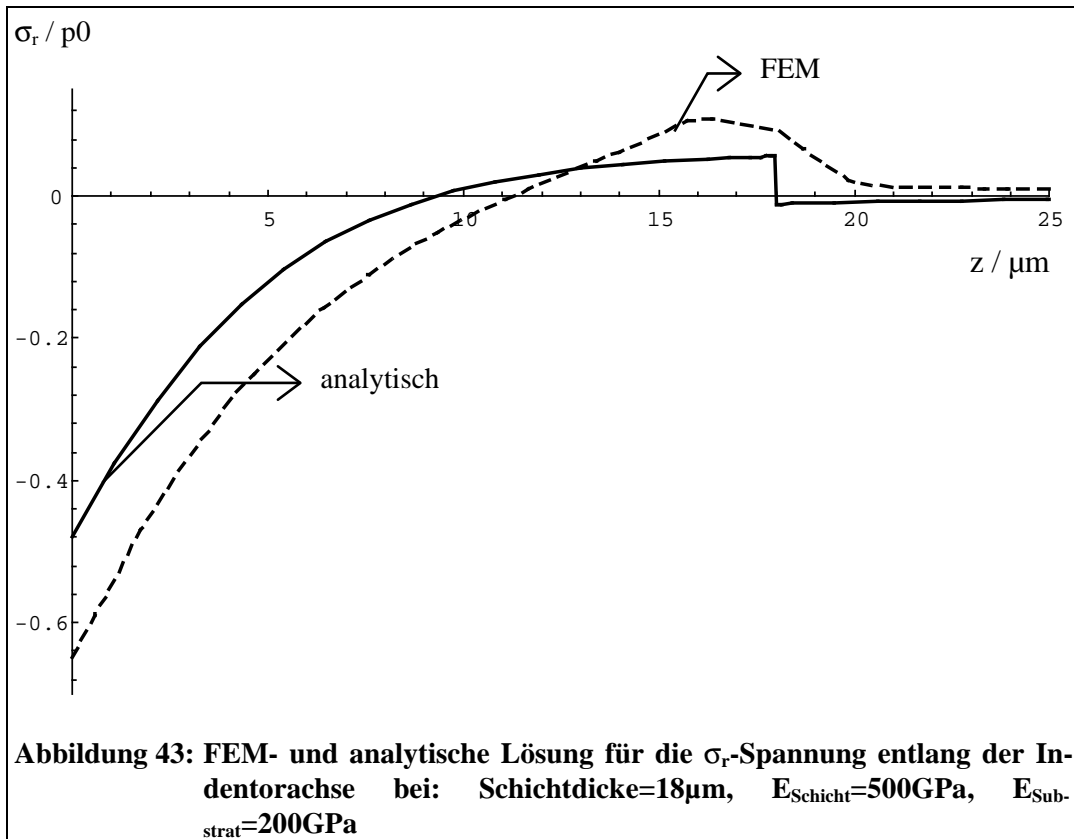
Name des Verbunds	Film-E-Modul/ GPa	Filmdicke/ $\mu\text{m}$
T1E1	300	18
T1E3	500	18
T2E1	300	10
T2E3	500	10
T3E1	300	4
T3E3	500	4

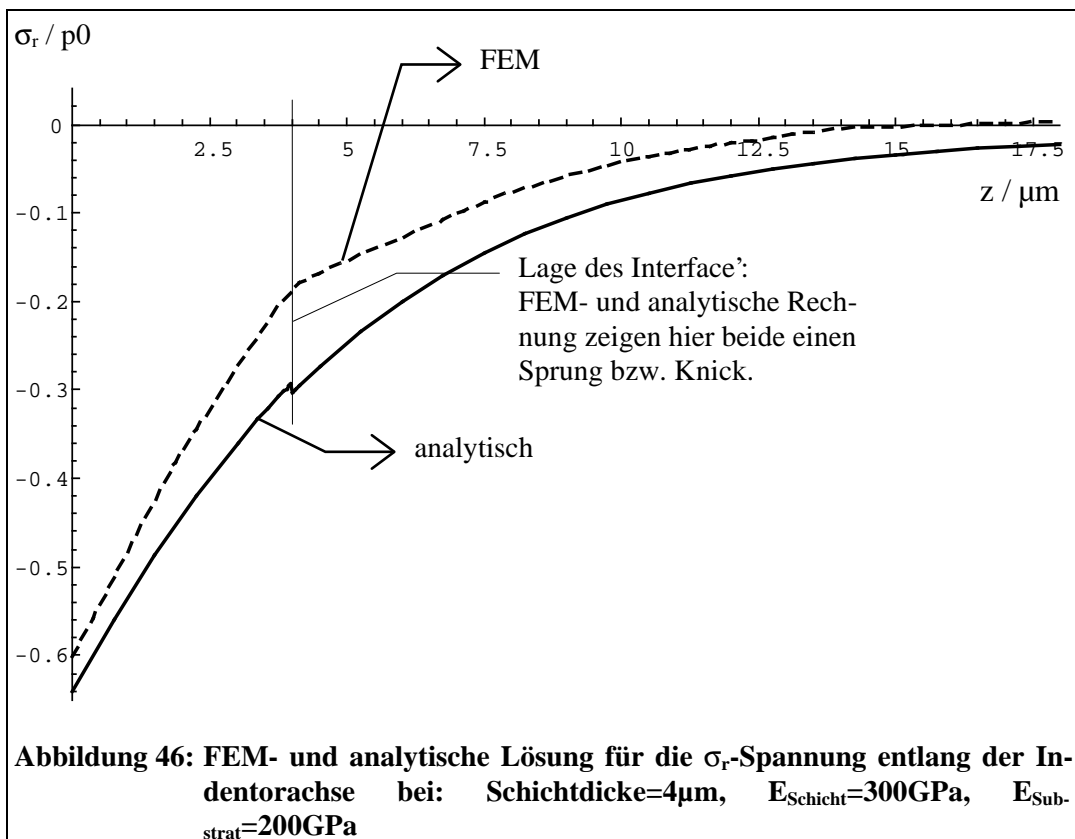
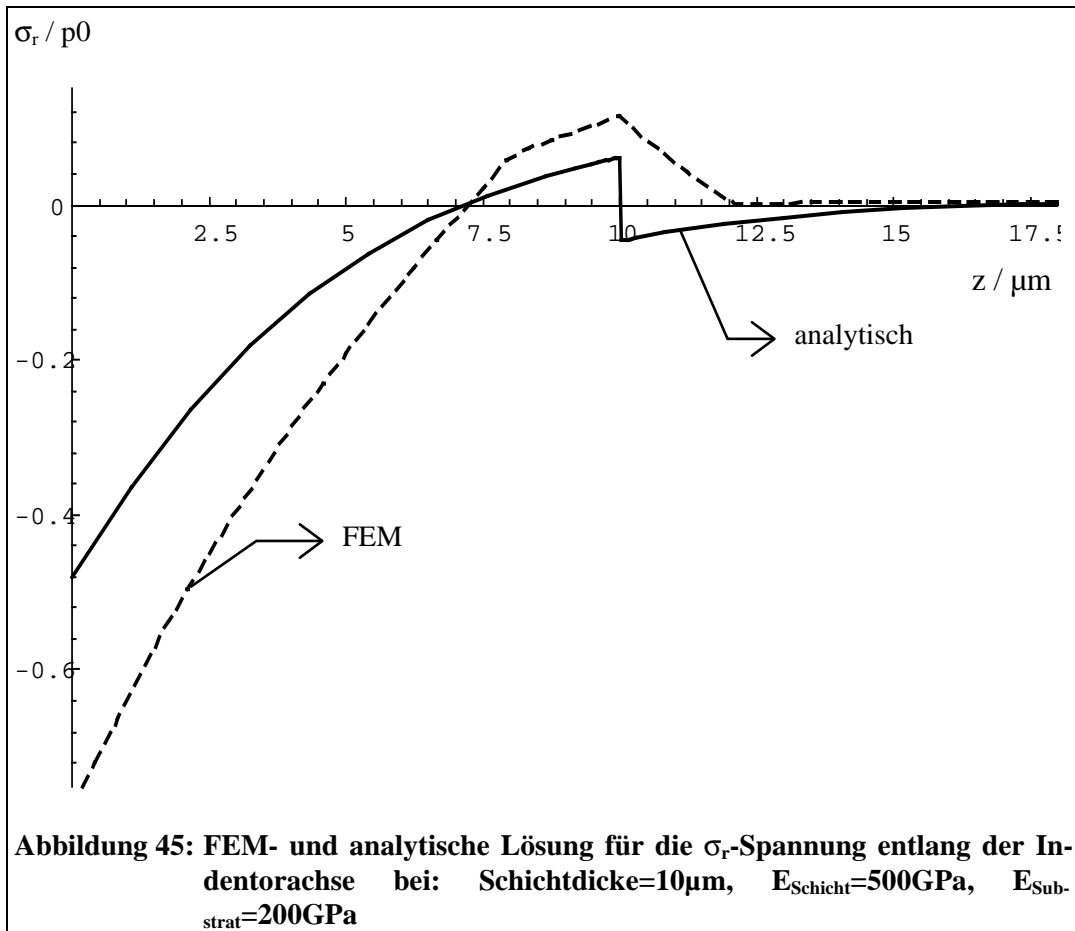
Zur Erfassung des sphärischen Kontaktproblems wurde eine Eindringtiefe des Indentors von 6 $\mu\text{m}$  vorgegeben und schrittweise berechnet. Dieser relativ hohe Wert führte zu Kontaktflächenradien, die etwa der Hälfte des Indentorradius entsprachen, also bis zu 16 $\mu\text{m}$ . Für derartige Eindringtiefen ist sowohl die Hertzsche Näherung als auch die erste Approximation der Berücksichtigung der Tangentialkraft von Kapitel 4 (nach Abschnitt 4.1.) nicht mehr gültig. Wegen der Beschränkung der kleinstmöglichen Schrittweite und der Forderung nach einer gewissen Mindestschrittzahl war man jedoch gezwungen, derartig große Eindringtiefen anzusetzen. Wegen der damit verbundenen sehr großen Oberflächenkrümmung sind verhältnismäßig große Fehler bei den analytischen Rechnungen zu erwarten. Für die analytischen Rechnungen wurde, soweit nicht anders angegeben, die Tangentialkraft in erster Näherung (nach 4.1.) berücksichtigt.

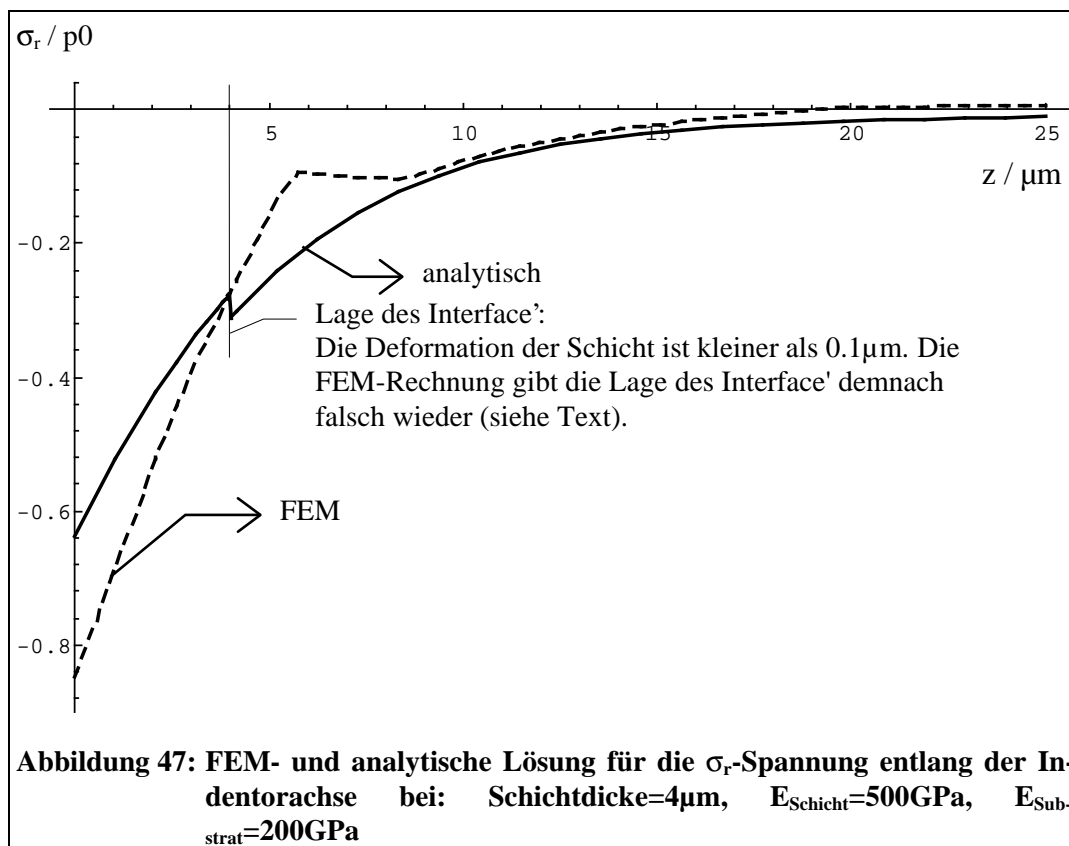
Es werden hier ausschließlich Spannungsverteilungen in radialer Richtung  $\sigma_{rr} \equiv \sigma_r$  verglichen. Die Darstellung erfolgt nach Normierung, indem alle Spannungswerte durch den Maximalwert der z-Komponente der Normalspannung (in z-Richtung) im Kontaktzentrum geteilt werden. Die Abbildungen 42 bis 47 zeigen die Spannungsverteilung für alle 6 in Tabelle 4 gegebenen Verbunde entlang der

Indentorachse. Während die durchgezogenen Linien die analytischen Ergebnisse darstellen, zeigen die gestrichelten Linien die Spannungsverteilung nach den FEM-Rechnungen.

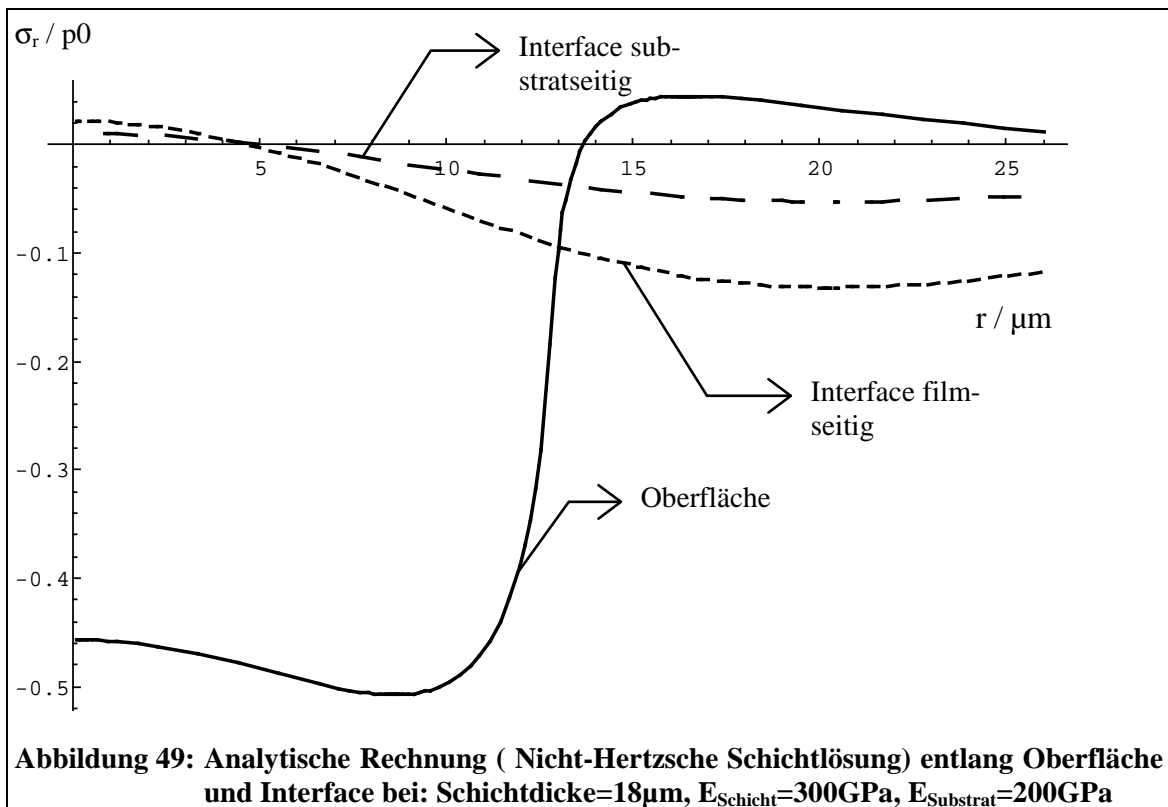
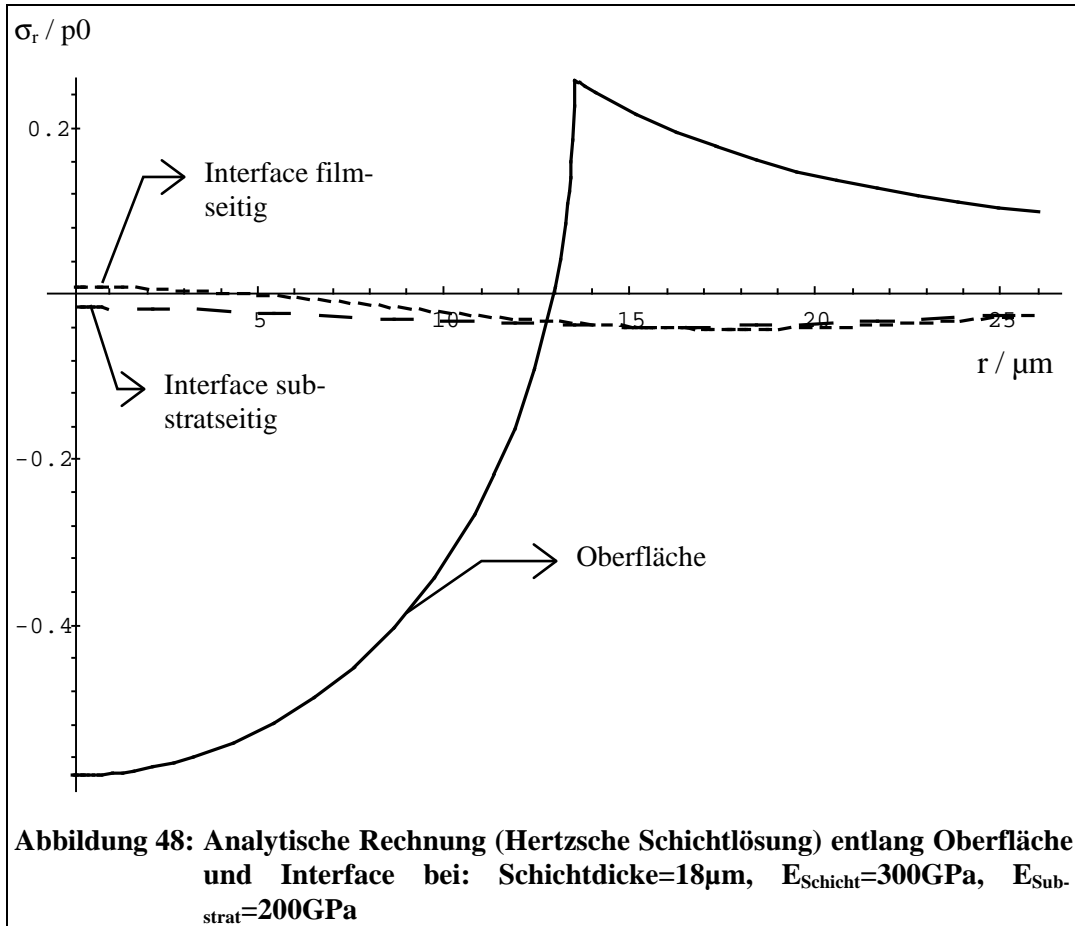




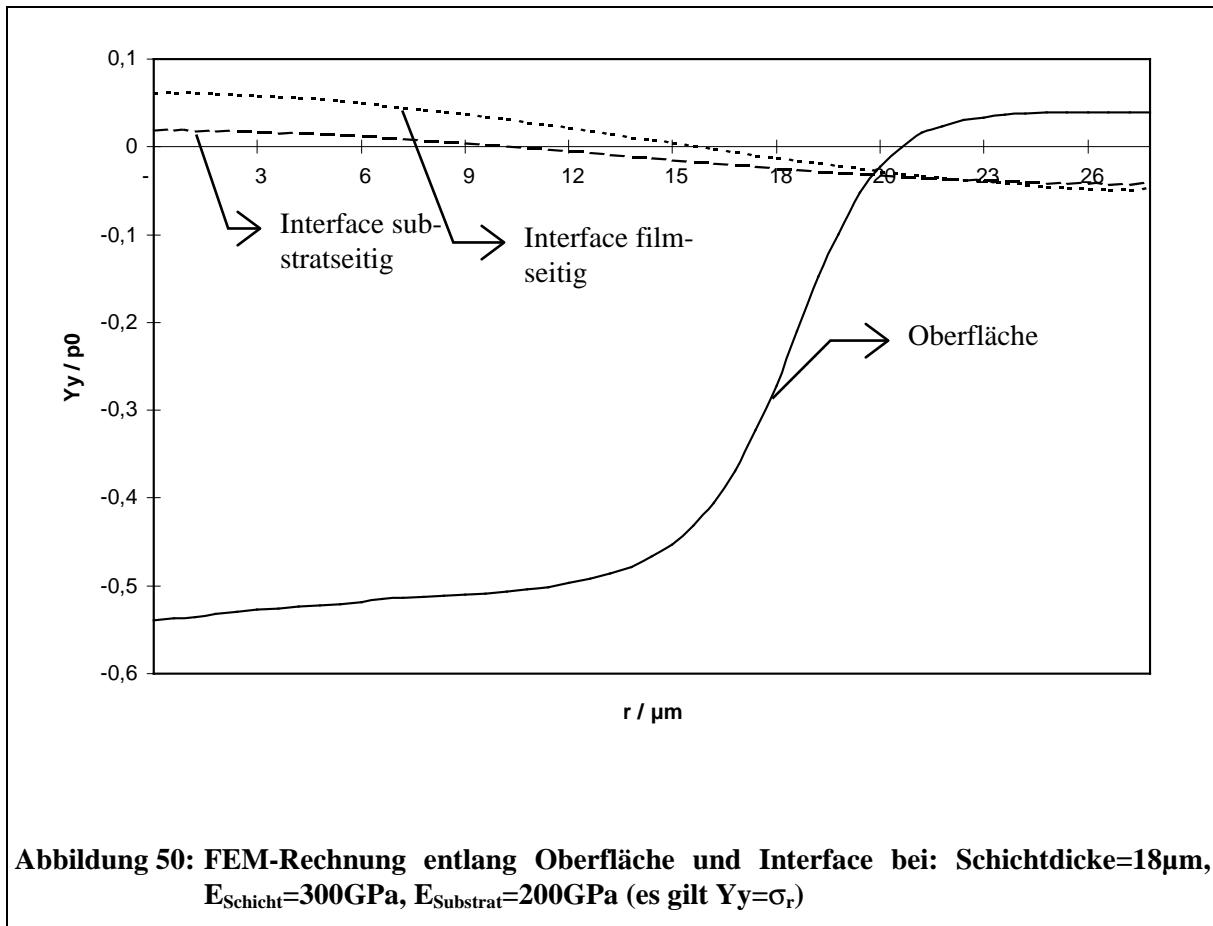




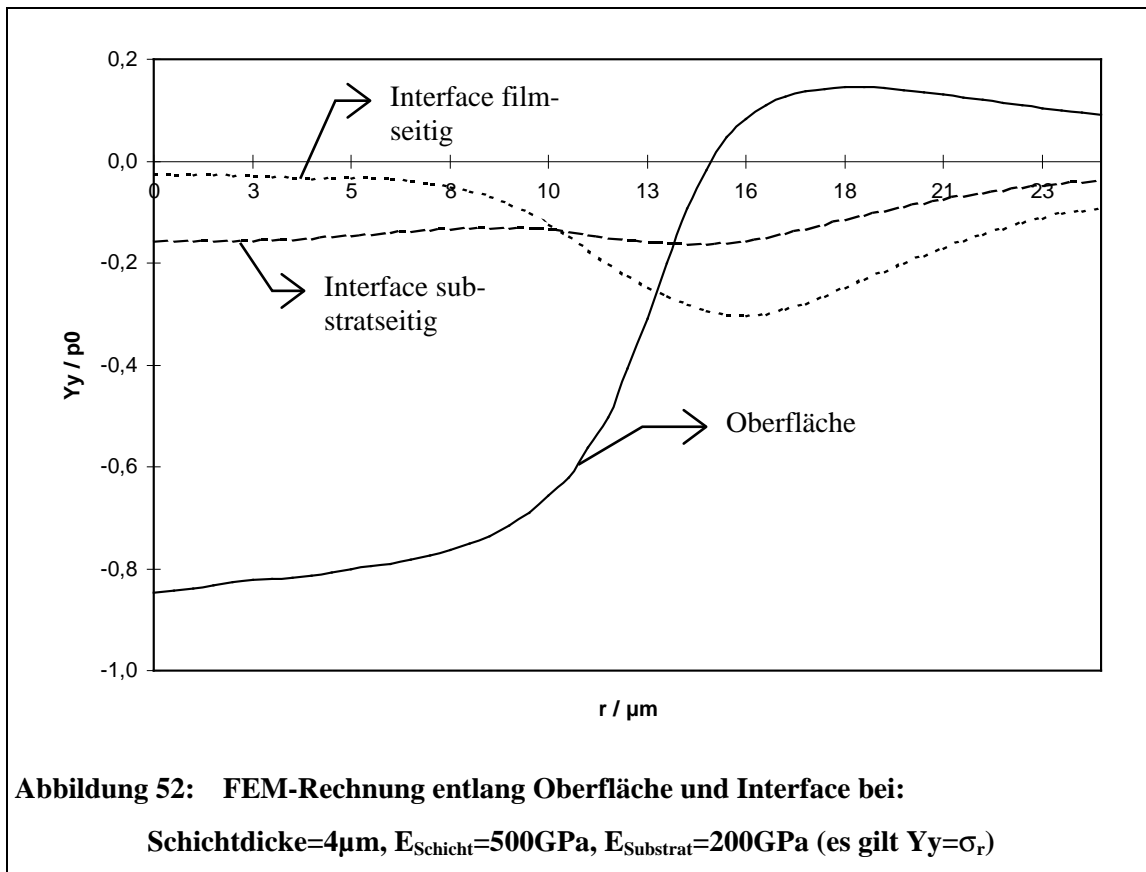
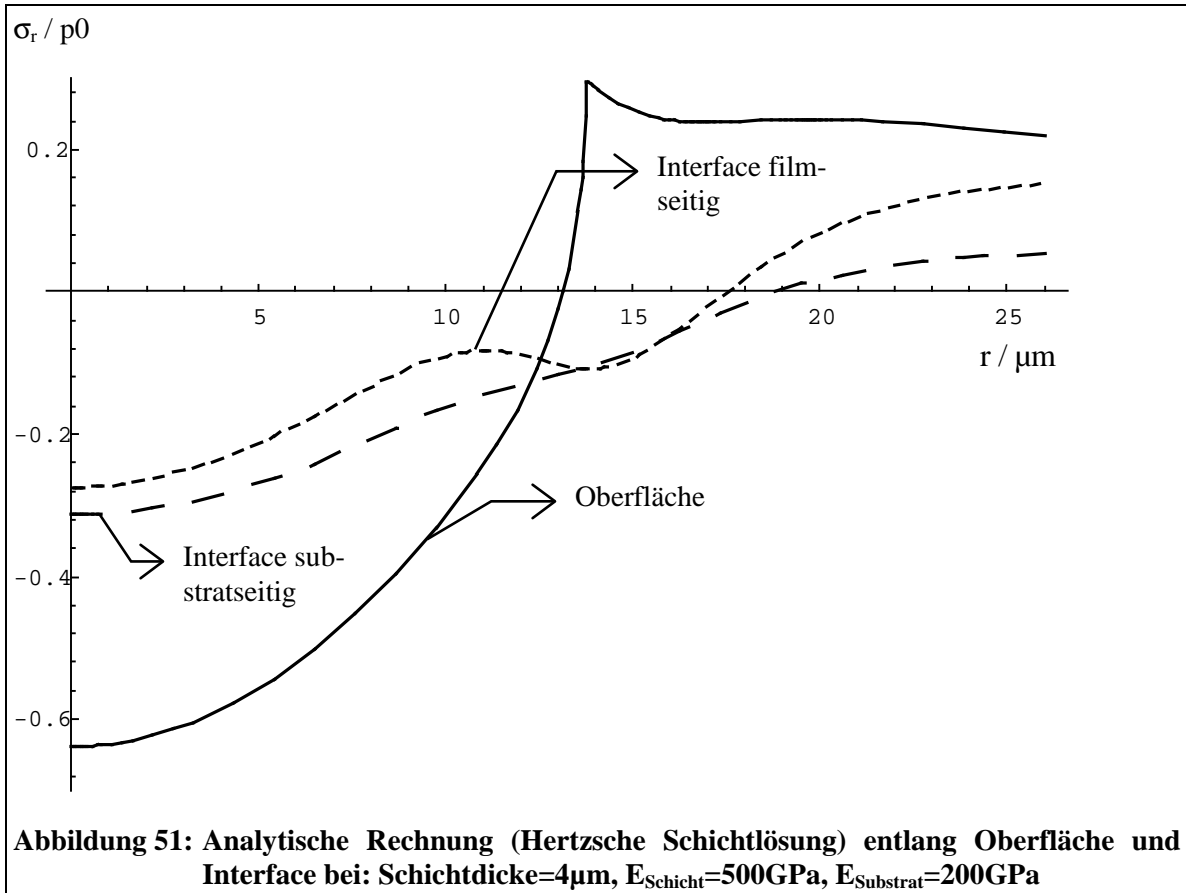
Zunächst kann für alle Schicht-Substrat-Systeme qualitative Übereinstimmung bei den Ergebnissen der analytischen und FEM-Rechnungen festgestellt werden. Wie zu erwarten, führen aber insbesondere große Differenzen der E-Module zwischen Film und Substrat und kleinere Schichtdicken zu größeren Differenzen der Spannungen. Dies wird neben der geringen Anzahl der Elemente in dünneren Schichten vor allem durch die freien Randbedingungen des FEM-Netzes in tangentialer Richtung verursacht. Ein weiterer Grund für die Abweichungen beider Rechnungen könnte am starken Einfluß der Tangentialkraft liegen. Diese wird durch das analytische Modell ja lediglich genähert (siehe 4.1.) beschrieben. In allen Abbildungen ist die Inhomogenität am Interface bei beiden Berechnungsverfahren sehr gut zu erkennen. Beim FEM-Verfahren erscheinen die "Spannungssprünge" allerdings etwas "verschmiert" bzw. zu größeren Werten hin verschoben (Abbildung 47). Dies resultiert aus der durch die Deformation verursachten Verzerrung der Lage des Interfaces relativ zum Ausgangspunkt, welcher durch die wenigen Schichtelemente (Im Falle der Abbildung 47 sind es nur 4 Elemente.) in vertikaler Richtung wohl nur sehr unvollkommen beschrieben werden kann. Das FEM-Ergebnis muß hier inkorrekt sein, weil der "steife" Film gegenüber dem relativ weichen Substrat kaum komprimiert wird, das Interface also tatsächlich in einer Tiefe, die etwa der Schichtdicke entspricht, zu erwarten sein sollte.







**Abbildung 50: FEM-Rechnung entlang Oberfläche und Interface bei: Schichtdicke=18 $\mu\text{m}$ ,  $E_{\text{Schicht}}=300\text{GPa}$ ,  $E_{\text{Substrat}}=200\text{GPa}$  (es gilt  $Y_y=\sigma_r$ )**



Besonders deutlich werden die Unterschiede, wenn man die Ergebnisse der FEM- und der analytischen Rechnung an der Verbundoberfläche und am Interface miteinander vergleicht. So zeigt die Abbildung 48 die Spannungsverteilung für die analytische Rechnung ohne Berücksichtigung der Tangentialkraft (Hertzsche Näherung), während in Abbildung 49 diese mit einbezogen wurde. Sehr gut ist zu erkennen, daß die Berücksichtigung der Tangentialkraft zu einer besseren Übereinstimmung mit dem FEM-Ergebnis (Abbildung 50) führt. Die Abbildungen 51 und 52 verdeutlichen noch einmal den großen Unterschied zwischen den Ergebnissen des analytischen Hertzschen Ansatzes 51 und der FEM-Rechnung 52 bei großen E-Modulldifferenzen zwischen Film und Substrat bei vergleichsweise dünnen Schichten.

Interessant ist vor allem, daß bei den FEM-Rechnungen die Tangentialspannung an der Oberfläche erst in verhältnismäßig großem Abstand Zugcharakter (Spannungswerte  $> 0$ ) annimmt, während ja beispielsweise die Hertzsche Lösung das Zugspannungsmaximum direkt am Rande der Kontaktfläche vorhersagt. Der Autor nimmt an, daß dies vor allem durch die freien Randbedingungen des FEM-Netzwerkes in tangentialer Richtung verursacht wird.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß in bestimmten Grenzen beide Methoden relativ gut übereinstimmende Resultate erzielen, jedoch insbesondere große Differenzen der mechanischen Parameter zwischen Film und Substrat und relativ dünne Filme zu starken Unterschieden führen. Während die analytische Methode nach 4.1. vor allem durch die unvollkommene Erfassung der Krümmung der Oberfläche (Abbildung 7) fehlerhaft ist, sind es bei der FEM-Methode vor allem die beschränkte Größe und Anzahl der Elemente und des gesamten Netzwerkes, die zu falschen Ergebnissen führen können. Während die Finite-Elemente-Methode den Vorteil hat, daß insbesondere plastische Betrachtungen relativ leicht involviert werden können, zeichnet sich das analytische Verfahren durch eine wesentlich bessere Handhabbarkeit und größere Rechengeschwindigkeit aus. So beträgt bei gleicher Aufgabenstellung und Berechnung auf ähnlichen Computersystemen (Intel 386 Prozessor-Systeme) der Rechenzeitfaktor zwischen FEM- und analytischer Methode etwa 700 : 1.

Einen Vergleich mit exakteren FEM-Resultaten und für die analytischen Rechnungen (nach 4.2.) günstigeren Bedingungen findet der Leser in [78].

## **11. Zusammenfassung und Ausblick**

Der Inhalt dieser Arbeit kann in vier wesentliche Schwerpunkte gegliedert werden:

1. Die Berücksichtigung der Oberflächenkrümmung beim Kugeleindruck. Damit wird die Hertz'sche Theorie zum Kontakt zweier Kugeln auf Anwendungen mit Eindringtiefen bzw. Kontaktflächenradien, die im Vergleich zum Indentorradius nicht klein sind, erweitert.
2. Die Berücksichtigung von Reibungseffekten beim Kugeleindruckversuch.
3. Die Herleitung der Punktkraftlösung für den transversal isotropen, lateral geschichteten (beliebig viele Schichten), elastischen Halbraum.
4. Die Erweiterung der gesamten Theorie zum Kugeleindruck auf die Untersuchung von geschichteten Materialien.

Auf der Basis jüngerer Ergebnisse der Potentialtheorie von Fabrikant [16] und darauf aufbauender moderner Darstellungen des klassischen Kontaktproblems von Hertz (Hanson [13]) wurden die elastischen Felder bei einem Kugeleindruckversuch mit großen Eindringtiefen in erster Näherung abgeleitet. Es wurde dabei angenommen, daß es aufgrund des Winkels zwischen der Normalen der Kontaktfläche und der in Indentorachsrichtung wirkenden Kraft zu Tangentialkräften ("Hangabtriebskräften") kommt, die in der bisherigen klassischen Theorie von Hertz [30] unberücksichtigt blieben (4.1.). Eine weitere Methode, nämlich die Berücksichtigung der durch den Kontakt verursachten Oberflächenkrümmung durch eine geeignete Koordinatentransformation wurde in Abschnitt 4.2. vorgestellt. Diese Methode ist mathematisch wesentlich einfacher als die unter 4.1. geschilderte, jedoch vermittelt letztgenannte einen besseren Eindruck von den wirkenden Kräften. Der Vergleich mit FEM-Rechnungen ([79] mit dem Verfahren nach 4.1. sowie [56] nach 4.2.) lieferte eine gute Bestätigung für beide Ansätze.

Ebenfalls mit Hilfe der neuen Resultate der Potentialtheorie von Fabrikant [16] wurden Reibungskräfte in die Betrachtung des Kugeleindrucks involviert. Es wurde angenommen, daß im Fall der Haftreibung einmal in Kontakt befindliche Oberflächenelemente von Indentor und Probekörper nicht mehr unabhängig voneinander deformiert werden können und eine Kopplung zwischen Indentor und Probekörper besteht. Die aus dieser Kopplung resultierenden Zwangskräfte sowie deren elastische Felder wurden abgeleitet.

Tritt Gleitreibung auf, so verschwindet die Kopplung in den entsprechenden Bereichen der Kontaktfläche, in denen ein Gleiten stattfand. Als Resultat findet man im Zentrum der Kontaktfläche eine Region mit Haftreibung, während außerhalb dieser Region nur noch Gleitreibung wirkt. Das veränderte Kräftebild wurde zusammen mit den zugehörigen elastischen Feldern hergeleitet.

Mit der Annahme, daß sich Übergänge zwischen einzelnen Filmlagen und dem Substrat, an denen sich wichtige Materialparameter wie Elastizitätsmodul und Poissonzahl sprunghaft ändern, durch einen allgemeinen Potentialansatz (Kapitel 6) erfassen lassen, wurde die gesamte Theorie des Kugeleindruckversuchs auf geschichtete Probekörper erweitert. Die Vergleiche dieser Theorie mit experimentellen Ergebnissen [80] (siehe Kapitel 9) und FEM-Rechnungen ([56], [79] und Kapitel 10 dieser Arbeit) zeigten zum Teil sehr gute Übereinstimmung.

Wie Tabelle 1 von Kapitel 2 bereits deutlich zeigt, konnten damit einige wesentliche Fragen, die mit dem Kugeleindruckversuch verbunden sind, geklärt werden. Gleichzeitig erscheint es dem Autor in diesem Zusammenhang notwendig, auf die noch ungeklärten, drängendsten Probleme hinzuweisen:

- Diskussion (zur Theorie siehe Kapitel 6 und Anhang F) einer Scratchkraft bei geschichteten Materialien zur Beschreibung des Scratchtests im elastischen (subkritischen) Regime (siehe Kapitel 1),
- Einbeziehung von Defekten, wie beispielsweise abgelöste Schichtteile oder Einschlüsse,
- Einbeziehung der Bruchtheorie in die bisherigen Rechnungen, um z.B. Schichtablösungen, sternförmige Brüche um den Eindruckkrater und Kegelbrüche untersuchen zu können,
- Berücksichtigung höherer als nur lateraler Anisotropien und Inhomogenitäten,
- Einbeziehung plastischer Effekte zur Beschreibung des Kugeleindrucks im elastisch-plastischen Regime.

## **Literaturverzeichnis**

1. D. S. Campbell: "Mechanical Properties of Thin Films", in: Maissel, Glang: "Handbook of Thin Film Technology", N.Y.: McGraw-Hill, 1970, Kap. 12
2. D.A. Hardwick: Thin Solid Films, 154 (1987) 109-124
3. M. Ohring: The Materials Science of Thin Films, Academic Press. Inc., 1991
4. K.L.Mittal: "Adhesion Measurement of Thin Films, Thick Films and Bulk Coatings", ASTM STP 640, K.L.Mittal,Ed.,American Society for Testing and Materials, 1978, 5-17
5. R. Jacobsson: Thin Solid Films, 34 (1976) 191-199
6. D. Tabor: The Hardness of Metals, Clarendon Press, Oxford 1951
7. K.L. Johnson: "Contact Mechanics", Cambridge University Press, Cambridge, 1987
8. P. Benjamin, C. Weaver: Proc. R. Soc. London, Ser. A 254 (1960) 163-176
9. P.A.Steinmann, Y.Tardy, H.E. Hintermann: Thin Solid Films, 154 (1987) 333-349
10. T.J.Bell, J.S. Field, M.V. Swain: Thin Solid Films, 220 (1992) 289-294
11. N. Huber, D. Munz, Ch. Tsakmakis: "Determination of Young's Modulus by Spherical Indentation", eingereicht in Journal of Material Research 1995
12. T.J.Bell, J.S. Field, M.V. Swain: Mat. Res. Soc. Symp. Proc. Vol. 239 (1992), 331-336

13. M. T. Hanson: ASME J. of Tribology, Vol. 114, 1988, pp. 606-611
14. S. J. Cole, R. S. Sayles: J. of Tribology, Vol. 114 (1992), 334-340 und
15. V. Aronov, S. Nair, J. M. Wang: J. of Tribology, Vol. 116 (1994), 833-840
16. V. I. Fabrikant: "Application of potential theory in mechanics: A Selection of New Results", Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1989
17. G. Wunsch: "Elektromagnetische Felder", Verlag Technik, Berlin (1989)
18. W. Grainer: "Theoretische Physik Band 3: Klassische Elektrodynamik", Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 5. Auflage 1991 (Hinweis auf Druckfehler: die bei der angegebenen Literaturstelle auftretenden Potenzen in den Größen  $R_1$  und  $R_2$  (S.144) müssen 2 lauten und nicht 3; in  $\Phi_2(\rho, z)$  (S. 145, Gleichung 8) lies  $\rho^2$  anstatt  $\rho_2$ )
19. W. Grainer, J. Reinhardt: "Theoretische Physik Band 7: Quantenelektrodynamik", Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main 1984
20. K. L. Johnson, J. J. O'Connor, A. C. Woodward: Proc. R. Soc. Lond. A. 334, 95-117 (1973)
21. D. Tabor: "Indentation Hardness and Its Measurement: Some Cautionary Comments", Microindentation Techniques in Material Science and Engineering, ASTM STP 889, P. J. Blau und B. R. Lawn, Herausgeber, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1986, 129-159
22. S. Timoschenko, J. N. Goodier: "Theory of Elasticity", McGraw-Hill book company, Inc., New York, Toronto, London, 1951
23. L. D. Landau, E. M. Lifschitz: "Elastizitätstheorie", Akademie-Verlag Berlin, 1989
24. T. Arai, H. Fujita, M. Watanabe: Thin Solid Films, 154 (1987) 387-401
25. B. Lawn, R. Wilshaw: Journal of Mat. Science 10 (1975) 1049-1081
26. J.S. Field, M. V. Swain: J. Mater. Res., Vol. 8, No. 2 (1993) 297-306
27. R. v. Mises: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 8 (1928), Heft 3, 161-185
28. H. Gao, J.R.Rice: Int. J. of Fracture 33 (1987) 155-174
29. G. Brackhaus, Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik 52 (1972) 8, T 293-T 305
30. H. Hertz: Journal für reine und angewandte Mechanik, Band 92, S. 156-171, 1881
31. H. Hertz: Aus den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes, Berlin, November 1882, S. 174-196
32. H. HERTZ, J. Math. (Crelle's J.), vol. 92, 1881, siehe auch H. HERTZ, "Gesammelte Werke", Band 1, S. 155, Leipzig, 1895
33. I. Szabó: "Höhere Technische Mechanik", Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960
34. M. T. Huber: "Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper", Annalen der Physik, Leipzig, Band 14, 1904, S. 153-163
35. S. Fuchs: Phys. Zeitschrift vol. 14 (1913), 1282-
36. W.B. Morton, L. J. Close: Phil. Mag. S. 6, Vol. 43, No. 254 (1922), 320-329

37. R. F. Bishop, R. Hill, N. F. Mott: Proc. Phys. Soc. Vol. 57, 3, No. 321 (1945), 147-159
38. I. N. Sneddon: Int. J. Engng Sci. Vol. 3 (1965), 47-57
39. G. M. Hamilton, L. E. Goodman: ASME J. of Appl. Mech., Vol. 33, 1966, pp. 371-376
40. W. T. Chen: Int. J. of Solids and Structure, Vol. 5, 1969, pp. 191-214
41. H. A. Elliot: Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 44 (1948), 522-533
42. M. Dahan, J. Zarka: Int. J. of Solids and Structure, Vol. 13, 1977, pp. 229-238
43. L. M. Keer, D. B. Mowry: Int. J. of Solids and Structure, Vol. 15, 1979, pp. 33-39
44. V. I. Fabrikant: "Closed form solution of one integral equation" (in Russisch), Trans. of Academy of Sci. of ArmSSR, Mekhanika (1976) 2, 16-19
45. V.I. Fabrikant, Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik 66 (1986) 8, 363-368
46. V. I. Fabrikant: Izvestiia Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Matematika, No. 2 (1971), 102-104
47. V. I. Fabrikant: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 72 (1992) 10, 487-496
48. P. K. Gupta, J. A. Walowit: ASME J. of Lubrication Technology, April 1974, pp. 250-257
49. J. J. Kalker: J. of Appl. Mech. Vol 58 (1991), 666-679
50. M. F. Doerner, W. D. Nix: J. Mater. Res., Vol 1, No. 4 (1986), 601-609
51. H. Gao, Ch.-H. Chiu, J. Lee: Int. J. Solids Structures, Vol. 29, No. 20 (1992), 2471-2492
52. H. Gao, T.-W. Wu: J. Mater. Res., Vol. 8, No. 12 (1993), 3229-3232
53. N. A. Rostovtsev: Prikladnaia Matematika i Mechanika, Vol. 25 (1961), 164-168
54. D. Chicot, J. Lesage: Thin Solid Films 254 (1995), 123-130
55. I. J. Ford: Thin Solid Films, 245 (1994), 122-131
56. A. Faulkner, K.C. Tang: "An Elastic-perfectly Plastic Finite Element Model For A Spherical Indenter On A Layered Substrate", Arbeitsbericht, März 1996, Research Institute for Design, Manufacture and Marketing, University of Salford, Salford M5 4WT, UK
57. M.V. Swain, J. Mencik: Thin Solid Films 253 (1994), 204-211
58. T. J. Bell, J. S. Field, M. V. Swain: Thin Solid Films 220 (1992), 289-294
59. T. J. Bell, J. S. Field, M. V. Swain: Materials Forum 17 (1993), 127-138
60. J. S. Williams, J. S. Field, M. V. Swain: Mat. Res. Soc. Symp. Proc., Vol. 308 (1993), 571-576
61. E. R. Weppelmann, M. V. Swain: Mat. Res. Soc. Symp. Proc., Vol. 308 (1993), 177-182
62. E. R. Weppelmann, J. S. Field, M. V. Swain: J. Mat. Res., Vol. 8, No. 4 (1993), 830-840
63. H. Djabella and R. D. Arnell, Thin Solid Films, 235 (1993) 156
64. ANSYS, Swanson Analysis Systems, Inc., Johnson Road, P.O. Box 65, Houston, PA 15342-0065
65. V. I. Fabrikant: ASME J. of Appl. Mech., Vol. 57, 1990, 596-599
66. V. I. Fabrikant: ASME J. of Appl. Mech., Vol. 55, 1988, 604-610
67. V. I. Fabrikant: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 75 (1995), 523-534
68. M. T. Hanson: ASME J. of Appl. Mechanics, Vol. 57, 1990, 589-595
69. M. T. Hanson: ASME J. of Appl. Mechanics, Vol. 59, 1992, 72-78
70. M. T. Hanson: ASME J. of Appl. Mechanics, Vol. 59, 1992, 123-130

71. M. T. Hanson: ASME J. of Appl. Mechnics, Vol. 60, 1993, 557-559
72. N. M. Günter: "Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik", B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957
73. G. Michlin: "Lehrgang der mathematischen Physik", Akademie-Verlag Berlin 1972
74. W. I. Smirnow: "Lehrgang der höheren Mathematik", Teil IV/2, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989
75. W. I. Smirnow: "Lehrgang der höheren Mathematik", Teil II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964
76. M. Wittling, A. BenDavid, P.J. Martin, M.V. Swain: "Influence of Thickness and Substrate on the Hardness and Deformation of TiN Films", Proc. der "International Conference on Metallurgical Coatings and Thin Films", 24.-28. 04. 1995, San Diego, Kalifornien, USA, Herausgeber: H. Jehn, A. Matthews, G. McGuire, I. Petrov, Verlag: Elsevier, Band II, S. 283-288
77. M. Swain: Persönliche Mitteilungen
78. A. Faulkner, K.C. Tang, N. Schwarzer, R.D. Arnell, F. Richter: "Comparison between an Elastic-Perfectly Plastic FE Model and a Purely Elastic Analytical Model for a Spherical Indenter on a Layered Substrate", Proc. der "International Conference on Metallurgical Coatings and Thin Films", 22.-26. 04. 1996, San Diego, Kalifornien, USA, Herausgeber: H. Jehn, A. Matthews, G. McGuire, I. Petrov, Verlag: Elsevier, in Druck
79. N. Schwarzer, H. Djabella, F. Richter, R. D. Arnell: "Comparison between analytical and FEM calculations for the contact problem of spherical indenters on layered materials", Proc. der "International Conference on Metallurgical Coatings and Thin Films", 24.-28. 04. 1995, San Diego, Kalifornien, USA, Herausgeber: H. Jehn, A. Matthews, G. McGuire, I. Petrov, Verlag: Elsevier, Band II, S. 279-282
80. N. Schwarzer, M. Whittling, M. Swain, F. Richter: "The analytical solution of the contact problem of spherical indenters on layered materials: application for the investigation of TiN films on silicon", Proc. der "International Conference on Metallurgical Coatings and Thin Films", 24.-28. 04. 1995, San Diego, Kalifornien, USA, Herausgeber: H. Jehn, A. Matthews, G. McGuire, I. Petrov, Verlag: Elsevier, Band II, S. 371-375
81. G. Eason, R. T. Shield: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 11 (1960), 33
82. T. Arai, H. Fujita, M. Watanabe: Thin Solid Films, 154 (1987) 387-401
83. N. Aksel: "Theoretische Untersuchung ein- und mehrdimensionaler, viskoelastischer Kontaktprobleme", Dissertationsschrift, Darmstadt 1984
84. D. B. Bogy, Zh. Jiang: Mat. Res. Soc. Symp. Proc. Vol. 356 (1995), 737-748
85. N. Schwarzer: "Zur Beschreibung von Kontaktaufgaben bei gekrümmten Oberflächen", Arbeitsbericht 6-96, Chemnitz 1996
86. V. I. Fabrikant: "Mixed Boudery Value Problems of Potential Theory and their Applications in Engineering", Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1991



87. N. Schwarzer: "Die Lösung klassischer Aufgaben der Potentialtheorie", Arbeitsbericht 9-96, Chemnitz 1996
88. N. Schwarzer, F. Richter: "A Simple Biaxial Bending Technique for Coated Materials - Theory and Application", im Begleitbuch zur Tagung "Mechanical Behaviour of PVD Coated Materials", 13.-17.10.1997 in Holzgau / Erzgebirge, Deutschland, erscheint Mitte November 1997
89. N. Schwarzer: "Figures to the Problem: Centrally Loaded Coated Plate Fixed at the Edge", im Internet im Zusammenhang mit [88] veröffentlicht unter: <http://www.tu-chemnitz.de/~nschwarz/holzgau.html>

## Anhang A

Das elastische Feld für einen Hertzschen Eindruckversuch mittels sphärischem Indentor in einen homogenen Körper mit beliebig gekrümmter Oberfläche ist durch folgende Gleichungen im Koordinatensystem <sup>+</sup> (Abschnitt 4.2.) gegeben (nach [13]):

$$u_n = \frac{3HP}{2a^3} re^{i\varphi} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left\{ -z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \left( 1 - \frac{l_{1k}^2 + 2a^2}{3r^2} \right) + \frac{2a^3}{3r^2} \right\} \quad (\text{A1})$$

$$w_n = \frac{3HP}{4a^3} \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{m_k - 1} \left\{ (2a^2 + 2z_k^2 - r^2) \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + (l_{2k}^2 - a^2)^{1/2} \left( \frac{3l_{1k}^2 - 2a^2}{a} \right) \right\} \quad (\text{A2})$$

$$\sigma_{1n} = \frac{6HPA_{66}}{a^3} \sum_{k=1}^2 \frac{[\gamma_k^2 - (1 + m_k)\gamma_3^2]}{(m_k - 1)\gamma_k} \left\{ z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} - (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\} \quad (\text{A3})$$

$$\sigma_{2n} = -\frac{2HP}{a^3} \frac{e^{2i\varphi}}{r^2} \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k}{m_k - 1} \left\{ 2a^3 - (l_{1k}^2 + 2a^2)(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\} \quad (\text{A4})$$

$$\sigma_{zn} = \frac{3P}{2\pi a^3 (\gamma_1 - \gamma_2)} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \gamma_k \left\{ z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} - (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\} \quad (\text{A5})$$

$$\tau_{zn} = \frac{3P}{4\pi a^3 (\gamma_1 - \gamma_2)} re^{i\varphi} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left\{ -\sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2} \right\} \quad (\text{A6})$$

Wobei die Abkürzungen

$$l_{1k} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+a)^2 + z_k^2} - \sqrt{(r-a)^2 + z_k^2} \right) \quad (\text{A7})$$

$$l_{2k} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+a)^2 + z_k^2} + \sqrt{(r-a)^2 + z_k^2} \right)$$

verwendet wurden. Zur vollständigen Bestimmung des elastischen Feldes müssen noch der Radius der Kontaktfläche  $a$  sowie die Gesamteindringtiefe  $h$  berechnet werden. Die notwendigen Beziehungen erhält man aus den Hertzischen Randbedingungen bei  $z=0$ :

$$a = \left( \frac{3\pi P}{\beta} (H_1 + H_2) \right)^{1/3} \quad (\text{A8})$$

$$h = 2a^2 \beta \quad (\text{A9})$$

mit

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}, \quad (\text{A10})$$

wobei  $R_1$  und  $R_2$  die Oberflächenkrümmungsradien und  $H_1$  und  $H_2$  die Materialkonstanten von Indenter und gepreßtem Körper bezeichnen. Die  $H_i$  ( $i=1,2$ ) wurden im Abschnitt 3.1. (Gleichung (18), dort jedoch ohne Index) definiert.

Für die in Abschnitt 4.2. vorgestellte Koordinatentransformationen werden die folgenden Ableitungen der Potentialfunktion  $F$  benötigt:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \pi r \left\{ -z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \left( 1 - \frac{l_{1k}^2 + 2a^2}{3r^2} \right) + \frac{2a^3}{3r^2} \right\} \quad (\text{A11})$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\pi}{2} \left\{ (2a^2 + 2z_k^2 - r^2) \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + (l_{2k}^2 - a^2)^{1/2} \left( \frac{3l_{1k}^2 - 2a^2}{a} \right) \right\} \quad (\text{A12})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2\pi \left\{ z_k \sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} - (a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\} \quad (\text{A13})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{-2\pi}{r^2} \left\{ 2a^3 - (l_{1k}^2 + 2a^2)(a^2 - l_{1k}^2)^{1/2} \right\} \quad (\text{A14})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = \pi r \left\{ -\sin^{-1} \frac{a}{l_{2k}} + \frac{a(l_{2k}^2 - a^2)^{1/2}}{l_{2k}^2} \right\} \quad (\text{A15})$$

Ist eine Deformation  $w(z=0) = w(r_0, \varphi_0)$  gegeben, so können die Potentialfunktionen

$F_k = F(z_k) = F\left(\frac{z}{\gamma_k}\right)$  wie folgt berechnet werden ([16], S. 339):

$$F(r, \varphi, z) = \frac{1}{\pi^2 H} \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{K}(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0) w(r_0, \varphi_0) r_0 dr d\varphi_0, \quad (\text{A16})$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0) = & -\frac{1}{R} \arctan\left(\frac{h}{R}\right) + \frac{1}{\sqrt{a^2 - r_0^2}} * \\ & \left\{ \ln\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - l_1^2}}{l_1}\right] + \frac{1}{\sqrt{\zeta - 1}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - l_1^2}}{a\sqrt{\zeta - 1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\zeta - 1}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - l_1^2}}{a\sqrt{\zeta - 1}}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + z^2, \quad (\text{A18})$$

$$\zeta = \frac{r}{r_0} e^{i(\varphi - \varphi_0)}, \quad (\text{A19})$$

$$h = \frac{\sqrt{a^2 - l_1^2} \sqrt{a^2 - r_0^2}}{a}. \quad (\text{A20})$$

Für die Berechnung der Deformationen und Spannungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z} = \frac{z}{R^3} \left[ \frac{R}{h} + \arctan\left(\frac{h}{R}\right) \right], \quad (\text{A21})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial z^2} = \frac{1}{R^3} \left( 1 - \frac{3z^2}{R^2} \right) \left[ \frac{R}{h} + \arctan\left(\frac{h}{R}\right) \right] + \frac{1}{h(R^2 + h^2)} \left( \frac{z^2}{R^2} - \frac{r^2 - l_1^2}{l_2^2 - l_1^2} \right), \quad (\text{A22})$$

$$\Lambda \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z} = -\frac{3zq}{R^3} \left[ \frac{R}{h} + \arctan\left(\frac{h}{R}\right) \right] + \frac{z}{h(R^2 + h^2)} \left( \frac{q}{R^2} + \frac{re^{i\varphi}}{l_2^2 - l_1^2} \right), \quad (\text{A23})$$

$$\Lambda \mathbf{K} = \frac{q}{R^3} \arctan\left(\frac{h}{R}\right) - \frac{z^2}{h\bar{q}R^2} - \frac{1}{\bar{q}\sqrt{\zeta - 1}\sqrt{a^2 - r_0^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - l_1^2}}{a\sqrt{\zeta - 1}}\right), \quad (\text{A24})$$

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \mathbf{K} = & -\frac{3q^2}{R^5} \arctan\left(\frac{h}{R}\right) - \frac{q^2 h}{R^4(R^2 + h^2)} + \frac{2z^2}{h\bar{q}^2 R^2} \left( 2 - \frac{z^2}{R^2} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{a^2 - r_0^2}} \left[ \frac{3}{\bar{q}^2 \sqrt{\zeta - 1}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - l_1^2}}{a\sqrt{\zeta - 1}}\right) + \frac{a\sqrt{a^2 - l_1^2}}{\bar{q}^2(a^2\zeta - l_1^2)} - \frac{ar^2 e^{2i\varphi} \sqrt{a^2 - l_1^2}}{l_1^2(R^2 + h^2)(l_2^2 - l_1^2)} \right], \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

mit:

$$q = re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}. \quad (\text{A26})$$

Im Fall geschichteter Körper ist  $\mathbf{F}$  nach Gleichung (150) sowie die dortigen  $\left[ \mathbf{F}_{n_1, n_2, \dots, n_i}^\pm \right]_k^j$  sind mittels

$$\left[ \mathbf{F}_{n_1, n_2, \dots, n_i}^\pm \right]_k^1 = \frac{1}{\pi^2 H^1} \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{K}(r, \varphi, \left[ z_{n_1, n_2, \dots, n_i}^\pm \right]_k^1; r_0, \varphi_0) w(r_0, \varphi_0) r_0 dr d\varphi_0$$

$$\left[ \mathbf{F}_{n_1, n_2, \dots, n_i}^\pm \right]_k^2 = \frac{1}{\pi^2 H^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{K}(r, \varphi, \left[ z_{n_1, n_2, \dots, n_i}^\pm \right]_k^2; r_0, \varphi_0) w(r_0, \varphi_0) r_0 dr d\varphi_0$$

⋮

$$\left[ \mathbf{F}_{n_1, n_2, \dots, n_i}^\pm \right]_k^j = \frac{1}{\pi^2 H^j} \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{K}(r, \varphi, \left[ z_{n_1, n_2, \dots, n_i}^\pm \right]_k^j; r_0, \varphi_0) w(r_0, \varphi_0) r_0 dr d\varphi_0$$

anzusetzen. Hierbei stellen die  $H^j$  die Materialkonstanten nach Gleichung (18) für die  $j$ -te Schicht dar, wobei  $H^1$  für die Oberflächenschicht steht.

## Anhang B

In diesem Abschnitt sollen wesentliche Teile der Berechnung des elastischen Feldes, welches von der Oberflächendeformation durch eine Hertzsche Normalkraft beim Eindringversuch hervorgerufen wird (siehe 4.1.), vorgeführt werden. Hierzu müssen die Integrale der folgenden Potentialfunktionen gelöst werden:

$$\Psi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \ln[R+z] \rho (\bar{\Lambda} f_t(\rho, \varphi_0)) d\rho d\varphi_0 \quad (\text{B1})$$

$$\Phi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^a R \rho (\bar{\Lambda} f_t(\rho, \varphi_0)) d\rho d\varphi_0, \quad (\text{B2})$$

wobei  $R$  durch

$$R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi_0) + z^2 \quad (\text{B3})$$

definiert ist. Die erste Ableitung von  $\Psi$  und  $\Phi$  nach  $z$  ergibt

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, \varphi, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho}{R} (\bar{\Lambda} f_t(\rho, \varphi_0)) d\rho d\varphi_0, \quad (\text{B4})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(r, \varphi, z) = z \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho}{R} (\bar{\Lambda} f_t(\rho, \varphi_0)) d\rho d\varphi_0 = z \frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, \varphi, z). \quad (\text{B5})$$

Nun berechnen wir die folgenden Ableitungen

$$\bar{\Lambda} f_t(\rho, \varphi_0) = \left( \sqrt{a^2 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right) + e^{i\varphi_0} (\dots), \quad (\text{B6})$$

wobei jene Terme vernachlässigt werden, die auch nach der Differentiation noch  $e^{i\varphi}$ -Glieder enthalten, da diese bei der Integration über den vollen Flächenwinkel  $\varphi_0$  verschwinden. Weiterhin benutzen wir die Integraldarstellung für den reziproken Abstand zwischen zwei Punkten, der von Fabrikant gegeben ist mittels [66]

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{l_1} \frac{dx}{\{(r^2 - x^2)(\rho^2 - g^2(x))\}^{1/2}} L\left(\frac{x^2}{r\rho}, \varphi - \varphi_0\right), \quad (\text{B7})$$

wo

$$L\left(\frac{x^2}{r\rho}, \varphi - \varphi_0\right) = \frac{1 - \left(\frac{x^2}{r\rho}\right)^2}{1 + \left(\frac{x^2}{r\rho}\right)^2 - 2\frac{x^2}{r\rho}\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$g^2(x) = x^2 \left[ 1 + \frac{z^2}{r^2 - x^2} \right] \quad (\text{B8})$$

$$l_1 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+a)^2 + z^2} - \sqrt{(r-a)^2 + z^2} \right).$$

Nun setzen wir (B6) in (B3) ein, ändern die Ordnung der Integration nach Fabrikant ([16], S. 27) und erhalten nach Integration über  $\varphi_0$  in den Grenzen von 0 bis  $2\pi$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, \varphi, z) = 4 \int_0^{l_1} \frac{dx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \int_{g(x)}^a \left[ \frac{\frac{(a^2 - \rho^2)^{1/2}}{(\rho^2 - g^2(x))^{1/2}} - \frac{\rho^2}{[(\rho^2 - g^2(x))(a^2 - \rho^2)]^{1/2}}}{\rho^2} \right] \rho d\rho. \quad (\text{B9})$$

Die Lösung für den ersten Term unter dem Integral wurde bereits von Fabrikant [66] angegeben. Der zweite Term kann unter Benutzung der folgenden Identität ([16], S. 224)

$$\int_x^a \frac{dr}{r^{2n-1} (a^2 - r^2)^{1/2} (r^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2ax^{2n-1}} F\left(1-n, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (\text{B10})$$

berechnet werden, wobei  $F\left(1-n, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$  die Hypergeometrische Funktion bezeichnet. Wir

erhalten schließlich den Integralausdruck

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, \varphi, z) = 2\pi \int_0^{l_1} \frac{dx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} [g^2(x)] =$$

$$2\pi \int_0^{l_1} \left[ \frac{x^2}{(r^2 - x^2)^{1/2}} - \frac{z^2 x^2}{(r^2 - x^2)^{3/2}} \right] dx, \quad (\text{B11})$$

der elementar berechnet werden kann.

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, \varphi, z) = \pi \left[ (2z^2 - r^2) \sin^{-1}\left(\frac{a}{l_2}\right) - \frac{2a^2 - 3l_1^2}{a} (l_2^2 - a^2)^{1/2} \right] \quad (\text{B12})$$

$$l_2 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{(r+a)^2 + z^2} + \sqrt{(r-a)^2 + z^2} \right)$$

Um jedoch  $\Psi$  zu erhalten, muß der letzte Ausdruck noch über  $z$  integriert werden. Hierzu benutzen wir Identitäten, die von Fabrikant in ([16], S. 323-325) angegeben wurden. Das Ergebnis für  $\Psi$  lautet:

$$\Psi(r, \varphi, z) = \pi \left[ \begin{aligned} & z \left( \frac{2}{3} z^2 - r^2 \right) \sin^{-1} \left( \frac{a}{l_2} \right) + \\ & \frac{1}{3} (a^2 - l_1^2)^{1/2} \left( 5r^2 + \frac{8}{3} a^2 - 2l_2^2 - \frac{11}{3} l_1^2 \right) - \\ & \frac{2}{3} a^3 \ln \left[ \frac{a + \sqrt{a^2 - l_1^2}}{l_1} \right] \end{aligned} \right]. \quad (\text{B13})$$

Durch die unbestimmte Integration nach  $z$  zur Bestimmung der Funktion  $\Psi$  ist es möglich, daß geeignete Funktionen der Variablen  $r$ ,  $a$  and  $\varphi$  nicht mit reproduziert worden sind. Diese müssen nun nachträglich in geeigneter Weise durch Test der Grenzübergänge der Koordinaten nach  $0$  und  $\infty$  hinzugefügt werden. Tatsächlich sollte die Potentialfunktion  $\Psi$  bei  $r=0$  nicht singulär werden, was aber wegen

$$\lim_{r \rightarrow 0} \ln \left[ \frac{a + \sqrt{a^2 - l_1^2}}{l_1} \right]_{z=0} = \infty$$

geschehen kann. Fabrikant fügte daher bei einem vergleichbaren Problem in [66] eine Funktion  $\ln[r]$  hinzu. Da dies jedoch zu einer dimensionsbehafteten Größe unter dem natürlichen Logarithmus führt, bevorzugt der Autor Terme der Gestalt  $\ln \left[ \frac{r}{a} \right]$ . Hätte man einen derartigen Term in [66] verwendet,

so würde dies das resultierende, aus den Potentialfunktionen berechnete, elastische Feld in keinsten Weise verändern, hingegen hätte man Schwierigkeiten bei der Interpretation von dimensionsbehafteten Größen in transzendenten Funktionen umgangen. Wir addieren also  $-\frac{2\pi}{3} a^3 \ln \left[ \frac{r}{a} \right]$  zu unserem

bisherigen  $\Psi$  und erhalten

$$\Psi(r, \varphi, z) = \pi \left[ \begin{aligned} & z \left( \frac{2}{3} z^2 - r^2 \right) \sin^{-1} \left( \frac{a}{l_2} \right) + \\ & \frac{1}{3} (a^2 - l_1^2)^{1/2} \left( 5r^2 + \frac{8}{3} a^2 - 2l_2^2 - \frac{11}{3} l_1^2 \right) - \\ & \frac{2}{3} a^3 \ln \left[ \frac{l_2 + \sqrt{l_2^2 - r^2}}{a} \right] \end{aligned} \right]. \quad (\text{B14})$$

Unter Benutzung der Identität

$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi(r, \varphi, z) = z \frac{\partial}{\partial z} \Psi(r, \varphi, z) \quad (\text{B15})$$

erhalten wir für  $\Phi$  nach Integration über  $z$

$$\Phi(r, \varphi, z) = \frac{\pi}{64} \left[ \begin{aligned} & \left( 8 \left\{ z^4 - a^4 - z^2 r^2 \right\} - r^4 \right) \sin^{-1} \left( \frac{a}{l_2} \right) + \\ & \frac{z}{(a^2 - l_1^2)^{1/2}} \left( 2a^2 (r^2 - 4z^2 - 4a^2) + l_1^2 (14z^2 - r^2 - 2a^2) \right) \end{aligned} \right]. \quad (\text{B16})$$

Sollte in  $\Phi$  irgendeine Funktion von  $r$  oder  $a$  nicht mit reproduziert worden sein, so sollten sie sich auf die oben beschriebene Weise finden lassen. Jedoch finden wir mit Hilfe der Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \sqrt{a^2 - l_1^2} = az; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} l_2^2 - r^2 = z^2; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \sin^{-1} \frac{a}{l_2} = a \quad (\text{B17})$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{a^2 - l_1^2} = a; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} l_2^2 - z^2 = a^2 + r^2; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \sin^{-1} \frac{a}{l_2} = a, \quad (\text{B18})$$

daß eine solche Funktion identisch Null für die Potentialfunktionen  $\Phi$  ist.

## Anhang C

Die folgenden Ableitungen der im Anhang B hergeleiteten Funktionen wurden mit Hilfe eines Computerprogramms berechnet und haben, da keinerlei Abkürzungen verwendet wurden, teilweise recht unpraktische Ausmaße. Für die weitere, zumeist ohnehin computertechnische Behandlung ist dies aber ohne Belang.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \pi \left( (z^*(4*a^2*r + (-2*a^2-r^2+14*z^2)*(a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2}) * \right. \\ & \left( (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) / (2 - (r * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + \\ & ((a+r)^2+z^2)^{1/2}) / (a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4})^{1/2} + \\ & (z^*(a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2}) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) * (2*a^2*(-4*a^2+r^2- \\ & 4*z^2) + (-2*a^2-r^2+14*z^2) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + \\ & ((a+r)^2+z^2)^{1/2}) / (4*(a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4})^{3/2} - \\ & (2*a^2*(-8*a^4-r^4-8*r^2*z^2+8*z^4) * (-a+r) / ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + (a+r) / ((a+r)^2+z^2)^{1/2}) / \\ & (((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/2} * (1 - (4*a^2) / (((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2}))^{1/2} \\ & \left. \right) - 4*r*(r^2+4*z^2)*\text{ArcSin}[2*a/(((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})] / 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} &= \pi \left( (z^*(4*a^2 + (-2*a^2-r^2+14*z^2)*(a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/2} + \right. \\ & \left( (-2*a^2-r^2+14*z^2) * (-a+r)^2 / ((-a+r)^2+z^2)^{3/2} - ((-a+r)^2+z^2)^{-1/2} - (a+r)^2 / ((a+r)^2+z^2)^{3/2} + \right. \\ & \left. ((a+r)^2+z^2)^{-1/2} \right) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) / (2 - 2*r * ((a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2}) * \\ & \left( (-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) / (a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4})^{1/2} + \\ & (z^*(a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2}) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) * (4*a^2*r + (-2*a^2- \\ & r^2+14*z^2)*(a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2}) * \\ & \left( (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) / (2 - (r * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/2}) / \\ & (2*(a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4})^{3/2} + (3*z * ((a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + \\ & (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/2} - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) * (2*a^2*(-4*a^2+r^2-4*z^2) + \\ & ((-2*a^2-r^2+14*z^2) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4}) / (16*(a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + \\ & ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4})^{5/2} + (z * ((a-r)/(a^2-2*a*r+r^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/2} * \\ & (2*a^2*(-4*a^2+r^2-4*z^2) + ((-2*a^2-r^2+14*z^2) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4}) / \\ & (4*(a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4})^{3/2} + (z * ((-a+r)^2/((-a+r)^2+z^2)^{3/2} - \\ & ((-a+r)^2+z^2)^{-1/2} - (a+r)^2/((a+r)^2+z^2)^{3/2} + ((a+r)^2+z^2)^{-1/2}) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2} \right) * (2*a^2*(- \\ & 4*a^2+r^2-4*z^2) + (-2*a^2-r^2+14*z^2) * (-(-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4}) / (4*(a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/4})^{3/2} + \\ & (8*a^3*(-8*a^4-r^4-8*r^2*z^2+8*z^4) * (-a+r) / ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/2} / (((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{3/2} * (1 - (4*a^2) / (((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2}))^{1/2} \\ & \left. \right) - 2)^{3/2} + (4*a^2*(-8*a^4-r^4-8*r^2*z^2+8*z^4) * (-a+r) / ((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{2/2} / \\ & (((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2})^{3/2} * (1 - (4*a^2) / (((-a+r)^2+z^2)^{1/2} + ((a+r)^2+z^2)^{1/2}))^{1/2} \end{aligned}$$

$$2)^{(1/2)} - (2^*a^*(-8^*a^4-r^4-8^*r^2*z^2+8^*z^4)*(-((a+r)^2/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} - (a+r)^2)/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4^*a^2)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4^*a^2) * ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (16^*a^*r^2*(r^2+4^*z^2)*(-((a+r)^2/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}))/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4^*a^2) * ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4^*a^2) * ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (-12^*r^2-16^*z^2)*ArcSin[(2^*a)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}]/16$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = -\pi((-a^2+13^*r^2-17^*z^2+5^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)})^*$$

$$((a-r)/(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / (288^*(a^2-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(3/2)} - ((a^2+13^*r^2-17^*z^2+5^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}) * ((a-r)/(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / (72^*(a^2-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)} - ((a^2+13^*r^2-17^*z^2+5^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}) * ((a+r)^2/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} - (a+r)^2)/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/ (72^*(a^2-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)} - (r^5*a^2+5^*r^2+5^*z^2+13^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}) * ((a-r)/(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/ (18^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)} * (a^2-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)} + ((-5^*a^6+15^*a^4*r^2-15^*a^2*r^4+5^*r^6-5^*a^4*z^2+30^*a^2*r^2*z^2+15^*a^4*z^2+5^*a^2*z^4+15^*r^2*z^4+5^*z^6+13^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)})/ (9^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}) + (8^*a^3*z^*(-r^2+(2^*z^2)/3)*((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^5 * (1 - 4^*a^2)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (3/2) + (4^*a^*z^*(-r^2+(2^*z^2)/3)*((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^3 * (1 - 4^*a^2)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1/2) - (2^*a^*z^*(-r^2+(2^*z^2)/3)*((a+r)^2/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} - (a+r)^2)/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/ (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4^*a^2)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) + (8^*a^*r^*z^*(-(a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 + (-2^*r+((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 / (2^*(-r^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)})^2 / (3^*((((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 + (-r^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)})^2 - (2^*a^3 * (-((a+r)^2/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)^2)/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} - (a+r)^2)/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 - (2^*r+((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 / (4^*(-r^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(3/2)} + (-2+((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/2 + (-((a+r)^2/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} - (a+r)^2)/((a+r)^2+z^2)^{(3/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 / (2^*(-r^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)})) / (3^*((((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 + (-r^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)}) - 2^*z^*ArcSin[(2^*a)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}])$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\pi((-a^2+13^*r^2-17^*z^2+5^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)})^*$$

$$((a-r)/(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/ (72^*(a^2-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)} + (r^5*(-5^*a^2+5^*r^2+5^*z^2+13^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}) * (a^2-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)} / (9^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}) - (2^*a^*z^*(-r^2+(2^*z^2)/3)*((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4^*a^2)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1/2) - (2^*a^3 * (-((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 + (-2^*r+((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 / (2^*(-r^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)})^2 / (3^*((((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/2 + (-r^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)})^2 - (2^*r^*z^*ArcSin[(2^*a)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}])$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r} = \pi(-2^*a^*(-r^2+2^*z^2)*((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}))$$

$$(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4^*a^2)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1/2) - ((a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (2^*a^2 - 3^*(a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})/4 / (4^*a^*(-a^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)} + (3^*(a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (-((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) * (-a^2+((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2/4)^{(1/2)} / (2^*a) - 2^*r^*ArcSin[(2^*a)/(((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}])$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\pi((-a^2+13^*r^2-17^*z^2+5^*(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}*(a^2+2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)}) * ((a-r)/(a^2-2^*a^*r+r^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})$$



$$\begin{aligned} & (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} * (-(a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)} / (72 * (a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / 4)^{(1/2)} + (r * (-5 * a^2 + 5 * r^2 + 5 * z^2 + 13 * (a^2 - 2 * a * r + r^2 + z^2)^{(1/2)} * (a^2 + 2 * a * r + r^2 + z^2)^{(1/2)}) * (a^2 - ((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / 4)^{(1/2)} / (9 * (a^2 - 2 * a * r + r^2 + z^2)^{(1/2)} * (a^2 + 2 * a * r + r^2 + z^2)^{(1/2)} - (2 * a * z * (-r^2 + (2 * z^2)/3) * ((-a+r)/((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})) / (((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 * (1 - 4 * a^2) / (((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2) - (2 * a^3 * (((-a+r)/((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) / 2 + (-2 * r * (((-a+r)/((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + (a+r)/((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})) * (((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})) / 2) / (2 * (-r^2 + (((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / 4)^{(1/2)}) / (3 * (((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)}) / 2 + (-r^2 + (((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})^2 / 4)^{(1/2)}) - 2 * r * z * \text{ArcSin}[(2 * a) / (((-a+r)^2+z^2)^{(1/2)} + ((a+r)^2+z^2)^{(1/2)})] \end{aligned}$$

## Anhang D

Als Beispiel für einen Grenzübergang von transversaler zu vollständiger Isotropie soll die Gleichung (49)

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \left[ \frac{\gamma_1 f(z_1)}{m_1 - 1} + \frac{\gamma_2 f(z_2)}{m_2 - 1} \right] = - \frac{(1 - 2\nu) f(z) + z \frac{\partial}{\partial z} f(z)}{2(1 - \nu)}$$

hergeleitet werden. Um die Regel von L'Hôpital anwenden zu können, bringen wir den Ausdruck in der eckigen Klammer zunächst auf die Form  $\frac{0}{0}$ , indem wir beide Brüche zusammenfassen

$$\frac{\gamma_1 (m_2 - 1) f(z_1) + \gamma_2 (m_1 - 1) f(z_2)}{(m_1 - 1)(m_2 - 1)}.$$

Als nächstes machen wir Gebrauch von der Vereinfachung  $m_1 * m_2 = 1$  und leiten im Zähler und Nenner nach  $\gamma_1$  ab, wobei wir die Bedingung

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1} \left[ \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1} \right] = 2(1 - \nu)$$

anwenden:

$$\frac{\gamma_1 \left( \frac{1}{m_1} - 1 \right) f(z_1) + \gamma_2 (m_1 - 1) f(z_2)}{\left( 2 - m_1 - \frac{1}{m_1} \right)},$$

$$\frac{\left( \frac{1}{m_1} - 1 \right) f(z_1) - \frac{\gamma_1}{m_1^2} f(z_1) \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1} - \left( \frac{1}{m_1} - 1 \right) \frac{z}{\gamma_1} f'(z_1) + \gamma_2 \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1} f(z_2)}{\left( \frac{1}{m_1^2} - 1 \right) \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1}}.$$

Hierbei bedeutet  $f'$  die partielle Ableitung von  $f$  nach  $z$ . Bei einem Teil der Terme kann der Grenzübergang nun direkt ausgeführt werden. Wir spalten diesen ab und machen den Übergang. Das Ergebnis lautet:

$$\frac{f(z) - z f'(z)}{4(1 - \nu)} + \left\{ \frac{-\frac{\gamma_1}{m_1^2} f(z_1) \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1} - \gamma_2 \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1} f(z_2)}{\left( \frac{1}{m_1^2} - 1 \right) \frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1}} \right\},$$

wobei die geschweifte Klammer bedeutet, daß hier der Grenzübergang noch ausgeführt werden muß.

Vereinfachung des Ausdrucks durch Kürzen von  $\frac{\partial m_1}{\partial \gamma_1}$  und nochmalige Anwendung der Regel von

L'Hôspital gibt schließlich

$$\frac{f(z) - zf'(z)}{4(1-\nu)} + \frac{f(z) - 4(1-\nu)f(z) - zf'(z)}{4(1-\nu)}$$

und nach Zusammenfassung erhält man

$$-\frac{(1-2\nu)f(z) + zf'(z)}{2(1-\nu)}.$$

## Anhang E

Aus den Lösungen von Hanson [13] soll das elastische Feld, das von einem Ring  $b < r < a$  erzeugt wird, in welchem eine Gleitreibungskraft entsprechend Kapitel 5 wirkt, hergeleitet werden. Mit den Hilfsgrößen

$$u(c) = \frac{3HP}{2a^3} \gamma_1 \gamma_2 \sum_{k=1}^2 \frac{e^{i\varphi}}{m_k - 1} \left[ \left( \frac{1}{2} r^2 - c^2 - z_k^2 \right) \sin^{-1} \frac{l_{1k}(c)}{r} + \frac{2c^2 - 3l_{1k}^2(c)}{2l_{1k}(c)} \sqrt{r^2 - l_{1k}^2(c)} \right],$$

$$w(c) = \frac{3HP}{2a^3} r \gamma_1 \gamma_2 \sum_{k=1}^2 \frac{m_k}{(m_k - 1) \gamma_k} \left[ -z_k \sin^{-1} \frac{l_{1k}(c)}{r} + \left( 1 - \frac{l_{1k}^2(c) + 2c^2}{3r^2} \right) \sqrt{c^2 - l_{1k}^2(c)} + \frac{2c^3}{3r^2} \right],$$

$$\sigma_1(c) = \frac{3HPA_{66}}{a^3} r \gamma_1 \gamma_2 \sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^2 - (m_k + 1)\gamma_3^2}{(m_k - 1)\gamma_k^2} \left[ -\sin^{-1} \frac{l_{1k}(c)}{r} + \frac{l_{1k}(c)}{r^2} \sqrt{r^2 - l_{1k}^2(c)} \right],$$

$$\sigma_2(c) = \frac{3HPA_{66}}{a^3} \gamma_1 \gamma_2 \sum_{k=1}^2 \frac{e^{2i\varphi}}{m_k - 1} \left[ r \sin^{-1} \frac{l_{1k}(c)}{r} - \frac{l_{1k}(c)}{r} \sqrt{r^2 - l_{1k}^2(c)} \right],$$

$$\sigma_{zz}(c) = \frac{3P\gamma_1\gamma_2}{4(\gamma_1 - \gamma_2)\pi a^3} r \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \left[ -\sin^{-1} \frac{l_{1k}(c)}{r} - \frac{l_{1k}(c)}{r^2} \sqrt{r^2 - l_{1k}^2(c)} \right],$$

$$\tau_z(c) = \frac{3P\gamma_1\gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)\pi a^3} r \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k+1}}{\gamma_k} \left[ -z_k \sin^{-1} \frac{l_{1k}(c)}{r} + \sqrt{c^2 - l_{1k}^2(c)} \right],$$

lassen sich die Feldgrößen wie folgt angeben:

$$u_G = r_G [u(a) - u(b)] \quad \text{(E1)}$$

$$w_G = r_G [w(a) - w(b)] \quad \text{(E2)}$$

$$\sigma_{1G} = r_G [\sigma_1(a) - \sigma_1(b)] \quad \text{(E3)}$$

$$\sigma_{2G} = r_G [\sigma_2(a) - \sigma_2(b)] \quad \text{(E4)}$$

$$\sigma_{zzG} = r_G [\sigma_{zz}(a) - \sigma_{zz}(b)] \quad \text{(E5)}$$

$$\tau_{zG} = r_G [\tau_z(a) - \tau_z(b)] \quad (\text{E6})$$

$r_G$  bezeichnet hierbei den Reibungskoeffizienten.

## Anhang F

### F 1. Konkretisierung der Beziehungen von 6.2. für den Schicht-Substrat-Fall

Um den außerordentlich wichtigen Fall einer einfachen Schicht auf einem Substrat ohne lange Rechnung sofort behandeln zu können, seien die diesbezüglichen Ansätze für die inhomogenen Lösungen  $F_k^{\text{inh}}$ ,  $g_k^{\text{inh}}$ ,  $I_k^{\text{inh}}$  nochmals explizit angegeben:

für u:

$$\left. \begin{array}{l} F_k^{\text{inh}} \\ g_k^{\text{inh}} \\ I_k^{\text{inh}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [F_{q,n}^+]^1 + b_{q,n} * [F_{q,n}^-]^1 \right\} \\ \quad + au_{q,n} * [F_{q,n}^+]^1 + bu_{q,n} * [F_{q,n}^-]^1 \\ c * F_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [F_{q,n}^+]^2 + du_{q,n} * [F_{q,n}^+]^2 \right\} \end{array} \right\} \quad \text{für } z < z' \quad \left\{ \begin{array}{l} \Leftarrow F_k^h \\ \Leftarrow g_k^h \\ \Leftarrow I_k^h \end{array} \right. \\ k = 1,2 \quad , \quad (\text{F1})$$

$$\left. \begin{array}{l} F_k^{\text{inh}} \\ g_k^{\text{inh}} \\ I_k^{\text{inh}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_k^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n * [F_n^+]^1 + b_n * [F_n^-]^1 \right\} \\ c * F_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n * [F_n^+]^2 \end{array} \right\} \quad \text{für } z < z' \quad \left\{ \begin{array}{l} \Leftarrow F_k^h \\ \Leftarrow g_k^h \\ \Leftarrow I_k^h \end{array} \right. \\ k = 3$$

für w:

$$\left. \begin{array}{l} F_k^{\text{inh}} \\ g_k^{\text{inh}} \\ I_k^{\text{inh}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [F_{q,n}^+]^1 + b_{q,n} * [F_{q,n}^-]^1 \right\} \\ c * F_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [F_{q,n}^+]^2 \right\} \end{array} \right\} \quad \text{für } z < z' \quad \left\{ \begin{array}{l} \Leftarrow F_k^h \\ \Leftarrow g_k^h \\ \Leftarrow I_k^h \end{array} \right. , \quad (\text{F2}) \\ k = 1,2$$

wobei  $\left\{ \begin{array}{l} \Leftarrow F_k^h \\ \Leftarrow g_k^h \\ \Leftarrow I_k^h \end{array} \right.$  bedeutet, daß in der Gleichung die Größe F durch die entsprechenden anderen

Symbole  $F^h$ ,  $g^h$ ,  $I^h$  ersetzt wird. Das Interface liege bei  $z=z'$ . Der Index h steht für die homogene Lösung. Weiterhin gilt die Festlegung:

$$\begin{aligned}
[F_{0,0}^+]_k &\equiv F_k^1 = F\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^1}\right); & [F_{0,0}^+]_k^2 &\equiv F_k^2 = F\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^2} + z' \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right] \right) \\
[F_{q,n}^\pm]_k &= F\left(x, y, \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz' \pm z}{\gamma_k^1}\right) \\
[F_{q,n}^+]_k &= F\left(x, y, \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz'}{\gamma_k^1} + \frac{z}{\gamma_k^2} + z' * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right] \right) & \left\{ \begin{array}{l} \Leftarrow F_k^h \\ \Leftarrow g_k^h \\ \Leftarrow I_k^h \end{array} \right. \\
[F_{q,n}^\pm]_3 &= F\left(x, y, \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz'}{\gamma_k^1} \pm \left[ \frac{z}{\gamma_3^1} + z' * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_3^1} \right] \right] \right) \\
[F_{q,n}^+]_3 &= F\left(x, y, \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz'}{\gamma_k^1} + \frac{z}{\gamma_3^2} + z' * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_3^2} \right] \right) \\
k &= 1, 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[F_0^+]_k &\equiv F_k^1 = F\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^1}\right); & [F_0^+]_k^2 &\equiv F_k^2 = F\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^2} + z' \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right] \right) \\
[F_n^\pm]_k &= F\left(x, y, \frac{z_n^\pm}{\gamma_k^1}\right) = F\left(x, y, \frac{2nz' \pm z}{\gamma_k^1}\right) & \left\{ \begin{array}{l} \Leftarrow F_k^h \\ \Leftarrow g_k^h \\ \Leftarrow I_k^h \end{array} \right. \\
[F_n^+]_k &= F\left(x, y, \frac{2nz' + z}{\gamma_k^2} + (2nz' + z') * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right] \right) \\
k &= 3
\end{aligned}$$

Glieder der Art  $[F_n^-]_k^2$  bzw.  $[F_{q,n}^-]_k^2$  existieren für ein Schicht-Substrat-System nicht.

Wiederum ist dabei die Größe F durch die entsprechenden anderen Symbole  $F^h$ ,  $g^h$ ,  $I^h$  zu ersetzen.

Ein eher formaler, wenn auch sehr aufwendiger Vorgang ist nun die Berechnung der Konstanten für die Potentialfunktionen anhand der oben gegebenen Rand- und Anschlußbedingungen. Das elastische (Gesamt-) Feld kann dann mit Hilfe der Gleichungen (14) sowie (23) bis (26) für die Potentiale  $\Pi_k = F_k + G_k + I_k$  berechnet werden. Da N, S, T nur Konstanten sind, treten lediglich Ableitungen nach den Größen R, G und z in den oben gemachten Ansätzen für  $\Psi$ ,  $\Xi$ ,  $\Theta$  auf, welche sehr einfach zu berechnen sind und daher hier nicht angegeben werden sollen.

## F 2. Kraftverteilungen des Kugeleindruckversuches auf der Oberfläche eines geschichtet aufgebauten Halbraumes

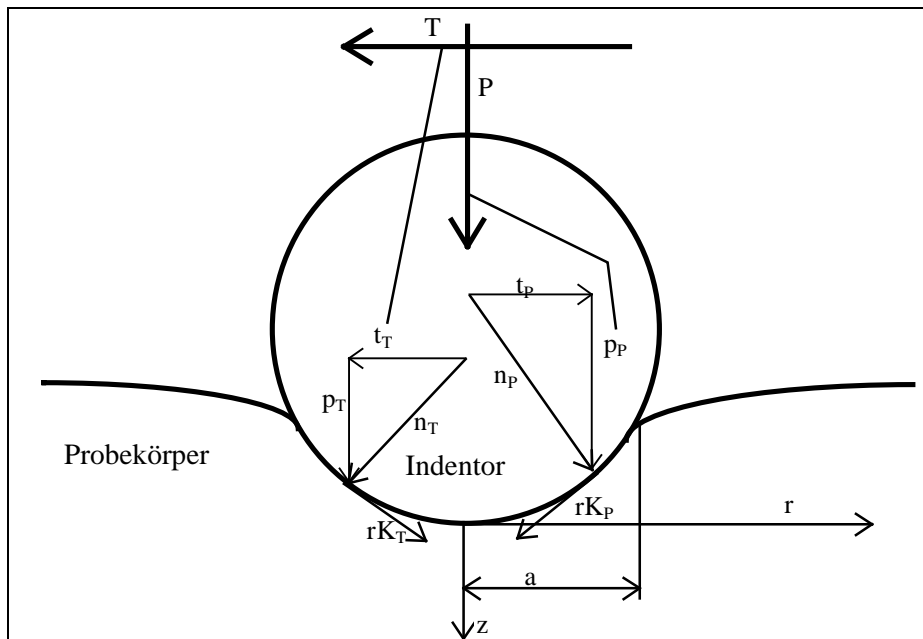


Abbildung F1: Kräfte beim Kugeleindruckversuch:

*globale Kräfte:  $P$ =axiale Druckkraft,  $T$ =Tangentialkraft*

*lokale Kräfte von  $P$ :  $p_P$ =Kraftkomponente in axialer Richtung ("Axialkomponente" in  $z$ -Richtung)*

*$t_P$ =Kraftkomponente in radialer Richtung ("Radialkomponente" in  $r$ -Richtung)*

*$n_P$ =Normalkomponente*

*$rK_P$ =lokale Reibungskraft von  $P$*

*lokale Kräfte von  $T$ :  $p_T$ =Kraftkomponente in axialer Richtung*

*$t_T$ =Kraftkomponente in radialer Richtung*

*$n_T$ =Normalkomponente*

*$rK_T$ =lokale Reibungskraft von  $T$*

*$rK$ =lokale explizit gegebene Reibungskraft (nicht dargestellt), die durch eine Bewegung des Indentors auf der Oberfläche des Probekörpers verursacht wird*

*$a$ =Kontaktflächenradius*

*$r$ =Radius*

Zum besseren Verständnis wurden in Abbildung F1 sämtliche Kraftarten, wie sie beim elastischen Kugeleindruck in den geschichtet oder homogen aufgebauten Halbraum einkoppeln können, veranschaulicht. Betrachten wir zunächst nur die lokalen Kräfte, so muß man prinzipiell folgende Kräfte unterscheiden:

- a) *Kraftkomponenten in axialer Richtung, die auf  $\sigma_z$  wirken:  $p_T$  und  $p_P$*   
 b) *Kraftkomponenten in tangentialer Richtung, die auf  $\tau_z$  wirken: Dies sind die Scher- bzw. Reibungskräfte  $rK_T$ ,  $rK_P$  und  $rK$*   
 c) *Kraftkomponenten in tangentialer Richtung, die auf  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  wirken:  $t_P$ ,  $t_T$*

Integriert man die lokalen Kraftkomponenten über die gesamte Kontaktfläche mit dem Radius a, so ergeben sich die globalen Kräfte P und T.

In den folgenden drei Abschnitten werden die aus dem homogenen Fall vorliegenden Lösungen für bestimmte Teilkkräfte auf den einfach geschichteten Fall (Schicht und Substrat) verallgemeinert.

### **F 2.1. Hertzische Pressung - nur $p_P$ wird berücksichtigt**

Für eine Hertzische Druckkraftverteilung, die in senkrechter Richtung zur Oberfläche des geschichteten Halbraums wirkt, erhält man sofort:

für u:

$$F_k^{inh} = \begin{cases} F_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [F_{q,n}^+]_k^1 + b_{q,n} * [F_{q,n}^-]_k^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * F_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a u_{q,n} * [F_{q,n}^+]_3^1 + b u_{q,n} * [F_{q,n}^-]_3^1 \right\} & \\ c * F_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [F_{q,n}^+]_k^2 + d u_{q,n} * [F_{q,n}^+]_3^2 \right\} & \text{für } z \geq z' \end{cases},$$

für w:

$$F_k^{inh} = \begin{cases} F_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [F_{q,n}^+]_k^1 + b_{q,n} * [F_{q,n}^-]_k^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * F_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [F_{q,n}^+]_k^2 \right\} & \text{für } z \geq z' \end{cases},$$

mit:  $k=1,2$  sowie:

$$F_k^1 = \frac{H^1 \gamma_k^1}{m_k^1 - 1} * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \ln[R_k^1 + z_k^1] r dr d\varphi$$

$$F_k^2 = \frac{H^2 \gamma_k^2}{m_k^2 - 1} * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \ln[R_k^2 + z_k^2] r dr d\varphi$$

$$[F_{q,n}^\pm]_k^1 = \frac{H^1 \gamma_k^1}{m_k^1 - 1} * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \ln\left[ [R_{q,n}^\pm]_k^1 + [z_{q,n}^\pm]_k^1 \right] r dr d\varphi$$

$$[F_{q,n}^+]_k^2 = \frac{H^2 \gamma_k^2}{m_k^2 - 1} * \frac{3P}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \ln\left[ [R_{q,n}^+]_k^2 + [z_{q,n}^+]_k^2 \right] r dr d\varphi$$

mit den folgenden Bezeichnungen:

$$z_k^1 = \frac{z}{\gamma_k^1}; \quad z_k^2 = \frac{z}{\gamma_k^2} + z' \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right]$$

$$\left[ z_{q,n}^\pm \right]_k^1 = \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz' \pm z}{\gamma_k^1}; \quad \left[ z_{q,n}^+ \right]_k^2 = \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz'}{\gamma_k^1} + \frac{z}{\gamma_k^2} + z' * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right]$$

$$k=1,2$$

$$\left[ z_{q,n}^\pm \right]_3^1 = \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz'}{\gamma_k^1} \pm \left[ \frac{z}{\gamma_3^1} + z' * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_3^1} \right] \right];$$

$$\left[ z_{q,n}^+ \right]_k^2 = \frac{2qz'}{\gamma_3^1} + \frac{2nz'}{\gamma_k^1} + \frac{z}{\gamma_3^2} + z' * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_3^2} \right]$$

$$R_k^1 = R(x, y, z_k^1) = R\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^1}\right); \quad R_k^2 = R(x, y, z_k^2) = R\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^2} + z' \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right]\right)$$

$$\left[ R_{q,n}^\pm \right]_k^1 = R\left(x, y, \left[ z_{q,n}^\pm \right]_k^1\right); \quad \left[ R_{q,n}^+ \right]_k^2 = R\left(x, y, \left[ z_{q,n}^+ \right]_k^2\right)$$

$$R(x, y, z) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

Nun gilt es, die Anschluß- und Randbedingungen für unseren konkreten Ansatz zu formulieren. Diese wurden bereits im Kapitel 6 besprochen. Mit Hilfe der Gleichungen von Abschnitt 3.2. erhält man wegen der  $m_k$  und  $\gamma_k$  zwei Gleichungssysteme für alle  $k$  Potentialfunktionen  $F_k$  ( $k=1,2$ ), welche die  $ax_n$ ,  $bx_n$ ,  $cx$  und  $dx_n$  ( $x=u, w$ ) bestimmen. Diese Gleichungssysteme können recht vorteilhaft mit Hilfe eines Algebra-Programms, wie z.B. Maple oder Mathematica, erstellt und berechnet werden. Aufgrund ihres Umfangs und des formalen Charakters ihrer Herleitung sollen diese Gleichungssysteme hier nicht dargestellt werden.

### ***F 2.2. Hertzsche Scherkraftverteilung nach Hamilton-Goodmann***

Hertzsche Scherkraftverteilung auf der Oberfläche (Hamilton-Goodmann-Ansatz [39]:  $rK = \mu * p_p$  mit  $\mu$ ...Reibungskonstante, zur vollständigen homogenen Lösung siehe [13]):

Man ersetze in den obigen Gleichungen von F 2.1. die Größe  $F$  durch die Größe  $G$  mit:

für  $u$ :

$$G_k^{inh} = \begin{cases} G_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [G_{q,n}^+]^1 + b_{q,n} * [G_{q,n}^-]^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * G_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [G_{q,n}^+]^2 + du_{q,n} * [G_{q,n}^+]^3 \right\} & \text{für } z \geq z' \end{cases}$$

$$k = 1, 2$$

$$G_k^{inh} = \begin{cases} G_k^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n * [G_n^+]^1 + b_n * [G_n^-]^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * G_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n * [G_n^+]^2 & \text{für } z \geq z' \end{cases}$$

$$k = 3$$

für w:

$$G_k^{inh} = \begin{cases} G_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [G_{q,n}^+]^1 + b_{q,n} * [G_{q,n}^-]^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * G_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [G_{q,n}^+]^2 \right\} & \text{für } z \geq z' \end{cases},$$

$$k = 1, 2$$

$$G_k^j = \frac{H\gamma_1^j \gamma_2^j}{m_k^j - 1} \frac{3P}{4\pi a^3} [\Lambda \bar{g}_k^j + \bar{\Lambda} g_k^j]; \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2$$

$$G_3^j = i * \frac{3P\gamma_3^j}{8\pi^2 a^3 A^j_{44}} [\bar{\Lambda} g_3^j - \Lambda \bar{g}_3^j]$$

$$g_k^j = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \left[ z_k^j * \ln[R_k^j + z_k^j] - R_k^j \right] r dr d\varphi; \quad k = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2$$

$$[G_{q,n}^{\pm}]_k^j = \frac{H\gamma_1^j \gamma_2^j}{m_k^j - 1} \frac{3P}{4\pi a^3} \left[ \Lambda [g_{q,n}^{\pm}]_k^j + \bar{\Lambda} [\bar{g}_{q,n}^{\pm}]_k^j \right]; \quad k = 1, 2; \quad j = 1$$

$$[G_n^{\pm}]_3^j = i * \frac{3P\gamma_3^j}{8\pi^2 a^3 A^j_{44}} \left[ \bar{\Lambda} [g_n^{\pm}]_3^j - \Lambda [\bar{g}_n^{\pm}]_3^j \right]; \quad j = 1$$

$$[g_{q,n}^{\pm}]_k^j = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \left[ [z_{q,n}^{\pm}]_k^j * \ln \left[ [R_{q,n}^{\pm}]_k^j + [z_{q,n}^{\pm}]_k^j \right] - [R_{q,n}^{\pm}]_k^j \right] r dr d\varphi; \quad k = 1, 2; \quad j = 1$$

$$[g_n^{\pm}]_k^j = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \left[ [z_n^{\pm}]_k^j * \ln \left[ [R_n^{\pm}]_k^j + [z_n^{\pm}]_k^j \right] - [R_n^{\pm}]_k^j \right] r dr d\varphi; \quad k = 3; \quad j = 1$$



$$R_k^1 = R(x, y, z_k^1) = R\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^1}\right); \quad R_k^2 = R(x, y, z_k^2) = R\left(x, y, \frac{z}{\gamma_k^2} + z' \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right]\right)$$

$$[R_{n_r}^\pm]_k^1 = R\left(x, y, [z_n^\pm]_k^1\right) = R\left(x, y, \frac{2nz' \pm z}{\gamma_k^1}\right)$$

$$[R_n^+]_k^2 = R\left(x, y, [z_n^+]_k^2\right) = R\left(x, y, \frac{2nz' + z}{\gamma_k^2} + (2nz' + z') * \left[ \frac{1}{\gamma_k^1} - \frac{1}{\gamma_k^2} \right]\right)$$

$$R(x, y, z) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}$$

und erhält dann mit den ebenfalls in F 2.1. angegebenen Bezeichnungen den erforderlichen Ansatz für das elastische Feld einer Hertzschen Scherkraft, die auf die Oberfläche eines einfach geschichtet aufgebauten Halbraums einwirkt. Für  $j=2$  gelten die obigen Gleichungen, nur mit dem Index  $^+$ :

$$[G_{q,n}^+]_k^j = \frac{H\gamma_1^j \gamma_2^j}{m_k^j - 1} \frac{3P}{4\pi a^3} \left[ \Lambda [\bar{g}_{q,n}^+]_k^j + \bar{\Lambda} [g_{q,n}^+]_k^j \right]; \quad k=1,2; \quad j=2$$

$$[G_n^+]_3^j = i * \frac{3P\gamma_3^j}{8\pi^2 a^3 A_{44}^j} \left[ \bar{\Lambda} [g_n^+]_3^j - \Lambda [\bar{g}_n^+]_3^j \right]; \quad j=2$$

$$[g_{q,n}^+]_k^j = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \left[ [z_{q,n}^+]_k^j * \ln \left[ [R_{q,n}^+]_k^j + [z_{q,n}^+]_k^j \right] - [R_{q,n}^+]_k^j \right] r dr d\varphi; \quad k=1,2; \quad j=2$$

$$[g_n^+]_k^j = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} \left[ [z_n^+]_k^j * \ln \left[ [R_n^+]_k^j + [z_n^+]_k^j \right] - [R_n^+]_k^j \right] r dr d\varphi; \quad k=3; \quad j=2$$

Es sind erneut zwei Gleichungssysteme für alle  $k$  ( $k=1,2$  im Falle  $w$  und  $k=1,2,3$  im Falle  $u$ ) zu lösen.

### F 2.3. Hertzsche Tangentialkraftverteilung

Tangentialkraftverteilung auf der Oberfläche die sich aus der Oberflächenkrümmung beim Hertzschen Kontakt in erster Näherung ergibt (Abschnitte 3.3.3. und 4.1.1.; Grundlagen siehe [85], S. 9 -17):

$$t_p = p_p \Lambda w|_{z=0} \quad (\text{im Kontaktflächenbereich } r < a)$$

Man ersetze in den obigen Gleichungen von F 2.1. die Größe  $F$  durch die Größe  $I$  mit:

für  $u$ :

$$I_k^{inh} = \begin{cases} I_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [I_{q,n}^+]^1 + b_{q,n} * [I_{q,n}^-]^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * I_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [I_{q,n}^+]^2 + du_{q,n} * [I_{q,n}^+]^2 \right\} & \text{für } z \geq z' \end{cases}$$

$k = 1, 2$  ,

$$I_k^{inh} = \begin{cases} I_k^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n * [I_n^+]^1 + b_n * [I_n^-]^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * I_k^2 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n * [I_n^+]^2 & \text{für } z \geq z' \end{cases}$$

$k = 3$

für w:

$$G_k^{inh} = \begin{cases} G_k^1 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ a_{q,n} * [G_{q,n}^+]^1 + b_{q,n} * [G_{q,n}^-]^1 \right\} & \text{für } z < z' \\ c * G_k^2 + \sum_{q,n=0}^{\infty} \left\{ d_{q,n} * [G_{q,n}^+]^2 \right\} & \text{für } z \geq z' \end{cases}$$

$k = 1, 2$

$$I_k^j = c_k^j \frac{3P}{4\pi a^3} \int \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ r\sqrt{a^2 - r^2} - \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] \left[ z_k^j * \ln[R_k^j + z_k^j] - R_k^j \right] r dr d\varphi \right\} dz$$

$k = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2$

$$[I_{q,n}^{\#}]_k^j = c_k^j \frac{3P}{4\pi a^3} \int \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{r^3} \right] \left[ [z_{q,n}^{\#}]_k^j * \ln\left[ [R_{q,n}^{\#}]_k^j + [z_{q,n}^{\#}]_k^j \right] - [R_{q,n}^{\#}]_k^j \right] r dr d\varphi \right\} dz$$

$k = 1, 2$

$$[I_n^{\#}]_k^j = c_k^j \frac{3P}{4\pi a^3} \int \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[ \frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right] \left[ [z_n^{\#}]_k^j * \ln\left[ [R_n^{\#}]_k^j + [z_n^{\#}]_k^j \right] - [R_n^{\#}]_k^j \right] r dr d\varphi \right\} dz$$

$k = 3; \quad \text{für } j = 1 \text{ setze } \# = \pm; \quad \text{für } j = 2 \text{ setze } \# = +$

und erhält dann mit den ebenfalls in F 2.1. angegebenen Bezeichnungen den erforderlichen Ansatz für das elastische Feld einer "Hertzschen Tangentialkraft", die auf die Oberfläche eines einfach geschichtet aufgebauten Halbraums einwirkt. Die Konstanten  $c_k^j$  ( $j$  steht hier für Schicht  $j=1$  und Substrat  $j=2$ ) wurden in Abschnitt 3.3.3. (Gleichungen (45), dort aber ohne Index  $j$ ) berechnet.

Einfacher wird die Lösung des Problems der gekrümmten Oberfläche beim Kugeleindruck, wenn statt der Formulierung der Randbedingungen in Zylinderkoordinaten diese in einem geeignet gewählten

krummlinigen Koordinatensystem für  $z^+=0$  (Abschnitt 4.2.) gestellt werden und anschließend eine Koordinatentransformation die Lösungen für die kartesischen oder Zylinderkoordinaten liefert. Da für diese Vorgehensweise keine expliziten Angaben über die Deformation der Oberfläche nötig sind, stört im Unterschied zum Vorgehen nach 4.1. auch nicht die Tatsache, daß bei geschichteten Probekörpern im allgemeinen keine Oberflächendeformationen nach Gleichung (6) zu erwarten sind. Für die  $F_k^{\text{inh}}$  genügt dann der Ansatz von Anhang F, Abschnitt F 2.1. zusammen mit der in Abschnitt 4.2. vorgestellten Transformation aus [85].

### **F 3. Schlußbemerkung**

Es ist außerordentlich wichtig, daß man erkennt, daß die nach den obigen Angaben abgeleiteten Gleichungssysteme für die drei Belastungstypen Normal-, Scher- und Tangentialkraft völlig unabhängig von der eigentlichen Verteilung dieser Kräfte an der Oberfläche sind. Kennt man also die homogene Lösung für beliebige andere Verteilungen, so kann man durch entsprechende Ersetzungen der homogenen Potentialfunktionen  $F$ ,  $G$  und  $I$  in den obigen Gleichungen unmittelbar die Lösung für den geschichteten Fall erhalten.

## ***Erklärung***

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 13.11.1997

## **Danksagung**

Meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. F. Richter, möchte ich für seine Unterstützung, Förderung und zahlreichen Anregungen herzlich danken.

Für die Idee zu diesem Thema danke ich Herrn Prof. Dr. G. Hecht.

Ebenso möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. R. Kreißig für die zahlreichen nützlichen Hinweise zu dieser Arbeit bedanken.

Herrn Prof. Dr. R. D. Arnell von der "University of Salford" danke ich für die vielen anregenden Diskussionen und den für diese Arbeit außerordentlich fruchtbaren Forschungsaufenthalt in seiner Arbeitsgruppe.

Bei den Herren Doktoren H. Djabella und M. Swain möchte ich mich sehr herzlich für die Ausführung, der für diese Arbeit enorm wichtigen FEM-Rechnungen und experimentellen Untersuchungen bedanken. Ohne die aus diesen Resultaten hervorgegangenen Anregungen wären wichtige Schlußfolgerungen dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Norbert Schwarzer

## Thesen

1. Die von einem sphärischen Indentor auf einen Probekörper einwirkende Indentordruckkraft läßt sich in eine normal und eine tangential zur Probenoberfläche gerichtete Kraftkomponente aufspalten. Dabei ist die durch den elastischen Kontakt verursachte Krümmung der Oberflächen im Kontaktbereich beider Körper zu berücksichtigen. Während die Normalkomponente bereits in der bekannten Hertzschen Lösung näherungsweise berücksichtigt wird, wurde in dieser Arbeit das elastische Feld der Tangentialkomponente für kleine Winkel zwischen Indentordruckkraft und deren Normalkomponente hergeleitet.
2. Eine weitere Möglichkeit der Behandlung der Oberflächenkrümmung besteht in einer geeigneten Koordinatentransformation der bekannten Hertzschen Lösung. Diese wird hierbei als elastisches Feld in einem krummlinigen Koordinatensystem angesehen, deren eine Koordinate  $z^+$  mit  $z^+=0$  die im allgemeinen gekrümmte Oberfläche des Probekörpers beschreibt. Mit Hilfe einer Koordinatentransformation kann nun das elastische Feld in kartesischen oder Zylinderkoordinaten dargestellt werden.
3. Aus der Berücksichtigung der Oberflächenkrümmung ergeben sich einige markante Änderungen gegenüber der Hertzschen Lösung. So ist die Normalspannung in Richtung der Indentorachse  $\sigma_{zz}$  außerhalb der Kontaktfläche im allgemeinen ungleich Null, und die Radialspannung  $\sigma_{rr}$  an der Oberfläche weist kein scharfes Zugspannungsmaximum am Rand der Kontaktfläche auf, wie aus der Hertzschen Lösung bekannt, sondern ein eher "abgerundetes" Maximum außerhalb dieser.
4. Die zwischen Indentor und Probekörper bestehende Reibung führt zu zusätzlichen Zwangskräften, deren elastische Felder abgeleitet wurden. Dabei wird davon ausgegangen, daß im allgemeinen zwei unterschiedliche Reibungsbereiche innerhalb der Kontaktfläche existieren. Während im Kontaktzentrum Haftreibung wirkt und zu einer komplizierten Kopplung von Indentor- und Probekörperdeformation führt, ähneln die Bedingungen im Außenbereich, wo Gleitprozesse ablaufen, denen einer wirkenden Scratchkraft, vergleichbar mit dem Fall, daß der Indentor über die Oberfläche des Probekörpers gezogen wird, mit dem markanten Unterschied, daß die Gleitreibungskraft im Gegensatz zu letzterer eine rotationssymmetrische Kraft ist.
5. Die mathematische Behandlung der Gleitprozesse im Außenbereich der Kontaktzone ist demnach der von Scratchkräften auch äquivalent. Für die Lösung des Gleitfalls kann daher auf bereits für das Scratchen hergeleitete Gleichungen [13] zurückgegriffen werden.
6. Im Fall der Haftreibung ergeben sich zwar recht komplizierte Ausdrücke für die eigentliche Reibungskraft, jedoch ist deren elastisches Feld leicht angebbbar. In Abhängigkeit von den Parametern des Indentors und des Probekörpers ergibt sich eine durch die Haftreibung hervorgerufene Deformation, die derjenigen ohne Reibung proportional ist. Dies gilt allerdings nur, wenn der Haftreibungsbereich die gesamte Kontaktfläche einnimmt, was, wie in der Arbeit gezeigt, nur in den Fällen auftreten kann, in denen der Indentor am Probekörper regelrecht ange-

klebt ist. Andernfalls erhält man Superpositionen der elastischen Felder für Haft- und Gleitreibung sowie der Deformation ohne Reibung.

7. Unter der Annahme, daß Materialinhomogenitäten im Probekörper scharf abgegrenzt sind und durch sogenannte Heavisidefunktionen beschrieben werden können, an denen sich die elastischen Materialkonstanten sprunghaft ändern, wurden Lösungen für den Punktkontakt in geschichtete Probekörper entwickelt. Hierzu wurde ein allgemeiner Ansatz vorgeschlagen, der durch konsequente Anwendung der Methode der Bildladungen der Potentialtheorie zu erhalten ist und eine vollständige Lösung des gestellten Problems in geschlossener Form gestattet.
8. Mit Hilfe der Greenschen Funktion wurden die Resultate von 7. auf den sphärischen Indentorversuch mit geschichtet aufgebauten Probekörpern angewendet.
9. Aus der bekannten Potentiallösung für homogen aufgebaute Körper wurden dabei besondere zusätzliche Funktionen, welche ebenfalls der Potentialgleichung genügen, gewonnen und mit Hilfe frei wählbarer Konstanten additiv derart verknüpft, daß sich sowohl die Randbedingungen an der Körperoberfläche als auch die Anschlußbedingungen an den Stellen sprunghafter Materialübergänge befriedigen ließen. Die Anschlußbedingungen resultieren dabei aus den aus physikalischen Überlegungen leicht ableitbaren Stetigkeitsforderungen für die Deformationen  $u$ ,  $v$  und  $w$  in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung sowie für die Scherspannung  $\tau_z$  ( $\tau_z = \tau_{xz} + i\tau_{yz}$ ) und die Normalspannung  $\sigma_{zz}$  ( $z$ -Achse ist Indentorachse).
10. Diese unter 8 und 9 genannten Lösungen wurden mit guten Ergebnissen mit FEM-Rechnungen ([56], [78], [80] und Kapitel 10) verglichen. Die FEM-Rechnungen wurden mit unterschiedlichen Genauigkeiten und Auflösungen bewerkstelligt. Beste Übereinstimmung bezüglich der in dieser Arbeit vorgestellten analytischen Methode lieferten die Vergleiche mit den FEM-Rechnungen hoher Genauigkeit und Auflösung ([56] und [78]). Einen Vergleich mit elastoplastischen FEM-Rechnungen lassen die Ergebnisse dieser Arbeit jedoch nicht zu.
11. Weiterhin wurden die erhaltenen Gleichungen auch auf experimentelle Daten angewendet. Bei letzteren handelt es sich um Kraft-Eindringtiefe-Kurven, die mit einem hochauflösenden Indentorgerät (UMIS 2000) in Kombination mit einem ca.  $5\mu\text{m}$ -Diamant-Indentor an TiN-Silizium-Verbunden aufgenommen worden sind. Unter Verwendung der bekannten elastischen Parameter für das Si-Substrat sowie der Schichtdicke und der Indentorparameter Radius und Elastizitätsmodul wurde der Schicht-E-Modul der TiN-Schichten berechnet. Die Übereinstimmung mit klassischen (Punktindentor-) Methoden [76] ist sehr gut. Aus den experimentellen Daten konnte außerdem der kritische Wert der Indentordruckkraft für die beginnende inelastische Deformation entnommen werden. Mit Hilfe der in dieser Arbeit hergeleiteten Gleichungen für den Kugeleindruckversuch in geschichtet aufgebaute Materialien ließ sich anschließend die von Mises-Spannung für diesen Deformationszustand berechnen. Hieraus ließen sich Indizien für Ort und Größe der möglichen nichtelastischen Deformationen ableiten und diskutieren.

**Lebenslauf**

07.01.1966	geboren in Eilenburg
1972 - 1980	Besuch der Grundschule in Eilenburg
1980 - 1984	Besuch der Erweiterten Oberschule in Eilenburg
1984 - 1986	Wehrdienst
September 1986	Beginn des Studiums der Physik an der TU Chemnitz-Zwickau
Juli 1991	Diplomhauptprüfung
01.09.1991	
- 31.08.1994	Forschungsstudium an der TU Chemnitz-Zwickau
01.09.1994	
- 31.08.1995	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Physik, Lehrstuhl Physik fester Körper der TU Chemnitz-Zwickau
seit 01.09.1994	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Physik, Lehrstuhl Technische Physik der TU Chemnitz-Zwickau