Lokalisierung auf Gittergraphen mit zufälligem Potential

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

vorgelegt von: **Dipl.-Math. Mario Helm**,
geb. am 18. Februar 1975 in Schlema,

Chemnitz, den 1. Juni 2007

Betreuer: **Prof. Dr. Peter Stollmann**

MONARCH: http://archiv.tu-chemnitz.de/pub/2007/0172

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **7**

1.1 Physikalische und mathematische Motivation 7
1.2 Über das Konzept des Quantengraphen 9
1.3 Das Modell 13
1.4 Das deterministische Spektrum 16

2 Vorbereitende Abschätzungen **21**

2.1 Die Wegner-Abschätzung 21
2.2 Die Anfangslängenabschätzung 24
2.3 Die geometrische Resolventenungleichung 25
2.4 Combes-Thomas-Abschätzungen 31
2.5 Existenz verallgemeinerter Eigenfunktionen 36

3 Lokalisierung **41**

3.1 Zur Beweisstruktur 41
3.2 Die Multiskalenanalyse 43
3.3 Anderson-Lokalisierung 57
3.4 Dynamische Lokalisierung 62
3.5 Mögliche Verallgemeinerungen 70

4 Lineare Wegner-Abschätzungen auf Quantengraphen **73**

4.1 Das allgemeinere Modell und die Vorstellung des Ergebnisses . . . 74
4.2 Randbedingungswechsel als Störungen endlichen Rangs 76
4.3 Das Problem des kleinen Trägers 78
4.4 Beweis der Wegner-Abschätzung 81
4.5 Konsequenz für die integrierte Zustandsdichte 84

5 Einordnung in die laufende Forschung **87**

5.1 Bisherige Arbeiten 87
5.2 Offene Probleme 90

6 Mathematische Hintergrundinformationen **93**
6.1 CW-Komplexe und Topologie 93
6.2 Einige Beziehungen in Sobolev-Räumen 95
6.3 Kriterien für Ultrakontraktivität 98
6.4 Ein weiterer Zugang zur Ultrakontraktivität der Halbgruppe . . . 99
6.5 Eine Faktorisierungsaussage aus dem Bereich der Operatorideale . 100
6.6 Zum Min-max-Prinzip 100
6.7 Etwas Störungstheorie 101
6.8 Zum Lemma von Gronwall 103
6.9 Elementarstochastische Hilfsmittel 104

Vorwort

Seit nunmehr etwa 20 Jahren hat sich in der mathematischen Forschung die Behandlung des Phänomens der Lokalisierung etabliert. Es gibt mittlerweile eine Vielzahl diskreter und stetiger zufälliger Festkörpermodelle, in denen Lokalisierung, d. h. reines Punktspektrum des Schrödingeroperators in gewissen Energiebereichen mit exponentiell abfallenden Eigenfunktionen bewiesen ist. Auf der anderen Seite ist die mathematische Behandlung von Quantengraphen als geometrische Grenzobjekte dünner Drahtnetzwerke in den letzten Jahren stark ins Interesse gerückt.

Die vorliegende Dissertation ist neben [ASW05] und [HP06] eine der ersten Arbeiten, in der beide Zweige zusammenfinden. Dabei wird die für verschiedene $L_2(\mathbb{R}^d)$- und $l_2(\mathbb{Z}^d)$-Modelle entwickelte Technik der Multiskalenanalyse auf einem $\mathbb{Z}^d$-Gittergraphen mit zufälligem Potential auf den Kanten implementiert.

In Kapitel 1 wird zunächst der mathematisch-physikalische Hintergrund kurz dargestellt, dann ein allgemeines Konzept des metrischen Graphen mit zugehörigem Schrödingeroperator ("Quantengraph") eingeführt, das zu untersuchende Modell spezifiziert und das Vorhandensein eines deterministischen Spektrums dargelegt.

In Kapitel 2 findet der Leser die notwendigen Werkzeuge für den Multiskalenbeweis. Es sind dort Aussagen über Eigenwerte wie Anfangslängen- und Wegnerabschätzung (letztere quadratisch im Volumen) sowie Combes-Thomas-Abschätzungen für Operatorrestriktionen auf Würfel zu finden. Es wird eine geometrische Resolventenungleichung bewiesen, die Resolventen von Operatorrestriktionen auf ineinandergeschachtelte Würfel zueinander in Beziehung setzt. Ein Abschnitt über die Existenz polynomiell beschränkter verallgemeinerter Eigenfunktionen liefert die Voraussetzungen für die Weiterführung des Lokalisierungsbeweises nach erfolgter Multiskaleninduktion.

Kapitel 3 enthält das Herzstück des Beweises: die Multiskalenanalyse. Es wird exponentielles Abfallen der lokalen Resolventen auf immer größer werdenden Längenskalen gezeigt. Als Konsequenz wird anschließend Anderson- und dynamische Lokalisierung geschlussfolgert.

In Kapitel 4 findet der Leser den Beweis einer linearen Wegner-Abschätzung

für ein wesentlich allgemeineres Quantengraphen-Modell. Die Linearität im Volumen ist dabei für das Lokalisierungsergebnis von geringerer Bedeutung, bedingt aber im Falle des Gittergraphen die Stetigkeit der integrierten Zustandsdichte.

Kapitel 5 enthält Informationen zu Literatur und Forschungsstand. Das Kapitel 6 soll mit einigen Hintergrundinformationen zu verschiedensten mathematischen Gebieten die Arbeit abrunden und in sich abschließen.

Die Hauptergebnisse der Arbeit wurden bereits als Preprints veröffentlicht. In [EHS06] findet der Leser die (etwas verknappten) Inhalte aus Kapitel 2 sowie die Ergebnisse zur Anderson- und dynamischen Lokalisierung aus Kapitel 3 ohne den hier dargestellten Beweis. Die Ergebnisse aus Kapitel 4 wurden samt Beweis in [HV06] veröffentlicht.

Am Ende meiner Promotionszeit möchte ich mich schließlich bei den Menschen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. An erster Stelle ist dabei natürlich mein Betreuer Peter Stollmann zu nennen, der mir stets für hilfreiche Diskussionen zur Verfügung stand, mir an den richtigen Stellen gute Hinweise gab und mir die für meine Entwicklung notwendigen Freiheiten ließ. Ich möchte mich bei Pavel Exner, Peter Stollmann und Ivan Veselić für die angenehme Zusammenarbeit insbesondere bei den Projekten [EHS06] und [HV06] und bei Daniel Lenz für viele hilfreiche Diskussionen bedanken. Mein Dank gilt auch den weiteren Mitgliedern meiner Arbeitsgruppe und meinen anderen Chemnitzer Arbeitskollegen; ich habe gern mit Euch zusammengearbeitet. Ebenso möchte ich in diesem Zusammenhang der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die zeitweise Förderung meiner Arbeit im Rahmen des Projekts “Diffusion in zufälligen Medien“ danken. Zu guter Letzt möchte ich noch den Menschen in meinem Freundes- und Familienkreis meinen Dank aussprechen, die mich in dieser auch von privaten Problemen nicht ganz freien Zeit unterstützt und mir zum Teil neue und interessante Perspektiven aufgezeigt haben.

Chemnitz/Dresden im Mai 2007.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Physikalische und mathematische Motivation

In den letzten 10 Jahren sind Quantengraphen in der mathematischen Physik mehr und mehr zum "Modethema" avanciert. Das Thema Lokalisierung taucht seit Mitte der 80-er Jahre des letzten Jahrhunderts mit konstanter Regelmäßigkeit in der mathematischen Fachliteratur auf. Die vorliegende Arbeit verbindet Elemente beider Forschungszweige, und so ist es naheliegend, sich zum Anfang die Frage nach der Herkunft dieser Themen zu stellen. Da die Lokalisierungsforschung mit den Pionierarbeiten von Anderson, Mott und Twose ([An58, MT61]) der deutlich ältere Zweig ist, soll mit diesem begonnen werden.

Es ist eine seit langem physikalisch erforschte Tatsache, dass sich in reinen kristallinen Festkörpern/Metallen sogenannte Leitungsbänder ausbilden. Dies bedeutet, dass die im Festkörper enthaltenen (Leitungs-)elektronen allesamt Energien in bestimmten zulässigen Intervallen besitzen und sich relativ ungehindert durch den Festkörper hindurchbewegen können. Man spricht von ungebundenen bzw. Streuzuständen. Bringt man nun in gewisser Regelmäßigkeit zufällige Störungen in den Kristall ein - sei es durch Einbau von Fremdatomen ("Dotieren") oder durch zusätzliche zufällige Verschiebung der Rumpfatome/-ionen ("Displacements") - so ändert sich die Situation in der Nähe der Bandkanten/-ränder grundlegend. Anstatt weiter an Leitungsprozessen teilzunehmen, werden die Elektronen mit Energien nahe den Bandkanten scheinbar an den Verunreinigungen zurückgeworfen und können gewisse beschränkte räumliche Bereiche nicht verlassen. Es bilden sich sogenannte gebundene Zustände aus, vergleichbar z. B. mit den Hüllenelektronen des Wasserstoffatoms. Dieses Phänomen bezeichnet man als Lokalisierung; es ist von zentraler Bedeutung für die Halbleiterphysik.

Mathematisch gesehen spiegelt sich dieses Verhalten in den spektralen Eigenschaften des modellierenden Schrödingeroperators $-\Delta + V$ auf $L_2(\mathbb{R}^d)$ wider. Dabei werden die Festkörperstrukturen üblicherweise über den Potentialterm

beschrieben; das Modell vernachlässigt dabei die Wechselwirkung zwischen verschiedenen Elektronen ("Einelektronennäherung"). Den gebundenen Zuständen entsprechen die Eigenwerte des Operators; sein absolutstetiges Spektrum koinzidiert mit den Streuzuständen. Mathematisch versteht man unter (Anderson-) Lokalisierung also das Vorhandensein reinen Punktspektrums in der Nähe der Bandkanten (mit exponentiellem Abfallen der zugehörigen Eigenfunktionen). Als Beweistechniken stehen im wesentlichen zwei Methoden zur Verfügung: die Multiskalenanalyse und die Fractional-Moments-Methode. Wir werden uns an die erstere halten.

Es stellt sich nun die Frage, was das ganze Problem mit Graphen zu tun hat; um dies zu beantworten gehen wir zum zweiten Forschungszweig über. Im Rahmen der fortschreitenden Miniaturisierung in verschiedenen technischen Bereichen, vor allem in der Halbleiterindustrie, ist man mittlerweile in Größenordnungen angekommen, die mit der von Atomdurchmessern vergleichbar sind. So liegen die Abmessungen der mit den heute gängigen 65- bzw. 45 nm-Techniken hergestellten Halbleiterstrukturen auf Mikrochips deutlich unter 100 nm ([BSI07]). Aus diesem Grund wird es bei der Modellierung von Leitungsprozessen in sehr dünnen Leitern ("Quantendrähten") notwendig, quantenmechanische Effekte zu berücksichtigen. Mathematisch wird man dazu Schrödingeroperatoren auf dünnen Gebieten/Mannigfaltigkeiten betrachten, welche die Drähte modellieren. Dies ist aufgrund der komplizierten Geometrie aber nicht leicht. Daher versucht man die quasieindimensionale Struktur solcher Drahtnetzwerke auszunutzen und zu geometrischen Grenzobjekten überzugehen, d. h. den Drahtdurchmesser gegen Null gehen zu lassen. Dabei entsteht eine Graphenstruktur mit geeigneter Metrisierung (vgl. Abb. 1.1).

Es zeigt sich, dass zumindest im Falle von Neumann-Randbedingungen auf den

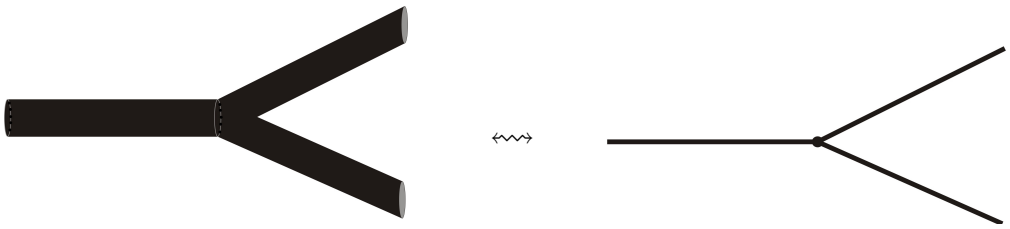


Abbildung 1.1: Zur Auffassung von Graphen als geometrische Grenzobjekte dünner Drahtnetzwerke.

drahtähnlichen Gebieten die Spektren gegen das Spektrum eines Grenzoperators konvergieren (vgl. z. B. [KZ01, EP05, Po06]). Es handelt sich um einen Schrödingeroperator auf dem entstandenen Graphen mit sogenannten freien (Kirchhoff-

/Neumann-) Randbedingungen in den Knoten. Diese realisieren das klassische Prinzip, dass Zu- und Abfluss in einem jeden Knoten gleich sein müssen. Genau diese Operatoren sollen in der vorliegenden Arbeit untersucht werden. Es muss erwähnt werden, dass es bis heute leider nicht gelungen ist, den für Leitungsprozesse wichtigen Fall von Dirichlet-Randbedingungen auf den anfänglichen Gebieten zu lösen, d. h. Konvergenz der Spektren zu zeigen.

Neben Leitungsprozessen auf dünnen Drähten entstehen Quantengraphen im weiteren auch als Grenzfall bei der Modellierung von Elektronenbewegung in dünnen Molekülketten, bei der Untersuchung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in dünnen Strukturen und bei einer Reihe physikalischer Probleme mehr (siehe z. B. [Ku02]).

Durch Zusammensetzen der angesprochenen Probleme ergibt sich damit die physikalisch-mathematische Motivation für die vorliegende Arbeit. Physikalisch geht es um die Modellierung von Leitungsvorgängen in dünnen regelmäßigen Halbleiterstrukturen, mathematisch um die Übertragung von bekannten Sätzen und Beweistechniken zur Lokalisierung bei $L_2(\mathbb{R}^d)$-Schrödingeroperatoren auf Quantengraphen. Die Verwendung der Multiskalentechnik auf Graphen ist dabei neu; die Literatur zur Lokalisierung auf Graphen ist ohnehin sehr begrenzt. An mathematischen Veröffentlichungen ist dem Autor lediglich die Arbeit [HP06] bekannt, wo Anderson-Lokalisierung auf radialähnlichen Graphen mit Baumstruktur bewiesen wird. Die Autoren dieser Arbeit bearbeiten dabei Modelle mit zufälligen Kantenlängen bzw. zufälliger δ-Kopplung in den Knoten und verwenden eine von der vorliegenden Dissertation bzw. [EHS06] verschiedene Beweistechnik.

1.2 Über das Konzept des Quantengraphen

Wie bereits angedeutet geht es in der vorliegenden Arbeit um Schrödingeroperatoren auf Graphen. Dabei können diese Graphen als Grenzobjekte von Netzwerken dünner drahtähnlicher Strukturen aufgefasst werden. Um diesen Übergang sinnvoll zu realisieren, reicht es nicht aus, Graphen lediglich als Menge von Punkten und Kanten mit einer Verbindungsvorschrift aufzufassen. Es ist weiterhin notwendig, den Graphen in geeigneter Weise zu metrisieren und als topologischen Raum aufzufassen. Auf dieser Grundlage lassen sich dann geeignete selbstadjungierte (Schrödinger-)Operatoren definieren. Zumindest für das im Hauptteil der Arbeit betrachtete Modell des $\mathbb{Z}^d$-Gittergraphen ist diese Konstruktion eher der Vollständigkeit halber abzuhandeln. In diesem Falle steht eine Einbettung in $\mathbb{R}^d$ zur Verfügung, wodurch bereits intuitiv klar wird, wie die Struktur aufzufassen ist.

Es sei erwähnt, dass der Begriff des Quantengraphen in der Literatur nicht einheitlich gebraucht wird ([Sch06]). Zum Teil versteht man darunter den metrischen

Graphen, zum Teil die Kombination aus metrischem Graphen und Schrödingeroperator. In unserer Arbeit ist die quantenmechanische Herkunft des Begriffs betonenswert, daher soll die zweite Variante verwendet werden.

In diesem Abschnitt soll vorgestellt werden, wie man Graphen geeignet metrisieren und topologisieren kann. Am Beispiel des freien negativen Laplaceoperators (Schrödingeroperator ohne Potential) mit verschiedenen Randwerten wollen wir uns mit der Konstruktion von Schrödingeroperatoren auf metrischen Graphen vertraut machen. Sämtliche Konstruktionen in dieser Arbeit sollen in diesem Sinne verstanden werden. Als Referenzen werden dabei [Ku04], [KS99] und [Sch06] verwendet. Wir beginnen mit der Definition des metrischen Graphen.

1.1 Definition (metrischer Graph) *Seien V und E abzählbare Mengen und $\mathcal{G}$ eine Abbildung*

$$\mathcal{G}: E \to V \times V \times (0,\infty), \qquad e \mapsto (\iota(e), \tau(e), l_e).$$

Dann nennen wir das Tripel $\Gamma = (V, E, \mathcal{G})$ metrischer Graph sowie die Elemente von $V = V(\Gamma)$ und $E = E(\Gamma)$ Knoten bzw. Kanten. Zu gegebener Kante $e \in E$ nennen wir die Knoten $\iota(e)$ und $\tau(e)$ den Anfangs- bzw. Endpunkt von e. Die Größe l_e heißt Länge der Kante e.

Die Anzahl mit einem Knoten v im Sinne von $\mathcal{G}$ inzidierender Kanten wird als (Knoten-)Grad von v bezeichnet und mit $\deg(v)$ abgekürzt. Knoten mit $\deg(v) \leq 1$ heißen Randknoten, alle anderen innere Knoten von Γ.

Wir betrachten im weiteren den Graphen $\Gamma = (V, E, \mathcal{G})$ als eindimensionalen CW-Komplex, welchen wir der Einfachheit halber wieder mit Γ bezeichnen. Das 0-Skelett von Γ ist V; die Menge der eindimensionalen Zellen ist durch E gegeben. Jede eindimensionale Zelle $e \in E$ ist dabei entweder mit einer oder zwei nulldimensionalen Zellen aus V verbunden; diese sind genau die Endpunkte $\iota(e)$ und $\tau(e)$. Damit ist eine topologische Struktur auf Γ definiert. Eine alternative Herangehensweise findet der Leser in [Sch06]. Ein kurzer Abriss der Grundlagen über CW-Komplexe und Topologien ist in Kapitel 6.1 zu finden.

Wir identifizieren im folgenden jede Kante e mit dem offenen Intervall $(0, l_e)$, wobei 0 und l_e mit den Endknoten $\iota(e)$ bzw. $\tau(e)$ korrespondieren. Um Probleme bei der Metrisierung zu vermeiden, treffen wir zwei Annahmen, die für die ganze Arbeit Gültigkeit haben sollen:

- Es mögen Konstanten $0 < l_-, l_+ < \infty$ existieren, so dass für alle $e \in E$ gilt:

$$0 < l_- \leq l_e \leq l_+ < \infty.$$

- Der Knotengrad sei für alle Knoten endlich.

Die zweite Voraussetzung ist hier keine echte Einschränkung: für die Lokalisierung betrachten wir $\mathbb{Z}^d$-Gittergraphen mit $\deg(v) \leq 2d$ und für die linearen Wegner-Abschätzungen endliche Kantenmengen. Die erste Voraussetzung ist dagegen an mehreren Stellen notwendig, im Fall des $\mathbb{Z}^d$-Gittergraphen natürlich auch automatisch erfüllt.

Die Identifikation von Kanten mit offenen Intervallen erlaubt uns, in natürlicher Art und Weise die Länge eines Wegs zwischen zwei Punkten im topologischen Raum Γ zu definieren. Durch das Infimum der Längen aller Wege zwischen zwei Punkten in Γ ist eine Metrik $d : \Gamma \times \Gamma \to [0, \infty)$ gegeben. Gesichert wird das durch die oben getroffenen Annahmen und zwar bereits durch jede einzelne für sich, siehe [Sch06], S. 19 f. Damit entsteht ein metrischer Raum (Γ, d).

Wir fahren fort mit der Konstruktion geeigneter Hilberträume. Wie in der Quantenmechanik üblich werden unsere (abstrahierten "eindimensionalen") Elektronen durch Wellenfunktionen auf Γ beschrieben, deren Quadrat sich als Ortsauffindungswahrscheinlichkeitsdichte interpretieren lässt. Damit sind L_2-Räume bei der Modellierung die erste Wahl. Wir definieren als zugrundeliegende Hilberträume (vgl. [Ku04, Sch06])

$$L_2(\Gamma) := \oplus_{e \in E(\Gamma)} L_2(0, l_e)$$

sowie die Sobolevräume erster Ordnung

$$\begin{aligned} W_2^1(\Gamma) \;:=\; & \{ f \in \oplus_{e \in E} W_2^1(0, l_e) \,|\, f \text{ stetig an allen Knoten } v \in V, \\ & \|f\|^2_{W_2^1(\Gamma)} := \sum_{e \in E(\Gamma)} \|f_e\|^2_{W_2^1(0,l_e)} < \infty \} \end{aligned}$$

und zweiter Ordnung

$$W_2^2(\Gamma) := \oplus_{e \in E} W_2^2(0, l_e) \quad \text{mit} \quad \|f\|^2_{W_2^2(\Gamma)} := \sum_{e \in E(\Gamma)} \|f_e\|^2_{W_2^2(0,l_e)}.$$

Dabei bezeichnet f_e jeweils die Einschränkung einer Funktion $f \in L_2(\Gamma)$ auf die Kante e.

Will man nun Laplaceoperatoren definieren, so kann man dies direkt tun oder assoziierte quadratische Formen benutzen. Letzteres hat u. a. den Vorteil, dass man die Randbedingungen in die Formdefinitionsbereiche einarbeiten kann. Von solchen Randbedingungen gibt es hier eine ganze Menge, da die Funktionen an allen Knoten geeignet zusammengeklebt werden müssen. Wie das geschehen kann, damit der Operator selbstadjungiert wird, kann man z. B. in [KS99], [KS00], [Ku04] und [Sch06] nachlesen. Wir wollen hier zwei Beispiele angegeben im Wissen, dass es wesentlich mehr Möglichkeiten gibt.

δ-Kopplung. Betrachtet wird der Operator $-\Delta : D(-\Delta) \to L_2(\Gamma)$ gemäß

$$\begin{aligned} D(-\Delta) &:= \{f \in W_2^2(\Gamma) : f \text{ stetig auf } \Gamma, \\ &\qquad \sum_{\iota(e)=v} f_e'(0) - \sum_{\tau(e)=v} f_e'(l_e) = \alpha_v f(v)\}, \qquad (1.1) \\ f_e &\mapsto -f_e'' \quad (\forall e \in E). \end{aligned}$$

Dabei sind $\alpha_v \, (v \in V)$ feste reelle Zahlen. Die Bezeichnung $f(v)$ ist durch die Stetigkeitsforderung gerechtfertigt. Im Spezialfall

$$\alpha_v = 0 \qquad (\forall v \in V)$$

spricht man von freien (Kirchhoff-/Neumann-) Randbedingungen. Die freien Randbedingungen sind die quantenmechanische Entsprechung zum klassischen Prinzip "was in den Knoten hineinfließt muss auch wieder herausfließen" und damit der wichtigste Fall. Auch wir werden vor allem freie Randbedingungen verwenden.

δ'-Kopplung. Betrachtet wird der Operator $-\Delta : D(-\Delta) \to L_2(\Gamma)$ gemäß

$$\begin{aligned} D(-\Delta) &:= \{f \in W_2^2(\Gamma) : \text{ für alle } v \in V \text{ sind die} \\ &\qquad \text{ausgehenden Ableitungen in } v \text{ gleich und} \\ &\qquad \sum_{\iota(e)=v} f_e(0) + \sum_{\tau(e)=v} f_e(l_e) = \alpha_v f'(v)\}, \\ f_e &\mapsto -f_e'' \quad (\forall e \in E). \end{aligned}$$

Dabei sind wieder $\alpha_v \, (v \in V)$ feste reelle Zahlen, und die Bezeichnung $f'(v)$ ist aufgrund der Konstruktion wohldefiniert. Unter der ausgehenden Ableitung in v verstehen wir $f_e'(0)$ falls $v = \iota(e)$ und $-f_e'(l_e)$ falls $v = \tau(e)$.

In beiden Fällen sollen dabei die Werte von f_e und f_e' in 0 und l_e als entsprechende Limiten verstanden werden. Deren Existenz ist wegen $f_e \in W_2^2(0, l_e)$ über die Sobolevschen Einbettungssätze gesichert (siehe [AdF03] oder Satz 6.9).

Wie schon erwähnt wollen wir unsere Operatoren über die zugehörigen quadratischen Formen definieren. Wie das allgemein geschehen kann, ist ausführlich in [Sch06] nachzulesen. Hier soll als Beispiel nur die zu den freien Randbedingungen gehörige Form vorgestellt werden. Sie lautet

$$D(\mathfrak{h}_0) = W_2^1(\Gamma), \qquad \mathfrak{h}_0(f, g) = (f' \,|\, g')_{L_2(\Gamma)},$$

wobei die Ableitungen komponentenweise zu lesen sind. Wie man sieht ist die Formdarstellung gerade in diesem Fall wesentlich handlicher als die Operatorversion. Für den vollständigen Nachweis, dass $\mathfrak{h}_0$ gute Eigenschaften hat, und der

negative Laplaceoperator mit freien Randbedingungen tatsächlich dazugehört, sei auf [Sch06] verwiesen. Wir wollen uns in einer Rechnung lediglich plausibel machen, dass nur freie Randbedingungen für den assoziierten selbstadjungierten Operator H_0 in Frage kommen.

Zunächst können wir zu gegebener Kante e und gegebenem $f \in D(H_0)$ die Testfunktionen $\tilde{g} \in D(\mathfrak{h}_0)$ so wählen, dass $\operatorname{spt} \tilde{g} \subset e$ und $\tilde{g}_e \in C_c^\infty(0, l_e)$ gilt. Damit ist das Problem auf $L_2(0, l_e)$ reduziert, und man erhält bekanntermaßen

$$f_e \in W_2^2(0, l_e), \qquad (H_0 f)_e = -f_e''.$$

Nun wählen wir zu gegebenem Knoten $v \in V$ eine Funktion $g \in D(\mathfrak{h}_0)$, so dass $\operatorname{spt} g$ zusammenhängend ist und $\operatorname{spt} g \cap V = \{v\}$, d. h. g "lebt" in der Nähe des Knotens v. Dann gilt mit partieller Integration für alle $f \in D(H_0)$:

$$\begin{aligned}
(-f'' \,|\, g) &= (H_0 f \,|\, g) \\
&= \mathfrak{h}_0(f, g) \\
&= \sum_{e \in E} (f_e' \,|\, g_e')_{L_2(0,l_e)} \\
&= \sum_{e \in E:\, v \in \{\iota(e), \tau(e)\}} \int_0^{l_e} f_e'(x)\, g_e'(x)\, dx \\
&= -\sum_{e \in E:\, v \in \{\iota(e), \tau(e)\}} \int_0^{l_e} f_e''(x)\, g_e(x)\, dx \\
&\quad + \sum_{e \in E:\, v = \tau(e)} f_e'(l_e) g(v) - \sum_{e \in E:\, v = \iota(e)} f_e'(0) g(v) \\
&= (-f'' \,|\, g) + \underbrace{\sum_{e \in E:\, v = \tau(e)} f_e'(l_e) g(v) - \sum_{e \in E:\, v = \iota(e)} f_e'(0) g(v)}_{(*)},
\end{aligned}$$

d. h. der Randterm $(*)$ verschwindet. Dies gibt nach Division durch $g(v)$ gerade freie Randbedingungen.

1.3 Das Modell

Im Hauptteil der Arbeit wollen wir zufällige Schrödingeroperatoren auf einem in natürlicher Weise in $\mathbb{R}^d$ eingebetteten kubischen Gittergraphen betrachten. Im vorliegenden Abschnitt soll das Modell vorgestellt sowie die entsprechende Notation eingeführt werden.

Sei Γ der Graph mit Knotenmenge $V = V(\Gamma) = \mathbb{Z}^d$ und Kantenmenge $E = E(\Gamma)$, so dass alle Punkte aus V mit euklidischem Abstand 1 verbunden

seien ("kubisches Gitter"). Auf den Kanten ist durch steigende Werte genau einer Koordinate des $\mathbb{R}^d$ jeweils eine Richtung gegeben. Wir identifizieren jede Kante in diesem Sinne mit dem Intervall $(0,1)$.

Die Einbettung unseres Graphen in $\mathbb{R}^d$ erlaubt uns, Subgraphen über geeignete Gebiete des $\mathbb{R}^d$ zu definieren. Präzise gemacht wird dies mit folgender Definition:

1.2 Definition *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit stückweise glattem Rand heißt $\Gamma-$kantenberandet, wenn $\partial\Omega$ aus endlich vielen Stücken von Hyperebenen mit Normalen parallel zu den Koordinatenrichtungen besteht, sowie für jede Kante $e \in \Gamma$ (ohne die Endpunkte) entweder $e \subset \partial\Omega$ oder $e \cap \partial\Omega = \emptyset$ gilt. Der Graph $\Gamma \cap \Omega$ entstehe aus Γ durch Löschen aller Kanten in $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Seine Kanten- bzw. Knotenmenge soll mit $E(\Gamma \cap \Omega)$ bzw. $V(\Gamma \cap \Omega)$ bezeichnet werden.*

Der unserem System zugrundeliegende Hilbertraum sei $L_2(\Gamma) := \oplus_{e\in E(\Gamma)} L_2(0,1)$ mit dem Skalarprodukt $(f \,|\, g) := \sum_{e\in E(\Gamma)} (f_e \,|\, g_e)$. Bei der Wahl der Definitionsbereiche wird ferner der Sobolevraum erster Ordnung eine Rolle spielen, der mittels

$$\begin{aligned} W_2^1(\Gamma) \;:=\; & \{f \in \oplus_{e\in E} W_2^1(0,1) \,|\, f \text{ stetig an allen Knoten } v \in V, \\ & \|f\|^2_{W_2^1(\Gamma)} := \sum_{e\in E(\Gamma)} \|f_e\|^2_{W_2^1(0,1)} < \infty\} \end{aligned}$$

definiert wurde (vgl. Abschnitt 1.2).

Wir fahren fort mit der Konstruktion eines zufälligen Potentials auf Γ und betrachten das folgende Modell:

- Sei μ ein hölderstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$; es existiere also ein $\alpha > 0$, so dass

  $$\sup\{\mu[\alpha,\beta]; 0 \le \beta - \alpha \le \varepsilon\} \le \varepsilon^\alpha \qquad \text{für alle } \varepsilon \in [0,1].$$

  Dabei sei spt $\mu = [q_-, q_+]$ mit $q_- \ge 0$.

  Außerdem erfülle μ eine Unordnungsvoraussetzung, d. h. es existiere ein $\tau > \frac{d}{2}$, so dass für hinreichend kleine h gilt:

  $$\mu([q_-, q_- + h]) \le h^\tau. \tag{1.2}$$

  Weiterhin sei $\Omega := [q_-, q_+]^E$. Durch $\mathbb{P} := \bigotimes_{e\in E} \mu$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω gegeben. Wir definieren für jedes $e \in E$ die Abbildung

  $$q_e : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad q_e(\omega) := \omega_e.$$

  Die q_e, $e \in E$, heißen Kopplungskonstanten; μ heißt Einzelplatzmaß.

- Zu jedem $\omega \in \Omega$ definieren wir das Potential
$$V_\omega(x) := \sum_{e \in E} q_e(\omega)\chi_e.$$
- Der zu betrachtende zufällige Schrödingeroperator ist der mit der Form
$$\begin{aligned} D(\mathfrak{h}) &= W_2^1(\Gamma), \\ \mathfrak{h}(f,g) &= (f' \,|\, g')_{L_2(\Gamma)} + (V(\omega)f \,|\, g)_{L_2(\Gamma)} \end{aligned} \tag{1.3}$$
assoziierte Operator, wobei Ableitungen und Multiplikationen komponentenweise zu lesen sind.

Der hier definierte Operator überführt eine Funktion f kantenweise in $-f_e'' + V_e(\omega)f_e$ und realisiert freie Randbedingungen auf dem Graphen Γ. Dies bedeutet wieder, dass eine Funktion f aus dem Definitionsbereich des Operators stetig ist (daher ist im folgenden die Bezeichnung $f(v), v \in V$, gerechtfertigt) und an den Knoten die Beziehung
$$\sum_{\iota(e)=v} f_e'(0) - \sum_{\tau(e)=v} f_e'(1) = 0 \tag{1.4}$$
erfüllt (vgl. Abschnitt 1.2). Die hier getroffenen Bezeichnungen sind an gängige Literatur (z.B. [Ca97], [Ku04], [Pa06]) angelehnt.

An vielen Stellen wird es für unsere Arbeit sinnvoll sein, Einschränkungen des oben definierten Operators auf geeignete Subgraphen, speziell auf $\Gamma-$kantenberandete Würfel, zu untersuchen. Einschränkungen auf solche Würfel haben bekanntermaßen eine kompakte Resolvente, so dass das Spektrum lediglich aus Eigenwerten besteht, die sich nur im Unendlichen häufen können. Auch die Operatoreinschränkungen sollen wieder über assoziierte Formen definiert werden. Dabei können verschiedene Randbedingungen an den Randknoten realisiert werden. Im folgenden sei $\Lambda = \Lambda_L(x)$ jeweils ein $\Gamma-$kantenberandeter Würfel mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^d$ und Seitenlänge L sowie Ω ein $\Gamma-$kantenberandetes Gebiet. Die Räume $L_2(\Gamma \cap \Omega)$ und $W_2^1(\Gamma \cap \Omega)$ sollen analog zu obengenannten Räumen definiert werden als
$$\begin{aligned} L_2(\Gamma \cap \Omega) &:= \oplus_{e \in E(\Gamma\cap\Omega)} L_2(0,1), \\ W_2^1(\Gamma \cap \Omega) &:= \{f \in \oplus_{e \in E(\Gamma\cap\Omega)} W_2^1(0,1) \,|\, f \text{ stetig an allen} \\ &\qquad \text{inneren Knoten } v \in V(\Gamma \cap \Omega)\}, \\ W_{2,0}^1(\Gamma \cap \Omega) &:= \overline{C_c^\infty(\Gamma \cap \Omega)}^{W_2^1(\Gamma\cap\Omega)}. \end{aligned}$$
Dabei ist
$$\begin{aligned} C_c^\infty(\Gamma \cap \Omega) &:= \{f \in \oplus_{e \in E(\Gamma\cap\Omega)} C^\infty[0,1] \,|\, f \text{ stetig an allen} \\ &\qquad \text{inneren Knoten } v \in V(\Gamma \cap \Omega),\ \Omega \supset \operatorname{spt} f \text{ kompakt in } \mathbb{R}^d\}. \end{aligned}$$

Unter dem Träger spt f ist der Abschluss der Menge $\{x \in \Gamma \cap \Lambda \,|\, f(x) \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^d$ zu verstehen. Es folgt die Definition der Operatoreinschränkungen.

Neumann-Randbedingungen: H_Λ^N sei der mit der Form

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{h}_\Lambda^N) &= W_2^1(\Gamma \cap \Lambda) \\ \mathfrak{h}_\Lambda^N(f,g) &= (f' \,|\, g')_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} + (V(\omega)f \,|\, g)_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

assoziierte Operator.

Dirichlet-Randbedingungen: H_Λ^D sei der mit der Form

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{h}_\Lambda^D) &= W_{2,0}^1(\Gamma \cap \Lambda), \\ \mathfrak{h}_\Lambda^D(f,g) &= \mathfrak{h}_\Lambda^N(f,g) \end{aligned} \tag{1.6}$$

assoziierte Operator.

Weiterhin gibt es die Möglichkeit, die Kanten unabhängig zu betrachten, den Graphen also zu entkoppeln. Eine Möglichkeit ist im folgenden gegeben.

Neumann-Entkopplung: $H_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}}$ sei der mit der Form

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{h}_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}}) &= \oplus_{e\in E(\Gamma\cap\Lambda)} W_2^1(0,1), \\ \mathfrak{h}_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}}(f,g) &= (f' \,|\, g')_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} + (V(\omega)f \,|\, g)_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

assoziierte Operator.

Für sämtliche Varianten kann man natürlich auch den freien Laplaceoperator in dieser Weise definieren: es handelt sich hierbei um den Spezialfall $V = 0$. Wir wollen die Bezeichnungen $-\Delta_\Gamma$ und $-\Delta_\Lambda^\bullet$, $\bullet \in \{N, D, (\mathrm{N,dec})\}$, verwenden bzw. einfach $-\Delta$, falls der Sinn kontextuell ersichtlich ist.

1.4 Das deterministische Spektrum

Typisch für viele zufällige Operatorfamilien ist, dass das Spektrum eine selbstmittelnde Größe ist, d. h. gar nicht vom Zufall abhängt. Wichtig ist hierbei neben Messbarkeitseigenschaften eine gewisse Stabilität der Familie in unserem Fall gegenüber Gittertranslationen. Präzisiert wird diese Aussage durch folgenden Satz.

1.3 Satz *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $H : \Omega \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$ messbar und ergodisch, $S(\mathcal{H})$ die Menge der selbstadjungierten Operatoren. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}$, so dass*

$$\sigma(H(\omega)) = \Sigma \qquad \textit{für } \mathbb{P}\textit{−fast alle } \omega \in \Omega. \tag{1.8}$$

Entsprechende Aussagen gelten für das absolutstetige Spektrum $\sigma_{ac}(H(\omega))$, das singulärstetige Spektrum $\sigma_{sc}(H(\omega))$ und das reine Punktspektrum $\sigma_{pp}(H(\omega))$ (d. h. den Abschluss der Menge der Eigenwerte).

Beweis: siehe z. B. [CL90] oder [Sto01].

□

Um für unsere Operatoren Messbarkeit und Ergodizität nachweisen zu können zitieren wir zunächst ein weiteres Lemma aus [Sto01]:

1.4 Lemma *Sei $(\mathfrak{h}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ eine Familie dicht definierter abgeschlossener Formen mit Definitionsbereich D unabhängig von ω. Es sei vorausgesetzt, dass Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta, M > 0$ und eine abgeschlossene Form $\mathfrak{k} \geq 1$ mit Definitionsbereich D existieren, so dass*

$$\eta \cdot \mathfrak{k}(u) \leq \mathfrak{h}_\omega(u) + \gamma\|u\|^2 \leq M \cdot \mathfrak{k}(u) \tag{1.9}$$

für alle $u \in D$. Weiter sei für alle $u \in D$ die Funktion $\omega \mapsto \mathfrak{h}_\omega(u)$ messbar.

Dann ist für die assoziierten Operatoren die Funktion $H : \Omega \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$, $\omega \mapsto H_\omega$ messbar.

Beweis: siehe [Sto01], Proposition 1.2.6.

□

Wir wollen die Messbarkeit und Ergodizität unserer Operatorfamilie zumindest skizzenhaft plausibel machen.

Als erstes soll die Bedingung (1.9) nachgerechnet werden. Dazu sei $\mathfrak{k}(u,v) := (u \,|\, v) + (u' \,|\, v')$, $D(\mathfrak{k}) = D(\mathfrak{h}_\omega)$. Dann gilt $\mathfrak{k} \geq 1$ und

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\omega(u) + \|u\|^2 &= \|u'\|^2 + (V_\omega u \,|\, u) + \|u\|^2 \\ &\leq \|u'\|^2 + (1+q_+)\|u\|^2 \\ &\leq (1+q_+)\,\mathfrak{k}(u) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\omega(u) + \|u\|^2 &\geq \|u'\|^2 + (1+q_-)\|u\|^2 \\ &\geq \mathfrak{k}(u). \end{aligned}$$

Für den Nachweis der Ergodizität beachten wir, dass mit einem Potential V_ω auch wieder jedes Translat $V_\omega(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}^d$, zur Potentialfamilie gehört. Wir suchen also nach einer Familie von Abbildungen $T_k : \Omega \to \Omega$, so dass $V_{T_k(\omega)} = V_\omega(\cdot - k)$

gilt. Bezüglich dieser Transformation ist unsere Operatorfamilie ergodisch, wobei die korrespondierenden unitären Operatoren im Hilbertraum $L_2(\Gamma)$ einfache Translationen sind. Seien dazu also für $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} T_k &: \Omega \to \Omega, \qquad T_k(\omega(\cdot)) := \omega(\cdot - k), \\ U_k &: L_2(\Gamma) \to L_2(\Gamma), \qquad U_k f := f(\cdot + k), \end{aligned}$$

dann lässt sich die Kovarianzbedingung folgendermaßen nachrechnen:

$$\begin{aligned} U_k^* H(\omega) U_k f &= U_k^* H(\omega) f(\cdot + k) \\ &= U_k^* (-\Delta f(\cdot + k) + V_\omega(\cdot) f(\cdot + k)) \\ &= -\Delta f(\cdot) + V_\omega(\cdot - k) f(\cdot) \\ &= H_{T_k(\omega)} f. \end{aligned}$$

Dies soll zur Messbarkeit und Ergodizität genug sein; uns soll im weiteren eher interessieren, wie das deterministische Spektrum Σ konkret aussieht.

Dazu soll zunächst der freie Laplaceoperator auf Γ analysiert werden. Eine gängige Methode (vgl. [Ex97, Ca97, Pa06]) ist, einen Bezug zum Spektrum des sogenannten Transitionsoperators auf der Knotenmenge herzustellen. Dieser Operator ist in unserem Falle der geeignet skalierte diskrete Laplaceoperator $-\Delta_d : l_2(\mathbb{Z}^d) \to l_2(\mathbb{Z}^d)$, von dem die spektralen Eigenschaften gut bekannt sind. Er ist gegeben durch die Gleichung

$$\Delta_d f(v) = \sum_{v' \sim v} f(v') \qquad (v \in V(\Gamma) = \mathbb{Z}^d),$$

wobei wir $v' \sim v$ schreiben, falls v und v' durch eine Kante verbunden sind. Es gilt $\sigma(-\Delta_d) = \sigma_c(-\Delta_d) = [-2d, 2d]$ (siehe z. B. [CFKS82]).

In dieser Terminologie lauten die an unseren Fall (kubisches Gitter) angepassten Ergebnisse aus [Ca97] so:

1.5 Satz *Es gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_p(-\Delta_\Gamma) &= \{k^2\pi^2 \,|\, k \in \mathbb{N}\}, \\ \sigma_c(-\Delta_\Gamma) &= \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \setminus \sigma_p(-\Delta_\Gamma) \,|\, \cos\sqrt{\lambda} \in \sigma_c(-\frac{1}{2d}\Delta_d)\} \\ &= [0, \infty) \setminus \{k^2\pi^2 \,|\, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Beweis: siehe [Ca97], Theorem 1 und 2.

□

Damit ist auch klar, wie das deterministische Spektrum Σ aussehen muss:

1.6 Folgerung *Es gilt*

$$\sigma(H(\omega)) = [q_-, \infty) =: \Sigma$$

für fast alle $\omega \in \Omega$.

Zum Beweis dieser Aussage soll ein Ergebnis verwendet werden, welches die Charakterisierung des Spektrums mittels singulärer Folgen in die Formensprache übersetzt.

1.7 Lemma *Sei K ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, $\mathfrak{k}$ die mit K assoziierte Form und $D \subset D(\mathfrak{k})$ dicht bezüglich der Formnorm. Dann sind für $E \in \mathbb{R}$ äquivalent:*

(i) $E \in \sigma(K)$.

(ii) Es gibt eine Folge $(f_n) \subset D$, $\|f_n\| = 1\,(n \in \mathbb{N})$, *so dass*

$$\sup_{g \in D(\mathfrak{k}), \|g\|=1} (\mathfrak{k} - E)(f_n, g) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Beweis: siehe z. B. [Sto01], Lemma 1.4.4, S. 26 f.

□

Beweis (Folgerung 1.6): Seien $E \in [0, \infty)$, $q \in [q_-, q_+]$. Wegen $E \in \sigma(-\Delta_\Gamma)$ existiert nach Lemma 1.7 eine Folge $(f_n) \subset C_c^\infty(\Gamma)$, $\|f_n\| = 1$, so dass

$$|\sup_{g \in D(\mathfrak{h}_0), \|g\|=1} (\mathfrak{h}_0 - E)(f_n, g)| \leq \frac{1}{2n},$$

wobei mit $\mathfrak{h}_0$ die zum freien Laplace gehörige Form gemeint ist. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $l_n \in 2\mathbb{N}$ so groß, dass

$$\text{spt } f_n \subset \Lambda_{l_n}(0).$$

Nun lässt sich mit Wahrscheinlichkeit 1 ein $k_n \in \mathbb{Z}^d$ finden mit

$$q_e(\omega) \in [q - \frac{1}{2n}, q + \frac{1}{2n}] \qquad (\forall e \in E(\Gamma \cap \Lambda_{l_n}(k_n))).$$

Da $\sup_{g \in D(\mathfrak{h}_0), \|g\|=1} (\mathfrak{h}_0 - E)(f_n(\cdot - k), g)$ von $k \in \mathbb{Z}^d$ unabhängig ist, gilt

$$|\sup_{g\in D(\mathfrak{h}),\|g\|=1}(\mathfrak{h}-E-q)(f_n(\cdot-k_n),g)|\leq\ldots$$

$$\begin{aligned}
\ldots &\leq |\sup_{g\in D(\mathfrak{h}_0),\|g\|=1}(\mathfrak{h}_0-E)(f_n,g)|+|\sup_{g\in D(\mathfrak{h}),\|g\|=1}((V_\omega-q)f_n(\cdot-k_n)\,|\,g)| \\
&\leq \frac{1}{2n}+\sup_{g\in D(\mathfrak{h}_0),\|g\|=1}\sup_{x\in\Lambda_{l_n}(k_n)\cap\Gamma}|V_\omega(x)-q|\underbrace{\|f_n\|\|g\|}_{=1} \\
&\leq \frac{1}{n} \\
&\to 0 \qquad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

Also ist $E+q\in\sigma(H_\omega)$. Mit $E\in[0,\infty)$ und $q\in[q_-,q_+]$ beliebig folgt die Behauptung.

□

Kapitel 2

Vorbereitende Abschätzungen

2.1 Die Wegner-Abschätzung

Inhalt der Wegner-Abschätzung ist eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, einen Eigenwert eines unserer Würfeloperatoren in einem festen Energieintervall anzutreffen. Insbesondere soll diese Wahrscheinlichkeit über das Würfelvolumen quantisiert werden. Dabei ist intuitiv klar, dass bei größer werdendem Volumen auch die Schranke größer werden muss. Wir folgen im wesentlichen der Argumentationslinie von [Sto01]. Das Ergebnis liest sich folgendermaßen:

2.1 Satz (Wegner-Abschätzung) *Zu jedem $R > 0$ existiert eine Konstante C_R, so dass für alle $\Gamma-$kantenberandeten Würfel $\Lambda = \Lambda_l(i)$, $i \in \mathbb{Z}^d$, $\bullet \in \{N, D\}$ und alle Intervalle $I \subset (-R, R)$ mit Länge $|I|$ die folgende Abschätzung gilt:*

$$\mathbb{P}\{\sigma(H_\Lambda^\bullet(\omega)) \cap I \neq \emptyset\} \leq C_R \cdot |\Lambda|^2 \cdot |I|^\alpha. \tag{2.1}$$

Dabei bezeichnet $H_\Lambda^\bullet(\omega)$ die Realisierung unseres Modelloperators auf $L_2(\Gamma \cap \Lambda)$ mit entsprechenden Randbedingungen.

Der Beweis dieses fundamentalen Satzes soll mit dem Zitat folgenden Lemmas vorbereitet werden. Es handelt sich dabei um eine Kombination von [Sto01], Lemma 2.3.1 mit Teilen des Beweises des dortigen Theorems 2.3.2. Bemerkenswert ist, mit welch elementaren Argumenten man im Beweis auskommt.

2.2 Lemma *Seien J eine endliche Indexmenge, μ ein hölderstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Hölder-Exponent α, $\mu^J := \bigotimes_{i \in J} \mu$ das Produktmaß auf $\mathbb{R}^J$. Sei $\Phi : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$ eine monotone*[1] *Funktion, zu der Konstanten $\delta, a > 0$*

[1] Monotonie für derartige Funktionen ist hierbei komponentenweise definiert, d. h. für $q, q' \in \mathbb{R}^J$ mit $q_i \leq q_i'$ für alle $i \in J$ folgt $\Phi(q) \leq \Phi(q')$.

existieren, so dass für alle $t \in [0, \delta]$, $q \in \mathbb{R}^J$ *die Beziehung*

$$\Phi(q + t(1, \ldots, 1)) - \Phi(q) \geq t \cdot a \tag{2.2}$$

erfüllt ist. Dann gilt für jedes offene Intervall I *mit Länge kleiner als* $\varepsilon \leq a\delta$ *die Abschätzung*

$$\mu^J(\{q : \Phi(q) \in I\}) \leq |J| \cdot (\frac{\varepsilon}{a})^\alpha. \tag{2.3}$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $J = \{1, \ldots, N\}$. Sei $I = (d, e)$ mit $e - d < \varepsilon$ und

$$A := \{q : \Phi(q) \leq d\}.$$

Die Kombination der Monotonie von Φ mit der Wachstumsvoraussetzung (2.2) liefert

$$\{q : \Phi(q) \in I\} \subset (A + [0, \frac{\varepsilon}{a}]^N) \backslash A, \tag{2.4}$$

so dass das Maß auf der linken Seite von (2.3) durch das der Menge auf der rechten Seite von (2.4) abgeschätzt werden kann. Um dies zu realisieren, führen wir folgende Konstruktion durch:

$$A_0 := A, \qquad A_i := A + \sum_{j=1}^{i} [0, \frac{\varepsilon}{a}]\, e_j \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Dabei bezeichnen e_j $(j = 1, \ldots, N)$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^N$. Es gilt weiterhin

$$\mu^N((A + [0, \frac{\varepsilon}{a}]^N) \backslash A) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i \backslash A_{i-1}),$$

so dass es wiederum ausreicht, die rechte Seite der letzten Ungleichung abzuschätzen. Dazu stellen wir fest, dass für $i \in \{1, \ldots, N\}$ und fixierte q_j, $j = 1, \ldots, N$, $j \neq i$ die Menge

$$\{q_i \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{N} q_j e_j \in A_i \backslash A_{i-1}\}$$

ein Intervall der Länge $\frac{\varepsilon}{a}$ ist. In Verbindung mit den Voraussetzungen an μ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \mu^N(A_i \backslash A_{i-1}) &= \int \ldots \int (\int \chi_{A_i \backslash A_{i-1}}(q) d\mu(q_i)) d\mu(q_1) \ldots d\mu(q_N) \\ &\leq \sup\{\mu[s,t];\, 0 \leq t - s \leq \frac{\varepsilon}{a}\} \\ &\leq (\frac{\varepsilon}{a})^\alpha. \end{aligned}$$

□

Beweis (Satz 2.1): Wir beginnen mit einer Abschätzung der Anzahl der Eigenwerte unterhalb der Energie R.

Dazu soll zunächst der freie Laplace mit Neumann-Entkopplung behandelt werden (dieser hat den größten Definitionsbereich). Die Eigenwerte des negativen freien Neumann-Laplaceoperators auf $L_2(0,1)$ lassen sich leicht explizit berechnen gemäß $\frac{\pi^2}{4}n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, (vgl. z. B. [RS4]) und besitzen allesamt die Vielfachheit Eins. Das Spektrum von $-\Delta_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}}$ besteht also aus denselben Eigenwerten, jedoch jetzt mit Vielfachheit $\sharp\{E(\Gamma \cap \Lambda)\}$. Wegen

$$\sharp\{E(\Gamma \cap \Lambda)\} \leq d \cdot l^d = d|\Lambda|$$

existiert eine Konstante $\tilde{C}_R$, so dass für den n-ten (entsprechend der Vielfachheit gezählten) Eigenwert gilt:

$$E_n(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}}) > R \qquad \text{für } n > \tilde{C}_R|\Lambda|. \tag{2.5}$$

Für $\bullet \in \{N, D\}$ ist nun wegen der gültigen Inklusionen bei den Formdefinitionsbereichen

$$H_\Lambda^\bullet(\omega) \geq (-\Delta + q_-)_\Lambda^\bullet \geq (-\Delta + q_-)_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}} \geq -\Delta_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}}$$

und damit

$$E_n(H_\Lambda^\bullet(\omega)) \geq E_n(-\Delta_\Lambda^{\mathrm{N,\,dec}}) > R \qquad \text{für } n > \tilde{C}_R|\Lambda|$$

bzw.

$$\mathbb{P}\{\sigma(H_\Lambda^\bullet(\omega)) \cap I \neq \emptyset\} \leq \sum_{n \leq \tilde{C}_R \cdot |\Lambda|} \mathbb{P}\{E_n(H_\Lambda^\bullet(\omega)) \in I\}. \tag{2.6}$$

Im weiteren sollen die Summanden auf der rechten Seite mittels Lemma 2.2 abgeschätzt werden. Als monotone Funktion soll hierbei der n-te Eigenwert in Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten betrachtet werden.

Wir fixieren dazu eine der Randbedingungen N bzw. D und verzichten auf deren Notation.

Da der Würfeloperator nur von Kopplungskonstanten zu Kanten innerhalb des Würfels abhängt, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{E_n(H_\Lambda(\omega)) \in I\} &= \mu^{E(\Gamma)}\{\omega \,|\, E_n(H_\Lambda(\omega)) \in I\} \\ &= \mu^{E(\Gamma\cap\Lambda)}\{\tilde{\omega} = (\omega_e)_{e\in E(\Gamma\cap\Lambda)} \,|\, E_n(H_\Lambda(\omega)) \in I\}. \end{aligned}$$

Durch $\Phi(\tilde{\omega}) := E_n(H_\Lambda(\tilde{\omega})) = E_n(H_\Lambda(\omega))$ ist eine monotone Funktion auf $\mathbb{R}^{E(\Gamma\cap\Lambda)}$ definiert, für die wir leicht die Beziehung (2.2) nachrechnen, nämlich

$$\begin{aligned} H_\Lambda(\tilde{\omega} + t(1,\ldots,1)) &= -\Delta + \sum_{e\in E(\Gamma\cap\Lambda)} (\omega_e + t)\chi_e \\ &= H_\Lambda(\tilde{\omega}) + t, \end{aligned}$$

d. h.

$$E_n(H_\Lambda(\tilde{\omega} + t(1, \ldots, 1))) = E_n(H_\Lambda(\tilde{\omega})) + t. \tag{2.7}$$

Damit gilt nach Lemma 2.2

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{E_n(H_\Lambda(\omega)) \in I\} &\leq \sharp E(\Gamma \cap \Lambda) \cdot |I|^\alpha \\ &\leq d|\,\Lambda|\,|I|^\alpha, \end{aligned}$$

was zusammen mit (2.6) die Behauptung liefert.

□

2.2 Die Anfangslängenabschätzung

Auch die Anfangs- oder Initiallängenabschätzung liefert ein Aussage über die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eigenwert des Würfeloperators in einem bestimmten Intervall liegt. Allerdings ist hier das fragliche Intervall um das untere Ende q_- des deterministischen Spektrums von $H(\omega)$ zentriert, und die Intervallbreite ist von der Seitenlänge l des Würfels abhängig. Weiterhin gilt die Aussage erst für Längen ab einer bestimmten Größe.

Strategisch gesehen soll der Lokalisierungsbeweis in Kapitel 3 mit einer Art Induktion angegangen werden. Dabei wird uns die Anfangslängenabschätzung den Induktionsanfang liefern (daher der Name), währenddessen die Wegner-Abschätzung im Induktionsschritt eine zentrale Rolle spielt.

2.3 Satz (Anfangslängenabschätzung) *Für den Modelloperator $H(\omega)$ gibt es zu jedem $\xi \in (0, 2\tau - d)$ ein $\beta = \beta(\tau, \xi) \in (0, 2)$ und ein $l^* = l^*(\tau, \xi)$, so dass*

$$\mathbb{P}\{dist(\sigma(H^\bullet_\Lambda(\omega)), q_-) \leq l^{\beta-2}\} \leq l^{-\xi} \tag{2.8}$$

für alle $\Gamma-$kantenberandeten Würfel $\Lambda = \Lambda_l(0)$, $\bullet \in \{N, D\}$ und $l \geq l^*$.

Beweis: Wir definieren für $\Gamma-$kantenberandete Würfel $\Lambda = \Lambda_l(0)$

$$\Omega_{l,h} := \{\omega \in \Omega \mid q_e(\omega) \geq q_- + h \text{ für alle } e \in E(\Gamma \cap \Lambda)\}.$$

Für $\omega \in \Omega_{l,h}$ gilt dann

$$H^\bullet_\Lambda \geq (-\Delta + q_- + h)^\bullet_\Lambda \qquad (\bullet \in \{N, D\})$$

und damit für die untersten Eigenwerte E_0 der entsprechenden Operatoren

$$\begin{aligned} E_0(H^D_\Lambda) &\geq E_0((-\Delta + q_- + h)^D_\Lambda) \geq q_- + h, \\ E_0(H^N_\Lambda) &\geq E_0((-\Delta + q_- + h)^N_\Lambda) = q_- + h. \end{aligned}$$

Die hintere Ungleichung in der ersten Zeile folgt dabei aus der Positivität des negativen Laplaceoperators; die Gleichheit in der zweiten Zeile lässt sich durch Angabe einer Eigenfunktion (beliebige Konstanten) begründen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\omega \in \Omega_{l,h}$ lässt sich wegen (1.2) leicht abschätzen mittels

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega_{l,h}) &\geq 1 - \sharp E(\Gamma \cap \Lambda) \cdot \mu([q_-, q_- + h]) \\ &\geq 1 - d \cdot |\Lambda| \cdot h^\tau. \end{aligned}$$

Sei nun $\xi \in (0, 2\tau - d)$. Wir können $\beta \in (0, 2)$ so wählen, dass

$$\xi < \tau(2 - \beta) - d.$$

Sei weiter $h := l^{\beta-2}$. Dann gilt für l groß genug

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega_{l,h}) &= 1 - d\,|\Lambda|\, l^{\tau(\beta-2)} \\ &= 1 - d\, l^{-\tau(2-\beta)+d} \\ &= 1 - \underbrace{d\, l^{\xi-\tau(2-\beta)+d}}_{\leq 1 \text{ für } l \text{ groß}}\, l^{-\xi} \\ &\geq 1 - l^{-\xi}. \end{aligned}$$

□

2.3 Die geometrische Resolventenungleichung

Es wurde bereits erwähnt, dass dem Lokalisierungsbeweis in Kapitel 3 eine Art Induktionsprozess zugrunde liegt. Dabei soll die Induktion über eine geeignete Folge von Längenskalen mit den zugehörigen Würfeloperatoren laufen. Es ist daher naheliegend, sich Informationen über den Zusammenhang von Operatoren zu Würfeln verschiedener Größe zu verschaffen. Dies leistet der aktuelle Abschnitt.

2.4 Satz (Geometrische Resolventengleichung) *Seien $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{R}^d$ offene $\Gamma-$kantenberandete Würfel, H_Λ und $H_{\Lambda'}$ die entsprechenden Realisierungen unseres Modelloperators mit gleichen Randbedingungen aus $\{N, D\}$. Sei $\psi \in \{f|_{\Gamma\cap\Lambda} \,|\, f \in C_c^1(\Lambda)\}$ reellwertig. Dann gilt für jedes $z \in \varrho(H_\Lambda) \cap \varrho(H_{\Lambda'})$ die Beziehung*

$$R_\Lambda \psi = \psi\, R_{\Lambda'} + R_\Lambda\, [\psi' \cdot \partial + \partial\, \psi']\, R_{\Lambda'}, \tag{2.9}$$

wobei wir

$$R_\Lambda := (H_\Lambda - z)^{-1}, \quad R_{\Lambda'} := (H_{\Lambda'} - z)^{-1}$$

setzen. Sämtliche Terme sind dabei als Operatoren auf $L_2(\Gamma \cap \Lambda')$ zu verstehen; mit ∂ soll der Operator der ersten Ableitung bezeichnet werden.

Beweis: Wir betrachten $L_2(\Gamma \cap \Lambda)$ als Teilraum von $L_2(\Gamma \cap \Lambda')$, so dass $R_{\Lambda'}$ auf alle $g \in L_2(\Gamma \cap \Lambda)$ anwendbar ist. Mit den zugehörigen Formen liest sich die Behauptung dann so:

$$(\mathfrak{h}_\Lambda - z)(\underbrace{(\psi\, R_{\Lambda'} + R_\Lambda\,[\psi' \cdot \partial + \partial\,\psi']\,R_{\Lambda'})g}_{=:u},\, w) \;=\; (\psi g \,|\, w) \qquad (\forall g \in L_2(\Gamma \cap \Lambda), w \in D(\mathfrak{h}_\Lambda)).$$

(In diesem Falle folgt $u \in D(H_\Lambda)$ und $(H_\Lambda - z)u = \psi \cdot g$.)

Erste Aufgabe wird sein, zu zeigen, dass überhaupt $u \in D(\mathfrak{h}_\Lambda)$ ist. Nach Lemma 6.4 (Produktregel) gilt zunächst

$$\psi_e\,(R_{\Lambda'}g)_e \;\in\; W_2^1(0,1) \qquad (\forall e \in E(\Gamma \cap \Lambda)).$$

Die Stetigkeit an den inneren Knoten ist klar, d. h. der erste Summand ist abgehandelt (die $C_c(\Lambda)-$Eigenschaft von ψ liefert die zusätzliche Bedingung im Dirichlet-Fall).
Weiterhin vermittelt $\psi'\partial R_{\Lambda'} :\; L_2(\Gamma \cap \Lambda) \to L_2(\Gamma \cap \Lambda)$, d. h.

$$R_\Lambda \psi' \partial R_{\Lambda'}\, g \;\in\; D(\mathfrak{h}_\Lambda).$$

Für die Analyse des dritten Summanden ist zunächst

$$\psi' R_{\Lambda'}\, g \in L_2(\Gamma \cap \Lambda).$$

Weiter lässt sich $R_\Lambda \partial : W_2^1(\Gamma \cap \Lambda) \to D(\mathfrak{h}_\Lambda)$ zu einem beschränkten Operator von $L_2(\Gamma \cap \Lambda)$ nach $D(\mathfrak{h}_\Lambda)$ fortsetzen. Zur Begründung sei ohne Einschränkung z so klein, dass $H_\Lambda - z$ eine Wurzel besitzt; andernfalls führt man eine Verschiebung mittels Resolventengleichung durch. Dann gilt

$$R((H_\Lambda - z)^{-\frac{1}{2}}) = D((H_\Lambda - z)^{\frac{1}{2}}) = D(\mathfrak{h}_\Lambda) \subset W_2^1(\Gamma \cap \Lambda).$$

Wir versehen $D(\mathfrak{h}_\Lambda)$ mit der Formnorm

$$\|u\|_{\mathfrak{h}_\Lambda} := (\|u\|^2_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} + \mathfrak{h}_\Lambda(u))^{\frac{1}{2}}$$

und erhalten für $v \in D(\mathfrak{h}_\Lambda)$

$$\begin{aligned} \|v'\|^2_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} &= \mathfrak{h}_\Lambda(v) - \sum_{e\in E(\Gamma\cap\Lambda)} V_e \int_0^1 v_e^2(x)dx \\ &\le \|v\|^2_{D(\mathfrak{h}_\Lambda)}. \end{aligned}$$

Somit ist $\partial(H_\Lambda - z)^{-\frac{1}{2}}$ beschränkt auf $L_2(\Gamma \cap \Lambda)$. Für $\varphi \in W_2^1(\Gamma \cap \Lambda)$ und $f \in L_2(\Gamma \cap \Lambda)$ gilt also

$$\begin{aligned} |((H_\Lambda - z)^{-\frac{1}{2}}\varphi' \,|\, f)| &= |(\varphi \,|\, \partial(H_\Lambda - z)^{-\frac{1}{2}} f)| \\ &\leq c \cdot \|\varphi\|_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} \cdot \|f\|_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)}. \end{aligned}$$

Schlussendlich erhalten wir die Beschränktheit von

$$R_\Lambda \partial = (H_\Lambda - z)^{-\frac{1}{2}}(H_\Lambda - z)^{-\frac{1}{2}}\partial : \; L_2(\Gamma \cap \Lambda) \to L_2(\Gamma \cap \Lambda) \to D(\mathfrak{h}_\Lambda).$$

Damit ist $u \in D(\mathfrak{h}_\Lambda)$ gesichert. Nächster Schritt ist eine vorbereitende Betrachtung, die sich im wesentlichen mit den Nahtstellen der Funktionen an den inneren Knoten befasst. Zu einem festen inneren Knoten von $\Gamma \cap \Lambda$ sollen mit $e_{k,\text{in}}$ bzw. $e_{k,\text{out}}$ die ein- bzw. auslaufende Kante parallel zur k-ten Koordinatenachse und mit $\partial_k\psi(v)$ die partiellen Ableitungen der $C_c^1(\Lambda)-$Fortsetzung von ψ bezeichnet werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\partial\psi' R_{\Lambda'} g \,|\, w)_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} &= \sum_{e\in E(\Gamma\cap\Lambda)} (\partial\psi'_e R_{\Lambda'} g_e \,|\, w_e)_{L_2(0,1)} \\ &= \sum_{e\in E(\Gamma\cap\Lambda)} \{(-\psi'_e R_{\Lambda'} g_e \,|\, w'_e)_{L_2(0,1)} + \psi'_e R_{\Lambda'} g_e w_e \,|_0^1\} \\ &\quad \text{(partielle Integration)} \\ &= -(\psi' R_{\Lambda'} g \,|\, w')_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} \\ &\quad + \sum_{v \text{ inn. Knoten}} \sum_{k=1}^{d} \partial_k\psi(v)\{ \underbrace{(R_{\Lambda'} gw)_{e_{k,\text{in}}}(1) - (R_{\Lambda'} gw)_{e_{k,\text{out}}}(0)}_{=0 \text{ wegen der Stetigkeit an den inneren Knoten}} \} \\ &= -(\psi' R_{\Lambda'} g \,|\, w')_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die folgende Rechnung liefert dann den Abschluss des Beweises:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h}_\Lambda - z)(u, w) &= (\mathfrak{h}_\Lambda - z)((\psi\, R_{\Lambda'} + R_\Lambda\,[\psi' \cdot \partial + \partial\,\psi']\, R_{\Lambda'})g,\, w) \\ &= (\mathfrak{h}_\Lambda - z)(\psi\, R_{\Lambda'} g, w) + ((\psi' \cdot \partial R_{\Lambda'} + \partial\,\psi' R_{\Lambda'})g \,|\, w)_{L_2(\Gamma\cap\Lambda)} \\ &= ((\psi\, R_{\Lambda'} g)' \,|\, w') + ((V - z)\psi\, R_{\Lambda'} g \,|\, w) \\ &\quad +(\psi'(R_{\Lambda'} g)' \,|\, w) - (\psi' R_{\Lambda'} g \,|\, w') \qquad \text{(mit (2.10))} \\ &= (\psi'\, R_{\Lambda'} g \,|\, w') + (\psi(R_{\Lambda'} g)' \,|\, w') + (\psi'(R_{\Lambda'} g)' \,|\, w) \\ &\quad +((V - z)\psi\, R_{\Lambda'} g \,|\, w) - (\psi' R_{\Lambda'} g \,|\, w') \\ &= ((R_{\Lambda'} g)' \,|\, \underbrace{\psi w' + \psi' w}_{=(\psi w)'}) + ((V - z)\, R_{\Lambda'} g \,|\, \psi w) \qquad (\psi \text{ reellw.}) \\ &= (\mathfrak{h}_{\Lambda'} - z)(R_{\Lambda'} g, \psi w) \\ &= (g \,|\, \psi w) \\ &= (\psi g \,|\, w). \end{aligned}$$

□

Ausgehend von diesem Satz soll nun sukzessive die für die Multiskalenanalyse zu verwendende "geometrische Resolventenungleichung" hergeleitet werden. Als Vorbereitung dient das folgende Lemma.

2.5 Lemma *Seien $\tilde{\Omega} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ $\Gamma-$kantenberandete Gebiete, $dist(\partial\tilde{\Omega}, \partial\Omega) > 0$, $g \in L_2(\Gamma \cap \Omega)$, $E \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Konstante $C = C(q_-, q_+, E)$, so dass für alle $u \in W_2^1(\Gamma \cap \Omega)$ mit*

$$(u' \,|\, \varphi')_{L_2(\Gamma\cap\Omega)} + (Vu \,|\, \varphi)_{L_2(\Gamma\cap\Omega)} = (g \,|\, \varphi)_{L_2(\Gamma\cap\Omega)} \qquad (\forall \varphi \in W_{2,0}^1(\Gamma \cap \Omega))$$

gilt

$$\|u'\|_{L_2(\Gamma\cap\tilde{\Omega})} \leq C(\|u\|_{L_2(\Gamma\cap\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Gamma\cap\Omega)}).$$

Beweis: Konstruktionsbedingt gilt $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\tilde{\Omega}) \geq 1$. Daher existiert ein

$$\psi \in \{f|_{\Gamma\cap\Omega} \,|\, f \in C_c(\Omega),\, \operatorname{spt} f' \subset \{x \in \Omega \,|\, \operatorname{dist}(x, \tilde{\Omega}) < 1\}\}$$

mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_{\Gamma\cap\tilde{\Omega}} = 1$ und $\|\psi'\|_\infty \leq \tilde{C}(d)$ ("Herunterbiegen außerhalb der Knotenmenge").
Sei $w := u\psi^2$, dann ist $w \in W_{2,0}^1(\Gamma \cap \Omega)$, und nach der Produktregel gilt

$$(u' \,|\, w')_{L_2(\Gamma\cap\Omega)} = (\psi u' \,|\, \psi u') + 2(\psi u' \,|\, u\psi').$$

Mit $\tilde{V} := V - E$ ist also

$$\begin{aligned}
\|\psi u'\|^2 &= (\psi u' \,|\, \psi u') \\
&= (u' \,|\, w') - 2(\psi u' \,|\, u\psi') \\
&= (g \,|\, w) - (\tilde{V}u \,|\, w) - 2(\psi u' \,|\, u\psi') \quad \text{(Voraussetzung)} \\
&\leq \|g\|\,\|u\| + |(\tilde{V}\psi u \,|\, \psi u)| + 2\,\|\psi u'\|\,\|u\|\,\|\psi'\|_\infty \\
&\leq \|g\|\,\|u\| + \hat{C}(q_-, q_+, E)\|u\|^2 + 2\tilde{C}\,\|\psi u'\|\,\|u\|.
\end{aligned}$$

Wir fassen diese Beziehung als quadratische Ungleichung in $x := \|\psi u'\|$ auf:

$$x^2 - 2\,\tilde{C}\,\|u\|\,x - \hat{C}\|u\|^2 - \|g\|\,\|u\| \leq 0.$$

Kritische Punkte dieser Ungleichung sind

$$x_{\text{krit}} = \tilde{C}\|u\| \pm \sqrt{(\tilde{C}^2 + \hat{C})\|u\|^2 + \|g\|\,\|u\|}.$$

Da für den Term $(*)$ unter der Wurzel

$$\begin{aligned}
(*) &\leq (\tilde{C}^2 + \hat{C})\|u\|^2 + \|g\|\,\|u\| + \frac{1}{4(\tilde{C}^2 + \hat{C})}\,\|g\|^2 \\
&= (\sqrt{\tilde{C}^2 + \hat{C}}\,\|u\| + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{C}^2 + \hat{C}}}\,\|g\|)^2
\end{aligned}$$

gilt, kann die quadratische Ungleichung nur für

$$\begin{aligned}\|\psi u'\| &\leq \sqrt{\tilde{C}^2+\hat{C}}\,\|u\| + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{C}^2+\hat{C}}}\,\|g\| \\ &= C(q_-,q_+,E)(\|u\|+\|g\|)\end{aligned}$$

erfüllt sein. Mit $\psi|_{\Gamma\cap\tilde{\Omega}} = 1$ folgt die Behauptung.

□

Bevor das Hauptergebnis dieses Abschnitts vorgestellt wird, sollen noch einige Vereinbarungen zur Notation getroffen werden, die auch im weiteren Verlauf der Arbeit gelten sollen.

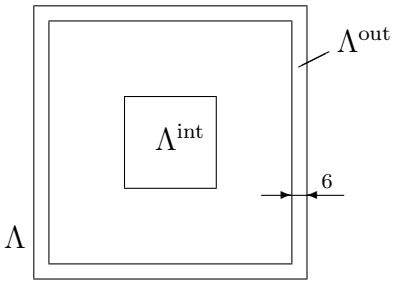
Ein $\Gamma-$kantenberandeter Würfel $\Lambda = \Lambda_L(x)$ heißt geeignet, falls $x \in \mathbb{Z}^d$, $L \in 6\mathbb{N} \setminus 12\mathbb{N}$ und $L \geq 42$ gilt. Für einen solchen Würfel definieren wir (vgl. Skizze)

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mathrm{int}}(x) = \Lambda_L^{\mathrm{int}}(x) &:= \Lambda_{L/3}(x), \\ \Lambda^{\mathrm{out}}(x) = \Lambda_L^{\mathrm{out}}(x) &:= \Lambda_L(x) \setminus \Lambda_{L-12}(x)\end{aligned}$$

und schreiben für die zugehörigen charakteristischen Funktionen auf dem Graphen

$$\begin{aligned}\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} &= \chi_{\Lambda_L(x)}^{\mathrm{int}} := \chi_{\Gamma\cap\Lambda_L^{\mathrm{int}}(x)}, \\ \chi_\Lambda^{\mathrm{out}} &= \chi_{\Lambda_L(x)}^{\mathrm{out}} := \chi_{\Gamma\cap\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)},\end{aligned}$$

wobei die Indizes weitmöglichst weggelassen werden sollen, solange die Bedeutung erkennbar bleibt. Ganz allgemein soll χ_A für ein $\Gamma-$kantenberandetes Gebiet als $\chi_{\Gamma\cap A}$ verstanden werden.



2.6 Satz (Geometrische Resolventenungleichung) *Seien $\Lambda \subset \Lambda' \subset \mathbb{R}^d$ geeignete $\Gamma-$kantenberandete Würfel. Seien $A \subset \Lambda^{int}$ und $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ $\Gamma-$kantenberandet, $I_0 \subset \mathbb{R}$ beschränkt, $E \in I_0$. Dann existiert $C_{geom} = C_{geom}(q_-,q_+,E)$, so dass*

$$\|\chi_B R_{\Lambda'}(E)\chi_A\| \leq C_{geom}\cdot\|\chi_B R_{\Lambda'}(E)\chi_\Lambda^{out}\|\,\|\chi_\Lambda^{out} R_\Lambda(E)\chi_A\|. \tag{2.11}$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{Z}^d$ der Mittelpunkt von Λ. Wir wählen $\varphi \in \{f|_{\Gamma\cap\Lambda} \,|\, f \in C_c^\infty(\Lambda)\}$ reellwertig mit $\mathrm{spt} f \subset \Lambda_{L-4}(x)$ so, dass $\varphi = 1$ auf $\Lambda_{L-8}(x)$. Die Wahl lässt sich dabei so treffen, dass $\|\varphi'\|_\infty$ unabhängig von Λ beschränkt ist.
Sei $\Omega := \operatorname{int} \Lambda^{\mathrm{out}}$, d. h.

$$\operatorname{dist}\,(\partial\Omega, \operatorname{spt}\,\varphi') \geq 2.$$

Nach der geometrischen Resolventengleichung (Satz 2.4) gilt

$$\begin{aligned}
\|\chi_B R_{\Lambda'} \chi_A\| &= \|\chi_A R_{\Lambda'} \chi_B\| \\
&= \|\chi_A (\varphi R_{\Lambda'} - R_\Lambda \varphi) \chi_B\| \qquad (\varphi|_A = 1, \varphi|_B = 0) \\
&= \|\chi_A R_\Lambda (\partial\varphi' + \varphi'\partial) R_{\Lambda'} \chi_B\| \qquad \text{(Satz 2.4)} \\
&\leq \underbrace{\|\chi_A R_\Lambda \partial\varphi' R_{\Lambda'} \chi_B\|}_{(*)} + \underbrace{\|\chi_A R_\Lambda \varphi' \partial R_{\Lambda'} \chi_B\|}_{(**)}.
\end{aligned}$$

Wir beginnen mit der Betrachtung von $(*)$. Mit

$$\tilde{\Omega} := \operatorname{int}\,(\Lambda_{L-2}(x) \setminus \Lambda_{L-10}(x))$$

gilt

$$\begin{aligned}
(*) &= \|\chi_A R_\Lambda \partial\, \chi_{\tilde{\Omega}}\, \chi_\Omega \varphi' R_{\Lambda'} \chi_B\| \\
&\leq \|\varphi'\|_\infty \underbrace{\|\chi_A R_\Lambda \partial\, \chi_{\tilde{\Omega}}\|}_{(***)} \|\chi_\Omega R_{\Lambda'} \chi_B\|. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Der Term $(***)$ soll im folgenden mit Lemma 2.5 abgeschätzt werden. Seien dazu

$$f \in L_2(\Gamma \cap \Lambda), \qquad g := \chi_A f, \qquad u := R_\Lambda g.$$

Dann gilt $u \in D(\mathfrak{h})_\Lambda$ und

$$(\mathfrak{h}_\Lambda - E)(u, w) = (g \,|\, w)$$

für alle $w \in D(\mathfrak{h}_\Lambda)$. Weiterhin ist $g|_\Omega = 0$ sowie $\operatorname{dist}\,(\partial\Omega, \partial\tilde{\Omega}) = 1$, d. h. Lemma 2.5 liefert

$$\begin{aligned}
\|\chi_{\tilde{\Omega}} u'\| &\leq C_1(q_-, q_+, I)\, \|u\|_{L_2(\Gamma\cap\Omega)} \\
&= C_1(q_-, q_+, I)\, \|\chi_\Omega R_\Lambda \chi_A f\|,
\end{aligned}$$

also

$$(***) \leq C_1\,(q_-, q_+, I)\, \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} R_\Lambda \chi_A\|. \qquad (2.13)$$

Dieselbe Argumentationslinie liefert

$$(**) \leq C_2(q_-, q_+, I)\, \|\varphi'\|_\infty \|\chi_B R_{\Lambda'} \chi_\Omega\|\, \|\chi_\Omega R_\Lambda \chi_A\|,$$

was in Verbindung mit (2.12) und (2.13) die Behauptung ergibt.

□

2.4 Combes-Thomas-Abschätzungen

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird es immer wieder notwendig sein, Wahrscheinlichkeitsaussagen für das Auftreten von Box-Eigenwerten in eine Eigenschaft zu übersetzen, die man kurz "exponentielles Abklingen der lokalen Resolvente" nennt. Die Combes-Thomas-Abschätzung ist das Werkzeug, welches eben diese Übersetzung möglich macht. Das Ergebnis geht auf den wichtigen Artikel [CT73] sowie auf die Verbesserungen in [BCH97] zurück. Ein aktuelles Ergebnis zur Combes-Thomas-Methode findet der Leser in [GK03].

2.7 Satz (Combes-Thomas-Abschätzung) *Sei $R > 0$. Dann existieren Konstanten $c_1 = c_1(q_-, q_+, R)$, $c_2 = c_2(q_-, q_+, R)$, so dass für jede Randbedingung $\bullet \in \{D, N\}$ aus*

(i) $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ *offener* $\Gamma-$*kantenberandeter Würfel,* $A, B \subset \Lambda$ $\Gamma-$*kantenberandet,* $dist(A, B) =: \delta \geq 1$,

(ii) $(r, s) \subset \varrho(H_\Lambda^\bullet) \cap (-R, R)$, $E \in (r, s)$, $\eta := dist(E, (r, s)^c) > 0$

folgt:

$$\|\chi_A (H_\Lambda^\bullet - E)^{-1} \chi_B\| \leq c_1 \cdot \eta^{-1} \cdot e^{-c_2 \sqrt{\eta(s-r)}\,\delta}. \tag{2.14}$$

Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, erarbeiten wir zunächst ein vorbereitendes Lemma mit Beweis, welches - in leicht korrigierter Form - aus [BCH97] bzw. [Sto01] übernommen wurde.

2.8 Lemma *Sei T ein invertierbarer selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, sei $d_+ := dist(0, \sigma(T) \cap (0, \infty))$ und $d_- := dist(0, \sigma(T) \cap (-\infty, 0)$. Sei S selbstadjungiert, $\|S\| \leq 1$.*

Dann ist $T + i\beta S$ für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ mit $|\beta| \leq \frac{1}{2}\sqrt{d_+ \cdot d_-}$ invertierbar, und es gilt

$$\|(T + i\beta S)^{-1}\| \leq 2 \max\{d_+^{-1}, d_-^{-1}\}. \tag{2.15}$$

Beweis: Seien P_+ und P_- die Projektionen von T auf den zum positiven bzw. negativen Teil des Spektrums gehörigen Teilraum, $f_\pm := P_\pm f$ (für $f \in \mathcal{H}$). Dann erhalten wir unter Nutzung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Voraussetzungen an β:

$$\begin{aligned}
\|f\|\,\|(T + i\beta S)f\| &\geq \mathrm{Re}((f_+ - f_-)|(T + i\beta S)(f_+ + f_-)) \\
&= (f_+|Tf_+) - (f_-|Tf_-) - 2\beta\ \mathrm{Im}(f_+|Sf_-) \\
&\geq d_+\|f_+\|^2 + d_-\|f_-\|^2 - \sqrt{d_+ \cdot d_-}\,\|f_+\|\,\|f_-\| \\
&= \frac{1}{2}(d_+\|f_+\|^2 + d_-\|f_-\|^2) + \frac{1}{2}(\sqrt{d_+}\|f_+\| - \sqrt{d_-}\|f_-\|)^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{d_+, d_-\}\,\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Nach Division beider Seiten durch $\|f\|$ erhält man

$$\|(T + i\beta S)f\| \geq \frac{1}{2} \min\{d_+, d_-\} \|f\|, \tag{2.16}$$

woraus zunächst die Injektivität des Operators $T+i\beta S$ folgt. Weiterhin ist $T+i\beta S$ abgeschlossen, und für jedes β gemäß Voraussetzung gilt

$$R(T + i\beta S)^\perp = N((T + i\beta S)^*) = N(T - i\beta S) = \{0\}.$$

Somit ist $T + i\beta S$ surjektiv und demzufolge invertierbar. Die Behauptung (2.15) folgt unmittelbar aus Ungleichung (2.16).

□

Beweis (Satz 2.7): Wir wählen eine Randbedingung und schreiben kurz H und $\mathfrak{h}$ statt $H^\bullet_\Lambda$ und $\mathfrak{h}^\bullet_\Lambda$. Sei

$$w : \Lambda \to \mathbb{R}, \qquad w(x) := \text{dist } (x, B).$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$|w(y) - w(x)| \leq |x - y|,$$

d. h. $\|w'\|_\infty \leq 1$, was $\|w'\|_\infty \leq 1$ für die Einschränkung auf den Graphen bedingt.

Weiter sind damit $\psi(x) = e^{-w(x)}$ und $\varphi(x) = e^{w(x)}$ auf allen Kanten gleichmäßig Lipschitz-stetig, denn

$$\begin{aligned} |e^{w(y)} - e^{w(x)}| &\leq \sup_{\xi \in \Gamma\cap\Lambda} |(\exp \circ w)'(\xi)| \cdot |y - x| \\ &\leq \sup_{\xi \in \Gamma\cap\Lambda} |\exp(w(\xi))||w'(\xi)| \cdot |y - x|. \end{aligned}$$

Für jedes $u \in D(\mathfrak{h})$ sind also auch $\psi u, \varphi u \in D(\mathfrak{h})$ (Produktregel und Stabilität der Randbedingungen bezüglich Multiplikation im Dirichlet-Fall). Somit ist

$$\mathfrak{h}_\beta(u, v) := \mathfrak{h}(e^{-\beta w}u, e^{\beta w}v)$$

für alle $u, v \in D(\mathfrak{h})$ wohldefiniert. Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\beta(u, v) &= ((e^{-\beta w}u)' \,|\, (e^{\beta w}v)') + (Vu \,|\, v)) \\ &= (e^{-\beta w}u' \,|\, e^{\beta w}v') - \beta(e^{-\beta w}uw' \,|\, e^{\beta w}v') \\ &\quad -\beta^2(e^{-\beta w}uw' \,|\, e^{\beta w}vw') + \beta(e^{-\beta w}u' \,|\, e^{\beta w}vw') + (Vu \,|\, v) \\ &= \mathfrak{h}(u, v) - \beta \underbrace{[(uw' \,|\, v') - (u' \,|\, vw')]}_{(*)} - \beta^2(w'^2u \,|\, v). \end{aligned}$$

Wir verwenden $(*)$, um die symmetrische Form

$$\mathfrak{k}(u,v) := i[(uw' \,|\, v') - (u' \,|\, vw')]$$

zu definieren. Mit $1 \geq m := w'^2 \geq 0$ lässt sich dann schreiben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\beta(u,v) &= \tilde{\mathfrak{h}}(u,v) + i\beta\mathfrak{k}(u,v), \quad \text{wobei} \\ \tilde{\mathfrak{h}}(u,v) &= \mathfrak{h}(u,v) - \beta^2(mu \,|\, v). \end{aligned}$$

Wir zeigen im folgenden, dass $\mathfrak{h}_\beta$ eine sektorielle Form ist. Daraus folgt dann die Existenz eines sektoriellen Operators H_β, der den formalen Ausdruck $e^{\beta w}He^{-\beta w}$ realisiert. Wegen $\|w'\|_\infty \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}(u) &\leq 2\|u\|\,\|u'\| \\ &\leq 2\|u\|\,\|u'\| + (\|u'\| - \|u\|)^2 \\ &= \|u'\|^2 + \|u\|^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Für den mit $\tilde{\mathfrak{h}}$ assoziierten Operator $\tilde{H}$ gilt mit $C = C(R), C \geq \beta^2 + 1, C \geq 1 - r$ andererseits

$$\begin{aligned} \|(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}u\|^2 &\geq \|(\tilde{H}+\beta^2+1)^{\frac{1}{2}}u\|^2 \\ &= \|u'\|^2 + ([V + \beta^2 \underbrace{(1-m)}_{\geq 0} + 1]u \,|\, u) \\ &\geq \|u'\|^2 + \|u\|^2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Also folgt aus (2.17) und (2.18)

$$|\mathfrak{k}(u)| \leq \|(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}u\|^2 = (\tilde{\mathfrak{h}}+C)(u). \tag{2.19}$$

Damit ist $\mathfrak{h}_\beta = \tilde{\mathfrak{h}} + i\beta\mathfrak{k}$ sektoriell, und es existiert ein zugehöriger sektorieller Operator H_β.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass es einen beschränkten Operator S auf $L_2(\Gamma \cap \Lambda)$, $\|S\| \leq 1$, gibt, so dass

$$\mathfrak{k}(u,v) = (S(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}u \,|\, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}v) \qquad (\forall u, v \in D(\mathfrak{h})).$$

Dazu sei $D(\mathfrak{h})$ mit dem Skalarprodukt $(\tilde{\mathfrak{h}}+C)(\cdot,\cdot)$ versehen. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es einen beschränkten Operator K auf $D(\mathfrak{h})$ mit

$$\mathfrak{k}(u,v) = (\tilde{\mathfrak{h}}+C)(Ku,v).$$

Nach (2.19) gilt $\|K\| \leq 1$. Sei

$$S := (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}K(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} : L_2(\Gamma\cap\Lambda) \to L_2(\Gamma\cap\Lambda).$$

Da $(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}} : D(\mathfrak{h}) \to L_2(\Gamma \cap \Lambda)$ und $(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} : L_2(\Gamma \cap \Lambda) \to D(\mathfrak{h})$ unitär sind, gilt $\|S\| = \|K\| \leq 1$. Weiter ist für $u, v \in D(\mathfrak{h})$

$$\begin{aligned} ((\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}u \,|\, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}v) &= ((\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}Ku \,|\, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}v) \\ &= (\tilde{\mathfrak{h}}+C)(Ku, v) \\ &= \mathfrak{k}(u, v). \end{aligned}$$

Im nächsten Punkt soll die Invertierbarkeit von $H_\beta - E$ für $E \in (r, s)$ in Abhängigkeit von β analysiert werden.

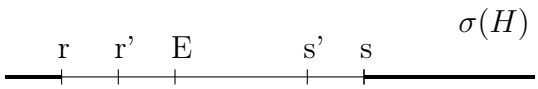
Erster Schritt hierfür ist die Untersuchung des Spektrums von $\tilde{H} = H - \beta^2 m$. Sei $\beta_0 := \sqrt{\frac{2}{\eta}}$ und somit für $\|\beta\| \leq \beta_0$:

$$\|\beta^2 m\|_\infty \leq \frac{\eta}{2}.$$

Dann ist

$$(\underbrace{r + \frac{\eta}{2}}_{=:r'}, \underbrace{s - \frac{\eta}{2}}_{=:s'}) \subset \varrho(\tilde{H}).$$

Es sei bemerkt, dass konstruktionsbedingt $E \in (r', s')$ und $\min(E - r', s' - E) = \frac{\eta}{2}$ gilt.



Wir definieren

$$\varphi(t) := \frac{t - E}{t + C} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

und betrachten den Operator

$$T := (\tilde{H} - E)(\tilde{H} + C)^{-1} = \varphi(\widetilde{H}).$$

Für diesen Operator rechnen wir die Voraussetzungen von Lemma 2.8 nach. Der Spektralabbildungssatz für selbstadjungierte Operatoren liefert zunächst

$$0 \in \varphi((r', s')) = (\frac{r' - E}{r' + C}, \frac{s' - E}{s' + C}) \subset \varrho(T),$$

d. h. T ist invertierbar. In der Terminologie von Lemma 2.8 gilt

$$\begin{aligned} d_+ &\geq \frac{s' - E}{s' + C} \geq \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{R + C}, \\ d_- &\geq \frac{E - r'}{r' + C} \geq \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{R + C} \end{aligned} \tag{2.20}$$

und weiter

$$\begin{aligned} d_+ \cdot d_- &\geq \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{(R+C)^2} \cdot \max\{s' - E, E - r'\} \\ &= \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{(R+C)^2} \cdot (s' - r' - \frac{\eta}{2}) \\ &= \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{(R+C)^2} \cdot (s - r - \frac{3}{2}\eta). \end{aligned}$$

Wegen $\eta \leq \frac{1}{2}(s-r)$ folgt schließlich

$$d_+ \cdot d_- \geq \frac{1}{8} \frac{1}{(R+C)^2} \eta\,(s-r).$$

Wir setzen

$$\beta_1 := \min\{\beta_0,\ \frac{1}{R+C}\sqrt{\frac{1}{32}\eta\,(s-r)}\},$$

dann liefern uns Lemma 2.8 und (2.20) für $|\beta| \leq \beta_1$ die Invertierbarkeit von $T + i\beta S$ mit

$$\|(T + i\beta S)^{-1}\| \leq 4\,\frac{R+C}{\eta}. \tag{2.21}$$

Im nächsten Punkt soll der Bezug zwischen den Operatoren $T + i\beta S$ und $H_\beta - E$ hergestellt werden. Die Behauptung ist, dass auch $H_\beta - E$ für $|\beta| \leq \beta_1$ invertierbar ist, und folgende Beziehung gilt:

$$(H_\beta - E)^{-1} = (\tilde{H} + C)^{-\frac{1}{2}}(T + i\beta S)^{-1}(\tilde{H} + C)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.22}$$

Sei dazu $f \in L_2(\Gamma \cap \Lambda)$. Dann gilt

$$u := (\tilde{H} + C)^{-\frac{1}{2}}(T + i\beta S)^{-1}(\tilde{H} + C)^{-\frac{1}{2}} f \in D(\mathfrak{h}),$$

da $(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}}$ von $L_2(\Lambda)$ nach $D(\mathfrak{h})$ abbildet. Für $v \in D(\mathfrak{h})$ können wir nun unter Verwendung der Definitionen von T, S und u die folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h}_\beta - E)(u,v) &= (\widetilde{\mathfrak{h}} - E)(u,v) + i\beta\,\mathfrak{k}(u,v) \\ &= (T(\widetilde{H} + C)^{\frac{1}{2}}u | (\widetilde{H} + C)^{\frac{1}{2}}v) + i\beta\,(S(\widetilde{H} + C)^{\frac{1}{2}}u | (\widetilde{H} + C)^{\frac{1}{2}}v) \\ &= ((T + i\beta S)(\widetilde{H} + C)^{\frac{1}{2}}u | (\widetilde{H} + C)^{\frac{1}{2}}v) \\ &= ((\widetilde{H} + C)^{-\frac{1}{2}} f | (\widetilde{H} + C)^{\frac{1}{2}}v) \\ &= (f|v). \end{aligned}$$

Somit ist $u \in D(H_\beta - E)$, und es gilt $(H_\beta - E)u = f$. Da $f \in L_2(\Gamma \cap \Lambda)$ beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung (2.22). Unter Einbeziehung

von Ungleichung (2.21) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \|(H_\beta - E)^{-1}\| &= \|(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}}(T+i\beta S)^{-1}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}}\| \\ &\leq 4\,\frac{R+C}{\eta}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Einfaches Nachrechnen liefert nun

$$(H_\beta - E)^{-1} f = e^{\beta w}(H-E)^{-1}e^{-\beta w} f$$

und damit

$$\|\chi_A(H-E)^{-1}\chi_B\| \leq \|\chi_A e^{-\beta w}\|_\infty \cdot \|(H_\beta - E)^{-1}\| \cdot \|e^{\beta w}\chi_B\|_\infty. \tag{2.24}$$

Für $\beta := \frac{1}{2}\beta_1$ analysieren wir die Faktoren auf der rechten Seite. Wegen $w|_B = 0$ ist zunächst $\|e^{\beta w}\chi_B\|_\infty \leq 1$. Der zweite Faktor wird mittels Ungleichung (2.23) kontrolliert. Schließlich gibt es nach Definition von β_1 eine Konstante $c_2 = c_2(R)$, so dass

$$\beta \geq c_2(R) \cdot \sqrt{\eta(s-r)}.$$

Nach Voraussetzung gilt $w(x) = \mathrm{dist}(x, B) \geq \delta$ für alle $x \in A$, d. h.

$$\|\chi_A e^{-\beta w}\|_\infty \leq e^{-\beta\cdot\delta} \leq \exp(-c_2(R)\cdot\sqrt{\eta(s-r)}\cdot\delta).$$

Die Kombination dieser Argumente mit (2.24) liefert

$$\|\chi_A(H-E)^{-1}\chi_B\| \leq c_1(R)\cdot\eta^{-1}\cdot\exp(-c_2(R)\cdot\sqrt{\eta(s-r)}\cdot\delta);$$

das ist gerade die Behauptung.

□

2.5 Existenz verallgemeinerter Eigenfunktionen

Als letzte vorbereitende Arbeit soll die Existenz polynomiell beschränkter verallgemeinerter Eigenfunktionen untersucht werden. Solche Eigenfunktionen werden im Lokalisierungsbeweis die in Frage kommenden Objekte für echte Eigenfunktionen sein. Wir werden hier das Hauptergebnis aus [BMSt03] verwenden und müssen dafür einige Voraussetzungen prüfen.

Als erstes soll gezeigt werden, dass die mit dem freien Laplaceoperator assoziierte Form $\mathfrak{h}_0$ eine Dirichletform ist. Man beachte, dass die Formnorm $\|\cdot\|_{\mathfrak{h}_0}$ äquivalent zu $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma)}$ ist, d. h., $\mathfrak{h}_0$ ist abgeschlossen. Für $u \in D(\mathfrak{h}_0)$ reellwertig ist auch $|u| \in D(\mathfrak{h}_0)$, und

$$\mathfrak{h}_0(|u|) = \sum_{e\in E(\Gamma)} \int_0^1 (\operatorname{sgn} u_e(x) u_e'(x))^2\,dx \;=\; \mathfrak{h}_0(u).$$

Ist u außerdem nichtnegativ, dann gilt $u \wedge 1 \in D(\mathfrak{h}_0)$ und

$$\mathfrak{h}_0(u \wedge 1) = \sum_{e \in E(\Gamma)} \int_0^1 u_e'(x)^2 \cdot 1_{[u_e<1]}(x)\, dx \;\leq\; \mathfrak{h}_0(u).$$

Mittels Abschneide- und Glättungsargumenten ist ersichtlich, dass $\mathfrak{h}_0$ stark lokal und regulär ist (d. h. $\mathfrak{h}_0(u,v) = 0$, falls u konstant f. ü. auf dem Träger von v bzw. $D(\mathfrak{h}_0) \cap C_c(\Gamma)$ ist dicht in $(D(\mathfrak{h}_0), \|\cdot\|_{\mathfrak{h}_0})$ und $(C_c(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$).

Im weiteren versehen wir unseren Graphen mit der von der zum freien Laplace gehörigen Form $\mathfrak{h}_0$ erzeugten intrinsischen Metrik (vgl. [Stu94, BMSt03]):

$$\varrho(x,y) := \sup\{u(x) - u(y) \,|\, u \in D_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{h}_0) \cap C(\Gamma),\, u'^2 \leq 1\}.$$

Dabei sei $D_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{h}_0) = \{u \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Gamma) : \varphi u \in D(\mathfrak{h}_0)$ für alle $\varphi \in D(\mathfrak{h}) \cap C_c(\Gamma)\}$.

Das folgende Lemma gibt uns eine Veranschaulichung und Interpretation dieser Metrik.

2.9 Lemma *In unserem Modell ist der intrinsische Abstand $\varrho(x,y)$ zweier Punkte aus Γ identisch mit der Länge $d(x,y)$ eines kürzesten Weges von x nach y entlang der Kanten im Sinne der Einbettung in $\mathbb{R}^d$.*

Beweis: Zunächst ist $d(x,y)$ wohldefiniert, da konstruktionsbedingt immer kürzeste Wege von x nach y existieren.

Um $d(x,y) \leq \varrho(x,y)$ zu zeigen, wählen wir $u \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Gamma)$ so, dass entlang der zu einem kürzesten Weg γ gehörenden Kanten jeweils $u_e' = \pm 1$ gilt. Das Vorzeichen soll dabei so eingerichtet werden, dass u entlang γ monoton wächst. Diese Wahl ist immer möglich, zum Beispiel als Einschränkung einer geeigneten $C_c^1(\mathbb{R}^d)-$Funktion. Dann gilt $|u(x) - u(y)| = d(x,y)$.

Für die umgekehrte Relation sei $u \in W_2^1(\Gamma)$ mit $|u'(x)| \leq 1$ entlang γ. Man wähle $\varphi \in C_c^\infty(\Gamma)$ so, dass $\varphi|_\gamma = \pm 1$ mit Vorzeichenorientierung und Sinn wie oben. Dann ist

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &= |\, u\varphi|_x^y \,| \\
&= |-\int_\gamma (u\varphi')(t)\, dt + u\varphi|_x^y \,| \\
&= |\int_\gamma (u'\varphi)(t)\, dt| \qquad \text{(partielle Integration)} \\
&\leq |\int_\gamma \varphi(t)\, dt| \\
&= d(x,y).
\end{aligned}$$

Dabei ist das Kurvenintegral und die zugehörige Parametrisierung wieder im natürlichen Zusammenhang mit der Einbettung zu lesen.

□

Der zweite zu prüfende Punkt für die Anwendung von [BMSt03] ist, dass das Volumen der Kugeln bezüglich der intrinsischen Metrik höchstens polynomiell im Radius wächst; d. h. dass eine Schranke der Form $|B_r(x_0)| \leq C\, r^d$ für r groß existiert. Für $r > 42$ ist z. B. stets $B_r(x_0) \subset \Lambda_R(x)$ für den zu x_0 nächstliegenden Knoten $x \in V(\Gamma)$ und $R \in \mathbb{N}$ mit $4r - 1 \leq R \leq 4r$. Daher gilt

$$|B_r(x_0)| \leq \sharp E(\Gamma \cap \Lambda_R(x)) = d\, R^d \leq 4^d d\, r^d.$$

Als eine dritte Voraussetzung ist zu prüfen, dass e^{-tH_0} für ein $t > 0$ beschränkt ist als Abbildung von $L_2(\Gamma)$ nach $L_\infty(\Gamma)$. Dafür zeigen wir die folgende Verallgemeinerung von [KMS06], Lemma 3.2, mit der ebendort benutzten Methode.

2.10 Lemma *Für $t \in (0, 1]$ gilt*

$$\|e^{-tH_0}\|_{L_2(\Gamma) \to L_\infty(\Gamma)} \leq c t^{-\frac{1}{4}}.$$

Beweis: Nach Folgerung 6.11 (mit $\mu = 1$) ist es ausreichend zu zeigen, dass

$$\|f\|_{L_2(\Gamma)} \leq C \cdot \|f\|_{\mathfrak{h}_0}^{\frac{1}{3}} \cdot \|f\|_{L_1(\Gamma)}^{\frac{2}{3}}$$

für $f \in D(\mathfrak{h}_0) \cap L_1(\Gamma)$. Die Nash-Typ-Ungleichung von Folgerung 6.6 liefert zunächst für $u \in W_2^1(0,1)$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(0,1)} &\leq c_1 \cdot (\|u'\|_{L_2(0,1)} + \|u\|_{L_1(0,1)})^{\frac{1}{3}} \cdot \|u\|_{L_1(0,1)}^{\frac{2}{3}} \\ &\leq c_1 \cdot \|u\|_{W_2^1(0,1)}^{\frac{1}{3}} \cdot \|u\|_{L_1(0,1)}^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

wobei im letzteren Schritt die Hölderungleichung auf $u \cdot 1$ angewendet wurde. Für $f \in D(\mathfrak{h}_0) \cap L_1(\Gamma)$ ist also unter erneuter Anwendung der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2(\Gamma)}^2 &= \sum_{e \in E(\Gamma)} \|f_e\|_{L_2(0,1)}^2 \\ &\leq c_1^2 \sum_{e \in E(\Gamma)} \|f_e\|_{W_2^1(0,1)}^{\frac{2}{3}} \cdot \|f_e\|_{L_1(0,1)}^{\frac{4}{3}} \\ &\leq c_1^2 \Big(\sum_{e \in E(\Gamma)} \|f_e\|_{W_2^1(0,1)}^2 \Big)^{\frac{1}{3}} \cdot \Big(\sum_{e \in E(\Gamma)} \|f_e\|_{L_1(0,1)} \Big)^{\frac{4}{3}} \\ &= c_2 \cdot \|f\|_{\mathfrak{h}_0}^{\frac{2}{3}} \cdot \|f\|_{L_1(\Gamma)}^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

□

Unter den oben geprüften Voraussetzungen wurde in [BMSt03] folgendes Resultat bewiesen:

2.11 Satz *Zu bezüglich des Spektralmaßes fast jedem $\lambda \in \sigma(H)$ existiert eine verallgemeinerte Eigenfunktion φ mit*

$$(1 + \varrho(x_0, \cdot))^{-\frac{d+1}{2}-\varepsilon}\varphi \in L_2(\Gamma)$$

für ein $x_0 \in \Gamma$ und alle $\varepsilon > 0$.

Beweis: siehe [BMSt03], Theorem 1.1 und folgender Text, dortiges Corollary 3.1, sowie [SV96], Theorem 5.1.

□

Da unser Graph in $\mathbb{R}^d$ eingebettet ist, braucht man nicht mit der unhandlichen intrinsischen Metrik zu arbeiten:

2.12 Folgerung *Die verallgemeinerten Eigenfunktionen aus Satz 2.11 erfüllen*

$$(1 + |\cdot|^2)^{-\frac{m}{2}}\varphi \in L_2(\Gamma)$$

für jedes $m > \frac{d+1}{2}$.

Beweis: Der Beweis reduziert sich auf einen Vergleich der Gewichtsfunktionen. Zunächst bemerken wir, dass für alle $x \in \Gamma$ die Beziehung $\varrho(x, 0) = \|x\|_1$ gilt, wobei sich $\|\cdot\|_1$ auf $\mathbb{R}^d$ bezieht. Für $m := \frac{d+1}{2} + \varepsilon$ ist

$$\begin{aligned}(1 + \varrho(x, x_0))^{-m} &\geq (1 + \varrho(0, x_0) + \varrho(x, 0))^{-m} \\ &= (1 + \varrho(0, x_0))^{-m}(1 + \frac{\varrho(x, 0)}{1 + \varrho(0, x_0)})^{-m} \\ &\geq (1 + \varrho(0, x_0))^{-m}(1 + \|x\|_1)^{-m},\end{aligned}$$

d. h. mit $(1 + \varrho(\cdot, x_0))^{-m}\varphi \in L_2(\Gamma)$ gilt auch $(1 + \|\cdot\|_1)^{-m}\varphi \in L_2(\Gamma)$.

Sei $C > 1$ so, dass $\|x\|_1 \leq C|x|$ $(x \in \mathbb{R}^d)$, dann ist $(1+\|x\|_1)^{-m} \geq C^{-m}(1+|x|)$. Elementare Umformungen zeigen weiter, dass

$$1 + |x| \leq \sqrt{2}\,(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^d);$$

damit ist alles bewiesen.

□

Kapitel 3

Lokalisierung

3.1 Zur Beweisstruktur

Mit den Werkzeugen aus Kapitel 2 können wir nun den Lokalisierungsbeweis in Angriff zu nehmen. Das ist das Hauptziel dieses Kapitels.

Das Herzstück des Beweises ist ein Induktionsprozess, welcher gewisse gutartige Eigenschaften (exponentielles Abfallen) der Resolventen der Operatorrestriktionen auf Würfel sichert. Die Induktion läuft dabei über eine Folge von Seitenlängen, daher der Name Multiskalenanalyse. Man beachte, dass die Einschränkung unseres Operators auf Würfel ein rein diskretes Spektrum bedingt. Die Anfangslängenabschätzung wird dabei beim Induktionsanfang, die Wegner-Abschätzung sowie die geometrische Resolventenungleichung beim Induktionsschritt benötigt. Die Combes-Thomas-Abschätzungen kann man dabei als eine Art Übersetzungswerkzeug von Aussagen über Eigenwerte hin zu Aussagen über das Abfallen lokaler Resolventen verstehen.

In Abschnitt 3.3 werden wir dann Anderson-Lokalisierung, d. h. die Existenz reinen Punktspektrums mit exponentiell abfallenden Eigenfunktionen nahe dem unteren Ende des Spektrums von $H(\omega)$ ableiten. Anschließend sollen in Abschnitt 3.4 Konsequenzen für die Dynamik der beschriebenen Teilchen im Rahmen der starken dynamischen Lokalisierung untersucht werden. Eine schematische Darstellung des Vorgehens ist in Abbildung 3.1 gegeben.

Die hier verwendete Form des Beweises ist weitgehend an die Quelle [Sto01] angepasst, wo die Multiskalenanalyse in einer Art Modulbauweise vorgestellt wird, die man an neue Modelle sehr gut anpassen kann.

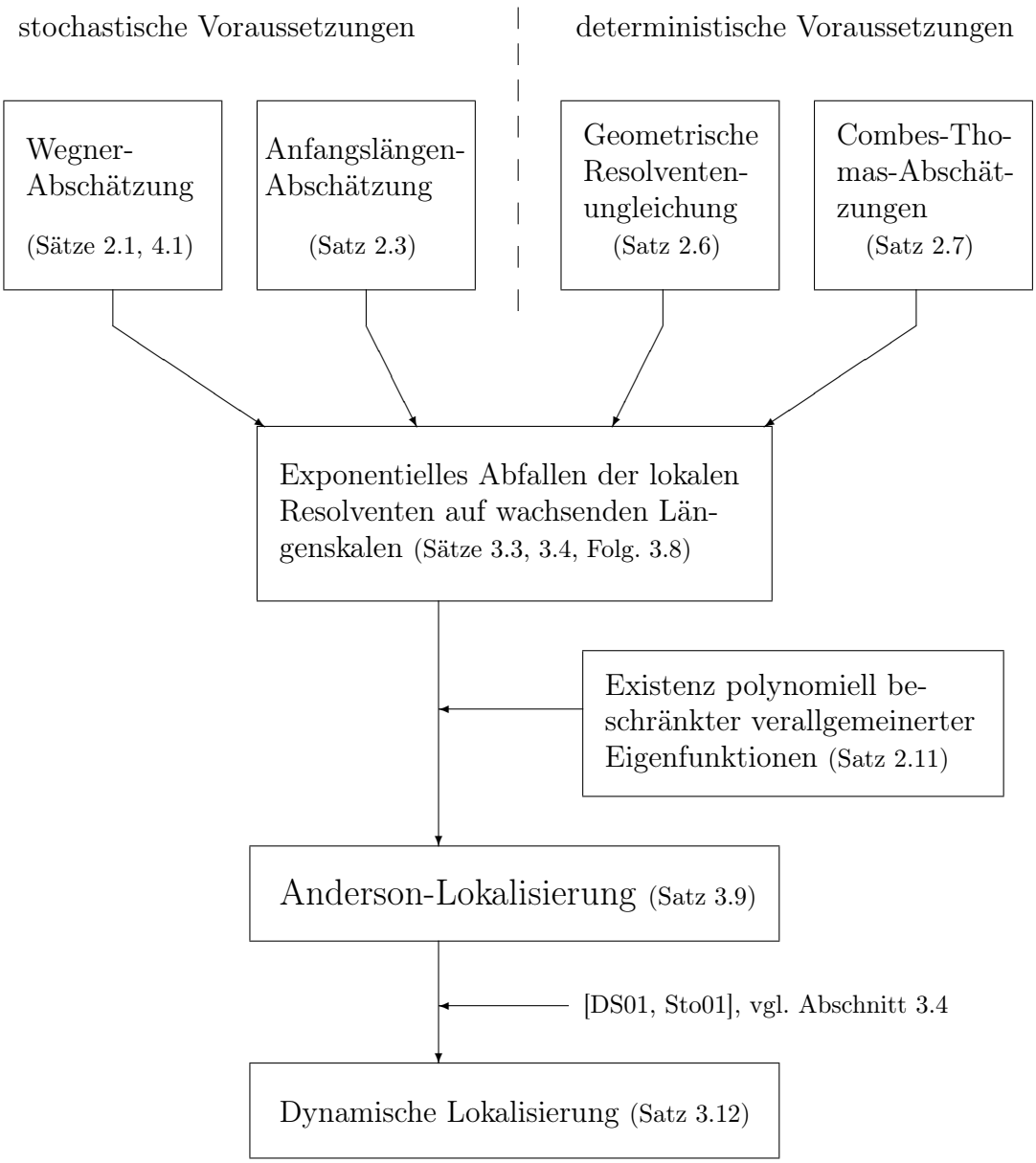


Abbildung 3.1: Struktur des Lokalisierungsbeweises (nach [Sto01], Fig. 2.0.1: "The Multiscale Guide").

3.2 Die Multiskalenanalyse

In diesem Abschnitt soll das bereits mehrfach erwähnte Induktionsargument ausgeführt werden. Kurz ausgedrückt geht es dabei um das exponentielle Abklingen der lokalen Resolventen auf größer werdenden Längenskalen, auf welchen die Induktion läuft. Spezifiziert wird dieser Begriff durch die folgende Definition. Dabei werden die Bezeichnungen aus Kapitel 2.3 verwendet und eine der Randbedingungen fixiert.

3.1 Definition *Seien $\gamma > 0$ und $E \in \varrho(H_\Lambda(\omega))$. Ein geeigneter Würfel $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ heißt (γ, E)-gut für $\omega \in \Omega$, falls*

$$\|\chi^{out} R_\Lambda(E) \chi^{int}\| \leq e^{-\gamma \cdot l},$$

wobei $R_\Lambda(E) = R_\Lambda(\omega, E) := (H_\Lambda(\omega) - E)^{-1}$. Im komplementären Fall nennen wir einen solchen Würfel (γ, E)-schlecht für ω.

Mit dieser Terminologie sollen einige Abkürzungen für häufig benötigte Aussagen eingeführt werden. Das Setting stammt wie erwähnt bis auf Anpassung mehrerer Konstanten aus [Sto01].

3.2 Definition *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $l \in 6\mathbb{N} \setminus 12\mathbb{N}, l \geq 42$ sowie $\gamma, \xi, \Theta, q > 0$. Wir definieren die folgenden Abkürzungen für logische Aussagen:*

(i) $G(I, l, \gamma, \xi)$:

Für alle $x, y \in \mathbb{Z}^d$ mit $d(x, y) \geq l$ gilt die Abschätzung

$$\mathbb{P}\{\forall E \in I : \Lambda_l(x) \text{ oder } \Lambda_l(y) \text{ ist } (\gamma, E)\text{-gut für } \omega\} \geq 1 - l^{-2\xi}. \tag{3.1}$$

(ii) $W(I, l, \Theta, q)$:

Für alle $E \in I$ und alle geeigneten Würfel $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ der Kantenlänge l gilt

$$\mathbb{P}\{dist(\sigma(H_\Lambda(\omega)), E) \leq \exp(-l^\Theta)\} \leq l^{-q}. \tag{3.2}$$

(iii) (WEYL):

Sei $I_0 \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Zu jedem Intervall $J \subset I_0$ existiert eine Konstante C_{Weyl}, so dass für alle geeigneten Würfel $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ und alle $\omega \in \Omega$ gilt:

$$tr(\chi_J(H_\Lambda(\omega))) \leq C_{Weyl} \cdot |\Lambda|. \tag{3.3}$$

(iv) (GRI):

Zu jedem beschränkten $I_0 \subset \mathbb{R}$ existiert eine Konstante C_{geom}, so dass für geeignete Würfel $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{R}^d$ mit $\Lambda \subset \Lambda'$, $A \subset \Lambda^{int}$ und $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ $\Gamma-$kantenberandete Gebiete, $E \in I_0$ und $\omega \in \Omega$ gilt:

$$\|\chi_B R_{\Lambda'}(E)\chi_A\| \leq C_{geom} \cdot \|\chi_B R_{\Lambda'}(E)\chi_\Lambda^{out}\| \cdot \|\chi_\Lambda^{out} R_\Lambda(E)\chi_A\|.$$

Wir wissen bereits, dass für unseren Operator H die Beziehungen (GRI) und (WEYL) erfüllt sind, vgl. Satz 2.6 und die Argumentation im Beweis von Satz 2.1.

Weiterhin seien $I_0 = [q_- - 1, q_- + 1]$, $\Theta \in (0, \frac{1}{2})$ und $q > d$. Die Wegner-Abschätzung (Satz 2.1) liefert dann

$$\mathbb{P}\{\mathrm{dist}(\sigma(H_\Lambda(\omega)), E) \leq \exp(-l^\Theta)\} \leq C \cdot l^{2d} \cdot \exp(-\alpha l^\Theta)$$

für geeignete Würfel mit Seitenlänge l. Die Exponentialfunktion auf der rechten Seite fällt schneller als jedes inverse Polynom, d. h. es existiert ein $l_0 = l_0(C, \Theta, \alpha, q)$, so dass $W(I_0, l, \Theta, q)$ für alle $l > l_0$ erfüllt ist.

Ziel dieses Kapitels soll es nun sein, die Existenz einer Folge (l_k) von Längenskalen mit $l_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ zu zeigen, so dass für ein geeignetes Intervall I am unteren Ende des deterministischen Spektrums für alle $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $G(I, l_k, \gamma_\infty, \xi)$ mit passenden Parametern gilt.

Dabei erweist sich die gleichmäßige Wahl von γ_∞ bereits vor der Durchführung der Induktion als problematisch. Aus diesem Grund beginnen wir unsere Beweisführung mit einem "Induktionsanfang" und leiten im Induktionsschritt aus $G(I, l_k, \gamma_k, \xi)$ zunächst die Beziehung $G(I, l_{k+1}, \gamma_{k+1}, \xi)$ mit $l_{k+1} \gg l_k$ und $\gamma_k \approx \gamma_{k+1}$ her. Ein zusätzliches Argument liefert anschließend die gleichmäßige Wählbarkeit von γ.

3.3 Satz (Induktionsanfang) *Sei $\xi_0 \in (0, 2\tau - d)$. Dann gibt es ein $\tilde{\beta} \in (0, 2)$, so dass für l groß genug, $0 < \beta < \frac{\tilde{\beta}}{2}$, $\gamma := l^{\beta-1}$ und $I := [q_-, q_- + \frac{1}{2} l^{\tilde{\beta}-2}]$ die Abschätzung $G(I, l, \gamma, \xi_0)$ gilt.*

Beweis: Nach Satz 2.3 existieren eine Anfangslänge $l^* = l^*(\sigma, \tau, \xi_0)$ und $\tilde{\beta} \in (0, 2)$, so dass

$$\mathbb{P}\{\mathrm{dist}(\sigma(H_\Lambda(\omega)), q_-) \leq l^{\tilde{\beta}-2}\} \leq l^{-\xi_0}$$

für alle $l \geq l^*$. Wir wählen ein ω so, dass $\mathrm{dist}(\sigma(H_\Lambda(\omega)), q_-) > l^{\tilde{\beta}-2}$; mit obiger Ungleichung ist dies problemlos möglich. Durch Anwendung der Combes-Thomas-Abschätzung aus Satz 2.7 mit $E \in I$, $r := q_- - 1$ und $s := q_- + l^{\tilde{\beta}-2}$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\chi_\Lambda^{\text{int}} R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\text{out}}\| &\leq c_1 \cdot 2l^{2-\tilde{\beta}} \cdot \exp[-c_2\,(\frac{l}{3}-6)\sqrt{\frac{1}{2}l^{\tilde{\beta}-2}(l^{\tilde{\beta}-2}+1)}\,] \\ &\leq c_3\, l^{\,2-\tilde{\beta}} \cdot \exp[-\frac{c_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l^{\frac{\tilde{\beta}}{2}}}{l}\,] \\ &\leq c_3\, l^{\,2-\tilde{\beta}} \cdot \exp[-c_4\, l^{\frac{\tilde{\beta}}{2}}\,] \\ &\leq \exp(-l^\beta)\end{aligned}$$

für $0 < \beta < \frac{\tilde{\beta}}{2}$ und $l \geq l_1(c_3, c_4, \tilde{\beta}, l^*)$. Da Operatorrestriktionen auf disjunkte Würfel unabhängig sind, folgt $G(I, l, \gamma, \xi_0)$ mit $\gamma := l^{\beta-1}$ und $I := [q_-, q_- + \frac{1}{2}l^{\tilde{\beta}-2}]$.

□

3.4 Satz (Induktionstheorem) *Seien $I_0 \subset \mathbb{R}$ offen und beschränkt, $\xi_0 > 0$, $\beta > 2\Theta$. Wir wählen weiter $\alpha \in (1,2)$ so, dass*

$$4d\,\frac{\alpha-1}{2-\alpha} \leq \min\{\xi_0, \frac{1}{4}(q-d)\}.$$

Dann existieren $C_1 = C_1(d, C_{geom})$ und $l^* = l^*(q, d, \xi_0, \Theta, \beta, \alpha)$, so dass folgende Aussage gilt: Ist für $\overline{I} \subset I_0$, $l \geq l^*$ und $\gamma \geq l^{\beta-1}$ die Abschätzung $G(I, l, \gamma, \xi_0)$ erfüllt, so gilt auch $G(I, L, \gamma_L, \xi)$ mit

(i) $l^\alpha \leq L \leq l^\alpha + 12$,

(ii) $\xi \geq \min\{\xi_0, \frac{1}{4}(q-d)\}$,

(iii) $\gamma_L = \gamma(1 - 25l^{1-\alpha}) - C_1\, l^{-1} - 6l^{\alpha(\Theta-1)} \geq L^{\beta-1}$.

Ferner erhalten wir

$$\xi \geq 4d\,\frac{\alpha-1}{2-\alpha}.$$

Der Beweis dieses Theorems soll in mehreren Teilschritten erfolgen, wobei die Hauptlinie für die jeweiligen Lemmata unterbrochen werden soll. Die globalen Bezeichnungen gelten dabei jeweils weiter. Es soll von vornherein als vereinbart gelten, dass die Anfangslänge bei Bedarf passend vergrößert wird (es geht dabei immer um den Vergleich polynomiellen und exponentiellen Wachstums).

Die Beweisidee ist dabei relativ simpel: Man betrachtet gleichzeitig zwei disjunkte Würfel mit Seitenlänge L und innerhalb dieser wieder disjunkte Würfel mit Seitenlänge l. Die Wahrscheinlichkeit, dass vier solche Würfel schlecht sind, kann aufgrund der Unabhängigkeit und $G(I, l, \gamma_l, \xi)$ grob durch $l^{-4\xi}$ abgeschätzt werden. Mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit sind also die meisten dieser Würfel

gut. Das exponentielle Abklingen der zugehörigen lokalen Resolventen kann mit Hilfe der geometrischen Resolventenungleichung aufsummiert werden - es bleibt ein Term, der von den (höchstens drei verbliebenen) schlechten Würfeln erzeugt wird.

Nun können diese je drei kleinen Würfel das exponentielle Abklingen der Resolventen bei einer bestimmten Energie nur dann zerstören, wenn sie "resonant" sind, d. h. Eigenwerte sehr nahe dieser Energie besitzen. Aufgrund der Wegner-Abschätzung ist es jedoch ausgesprochen unwahrscheinlich, dass dies für die beiden großen Würfel gleichzeitig passiert.

Beweis (Satz 3.4): Seien $x \in \mathbb{Z}^d$ und $\Gamma_x := x + \frac{l}{3}\mathbb{Z}^d$. Wir wählen $\alpha \in (1,2)$ so, dass

$$4d\,\frac{\alpha-1}{2-\alpha} \leq \min\{\xi_0, \frac{1}{4}(q-d)\} \tag{3.4}$$

und definieren

$$\xi := \min\{\xi_0, \frac{1}{4}(q-d)\}. \tag{3.5}$$

Dann folgt zunächst $2d(\alpha-1) \leq \xi$. Sei weiter $L \in 6\mathbb{N} \setminus 12\mathbb{N}$ so, dass

$$l^\alpha \leq L \leq l^\alpha + 12 \leq 6\,l^\alpha, \tag{3.6}$$

was für $l \geq 42$ immer einzurichten ist. Sei

$$\begin{aligned}\Omega_G \;:=\; &\{\omega \in \Omega : \text{Für alle } E \in I \text{ gibt es keine 4 disjunkten Würfel}\\ &\Lambda_i = \Lambda_l(b_i) \subset \Lambda_L(x) \text{ mit } b_i \in \Gamma\,(i = 1\ldots 4), \text{ die}\\ &\text{allesamt nicht } (\gamma, E)\text{-gut für } \omega \text{ sind.}\},\end{aligned}$$

d. h. für $\omega \in \Omega_G$ und alle $E \in I$ gibt es höchstens drei disjunkte (γ, E)-schlechte Würfel in $\Lambda_L(x)$ mit Seitenlänge l und Zentrum in Γ_x.

⊟

Das folgende Lemma soll die Wahrscheinlichkeit für Ω_G abschätzen und einen Überblick über die geometrische Lage der schlechten Boxen in $\Lambda_L(x)$ geben.

3.5 Lemma *Für Ω_G gemäß obiger Definition gelten:*

(a) Es existiert ein $l_4 = l_4(q, d, \xi_0, \alpha)$, so dass für $l \geq l_4$ gilt:

$$\mathbb{P}(\Omega_G) \geq 1 - \frac{1}{3}\,L^{-2\xi}.$$

(b) *Für $\omega \in \Omega_G$, $E \in I$, l groß genug gibt es drei disjunkte offene Würfel $\Lambda_i^b \subset \Lambda_L(x)\,(i = 1, 2, 3)$ mit Seitenlängen l_i, Zentrum in Γ_x und folgenden Eigenschaften:*

(i) $l_i \in \mathcal{L} := \{0, 2l, 4l, 5l, 6l, 7l, 8l\}$, $\sum_{i=1}^3 l_i \leq 8l\}$.

(ii) Falls $\Lambda_l(b)$ mit $b \in \Gamma_x$ für ω nicht (γ, E)-gut ist, so gilt

$$\Lambda_l(b) \subset \bigcup_{i=1}^{3} \Lambda_i^b.$$

(iii) Für $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ gilt $d(\Lambda_i^b, \Lambda_j^b) \geq \frac{l}{3}$.

Beweis: (a) Für $\omega \notin \Omega_G$ gibt es eine Energie $E \in I$, für die vier disjunkte schlechte Würfel existieren, d. h. zwei unabhängige Paare. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist wegen der Unabhängigkeit und $G(I, l, \gamma, \xi_0)$ durch $(l^{-2\xi_0})^2$ beschränkt.

Weiter gibt es in $\Lambda_L(x)$ aufgrund elementarer Kombinatorik höchstens $(\frac{3L}{l})^{4d}$ Quadrupel disjunkter Würfel mit Zentren in Γ_x, d. h.

$$\mathbb{P}(\Omega_G^c) \leq (\frac{3L}{l})^{4d} \cdot l^{-4\xi_0}.$$

Wir vergleichen diesen Term mit $L^{-2\xi}$ und schätzen mit Hilfe von (3.4) und (3.6) weiter ab:

$$\begin{aligned}(\frac{3L}{l})^{4d} l^{-4\xi_0} L^{2\xi} &\leq 3^{4d} \cdot 6^{4d} \cdot l^{4d(\alpha-1)} \cdot l^{-4\xi_0} \cdot 6^{2\xi} \cdot l^{2\alpha\xi} \\ &\leq 18^{4d} \cdot 6^{2\xi} \cdot \underbrace{l^{4d(\alpha-1)-4\xi_0+2\alpha\xi}}_{=l^{-(4d(1-\alpha)+4\xi_0-2\alpha\xi)}}.\end{aligned}$$

Mit unserer Wahl der Parameter α und ξ gilt weiter

$$\begin{aligned}4d(1-\alpha) + 4\xi_0 - 2\alpha\xi &\geq 4d(1-\alpha) + 2\xi(2-\alpha) \\ &\geq 4d(1-\alpha) + \frac{8d(\alpha-1)}{2-\alpha}(2-\alpha) \\ &= 4d(\alpha-1).\end{aligned}$$

Wir finden schließlich ein $l_4 = l_4(q, d, \xi_0, \alpha)$, so dass

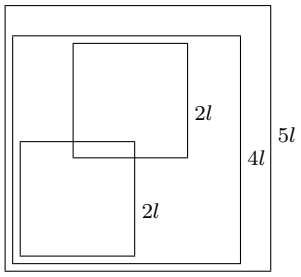
$$18^{4d} \cdot 6^{2\xi} \cdot l^{-4d(\alpha-1)} \leq \frac{1}{3}$$

für $l \geq l_4$ gilt und damit

$$\mathbb{P}(\Omega_G^c) \leq \frac{1}{3} L^{-2\xi}.$$

(b) Ohne Einschränkung untersuchen wir den ungünstigsten Fall mit drei schlechten Würfeln. Seien $u_i \in \Gamma_x (i = 1, 2, 3)$ so, dass $\Lambda_l(u_i)$ disjunkt und (γ, E)-schlecht sind.

Zunächst muss jeder schlechte Würfel in $\cup_{i=1}^{3} \Lambda_{2l}(u_i)$ enthalten sein, sonst gäbe es 4 disjunkte schlechte Würfel. Für $\Lambda_i' := \Lambda_{2l}(u_i)$ sind die Eigenschaften (i) und (ii) bereits erfüllt; es sind lediglich noch eventuelle Berührungen oder Überschneidungen auszuschließen. Dies geschieht, indem man die betreffenden Würfel jeweils durch einen größeren ersetzt.



Falls $d(\Lambda_1', \Lambda_2') < \frac{l}{3}$, gilt $\overline{\Lambda_1'} \cap \overline{\Lambda_2'} \neq \emptyset$, und wir finden als Obermenge einen größeren Würfel $\Lambda_{4l}(\tilde{y})$ mit Zentrum $\tilde{y} \in \mathbb{R}^d$. Um das Zentrum dieses Würfels auf einen Punkt des Gitters Γ_x zu bringen und $l_i \in 6\mathbb{N}$ zu sichern, kann es schließlich notwendig werden, die Seitenlänge noch einmal um l zu vergrößern. Wir erhalten einen neuen Würfel Λ_1''.

Falls mit $\Lambda_1^b := \Lambda_1''$, $\Lambda_2^b := \emptyset$, $\Lambda_3^b := \Lambda_3'$ die Eigenschaft (iii) erfüllt ist, ist wieder alles bewiesen, andernfalls wiederholen wir den Schritt mit Λ_1'' und Λ_3. Die Kombination aller Möglichkeiten ergibt die Aussage (b) des Lemmas.

□

Unser nächstes Anliegen ist, für $\omega \in \Omega_G$ zu zeigen, dass $\Lambda_L(x)$ (γ, E)-gut für alle $E \in I$ ist. Dafür ist es notwendig, die Würfel $\Lambda_i^b \, (i = 1, 2, 3)$ aus Lemma 3.5 zu kontrollieren. Dies gelingt leider nicht für alle Energien gleichzeitig. Aus diesem Grunde werden wir zwei disjunkte Würfel mit Länge L gleichzeitig betrachten und feststellen, dass die schlechten Würfel das gutartige Verhalten der Resolventen nur in der Nähe einer bestimmten Energie zerstören können. Wie schon angedeutet, passiert dies in der Regel aber nicht auf zwei verschiedenen Würfeln gleichzeitig, da die Wegner-Abschätzung als Dissonanzbedingung wirkt. Wir betrachten also grob formuliert $\omega \in \Omega_G(x) \cap \Omega_G(y)$ und entscheiden uns beim Beweis von $G(I, L, \gamma_L, \xi)$, welcher der beiden Würfel für die jeweilige Energie benutzt wird. Diese Idee stammt ursprünglich aus [DK89]; wir folgen hier sehr dicht

der Linie von [Sto01].

⊟

Wir fixieren $y \in \mathbb{Z}^d$ mit $d(x,y) \geq L$. Für einen geeigneten Würfel $\Lambda := \Lambda_s(z)$, $s \geq l_0$, sei

$$\sigma_1(H_\Lambda(\omega)) := \sigma(H_\Lambda(\omega)) \cap (I + (-\frac{1}{2}\exp(-s^\Theta), \frac{1}{2}\exp(-s^\Theta))).$$

Da I_0 offen und $\overline{I} \subset I_0$ vorausgesetzt wurde, gilt für s groß genug

$$(I + (-\frac{1}{2}\exp(-s^\Theta), \frac{1}{2}\exp(-s^\Theta))) \subset I_0.$$

Damit ergibt sich aus (WEYL), dass der Teil $\sigma_1(H_\Lambda(\omega))$ des Spektrums maximal $C_{\text{Weyl}} \cdot s^d$ Elemente enthält.

Für geeignete disjunkte Würfel $\Lambda_i = \Lambda_{l_i}(x_i)\,(i = 1,2)$ erhalten wir daher:

$$\mathbb{P}\{\text{dist}(\sigma_1(H_{\Lambda_1}(\omega)), \sigma_1(H_{\Lambda_2}(\omega))) \leq \exp(-(\min\{l_1,l_2\})^\Theta)\} \leq C_{\text{Weyl}} \frac{(\max\{l_1,l_2\})^d}{(\min\{l_1,l_2\})^q}. \tag{3.7}$$

Um dies zu sehen sei ohne Einschränkung $l_1 := \min\{l_1, l_2\}$. Aus $W(I_0, l, \Theta, q)$, der Unabhängigkeit der eingeschränkten Operatoren und der aus (WEYL) gewonnenen Beziehung folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\ldots\} &= \mathbb{E}_{\Lambda_2}\{\mathbb{P}_{\Lambda_1}\{\text{dist}(\sigma_1(H_{\Lambda_1}(\omega)), \sigma_1(H_{\Lambda_2}(\omega))) \leq \exp(-l_1^\Theta)\}\} \\ &\leq \mathbb{E}_{\Lambda_2}\{C_{\text{Weyl}} \cdot l_2^d \cdot l_1^{-q}\}. \end{aligned}$$

Gleichung (3.7) liefert uns somit eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\begin{aligned} \Omega_W := \{&\omega \in \Omega : \text{Es existieren } \Lambda_i = \Lambda_{l_i}(z_i)\,(i=1,2) \\ &\text{mit } \Lambda_1 \subset \Lambda_L(x), z_1 \in \Gamma_x, \Lambda_2 \subset \Lambda_L(y), z_2 \in \Gamma_y,\ l_i \in \mathcal{L} \cup \{L\} \\ &\text{und } \text{dist}(\sigma_1(H_{\Lambda_1}(\omega)), \sigma_1(H_{\Lambda_2}(\omega))) \leq \exp(-(\min\{l_1,l_2\})^\Theta)\}. \end{aligned}$$

⊟

Wir benutzen (3.7) und die letzteren Argumentationen zur Gewinnung des folgenden Lemmas:

3.6 Lemma *Es existiert ein $l_5 = l_5(q,d,\alpha)$, so dass mit den Bezeichnungen von oben für $l \geq l_5$ gilt:*

$$\mathbb{P}(\Omega_W) \leq \frac{1}{3} L^{-2\xi}. \tag{3.8}$$

Beweis: Unter Verwendung von (3.7), der Kardinalzahl von $\mathcal{L} \cup \{L\}$ und der Anzahl möglicher Würfelpaare lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit grob abschätzen durch

$$\mathbb{P}(\Omega_W) \leq C_{\text{Weyl}} \cdot (\frac{3L}{l})^{2d} \cdot (\#\mathcal{L}+1)^2 \cdot \frac{L^d}{(2l)^q}.$$

Nach (3.6) ist $l^\alpha \leq L \leq 6l^\alpha$, so dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega_W) \cdot L^{2\xi} &\leq C_{\text{Weyl}} \cdot (18)^{2d} \cdot l^{2d(\alpha-1)} \cdot 64 \cdot 6^d \cdot l^{\alpha d - q} \cdot 2^{-q} \cdot 6^{2\xi} \cdot l^{2\alpha\xi} \\ &= \widetilde{C} \cdot l^{2d(\alpha-1)+\alpha d - q + 2\alpha\xi}. \end{aligned}$$

Mit den in (3.4) und (3.5) festgelegten Beziehungen zwischen den verwendeten Parametern gilt weiter

$$\begin{aligned} 2d(\alpha-1)+\alpha d - q + 2\alpha\xi &= 3d(\alpha-1)+d-q+2\alpha\xi \\ &\leq \frac{3}{4}(2-\alpha)\,\xi + d - q + 2\alpha\xi \\ &\leq \frac{3}{4}(2-\alpha)\cdot\frac{1}{4}(q-d) + d - q + 2\alpha\cdot\frac{1}{4}(q-d) \\ &= (\frac{5}{16}\alpha - \frac{5}{8})\cdot(q-d) \; < 0, \end{aligned}$$

da $\alpha \in (1,2)$ und $q > d$. Wir finden also ein $l_5 = l_5(q,d,\alpha)$, so dass $\mathbb{P}(\Omega_W)\cdot L^{2\xi} \leq \frac{1}{3}$ für $l \geq l_5$.

□

Mit dem nächsten Lemma nehmen wir das Kernstück des Beweises in Angriff:

3.7 Lemma *Seien Ω_G, Ω_W wie oben, $\omega \in \Omega_G(x) \cup \Omega_G(y) \cup \Omega_W^c$. Dann gibt es zu jedem $E \in I$ ein $z \in \{x,y\}$, so dass $\Lambda_L(z)$ (γ_L, E)-gut ist mit*

$$\gamma_L = \gamma(1 - 25\,l^{1-\alpha}) - C_1\,l^{-1} - 6l^{\alpha(\Theta-1)} \geq L^{\beta-1}$$

und $C_1 = C_1(C_{geom}, I_0)$.

Beweis: Erstes Ziel soll es sein, die Resolventen zu den schlechten Würfeln Λ_i^b aus Lemma 3.5 zu analysieren. Sei dazu $E \in I$. Wir nennen einen Würfel $\Lambda = \Lambda_s(\tilde{x})$ resonant für ω, falls

$$\text{dist}(\sigma(H_\Lambda(\omega)), E) \leq \frac{1}{2}\exp(-s^\Theta),$$

andernfalls dissonant.

Sei l_1 die maximale Länge aller Würfel $\Lambda_s \subset \Lambda_L(x) \cup \Lambda_L(y)$ mit $s \in \mathcal{L}$ und Zentren in Γ_x bzw. Γ_y, die resonant für ein $\omega \in \Omega_W^c$ sind. Ohne Einschränkung sei solch ein Würfel Λ_1 in $\Lambda_L(y)$ enthalten. Dann sind alle Würfel $\Lambda_2 = \Lambda_{l_2}(u) \subset \Lambda_L(x)$ mit $u \in \Gamma_x$ und $l_2 \in \mathcal{L}$ dissonant, andernfalls wäre

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\sigma_1(H_{\Lambda_1}(\omega)), \sigma_1(H_{\Lambda_2}(\omega))) &\leq \operatorname{dist}(\sigma_1(H_{\Lambda_1}(\omega)), E) + \operatorname{dist}(E, \sigma_1(H_{\Lambda_2}(\omega))) \\ &\leq \frac{1}{2}\exp(-l_1^\Theta) + \frac{1}{2}\exp(-l_2^\Theta) \\ &\leq \exp(-(\min\{l_1, l_2\})^\Theta),\end{aligned}$$

d. h. $\omega \in \Omega_W$. Wir bemerken insbesondere, dass die Würfel $\Lambda_{l_i} = \Lambda_i^b \subset \Lambda_L(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ aus Lemma 3.5 die Dissonanzeigenschaft besitzen.

Es folgt wieder eine Anwendung der Combes-Thomas-Abschätzung aus Satz 2.7. Seien in der dortigen Terminologie $\Lambda := \Lambda_i^b\,(i \in \{1, 2, 3\})$, $A := \Lambda_l^{\text{int}}(\hat{x})$, $B := (\Lambda_i^b)^{\text{out}}$ - mit $\Lambda_l(\hat{x}) \subset \Lambda_i^b$ und $\hat{x} \in \Gamma_x$ - und weiter $r := E - \frac{1}{2}\exp(-l_i^\Theta)$ bzw. $s := E + \frac{1}{2}\exp(-l_i^\Theta)$. Dann erhalten wir die Existenz zweier Konstanten $C_{\text{CTE}} = C_{\text{CTE}}(I_0), c_2 = c_2(I_0)$, so dass

$$\begin{aligned}\|\chi_{\Lambda_i^b}^{\text{out}} R_{\Lambda_i^b}(E) \chi_{l,\hat{x}}^{\text{int}}\| &\leq C_{\text{CTE}} \cdot 2\,\exp(l_i^\Theta) \cdot \underbrace{\exp(-\frac{c_2}{\sqrt{2}} \cdot \exp(-l_i^\Theta) \cdot (\frac{l}{3} - 6))}_{\leq 1} \\ &\leq 2\,C_{\text{CTE}} \cdot \exp(l_i^\Theta). \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Wir wählen nun $x_0 \in \Gamma_x \cap \Lambda_L^{\text{int}}(x)$ und starten einen Iterationsprozess in $\Lambda_L(x)$ mit dem Ziel, eine Abschätzung des Terms

$$\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_0}^{\text{int}}\|$$

herzuleiten. Wir nehmen an, wir hätten bereits $x_0, \ldots, x_k \in \Gamma_x \cap \Lambda_L(x)$ und $\Lambda_l(x_j) \cap \Lambda_L^{\text{out}} = \emptyset$ $(j = 0, \ldots, k)$ mit $k \geq 0$ gewählt und unterscheiden für ω gemäß Voraussetzung zwei Fälle:

(G): $\Lambda_{l,x_k} = \Lambda_l(x_k)$ ist (γ, E)-gut.

Dann erhalten wir mit (GRI):

$$\begin{aligned}\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_k}^{\text{int}}\| &\leq C_{\text{geom}} \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_k}^{\text{out}}\| \cdot \|\chi_{l,x_k}^{\text{out}} R_{l,x_k}(E) \chi_{l,x_k}^{\text{int}}\| \\ &\leq C_{\text{geom}} \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_k}^{\text{out}}\| \cdot e^{-\gamma l}.\end{aligned}$$

Nun kann $\Lambda_{l,x_k}^{\text{out}}$ bis auf eine Menge vom Lebesgue-Maß 0 durch $3^d - 1$ Würfel der Seitenlänge $\frac{l}{3}$ mit Zentren in Γ_x überdeckt werden (siehe Abb. 3.2, rechts). Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_k}^{\text{out}}\| &\leq \sum_{\tilde{x} \in \Gamma_x \cap (\Lambda_{l,x_k} \setminus \Lambda_{l,x_k}^{\text{int}})} \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,\tilde{x}}^{\text{int}}\| \\ &\leq (3^d - 1) \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_{k+1}}^{\text{int}}\|,\end{aligned}$$

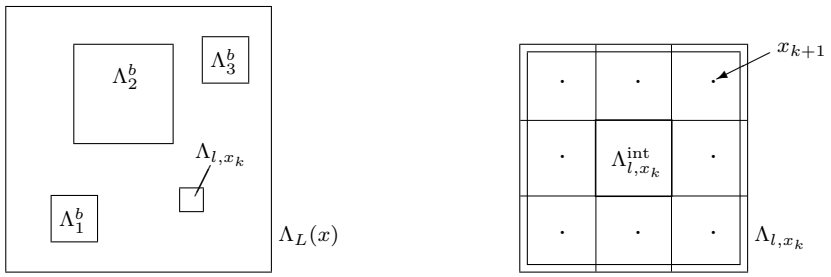


Abbildung 3.2: Globale und lokale Visualisierung von Fall (G)

wobei x_{k+1} so wählen ist, dass die zugehörige Norm maximal wird. Wir beachten, dass x_{k+1} im Gitter Γ_x mit x_k benachbart ist und daher

$$d_\infty(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{l}{3}$$

gilt. Zusammenfassen liefert schließlich

$$\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_k}^{\text{int}}\| \leq \underbrace{C_{\text{geom}} \cdot (3^d - 1) \cdot e^{-\gamma l}}_{=:\delta_G} \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_{k+1}}^{\text{int}}\|. \qquad (3.10)$$

(B): $\Lambda_{l,x_k} = \Lambda_l(x_k)$ ist (γ, E)-schlecht.

In diesem Falle existiert nach Lemma 3.5 ein $i \in \{1,2,3\}$, so dass $\Lambda_{l,x_k} \subset \Lambda_i^b$. Wir verwenden wieder (GRI) und erhalten in Verbindung mit (3.9):

$$\begin{aligned} \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_k}^{\text{int}}\| &\leq C_{\text{geom}} \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{\Lambda_i^b}^{\text{out}}\| \cdot \|\chi_{\Lambda_i^b}^{\text{out}} R_{\Lambda_i^b}(E) \chi_{l,x_k}^{\text{int}}\| \\ &\leq C_{\text{geom}} \cdot 2\, C_{\text{CTE}} \exp(l_i^\Theta) \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{\Lambda_i^b}^{\text{out}}\|. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass Λ_i^b - wie bereits gezeigt - dissonant ist.

Wir überdecken diesmal $(\Lambda_i^b)^{\text{out}}$ mit in Γ_x zentrierten Würfeln der Länge $\frac{l}{3}$ (vgl. Abb. 3.3, rechts) und erhalten

$$\chi_{\Lambda_i^b}^{\text{out}} \leq \sum_{\tilde{x} \in \Gamma_x \cap \Lambda_i^b : \Lambda_l(\tilde{x}) \not\subseteq \Lambda_i^b} \chi_{l,\tilde{x}}^{\text{int}}$$

im L_2-Sinn. Mit einer groben Abschätzung der Summanden auf der rechten Seite ergibt sich

$$\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{\Lambda_i^b}^{\text{out}}\| \leq (\frac{3l_i}{l})^d \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{\Lambda_{l,\tilde{x}'}}^{\text{int}}\|$$

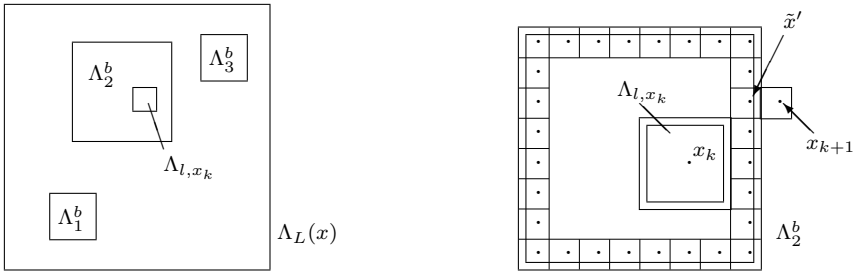


Abbildung 3.3: Globale und lokale Visualisierung von Fall (B)

mit einem $\tilde{x}'$, für welches die zugehörige Norm maximal ist.

Nach Konstruktion ist $\Lambda_l(\tilde{x}')$ aber (γ, E)-gut für ω. Wir führen einen Schritt gemäß Fall (G) durch und erhalten ein $x_{k+1} \in \Gamma_x$, $d(x_{k+1}, \tilde{x}') = \frac{l}{3}$, mit

$$\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_k}^{\text{int}}\| \leq \delta_B \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{\Lambda_{l,x_{k+1}}}^{\text{int}}\|, \tag{3.11}$$

wobei

$$\delta_B := 2\, C_{\text{CTE}} \cdot C_{\text{geom}}^2 \cdot (3^d - 1) \cdot \exp(l_i^\Theta) \cdot (\frac{3l_i}{l})^d \cdot e^{-\gamma l}.$$

Weiterhin bemerken wir, dass

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq l_i.$$

Nach n Iterationen mit n_G Schritten gemäß Fall (G) und n_B Schritten gemäß Fall (B) erhalten wir nun

$$\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_0}^{\text{int}}\| \leq \delta_G^{n_G} \cdot \delta_B^{n_B} \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{\Lambda_{l,x_n}}^{\text{int}}\|.$$

Dabei ist zu beachten, dass wegen der Anwendbarkeit von (GRI) nur solange iteriert werden kann, wie $\Lambda_l(x_k) \cap \Lambda_L^{\text{out}} = \emptyset$ ist.

Wir werden im nächsten Schritt zeigen, dass die Werte δ_G und δ_B hinreichend klein und die bei einer solchen Iteration mögliche Anzahl n_G von Iterationen gemäß Fall (G) hinreichend groß ist. Dafür bemerken wir zunächst, dass wegen $\gamma \geq l^{\beta-1}$ gilt:

$$\begin{aligned} \delta_G &= C_{\text{geom}} \cdot (3^d - 1) \cdot \exp(-\gamma l) \\ &\leq C_{\text{geom}} \cdot (3^d - 1) \cdot \exp(-l^\beta), \end{aligned}$$

was für l groß genug beliebig klein wird. Weiter finden wir

$$\begin{aligned} \delta_B &\leq 2\, C_{\text{CTE}} \cdot C_{\text{geom}}^2 \cdot (3^d - 1) \cdot \exp(L^\Theta) \cdot 3^d \cdot (\frac{L}{l})^d \cdot \exp(-\gamma l) \\ &\leq C' \cdot l^{d(\alpha-1)} \cdot \exp(6^\Theta l^{\alpha\Theta} - l^\beta) \\ &\leq C' \cdot l^{2d} \cdot \exp(l^{2\Theta} - l^\beta) \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für $l \geq l_6(d, \beta, \Theta)$ groß genug. Für die Anzahl n_G bis zum eventuellen Iterationsstopp gilt weiter

$$n_G \cdot \frac{l}{3} + \sum_{i=1}^{3} l_i \geq \frac{L}{3} - \frac{l}{3}.$$

Dies sieht man leicht, indem man in einem $x_0 \in \Gamma_x \cap \Lambda_L^{\text{int}}$ mit $d(x_0, \partial\Lambda_L^{\text{int}}) \leq \frac{l}{3}$ startet, dann den "Iterationsweg" durch einen kürzesten Weg zu Λ_L^{out} ersetzt und annimmt, dass alle drei Würfel Λ_i^b im Wege stehen. Dabei ist zu beachten, dass Schritte des Falles (B) zum Überspringen der Würfel Λ_i^b führen können (siehe auch Abb. 3.4). Weiterhin ist zu bemerken, dass jeder Schritt des Falles (G) eine Distanz von $\frac{l}{3}$ überwindet.

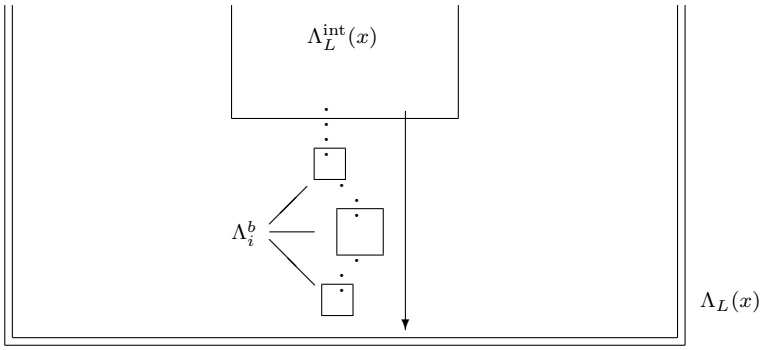


Abbildung 3.4: Ungünstigste Iterationsvariante: Die x_k sind durch Punkte, die Iterationsrichtung durch einen Pfeil markiert.

Natürlich kann es vorkommen, dass der Iterationsprozess später oder überhaupt nicht stoppt; in diesem Falle wird unsere Abschätzung wegen $\delta_G, \delta_B \leq \frac{1}{2}$ besser bzw. beliebig gut.

Zusammenfassend erhalten wir nun mit $\delta_B^{n_B} \leq 1$:

$$\|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{l,x_0}^{\text{int}}\| \leq \delta_G^{n_G} \cdot \|\chi_L^{\text{out}} R_L(E) \chi_{\Lambda_{l,x_n}}^{\text{int}}\|, \tag{3.12}$$

wobei

$$n_G \geq \frac{L}{l} - 1 - \frac{3}{l} \sum_{i=1}^{3} l_i \geq \frac{L}{l} - 25.$$

Dabei lässt sich der letzte Term in (3.12) aufgrund Dissonanz wieder mit einem Combes-Thomas-Argument abschätzen. Wir überdecken $\Lambda_L^{\text{int}}(x)$ mit $(\frac{L}{l})^d$ kleinen

Würfeln $\Lambda^{\text{int}}_{l,\tilde{y}}$, $\tilde{y} \in \Gamma_x$, verwenden (3.12) mit $\tilde{y}$ statt x_0 und erhalten

$$\begin{aligned}
\|\chi^{\text{out}}_L R_L(E)\chi^{\text{int}}_L\| &\leq (\frac{L}{l})^d \cdot \delta_G^{n_G} \cdot 2C'_{\text{CTE}} \cdot \exp(L^\Theta) \quad \text{(vgl. (3.9))} \\
&= (\frac{L}{l})^d \cdot (\widehat{c} \cdot \exp(-\gamma l))^{\frac{L}{l}-25} \cdot \exp(L^\Theta) \\
&\leq 6^d \cdot l^{d(\alpha-1)} \cdot \widehat{c}^{\frac{L}{l}-25} \cdot \exp(-\gamma L + 25\gamma l + L^\Theta) \\
&\leq \exp[\ln(6^d) + d(\alpha-1)\ln l + (\frac{L}{l} - 25)\ln \widehat{c} - \\
&\quad -\gamma(L - 25l) + L \cdot 6^\Theta l^{\alpha(\Theta-1)}] \\
&\leq \exp[-L\{\gamma(1 - 25\frac{l}{L}) - [\frac{\ln(6^d)}{L} + d(\alpha-1)\frac{\ln l}{L} + \frac{1}{l}\ln \widehat{c}] \\
&\quad -6l^{\alpha(\Theta-1)}\}] \\
&\leq \exp[-L(\gamma(1 - 25l^{1-\alpha}) - C_1 \cdot l^{-1} - 6l^{\alpha(\Theta-1)})] \\
&\leq \exp(-\gamma_L \cdot L),
\end{aligned}$$

mit γ_L wie in der Behauptung. Dabei beachte man $l^\alpha \leq L$, und $\ln l \leq l^{\alpha-1}$, d. h. $\frac{\ln l}{l^\alpha} \leq l^{-1}$ für l groß genug.

Es bleibt zu zeigen, dass – wieder für l groß genug – $\gamma_L \geq L^{\beta-1}$ erfüllt ist. Dazu bemerken wir, dass γ_l von der Ordnung $l^{\beta-1}$ ist - also deutlich größer. Ein Exponentenvergleich liefert, dass die in der Formel für γ_L angebrachte Korrektur geringerer Ordnung ist, woraus alles folgt. Dabei sind wieder die Voraussetzungen an die Parameter α, β und Θ, insbesondere die Beziehung $\beta > 2\Theta$, zu beachten.

□

⊟

Es ist nun ein leichtes, den Beweis des Induktionstheorems zu einem erfolgreichen Ende zu bringen. Aus den Aussagen der Lemmata 3.5 und 3.6 wissen wir bereits von der Existenz eines $l^* = l^*(q, d, \xi, \Theta, \beta, \alpha)$, so dass für $l \geq l^*$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega_G(z)) &\geq 1 - \frac{1}{3}L^{-2\xi} \quad (z \in \{x, y\}), \\
\mathbb{P}(\Omega_W) &\leq \frac{1}{3}L^{-2\xi}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathbb{P}(\Omega_G(x) \cup \Omega_G(y) \cup \Omega_W^c) \geq 1 - L^{-2\xi},$$

während Lemma 3.7 aussagt, dass für $\omega \in \Omega_G(x) \cup \Omega_G(y) \cup \Omega_W^c$ und alle $E \in I$ mindestens einer der Würfel $\Lambda_L(x)$ und $\Lambda_L(y)$ (γ_L, E)-gut ist. Dies bedeutet aber

gerade, dass $G(I, L, \gamma_L, \xi)$ erfüllt ist. Dabei sind L, γ_L und ξ wie im Induktionstheorem gefordert; d. h. es ist alles bewiesen.

□

Der nächste Schritt zeigt die gleichmäßige Wählbarkeit des Parameters γ und wendet das Induktionsprinzip an:

3.8 Folgerung *Seien $I, I_0, \xi_0, \beta, \Theta, \alpha, q$ wie in den Sätzen 3.3 und 3.4. Dann existieren eine Folge $(l_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $\gamma_\infty > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $G(I, l_k, \gamma_\infty, \xi)$ mit $\xi := \min\{\xi_0, \frac{1}{4}(q-d)\}$.

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $l_k \in 6\mathbb{N} \setminus 12\mathbb{N}$, $l_k^\alpha \le l_{k+1}^\alpha \le l_k^\alpha + 12 \le 6 l_k^\alpha$.

Beweis: Wir starten oberhalb einer gemäß der Sätze 3.3 und 3.4 gewählten Anfangslänge l^*. Dann gilt wegen $\xi \le \xi_0$ die Beziehung $G(I, l_1, \gamma_1, \xi)$ für $l_1 \ge l^*$ und $\gamma_1 := \min\{\gamma, 1\}$. Mit Satz 3.4 finden wir ein $l_2 \in 6\mathbb{N}$ mit $l_1^\alpha \le l_2 \le l_1^\alpha + 6$ so, dass $G(I, l_2, \gamma_2, \xi)$ gilt, wobei

$$\gamma_2 = \gamma_1(1 - 25 l_1^{1-\alpha}) - C_1\, l_1^{-1} - 6 l_1^{\alpha(\Theta-1)}.$$

Aus letzterer Gleichung folgt

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \gamma_2 &\le 25\gamma_1 l_1^{1-\alpha} + C_1\, l_1^{-1} + 6 l_1^{\alpha(\Theta-1)} \\ &\le 26 l_1^{1-\alpha} + 6 l_1^{\alpha(\Theta-1)} \end{aligned}$$

für $l_1 \ge l'(\alpha, \Theta, C_1)$ unter Verwendung von $\gamma_1 < 1$ und $1 - \alpha > -1$. Mittels Induktion ergibt sich für $k \in \mathbb{N}$ dann weiter

$$\begin{aligned} \gamma_k - \gamma_{k+1} &\le 26\, l_k^{1-\alpha} + 6 l_k^{\alpha(\Theta-1)} \\ &\le 26\, l_1^{\alpha^{k-1}(1-\alpha)} + 6 l_1^{\alpha^k(\Theta-1)}, \end{aligned}$$

wieder wegen $l_k \ge l_{k-1}^\alpha$, $1-\alpha < 0$ und $\Theta - 1 < 0$. Da für große k die Beziehungen $\alpha^{k-1}(1-\alpha) < \widehat{C} < -1$ und $\alpha^k(\Theta - 1) < \widehat{C} < -1$ gelten, lässt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k - \gamma_{k+1})$$

durch eine konvergente harmonische Reihe majorisieren und ist damit selbst konvergent. Da gleichzeitig

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k - \gamma_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} (\gamma_1 - \gamma_{n+1})$$

gilt und die Summe in l_1 monoton fällt, finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Minimallänge $\tilde{l} = \tilde{l}(\alpha, \Theta, l_1) \geq l'(\alpha, \Theta, l_1)$, so dass $\gamma_1 - \gamma_k < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\gamma_\infty := \gamma_1 - \varepsilon$$

und erhalten die gewünschte Behauptung.

□

3.3 Anderson-Lokalisierung

Es stellt sich nun die Frage, was das in Abschnitt 3.2 gewonnene Ergebnis mit dem eigentlichen Ziel, der Lokalisierung, zu tun hat. Dies zu klären ist Gegenstand des vorliegenden Abschnitts.

Wir werden zunächst zeigen, dass unter Gültigkeit der Aussage von Folgerung 3.8 alle polynomial beschränkten $L_{2,\mathrm{loc}}-$Funktionen mit einer gewissen Eigenschaft (EDI) (="eigenfunction decay inequality") exponentiell abfallen. Weiter zeigen wir, dass bezüglich des Spektralmaßes zu fast jedem E im fraglichen Intervall eine polynomiell beschränkte verallgemeinerte Eigenfunktion mit der Eigenschaft (EDI) existiert. Das Zusammenfügen beider Aussagen liefert, dass diese verallgemeinerten Eigenfunktionen echte Eigenfunktionen sein müssen und schließlich exponentiell abfallen. Wir folgen damit wieder dicht der Linie von [Sto01].

Wir werden zunächst unser Ziel formulieren und vor dessen Beweis die erforderlichen Lemmata präsentieren und beweisen.

3.9 Satz (Exponentielle/Anderson-Lokalisierung) *Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass $H(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ in $[q_-, q_- + \varepsilon_0]$ reines Punktspektrum mit im Sinne von Lemma 3.10 exponentiell abfallenden Eigenfunktionen aufweist.*

3.10 Lemma *Seien $\Lambda = \Lambda_l(x)$ geeignet, $I \subset \mathbb{R}$ und γ_∞ wie in Folgerung 3.8. Dann existieren ein $\gamma > 0$ und eine Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ vollen Maßes, so dass es zu jedem $E \in I$, $\omega \in \Omega_0$ und jeder polynomiell beschränkten Funktion $u \in L_{2,loc}(\Gamma)$ mit*

$$\|\chi_{\Lambda_1(x)} u\| \leq c_u \cdot \|\chi_\Lambda^{out} R_\Lambda(E) \chi_\Lambda^{int}\| \cdot \|\chi_\Lambda^{out} u\| \qquad \textit{(EDI)}$$

eine Konstante $C = C(\omega, u, \gamma, \gamma_\infty)$ gibt, so dass

$$\|\chi_{\Lambda_1(x)} u\| \leq C \cdot \exp[-\gamma\, d(x, 0)]. \tag{3.13}$$

Insbesondere gilt

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\log \|\chi_{\Lambda_1(x)} u\|}{d(x, 0)} \leq -\gamma_\infty.$$

Beweis: Wir verwenden die Parameter aus Folgerung 3.8 und Satz 3.4 sowie dessen Beweis. Seien $\varrho \in (\frac{2}{3}, 1)$ und $b > \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$. Für $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ setzen wir

$$A_{k+1}(x_0) := \Lambda_{2bl_{k+1}}(x_0) \setminus \Lambda_{2l_k}(x_0)$$

und betrachten das Ereignis

$$\begin{aligned} E_k(x_0) \;:=\; & \{\text{Es gibt ein } E \in I \text{ und } x \in A_{k+1}(x_0) \cap \Gamma_k, \text{ so dass} \\ & \Lambda_{l_k}(x_0) \text{ und } \Lambda_{l_k}(x) \ (\gamma_\infty, E)\text{-schlecht sind. }\}. \end{aligned}$$

Dabei sei $\Gamma_k := x_0 + \frac{l_k}{3}\mathbb{Z}^d$. Da mit Folgerung 3.8 die Abschätzung $G(I, l_k, \gamma_\infty, \xi)$ gilt, lässt sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten zweier disjunkter schlechter Würfel zu einer Energie $E \in I$ wieder durch $l_k^{-2\xi}$ abschätzen. Wir beachten weiter die Kardinalzahl von $A_{k+1}(x_0) \cap \Gamma_k$ und erhalten mit $l_{k+1} \leq 6l_k^\alpha$

$$\mathbb{P}(E_k(x_0)) \leq C_b \cdot l_k^{d(\alpha-1)} \cdot l_k^{-2\xi}.$$

Mit der Beziehung $d(\alpha - 1) < 2\xi$ aus dem Beweis von Satz 3.4 finden wir also ein $\delta > 0$, so dass

$$\mathbb{P}(E_k(x_0)) \leq l_k^{-\delta},$$

was wiederum unter Beachtung des Wachstumsverhaltens von (l_k)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k(x_0)) < \infty$$

liefert. Eine Anwendung des Borel-Cantelli-Lemmas (Lemma 6.21) ergibt nun

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \text{Es gibt ein } k_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass für alle } k \geq k_0 \text{ gilt: } \omega \notin E_k(x_0)\} = 1.$$

Wegen der Stationarität von $H(\omega)$ in $\mathbb{Z}^d$, d. h. der Unempfindlichkeit der Argumentation bezüglich der Wahl unseres Mittelpunktes in $\mathbb{Z}^d$, gilt $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ für

$$\begin{aligned} \Omega_0 \;:=\; & \{\omega \in \Omega : \text{Zu jedem } x \in \mathbb{Z}^d \text{ existiert ein } k_x \in \mathbb{N}, \text{ so dass} \\ & \text{für alle } k \geq k_x \text{ gilt: } \omega \notin E_k(x)\}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$B_{k+1}(x_0) := \Lambda_{\frac{2b}{1+\varrho}l_{k+1}}(x_0) \setminus \Lambda_{\frac{2}{1-\varrho}l_k}(x_0) \subset A_{k+1}(x_0)$$

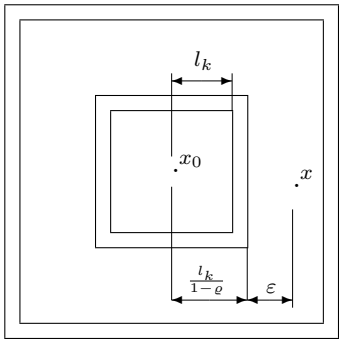
und finden $d(x, \partial A_{k+1}(x_0)) \geq \varrho \cdot d(x, x_0)$ für jedes $x \in B_{k+1}(x_0)$, denn am Außenrand gilt

$$\begin{aligned} d(x, \Lambda_{2bl_{k+1}}(x_0)) &\geq (b - \frac{b}{1+\varrho})l_{k+1} \\ &= \varrho \cdot \frac{b}{1+\varrho} l_{k+1} \\ &\geq \varrho \cdot d(x, x_0) \end{aligned}$$

sowie am Innenrand mit $\eta := d(x, \partial\Lambda_{\frac{2}{1-\varrho}l_k})$ (siehe Skizze)

$$\begin{aligned} d(x, \Lambda_{2l_k}(x_0)) &= (\frac{1}{1-\varrho} - 1)l_k + \eta \\ &= \frac{\varrho}{1-\varrho} l_k + \eta \\ &\geq \varrho(\frac{1}{1-\varrho} l_k + \eta) \\ &= \varrho \cdot d(x, x_0). \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen $b > \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$



$$\frac{2b}{1+\varrho} l_{k+1} > \frac{2}{1-\varrho} l_{k+1}$$

und damit

$$\bigcup_{k \geq k_1} B_{k+1}(x_0) = \mathbb{R}^d \setminus \Lambda_{\frac{2}{1-\varrho}l_{k_1}}.$$

Seien nun $\omega \in \Omega_0$, $E \in I$ und $u \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Gamma)$ polynomiell beschränkt mit der Eigenschaft (EDI). Wir wählen $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ so, dass $\|\chi_{\Lambda_1(x_0)}\| > 0$. (Falls dies nicht möglich ist, gilt $u = 0$, und wir sind fertig.) Dann kann $\Lambda_{l_k}(x_0)$ nicht für unendlich viele k (γ_∞, E)-gut sein.

In diesem Falle wäre nämlich wegen (EDI), einer Abschätzung des Volumens von $\Lambda_{l_k}(x_0)^{\mathrm{out}}$ und der polynomiellen Schranke von u

$$\begin{aligned} \|\chi_{\Lambda_1(x_0)}\| &\leq c_u \cdot \|\chi^{\mathrm{out}}_{l_k,x_0} R_{\Lambda_{l_k}(x_0)}(E) \chi^{\mathrm{int}}_{l_k,x_0}\| \cdot \|\chi^{\mathrm{out}}_{l_k,x_0} u\| \\ &\leq C_{u,d} \cdot e^{-\gamma_\infty l_k} \cdot (1 + |x_0| + l_k)^t \cdot l_k^{d-1} \end{aligned}$$

für geeignetes t, d. h. für $k \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0 - Widerspruch.

Konsequenz ist die Existenz eines $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\Lambda_{l_k}(x_0)$ für alle $k \geq k_0$ (γ_∞, E)-schlecht für ω ist. Wegen $\omega \in \Omega_0$ finden wir aber ein $k_\omega \in \mathbb{N}$, so dass $\omega \notin E_{k+1}(x_0)$ für alle $k \geq k_\omega$. Somit ist der Würfel $\Lambda_{l_k}(x)$ für alle $x \in A_{k+1}(x_0) \cap \Gamma_k$ und alle $k \geq k_1 := \max\{k_0, k_\omega\}$ (γ_∞, E)-gut für ω.

Seien $k \geq k_1$ und $y \in B_{k+1}(x_0) \cap \mathbb{Z}^d$. Dann finden wir unter den nächstliegenden Γ_k-Gitterpunkten ein $y_1 \in A_{k+1}(x_0) \cap \Gamma_k$, so dass $y \in \overline{\Lambda^{\text{int}}_{l_k,y_1}}$ und

$$\begin{aligned} \|\chi_{\Lambda_1(y)} u\| \leq 2^d \|\chi^{\text{int}}_{l_k,y_1} u\| &\leq c_u \cdot \|\chi^{\text{out}}_{l_k,y_1} R_{\Lambda_{l_k}(y_1)}(E) \chi^{\text{int}}_{l_k,y_1}\| \cdot \|\chi^{\text{out}}_{l_k,y_1} u\| \\ &\leq \widehat{C}(u,d) \cdot e^{-\gamma_\infty l_k} \cdot \|\chi^{\text{out}}_{l_k,y_1} u\|. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 3.4, Fall (G), überdecken wir $\Lambda^{\text{out}}_{l_k}(y_1)$ bis auf eine Menge vom Lebesgue-Maß 0 mit den $(3^d - 1)$ Würfeln $\Lambda^{\text{int}}_{l_k}(\tilde{y})$, $\tilde{y} \in \Gamma_k$, $d(\tilde{y}, y_1) = \frac{l_k}{3}$, wählen unter den $\tilde{y}$ ein y_2, für das $\|\chi^{\text{int}}_{l_k,\tilde{y}} u\|$ maximal wird und erhalten

$$\|\chi^{\text{out}}_{l_k,y_1} u\| \leq (3^d - 1) \cdot \|\chi^{\text{int}}_{l_k,y_2} u\|,$$

d. h.

$$\|\chi_{\Lambda_1(y)} u\| \leq \widehat{C} \cdot (3^d - 1) \cdot e^{-\gamma_\infty l_k} \cdot \|\chi^{\text{int}}_{l_k,y_2} u\|.$$

Solange wir uns in $A_{k+1}(x_0)$ bewegen, erhalten wir per Induktion $y_1, y_2, \ldots, y_n \in A_{k+1}(x_0) \cap \Gamma_k$, wobei

$$\|\chi_{\Lambda_1(y)} u\| \leq (\widehat{C} \cdot (3^d - 1) \cdot e^{-\gamma_\infty l_k})^n \cdot \|\chi^{\text{out}}_{l_k,y_n} u\|.$$

Da jeder Iterationsschritt eine Distanz von $\frac{l_k}{3}$ überbrückt, und $d(y, \partial A_{k+1}(x_0)) \geq \varrho \cdot d(y, x_0)$ gilt, können wir bis zum Erreichen des Randes von $A_{k+1}(x_0)$ mindestens

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{3}{l_k} \cdot \varrho \cdot d(y, x_0) - 1 \rfloor &\geq \frac{3}{l_k} \cdot \varrho \cdot d(y, x_0) - 2 \\ &= \frac{3}{l_k}(\varrho \cdot d(y, x_0) - \frac{2}{3} l_k) \\ &\geq \frac{3}{l_k}(\varrho - \frac{2}{3}) \cdot d(y, x_0) \end{aligned}$$

Schritte ausführen. Es ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \|\chi_{\Lambda_1(y)} u\| &\leq (\widehat{C} \cdot (3^d - 1))^{\frac{3}{l_k} \cdot (\varrho - \frac{2}{3}) \cdot d(y, x_0)} \cdot \exp(-3\gamma_\infty \cdot (\varrho - \frac{2}{3}) \cdot d(y, x_0)) \cdot \\ &\quad \cdot (1 + |x_0| + 2b(l_{k+1} + R_S))^t \cdot C_d l_k^{d-1} \\ &\leq C \cdot \exp(-\gamma \cdot d(y, x_0)) \end{aligned}$$

für $\gamma < (3\varrho - 2) \cdot \gamma_\infty < \gamma_\infty$ sowie hinreichend großes C und k. Für die Zentrierung der Gewichtsfunktion auf den Mittelpunkt 0 ist lediglich eine Anpassung der Konstanten nötig.

Die letzte Behauptung des Lemmas folgt mit $\varrho \to 1$ und $\gamma \to (3\varrho - 2) \cdot \gamma_\infty$ unmittelbar durch Umstellen.

□

3.11 Lemma *Sei $\Lambda = \Lambda_l(x)$ geeignet. Dann gibt es zu jeder beschränkten Menge $I_0 \subset \mathbb{R}$ ein $C = C(M, I_0)$, so dass jede verallgemeinerte Eigenfunktion zu einem $E \in I_0$ die folgende Bedingung erfüllt:*

$$\|\chi_\Lambda^{int} u\| \leq C \cdot \|\chi_\Lambda^{out} R_\Lambda(E) \chi_\Lambda^{int}\| \cdot \|\chi_\Lambda^{out} u\|.$$

Beweis: Seien $u, v \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Gamma)$; $\mathfrak{h}$ die zu H korrespondierende Form. Wir wählen weiter $\varphi \in C^1_c(\Lambda)$ reellwertig so, dass $\varphi = 1$ in einer Umgebung von Λ^{int},

$$\mathrm{spt}\ \varphi' \subset \Lambda_{l-6}(x) \setminus \Lambda_{l-8}(x) \subset \Lambda^{\mathrm{out}}$$

und $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq 42$. (Wir identifizieren im folgenden φ mit $\varphi|_\Gamma$.) Dann gilt zunächst

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(\varphi u, v) - \mathfrak{h}(u, \varphi v) &= ((\varphi u)' \,|\, v') - (u' \,|\, (\varphi v)') \\ &= (u\varphi' \,|\, v') - (u' \,|\, v\varphi'). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Speziell für $v := R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u$ mit u als verallgemeinerter Eigenfunktion finden wir

$$(\mathfrak{h} - E)(\varphi u, v) = (\varphi u \,|\, \chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u) = \|\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\|^2$$

und weiter mit (3.14)

$$\begin{aligned} \|\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\|^2 &= (\mathfrak{h} - E)(\varphi u, v) \\ &= (\mathfrak{h} - E)(u, \varphi v) + (u\varphi' \,|\, v') - (u' \,|\, v\varphi') \\ &= 0 + (u\varphi' \,|\, v') - (u' \,|\, v\varphi'). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $\widetilde{\chi}$ die Indikatorfunktion von $\Lambda_{l-\frac{1}{2}}(x) \setminus \Lambda_{l-\frac{3}{2}}(x)$ und erhalten

$$\|\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\|^2 \leq 42 \cdot \|\widetilde{\chi} u\| \cdot \|\widetilde{\chi}(R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u)'\| + 42 \cdot \|\widetilde{\chi} u'\| \cdot \|\widetilde{\chi}\, R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\|.$$

Eine Anwendung von Lemma 2.5 liefert uns die Existenz zweier Konstanten $C' = C'(M, I_0)$ und $C'' = C''(M, I_0)$, so dass

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\chi}(R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u)'\| &\leq C' \cdot \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\|, \\ \|\widetilde{\chi} u'\| &\leq C'' \cdot \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} u\|. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit $\|\widetilde{\chi} \ldots\| \leq \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} \ldots\|$

$$\begin{aligned} \|\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\|^2 &\leq 42(C' + C'') \cdot \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\| \cdot \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} u\| \\ &\leq 42(C' + C'') \cdot \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} R_\Lambda(E)\chi_\Lambda^{\mathrm{int}}\| \cdot \|\chi_\Lambda^{\mathrm{int}} u\| \cdot \|\chi_\Lambda^{\mathrm{out}} u\|, \end{aligned}$$

was äquivalent ist zur Behauptung.

□

Beweis (Satz 3.9): Wir verwenden I am unteren Ende des Spektrums gemäß Folgerung 3.8 sowie die Menge Ω_0 aus Lemma 3.10. Sei $\omega \in \Omega_0$. Nach Satz 2.11 bzw. Folgerung 2.12 existiert eine Menge $A_0 \subset I$ mit folgenden Eigenschaften:

- Zu jedem $E \in A_0$ gibt es eine polynomiell beschränkte verallgemeinerte Eigenfunktion u von $H(\omega)$ zu E.
- $I \setminus A_0$ ist bezüglich des Spektralmaßes zu $H(\omega)$ eine Menge vom Maß 0.

Wir wählen eine solche verallgemeinerte Eigenfunktion u und stellen mit Hilfe von Lemma 3.11 fest, dass sie wegen $\|\chi_{\Lambda_1(x)}u\| \leq \|\chi_\Lambda^{\text{int}}u\|$ (EDI) erfüllt. Somit liefert Lemma 3.7 die exponentielle Beschränktheit im Sinne von (3.13) und damit $u \in L_2(\Gamma)$. Also ist E Eigenwert und u die zugehörige Eigenfunktion.

Da $L_2(\Gamma)$ separabel ist, kann es nur abzählbar viele Eigenwerte geben; somit ist A_0 ebenfalls abzählbar. Das auf I eingeschränkte Spektralmaß hat seinen Träger auf A_0 und ist damit rein unstetig, d. h. $H(\omega)$ hat in I ein reines Punktspektrum.

Das exponentielle Abfallen einer beliebigen Eigenfunktion zu einem $E \in I$ folgt schließlich durch eine weitere Anwendung von Lemma 3.7.

□

3.4 Dynamische Lokalisierung

Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, dass der Operator unseres Modells am unteren Ende des deterministischen Spektrums reines Punktspektrum mit exponentiell abfallenden Eigenfunktionen aufweist. Leider sind die resultierenden Konsequenzen für die tatsächliche Dynamik der Teilchen weitaus geringer als das, was aus physikalischen Gründen wünschenswert wäre. Das physikalische Ziel ist nämlich nachzuweisen, dass die Elektronen allesamt auf einer bestimmten Längenskala gefangen bleiben.

Das dabei auftretende Hauptproblem ist, dass die in Lemma 3.10 vorkommenden Konstanten von der gewählten Eigenfunktion abhängen und damit zu einem Abklingen auf völlig verschiedenen Längenskalen führen können. Nähere Ausführungen wie auch ein lehrreiches (deterministisches) Beispiel findet der Leser in [RJLS95].

Vor diesem Hintergrund wurde das Konzept der dynamischen Lokalisierung mit einem ganzen Spektrum verschiedener Begriffe entwickelt (vgl. z. B. [BG98], [BFM99] und [DS01]).

Im vorliegenden Fall wollen wir starke dynamische Lokalisierung am unteren Intervallende mit der Methode aus [DS01] bzw. [Sto01] zeigen, d. h.

$$\mathbb{E}\{\sup_{t>0} \||X|^p e^{-itH(\omega)} P_I(H(\omega))\varphi_0\|\} < \infty. \tag{3.15}$$

Dabei seien $\varphi_0 \in W_2^1(\Gamma)$, spt φ_0 kompakt, $P_I(H(\omega))$ die Spektralprojektion auf das Intervall aus der Multiskalenanalyse und $|X|^p$ der Multiplikationsoperator mit $|x|^p$.

Zum Verständnis dieses Ausdrucks interpretieren wir $u_0 := P_I(H(\omega))\varphi_0$ als Anfangsverteilung; die zeitliche Entwicklung ist dann durch $e^{-itH(\omega)}u_0$ gegeben. Der endliche Erwartungswert in Verbindung mit dem polynomiellen Faktor besagt dann, dass der größte Teil der Wahrscheinlichkeitsmasse in einem endlichen Bereich konzentriert sein muss. Präzisiert wird diese Aussage durch den folgenden Satz.

3.12 Satz (Starke dynamische Lokalisierung) *Zu $p > 2(2\tau - d)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für $K \subset \Gamma$ kompakt, $I \subset [q_-, q_- + \varepsilon]$ als Intervall und $\eta \in L_\infty(\mathbb{R})$ mit spt $\eta \subset I$ gilt:*

$$\mathbb{E}\{\||X|^p \eta(H(\omega))\chi_K\|\} < \infty, \tag{3.16}$$

d. h. insbesondere

$$\mathbb{E}\{\sup_{t>0} \||X|^p e^{-itH(\omega)} P_I(H(\omega))\chi_K\|\} < \infty. \tag{3.17}$$

Vor dem Beweis dieses Theorems, der organisatorisch wie der von Satz 3.4 strukturiert ist, soll noch ein vorbereitendes Lemma zwischengeschoben werden.

3.13 Lemma *Sei I ein beschränktes Intervall und Λ eine Menge endlichen Maßes. Dann ist $\chi_\Lambda P_I(H)\chi_\Lambda$ Spurklasseoperator, und es existiert ein $C_{tr} > 0$, so dass*

$$tr\,(\chi_\Lambda P_I(H)) = tr\,(\chi_\Lambda P_I(H)\chi_\Lambda) \le C_{tr}\,|\Lambda|. \tag{3.18}$$

Beweis: Die Begründung für das Gleichheitszeichen liefert

$$\mathrm{tr}\,(\chi_\Lambda P_{I_0}(H)) = \mathrm{tr}\,(\chi_\Lambda^2 P_{I_0}(H)) = \mathrm{tr}\,(\chi_\Lambda P_{I_0}(H)\chi_\Lambda).$$

Wegen des Spektraltheorems gilt

$$\chi_\Lambda P_I(H)\chi_\Lambda \le C(t, I)\,\chi_\Lambda e^{-2tH}\chi_\Lambda \qquad (\forall t \in (0, 1]),$$

so dass es ausreicht, zu zeigen, dass $\chi_\Lambda e^{-2tH}\chi_\Lambda$ für ein $t \in (0, 1]$ Spurklasseoperator ist. Dies wiederum ist wegen $\mathrm{tr}\,(\chi_\Lambda e^{-2tH}\chi_\Lambda) = \mathrm{tr}\,(\chi_\Lambda^2 e^{-2tH})$ dann der Fall, wenn $\chi_\Lambda e^{-tH}$ die Hilbert-Schmidt-Eigenschaft besitzt.

Genau das liefert uns aber die Faktorisierungsaussage von Satz 6.13: Nach Lemma 2.10 ist $e^{-tH} : L_2 \to L_\infty$ beschränkt; selbiges gilt für $\chi_\Lambda : L_\infty \to L_2$. Die spezielle Ungleichung in (3.18) ergibt sich aus

$$\|\chi_\Lambda f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|\chi_\Lambda\|_2^2 = \|f\|_\infty^2 |\Lambda|.$$

□

Beweis (Satz 3.12): Wie in den ersten beiden Teilkapiteln verwenden wir die Multiskalenanalyse mit $\xi_0 \in (0, 2\tau - d)$ gemäß Anfangslängenabschätzung, hier allerdings dicht am oberen Intervallende, so dass $p < 2\xi$. Der Parameter $\alpha \in (1, 2)$ sei diesmal so, dass

$$4d\frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} \leq \min\{\frac{1}{4}(q - d), \xi_0\} =: \xi$$

und

$$3d(\alpha - 1) + \alpha p < 2\xi.$$

Diese Wahl ist immer möglich mit α nahe genug an 1. Mit Folgerung 3.8 erhalten wir die Existenz eines $\gamma > 0$, eines Intervalls $I = [q_-, q_- + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, sowie einer Folge $(L_k)_{k \geq 0} \subset 6\mathbb{N} \setminus 12\mathbb{N}$, so dass für alle k die Aussage $G(I, L_k, \gamma, \xi)$ gilt, und

$$L_k^\alpha \leq L_{k+1} \leq 6L_k^\alpha.$$

Für $j \in \mathbb{N}$ setzen wir $\Gamma_j := \frac{L_j}{3}\mathbb{Z}^d$ und

$$\begin{aligned} E_j \;:=\; & \{\omega \in \Omega : \text{ Für ein } E \in I \text{ existieren } y, z \in \Gamma_j \cap \Lambda_{\frac{7}{2}L_{j+1}} \text{ mit} \\ & d(y, z) \geq L_j, \text{ so dass } \Lambda_{L_j}(y) \text{ und } \Lambda_{L_j}(z) \ (\gamma, E)\text{-schlecht sind.}\}. \end{aligned}$$

Die Wahl des Vorfaktors $\frac{7}{2}$ sichert dabei, dass für $y \in \Gamma_j$ wegen $\frac{7}{2}L_j \in 21\mathbb{N} \setminus 42\mathbb{N}$ keine Γ_j-Gitterpunkte auf dem Rand von $\Lambda_{\frac{7}{2}L_j}(y)$ zu liegen kommen.

Da sich die Kardinalzahl von $\Gamma_j \cap \Lambda_{\frac{7}{2}L_{j+1}}$ durch $(\frac{21L_{j+1}}{2L_j})^d \leq (63)^d L_j^{d(\alpha-1)}$ abschätzen lässt, ergibt sich mit $G(I, L_j, \gamma, \xi)$, dass

$$\mathbb{P}(E_j) \leq c_d \cdot L_j^{2d(\alpha-1)} \cdot L_j^{-2\xi} = c_d \cdot L_j^{2d(\alpha-1)-2\xi}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\Omega_{2b}^k := \bigcup_{j \geq k} E_j$$

und erhalten weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega_{2b}^k) \;&\leq\; c_d \sum_{j=k}^{\infty} L_j^{2d(\alpha-1)-2\xi} \\ &\leq\; c_d L_k^{2d(\alpha-1)-2\xi}(1 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (\frac{L_j}{L_k})^{2d(\alpha-1)-2\xi}). \end{aligned}$$

Da der vorkommende Exponent negativ ist, und für $j \geq k+1$

$$\frac{L_j}{L_k} \geq \frac{L_k^{\alpha^{j-k}}}{L_k} = L_k^{\alpha^{j-k}-1} \geq \frac{1}{6} \cdot 6^{\alpha^{j-k}}$$

gilt, ist die Reihe in der Klammer konvergent. Somit finden wir ein $c = c(\alpha, d, \xi)$, so dass

$$\mathbb{P}(\Omega_{2b}^k) \leq c(\alpha, d, \xi) \cdot L_k^{2d(\alpha-1)-2\xi}. \tag{3.19}$$

⊟

Wir unterbrechen den Beweis zur Erarbeitung einiger wichtiger Lemmata.

3.14 Definition und Lemma *Sei $\varphi_n(\omega)$ die normierte Eigenfunktion zum n-ten Eigenwert $E_n(\omega) \in I$ von $H(\omega)$. Wir definieren ein Lokalisierungszentrum $x_n(\omega) \in \mathbb{Z}^d$ mittels*

$$\|\chi_{\Lambda_1(x_n(\omega))}\varphi_n(\omega)\| = \max_{y\in\mathbb{Z}^d} \|\chi_{\Lambda_1(y)}\varphi_n(\omega)\|.$$

Sei $\omega \in \Omega_0$ mit Ω_0 aus Lemma 3.10, $x_n(\omega) \in \Lambda_{L_k}^{int}(x)$. Dann gibt es ein $k_0 = k_0(\gamma, d, C_{EDI})$, so dass für $k \geq k_0$ der Würfel $\Lambda_{L_k}(x)$ $(\gamma, E_n(\omega))$-schlecht ist. Dabei ist C_{EDI} die Konstante aus (EDI) aus Lemma 3.11.

Bevor wir zum Beweis dieser Aussage kommen, wollen wir uns vor Augen führen, was dies anschaulich bedeutet. Wir bemerken zunächst, dass wegen $\varphi_n(\omega) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ stets ein Lokalisierungszentrum existieren muss. Der Satz sagt nun aus, was wir physikalisch bereits erwartet haben: Lokalisierungszentren können sich nur im Zentrum eines schlechten Würfels befinden.

Beweis: Angenommen, die Aussage gilt nicht. Dann folgt mit (EDI), dass

$$\begin{aligned}
\|\chi_{\Lambda_1(x_n(\omega))}\varphi_n(\omega)\| &\leq \|\chi_{L_k,x}^{\text{int}}\varphi_n(\omega)\| \\
&\leq C_{\text{EDI}} \cdot \|\chi_{L_k,x}^{\text{out}} R_{\Lambda_{L_k}(x)}(E_n(\omega))\chi_{L_k,x}^{\text{int}}\| \cdot \|\chi_{L_k,x}^{\text{out}}\varphi_n(\omega)\| \\
&\leq C_{\text{EDI}} \cdot e^{-\gamma L_k} \cdot \|\chi_{L_k,x}^{\text{out}}\varphi_n(\omega)\| \\
&\leq C_{\text{EDI}} \cdot e^{-\gamma L_k} \cdot L_k^d \cdot \max_{\tilde{x}\in\Lambda_{L_k}^{\text{out}}(x)\cap\mathbb{Z}^d} \|\chi_{\Lambda_1(\tilde{x})}\varphi_n(\omega)\|,
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\Lambda_{L_k}(x)$ $(\gamma, E_n(\omega))$-gut ist. Die Anzahl der Einheitswürfel in $\Lambda_{L_k}^{\text{out}}(x)$ wurde sehr grob durch L_k^d abgeschätzt. Wir wählen $k_0 = k_0(\gamma, d, C_{\text{EDI}})$ so groß, dass

$$C_{\text{EDI}} \cdot e^{-\gamma L_k} \cdot L_k^d < 1,$$

und erhalten einen Widerspruch zur Wahl von $x_n(\omega)$ als Lokalisierungszentrum.

□

Das nächste Lemma macht eine Aussage darüber, welchen Einfluss eine Eigenfunktion auf Gebiete hat, die sich weit entfernt vom Lokalisierungszentrum befinden. Wir vereinbaren dafür die Schreibweisen $\chi_L := \chi_{\Lambda_L(0)}$ und $\Lambda_L := \Lambda_L(0)$.

3.15 Lemma *Sei $\omega \in \Omega_{2g}^k := (\Omega_{2b}^k)^c \cap \Omega_0$ mit $k \geq k_0$. Dann existiert ein $j_0 = j_0(\gamma, \alpha, d)$, so dass für $j \geq \max\{j_0, k\}$ und $x_n(\omega) \in \Lambda_{L_{j+1}}$ gilt:*

$$\|(1 - \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}})\varphi_n(\omega)\| \leq \frac{1}{4}.$$

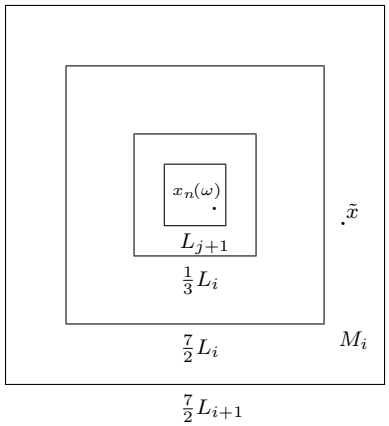
Beweis: Wir zerlegen $\Lambda^c_{\frac{7}{2}L_{j+2}}$ in die Gebiete

$$M_i := \Lambda_{\frac{7}{2}L_{i+1}} \setminus \overline{\Lambda}_{\frac{7}{2}L_i}, \quad i \geq j+2.$$

(Wir werden die Bezeichnung M_i ohne die Restriktion an i später weiterverwenden.) Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(1 - \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}})\varphi_n(\omega)\| &\leq \sum_{i \geq j+2} \|\chi_{M_i}\varphi_n(\omega)\| \\ &\leq \sum_{i \geq j+2} \sum_{\tilde{x} \in M_i \cap \Gamma_i} \|\chi^{\text{int}}_{L_i,\tilde{x}}\, \varphi_n(\omega)\|. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Für $j \geq j'(R_S)$ groß genug und $i \geq j+2$ gelten nun für jedes $\tilde{x} \in M_i \cap \Gamma_i$ die Beziehungen $\Lambda_{L_{j+1}} \subset \Lambda^{\text{int}}_{L_i}$ und $d(\tilde{x}, 0) \geq \frac{7}{4}L_i \geq L_i$. Wegen $i > k_0$ und $x_n(\omega) \in \Lambda^{\text{int}}_{L_i}$



ist der Würfel Λ_{L_i} nach Lemma 3.14 $(\gamma, E_n(\omega))$-schlecht. Dies bedeutet aber, dass

aufgrund $\omega \in \Omega_{2g}^k$ die Würfel $\Lambda_{L_i}(\tilde{x})$ $(\gamma, E_n(\omega))$-gut sein müssen. Mit (EDI) gilt also

$$\begin{aligned} \|\chi^{\text{int}}_{L_i,\tilde{x}}\, \varphi_n(\omega)\| &\leq C_{\text{EDI}} \cdot e^{-\gamma L_i} \cdot \|\chi^{\text{out}}_{L_i,\tilde{x}}\, \varphi_n(\omega)\| \\ &\leq C_{\text{EDI}} \cdot e^{-\gamma L_i}. \end{aligned}$$

Wir schätzen wieder die Kardinalzahl von $M_i \cap \Gamma_i$ durch $c_d\, L_i^{d(\alpha-1)}$ ab und erhalten mit (3.20):

$$\|(1 - \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}})\varphi_n(\omega)\| \leq \sum_{i \geq j+2} c_d \cdot C_{\text{EDI}} \cdot e^{-\gamma L_i} \cdot L_i^{d(\alpha-1)}.$$

Wegen des exponentiellen Faktors konvergiert die Summe auf der rechten Seite.

□

Nächstes Ziel ist eine Abschätzung für die Anzahl der Lokalisierungszentren im Würfel $\Lambda_{\frac{7}{2}L_{j+1}}$.

3.16 Lemma *Es gibt eine Konstante $c_4 = c_4(\gamma, \alpha, d, C_{tr})$, so dass für $\omega \in \Omega_{2g}^k$ und $j \geq k$ gilt:*

$$\#\{n : x_n(\omega) \in \Lambda_{\frac{7}{2}L_{j+1}}\} \leq c_4 \cdot L_{j+1}^{\alpha d}.$$

Beweis: Da die Anzahl der Lokalisierungszentren monoton wachsend in j ist und j_0 aus Lemma 3.15 nur von γ, α und d abhängt, lässt sich ohne Einschränkung $j \geq j_0$ betrachten (eventuelle Anpassung von c_4 am Ende beachten). Es gilt zunächst

$$\sum_{x_n(\omega) \in \Lambda_{\frac{7}{2}L_{j+1}}} (\chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} P_I(H(\omega)) \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} \varphi_n(\omega) | \varphi_n(\omega)) \leq \text{tr}(\chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} P_I(H(\omega))). \quad (3.21)$$

Wir wollen eine Abschätzung für die Terme in der Summe vornehmen. Unter wiederholter Anwendung von Lemma 3.15 erhalten wir dabei (in verkürzter Notation)

$$\begin{aligned} (\chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} P_I \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} \varphi_n | \varphi_n) &= (\chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} P_I \varphi_n | \varphi_n) - (\chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} P_I (1 - \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}}) \varphi_n | \varphi_n) \\ &\geq (\chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} P_I \varphi_n | \varphi_n) - ((1 - \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}}) \varphi_n | \varphi_n) \\ &\geq (\chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}} \varphi_n | \varphi_n) - \frac{1}{4} \\ &= (\varphi_n | \varphi_n) - ((1 - \chi_{\frac{7}{2}L_{j+2}}) \varphi_n | \varphi_n) - \frac{1}{4} \\ &\geq 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Kombination dieser Abschätzung und der Aussage von Lemma 3.13 mit (3.21) ergibt dann

$$\#\{n : x_n(\omega) \in \Lambda_{\frac{7}{2}L_{j+1}}\} \cdot \frac{1}{2} \leq C_{\mathrm{tr}} \cdot (\frac{7}{2}L_{j+2})^d \leq c_d \cdot C_{\mathrm{tr}} \cdot L_{j+1}^{\alpha d}.$$

Durch Multiplikation mit 2 und Anpassung der Konstante (siehe oben) folgt schließlich die Behauptung.

□

Wir kommen zum letzten Lemma vor dem Ende des Hauptbeweises.

3.17 Lemma *Es existiert eine Konstante $k_1 = k_1(\alpha, \gamma, d, C_{tr}, C_{CTE}, L_0)$, so dass für $k \geq k_1$, $\omega \in \Omega_{2g}^k$, $x \in M_k \cap \Gamma_k$ und η wie in Satz 3.12 gilt:*

$$\|\chi_{L_k,x}^{int}\, \eta(H(\omega))\, \chi_{L_k,0}^{int}\| \leq \|\eta\|_\infty \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}L_k}.$$

Beweis: Zunächst gilt wegen spt $\eta \subset I$, dass

$$\|\chi_{L_k,x}^{\mathrm{int}}\, \eta(H(\omega))\, \chi_{L_k,0}^{\mathrm{int}}\| \leq \sum_{E_n \in I} |\eta(E_n(\omega))| \cdot \|\chi_{L_k,x}^{\mathrm{int}} \varphi_n(\omega)\| \cdot \|\chi_{L_k,0}^{\mathrm{int}} \varphi_n(\omega)\|. \quad (3.22)$$

Wir teilen die Summe ausgehend von der Lage der Lokalisierungszentren und behandeln die entstehenden Terme getrennt.

(i) Die zugehörigen Lokalisierungszentren liegen innerhalb $\Lambda_{\frac{7}{2}L_{k+1}}$.

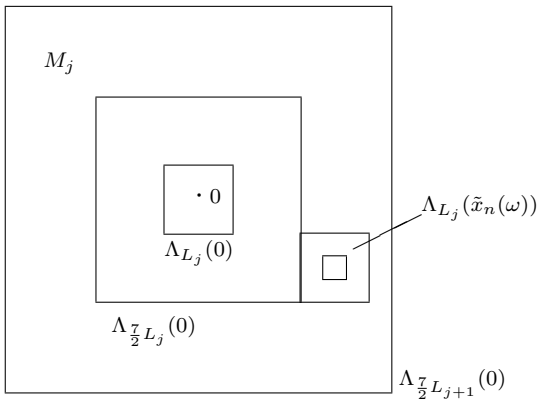
Wegen $\omega \in \Omega_{2g}^k$ und $d(x,0) \geq \frac{3}{2}L_k \geq L_k$ für k groß genug muss einer der Würfel $\Lambda_{L_k}(x)$ und $\Lambda_{L_k}(0)$ $(\gamma, E_n(\omega))$-gut sein. Wegen der Eigenschaft von φ_n als normierte Eigenfunktion gilt mit Lemma 3.16:

$$\begin{aligned}
\sum_{E_n \in I,\, x_n(\omega) \in \Lambda_{\frac{7}{2}L_{k+1}}} \|\chi_{L_k,x}^{\mathrm{int}} \varphi_n(\omega)\|\, \|\chi_{L_k,0}^{\mathrm{int}}\, \varphi_n(\omega)\| &\leq c_4 \cdot C_{\mathrm{EDI}} \cdot L_{k+1}^{\alpha d} \cdot e^{-\gamma L_k} \\
&\leq \tilde{c}(d) \cdot c_4 \cdot C_{\mathrm{EDI}} \cdot L_k^{\alpha^2 d} \cdot e^{-\gamma L_k} \\
&\leq \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}L_k}, \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

falls $k \geq k_1'$ groß genug in Abhängigkeit nur von den geforderten Parametern.

(ii) Die zugehörigen Lokalisierungszentren liegen außerhalb $\Lambda_{\frac{7}{2}L_{k+1}}$.

Seien dazu $k \geq k_0$ (vgl. Lemma 3.14), $j \geq k+1$ und $x_n(\omega) \in M_j$. Nach Konstruktion finden wir ein $\tilde{x}_n(\omega) \in M_j \cap \Gamma_j$, so dass $x_n(\omega) \in \Lambda_{L_j}^{\mathrm{int}}(\tilde{x}_n(\omega))$.



Wegen $j \geq k_0$ und Lemma 3.14 muss $\Lambda_{L_j}(\tilde{x}_n(\omega))$ nun $(\gamma, E_n(\omega))$-schlecht sein. Dies bedeutet aber, dass $\Lambda_{L_j}(0)$ $(\gamma, E_n(\omega))$-gut ist, da $\omega \in \Omega^k_{2g}$. Also gilt

$$\|\chi^{\text{int}}_{L_k,0}\,\varphi_n(\omega)\| \leq \|\chi^{\text{int}}_{L_j,0}\,\varphi_n(\omega)\| \leq C_{\text{EDI}} \cdot e^{-\gamma L_j}.$$

Wieder unter Benutzung von Lemma 3.16 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq k+1}\Big(\sum_{x_n(\omega)\in M_j} \|\chi^{\text{int}}_{L_k,x}\varphi_n(\omega)\|\,\|\chi^{\text{int}}_{L_k,0}\varphi_n(\omega)\|\Big) &\leq \sum_{j\geq k+1}\Big(\sum_{x_n(\omega)\in M_j} 1\cdot C_{\text{EDI}}\cdot e^{-\gamma L_j}\Big)\\
&\leq c_4\cdot C_{\text{EDI}}\sum_{j\geq k+1} L_{j+1}^{\alpha d}\cdot e^{-\gamma L_j}\\
&\leq \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}L_k}, \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

falls $k \geq k_1''$ groß genug mit Abhängigkeit nur von den behaupteten Parametern. Man beachte zum Verständnis der letzten Zeile die Analogie zur Vorgehensweise im Fall (i).

Durch Zusammensetzen der Beziehungen (3.22), (3.23) und (3.24) ergibt sich für $k \geq k_1 := \max\{k_1', k_1''\}$ die Behauptung.

□

Wir werden nun den Hauptbeweis fortführen und die Argumente miteinander verbinden.

⊟

Seien $k \geq k_1$ mit k_1 aus Lemma 3.17 und $x \in M_k \cap \Gamma_k$. Mit der Eigenschaft

von $\varphi_n(\omega)$ als normierte Eigenfunktion, Lemma 3.17 und (3.19) gilt zunächst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\|\chi^{\text{int}}_{L_k,x}\,\eta(H(\omega))\,\chi^{\text{int}}_{L_k,0}\|\} &\leq \|\eta\|_\infty \cdot (1\cdot\mathbb{P}(\Omega^k_{2b}) + e^{-\frac{\gamma}{2}L_k}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(\Omega^k_{2g})}_{\leq 1})\\ &\leq \|\eta\|_\infty\cdot(c(\alpha,d,\xi)\cdot L_k^{2d(\alpha-1)-2\xi} + e^{-\frac{\gamma}{2}L_k}).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Da K kompakt ist, finden wir ein $k \geq k_1$, so dass $K \subset \Lambda^{\text{int}}_{L_k}(0) \subset \Lambda_{\frac{\gamma}{2}L_k}(0) \subset \Lambda_{L_{k+1}}(0)$. Dann gilt mit (3.25), geeigneten Abschätzungen von Kardinalzahlen usw.:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\||X|^p\eta(H(\omega))\chi_K\|\} &\leq c_{d,p}\|\eta\|_\infty L_k^p + \mathbb{E}\{\sum_{j\geq k}\||X|^p\chi_{M_j}\eta(H(\omega))\chi_K\|\}\\
&\leq c_{d,p}\|\eta\|_\infty L_k^p + \sum_{j\geq k} c_{d,p}L_{j+1}^p(\sum_{\tilde{x}\in M_j\cap\Gamma_j}\mathbb{E}\{\|\chi^{\text{int}}_{L_k,\tilde{x}}\,\eta(H(\omega))\chi^{\text{int}}_{L_k,0}\|\})\\
&\leq c_{d,p}\|\eta\|_\infty L_k^p + \sum_{j\geq k} c'_{d,p}L_j^{\alpha p}\cdot(\frac{L_{j+1}}{L_j})^d\cdot\|\eta\|_\infty(cL_j^{2d(\alpha-1)-2\xi}+e^{-\frac{\gamma}{2}L_j})\\
&\leq C(d,p,\alpha,\xi,\|\eta\|_\infty)[1+\sum_{j\geq k}L_j^{\alpha p}L_j^{d(\alpha-1)}(L_j^{2d(\alpha-1)-2\xi}+e^{-\frac{\gamma}{2}L_j})]\\
&= C\cdot[1+\sum_{j\geq k}L_j^{\alpha p+3d(\alpha-1)-2\xi}+\sum_{j\geq k}L_j^{\alpha p+d(\alpha-1)}e^{-\frac{\gamma}{2}L_j}]\\
&< \infty.\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\alpha p + 3d(\alpha-1) - 2\xi < 0$ gilt, und die L_j's schnell genug wachsen. Damit ist (3.16) bewiesen.

Um (3.17) herzuleiten setzen wir für $t > 0$ die Funktion $\eta_t(\cdot) := e^{-it\cdot}\,\chi_I$ in (3.16) ein und erhalten

$$\mathbb{E}\{\||X|^p e^{-itH(\omega)}P_I(H(\omega))\chi_K\|\} < \infty.$$

Dass die Aussage auch mit dem Supremum gelten muss, sehen wir am Einfluss von $\|\eta_t\|_\infty$ auf die vorangegangenen Schritte und mit

$$\sup_{t>0}\|\eta_t\|_\infty \leq \sup_{t>0}\|e^{it\cdot}\|_\infty = 1.$$

□

3.5 Mögliche Verallgemeinerungen

Zum Abschluss dieses Kapitels soll diskutiert werden, für welche Verallgemeinerungen der Beweis relativ mühelos übertragen werden kann. Es wurde z. B. bei

der Konstruktion des Potentials angesprochen, dass wir charakteristische Funktionen auf den Kanten nur der Übersichtlichkeit halber verwenden. Beginnen wir also ruhig mit der Lockerung der Anforderungen an das zufällige Potential V_ω.

Allgemeinere Form des Einzelplatzpotentials: Anstelle der charakteristischen Funktion $\chi_{(0,1)}$ kann eine beliebige Funktion $f \in L_\infty(0,1)$ als zufällig zu skalierendes Potential pro Kante verwendet werden. Dabei ist im Beweis der Wegner-Abschätzung die sogenannte "Überdeckungseigenschaft" zu sichern, d. h. die Existenz eines $\sigma > 0$, so dass $f \geq \sigma$. Außerdem kann man das Einzelplatzpotential so wählen, dass das Gesamtpotential lediglich relativ beschränkt bezüglich des freien Laplaceoperators wird. Dies kann z. B. durch geeignete L_p-Funktionen realisiert werden (vgl. [RS2], Kap. IX, X).

Einzelplatzpotentiale mit kleinem Träger: Die Überdeckungseigenschaft kann abgeschwächt werden. Verwendet man Einzelplatzmaße mit beschränkter Dichte und fordert die Existenz eines $\sigma > 0$, so dass $f \geq \chi_{(a,b)}$ für ein Intervall $(a,b) \subset [0,1]$, so lässt sich ebenfalls eine Wegner-Abschätzung beweisen. Dies ist Gegenstand von Kapitel 4.

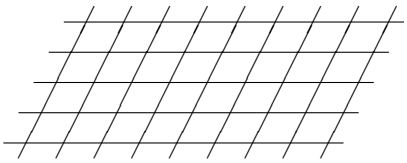
Einzelplatzpotentiale mit großem Träger: Vergrößert man den Träger des Einzelplatzpotentials, so dass der Einfluss der Kopplungskonstanten auf mehreren Kanten spürbar wird, bleiben Operatorrestriktionen auf disjunkte Würfel nicht zwangsläufig unabhängig. Im Fall eines kompakten Trägers lässt sich das Problem mit Einführung einer "Schutzdistanz" zwischen den in der Multiskalenanalyse simultan betrachteten Würfeln beheben, vgl. [He03].

Langreichweitige Einzelplatzpotentiale: Haben die Einzelplatzpotentiale einen unbeschränkten Träger, so ist die erwähnte Unabhängigkeit von Operatorrestriktionen auch bei beliebigem Abstand nicht mehr gegeben. Dieses Problem lässt sich mit einer Idee aus [KSS98a] ("(γ, E)-supergute Würfel") behandeln, vgl. auch [Ze99]. Selbstredend muss für das Einzelplatzpotential dabei eine geeignete Abfallbedingung gefordert werden, welche die Wohldefiniertheit und die relative Beschränktheit des Gesamtpotentials sichert.

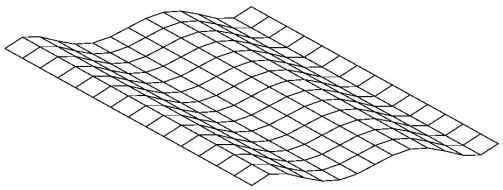
Allgemeinere Einzelplatzmaße: Der Beweis der Wegner-Abschätzung in Abschnitt 2.1 lässt sich an die Klasse von Maßen aus [CHK06] anpassen. Dabei muss der Term $|I|^\alpha$ durch die sogenannte Levy-Konzentration $s(|I|)$ ersetzt werden. Das Maß ist dabei so zu wählen, dass letztere beim Grenzübergang $|I| \to 0$ verschwindet (für Details siehe angegebene Quelle).

Aber auch die Geometrie des Graphen lässt Verallgemeinerungen zu. Speziell kann man die Ergebnisse unmittelbar auf folgende Punkte und deren Kombination übertragen.

Andere Gitterformen: Die von uns verwendete Einbettung des Graphen in $\mathbb{R}^d$ ist ebenfalls eine Bequemlichkeit. Insbesondere lassen sich die diversen Würfel und Differenzen derselben darüber gut spezifizieren. Die Konstruktion der Operatoren benötigt allerdings nur die Graphenstruktur und die einheitlichen Kantenlängen. Zum Beispiel ist das Ergebnis mühelos auf "rhombische Gitter" übertragbar. Dabei müssen Konstanten, die über die Einbettung kontrolliert werden entsprechend angepasst werden.



Einbettung in Mannigfaltigkeiten: Es ist mit dem gleichen Argument möglich, den Graphen in geeignete Mannigfaltigkeiten einzubetten. Auch hier muss man lediglich Konstanten anpassen.



Kapitel 4

Lineare Wegner-Abschätzungen auf Quantengraphen

In Abschnitt 2.1 wurde eine Wegner-Abschätzung bewiesen, die im Induktionsschritt der Multiskalenanalyse zur Anwendung kam. Dabei war wichtig, dass die Schranke polynomiell - in unserem Falle quadratisch - vom Würfelvolumen abhängt. Die Beweistechnik war bestechend einfach und stellte eine Modifikation des $\mathbb{R}^d$-Falles dar.

In diesem Kapitel soll eine weitere Wegner-Abschätzung in einem allgemeineren Modell bewiesen werden, welches den kubischen Gittergraphen als Spezialfall enthält. Das Würfelvolumen wird hierbei ersetzt durch die Anzahl von Kanten in gewissen endlichen Konfigurationen. Die geometrische Struktur des Graphen kann sehr allgemein sein; auch auf die Einbettbarkeit kann verzichtet werden.

Die oben erwähnten endlichen Konfigurationen können auch im Beweis aus Kapitel 2.1 verwendet werden; das dortige Argument greift ebenso. Allerdings ist die hier präsentierte Abschätzung linear im Volumen, d. h. in der Anzahl der Kanten. Dies resultiert aus der Idee, dass Graphen lokal eindimensionale Objekte sind, womit ein Ergebnis aus [KV02] für eindimensionale Schrödingeroperatoren anwendbar ist.

Für unser Lokalisierungsresultat ist die bessere Wegner-Abschätzung dabei ohne Belang. Vielmehr sind im linearen Fall Einzelplatzmaße mit Dichte erforderlich, was das Ergebnis eher verschlechtert. Allerdings hat eine lineare Wegner-Abschätzung Konsequenzen für andere wichtige Größen im Modell wie etwa die integrierte Zustandsdichte. Dies wird in Abschnitt 4.5 klarer werden.

Weiterhin ist es mit der hier präsentierten Technik möglich, Einzelplatzpotentiale mit kleinem Träger zu behandeln. Im bisherigen Verlauf hatten wir lediglich über Einzelplatzpotentiale mit einer positiven unteren Schranke gesprochen; speziell über charakteristische Funktionen.

4.1 Das allgemeinere Modell und die Vorstellung des Ergebnisses

Wir beginnen mit der Vorstellung des allgemeineren Modells. Eine Einbettung in $\mathbb{R}^d$ wie bisher ist nun nicht mehr verfügbar. Die gesamte Konstruktion soll daher in Anlehnung an Abschnitt 1.2 verstanden werden.

Sei $\Gamma = (V, E, \mathcal{G})$ ein metrischer Graph, aufgefasst als topologischer Raum im Sinne von Abschnitt 1.2. Speziell sei daran erinnert, dass zur Vermeidung topologischer Probleme vorausgesetzt wurde, dass alle Knoten endlichen Knotengrad haben und Konstanten $l_-, l_+ > 0$ existieren, so dass

$$l_- \leq l_e \leq l_+ \quad \text{für alle } e \in E.$$

Schlingen und Mehrfachkanten sind erlaubt. Wie schon in Kapitel 1.2 bemerkt, lässt sich der topologische Raum Γ metrisieren mittels der Länge eines kürzesten Weges zwischen zwei Punkten.

Für eine endliche Teilmenge $\Lambda \subset E$ entstehe der Subgraph Γ_Λ durch Löschen aller Kanten in $E \setminus \Lambda$ und der entstehenden isolierten Knoten. Dieser Subgraph sei wieder mit der entsprechenden topologischen Struktur versehen und soll als metrischer Teilraum von Γ aufgefasst werden.

Wieder betrachten wir als zugrundeliegende Hilberträume

$$L_2(\Gamma_\Lambda) := \bigoplus_{e\in\Lambda} L_2(0, l_e) \subset \bigoplus_{e\in E(\Gamma)} L_2(0, l_e) =: L_2(\Gamma)$$

sowie die Sobolevräume erster Ordnung

$$\begin{aligned} W_2^1(\Gamma) \;:=\; & \{f \in \oplus_{e\in E} W_2^1(0, l_e) \,|\, f \text{ stetig an allen Knoten } v \in V, \\ & \|f\|^2_{W_2^1(\Gamma)} := \sum_{e\in E(\Gamma)} \|f_e\|^2_{W_2^1(0,l_e)} < \infty\} \end{aligned}$$

und den analog definierten Raum $W_2^1(\Gamma_\Lambda)$ für endliche Subgraphen. In endlichen Konfigurationen kann natürlich auf die letztgenannte Summierbarkeitsforderung verzichtet werden. Mit diesen Räumen ist es wieder möglich, Laplaceoperatoren mittels assoziierter Formen zu definieren, doch dazu kommen wir später.

Zunächst wollen wir uns dem Potentialterm widmen. Dazu konstruieren wir wie im anderen Modell einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $q_- < q_+$, $0 < c_- < c_+$, $s > 0$ sowie $c_g > 0$. Zu jedem $e \in E(\Gamma)$ sei μ_e ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte $g_e \in L_\infty[q_-, q_+]$ auf $[q_-, q_+]$, d. h.

$$d\mu_e(t) = g_e(t)\, dt.$$

Die Dichten seien gleichmäßig beschränkt, genauer gelte

$$\|g_e\|_{L_\infty[q_-,q_+]} \leq c_g \qquad (\forall e \in E(\Gamma)).$$

Dann ist $\Omega := [q_-, q_+]^{E(\Gamma)}$ der dem Modell zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{P} := \bigotimes_{e\in E(\Gamma)} \mu_e$ das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Die mit $\mathbb{P}$ verbundenen Erwartungswerte bezeichnen wir mit $\mathbb{E}$.

Weiter sei für jede Kante $e \in E(\Gamma)$ ein Einzelplatzpotential $u_e \in L_\infty(0, l_e)$ gegeben, welches

$$c_-\chi_{S_e} \leq u_e \leq c_+\chi_{[0,l_e]} \tag{4.1}$$

erfüllt. Dabei sei S_e jeweils ein Intervall mit Länge $|S_e| \geq s$.

Dann ist unser zufälliges Gesamtpotential gegeben durch

$$V(\omega) := \sum_{e\in E(\Gamma)} \omega_e u_e,$$

wobei wir $L_\infty(0, l_e)$ als Teilraum von $L_\infty(\Gamma)$ betrachten. Damit lässt sich $V(\omega)$ als Multiplikationsoperator auf $L_2(\Gamma)$ auffassen.

Die hier betrachteten Schrödingeroperatoren werden erzeugt von den quadratischen Formen

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{h}) &= W_2^1(\Gamma) \\ \mathfrak{h}(f,g) &= (f' \,|\, g')_{L_2(\Gamma)} + (V(\omega)f \,|\, g)_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

für den Gesamtgraphen bzw.

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{h}_\Lambda) &= W_2^1(\Gamma_\Lambda) \\ \mathfrak{h}_\Lambda(f,g) &= (f' \,|\, g')_{L_2(\Gamma_\Lambda)} + (V(\omega)f \,|\, g)_{L_2(\Gamma_\Lambda)} \end{aligned}$$

für Einschränkungen auf endliche Subgraphen Γ_Λ. Die assoziierten Schrödingeroperatoren $H(\omega)$ und $H_\Lambda(\omega)$ realisieren dabei wieder freie Randbedingungen.

An einer Stelle im Beweis der linearen Wegnerabschätzung wird es notwendig sein, in einem endlichen Subgraphen zusätzliche Dirichlet-Randbedingungen an einem bestimmten Knoten $v \in V(\Gamma_\Lambda)$ einzuführen. Dies kann man zum Beispiel erreichen durch Einschränkung des Formdefinitionsbereiches $D(\mathfrak{h}_\Lambda)$ auf

$$\{f \in D(\mathfrak{h}_\Lambda) : \varphi_e f_e \in W_{2,0}^1(0, l_e) \text{ für alle } e \in E(\Gamma_\Lambda) \text{ mit } v \in \{\iota(e), \tau(e)\}\}.$$

Hierbei seien $\varphi_e \in C^\infty[0, l_e]$ beliebige Gewichtsfunktionen mit Werten in [0,1] und

$$\begin{aligned} &\varphi_e(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_e(l_e) = 1 \quad \text{falls } v = \iota(e) \quad \text{bzw.} \\ &\varphi_e(0) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_e(l_e) = 0 \quad \text{falls } v = \tau(e). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist der Definitionsbereich der neuen Form unabhängig von der Wahl der Gewichtsfunktionen, d. h. selbige ist wohldefiniert.

In jedem der vorgestellten Fälle sind die assoziierten Schrödingeroperatoren selbstadjungiert; hierfür sei wieder auf [KS99], [KS00], [Ku04] bzw. [Sch06] verwiesen. Damit können wir nun zur Präsentation des Hauptergebnisses übergehen.

4.1 Satz (Lineare Wegner-Abschätzung) *Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in [0,1]$ gilt*

$$\mathbb{E}\{tr\, \chi_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(H_\Lambda(\omega))\} \leq C \cdot \varepsilon \cdot \sharp\Lambda. \tag{4.2}$$

Falls $S_e = [0, l_e]$ für alle $e \in E(\Gamma_\Lambda)$ gilt, lässt sich die Konstante unabhängig vom Energieparameter $\lambda \in \mathbb{R}$ wählen.

4.2 Randbedingungswechsel als Störungen endlichen Rangs

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich Eigenwerte bestimmter Hamiltonoperatoren verschieben, wenn man zum Beispiel Dirichlet- durch Neumann-Randbedingungen ersetzt. Dies wird beim Beweis der Wegner-Abschatzung mehrfach eine wichtige Rolle spielen. Der Einfachheit halber wollen wir dabei hier eine einzige Kante, d. h. den negativen Dirichlet- bzw. Neumann-Laplaceoperator auf $L_2(0, l_e)$ betrachten. Für alle anderen benötigten Fälle kann man analog argumentieren. Wir verwenden die Bezeichnungen $-\Delta^D$ und $-\Delta^N$.

Hauptargument ist dabei eine Anwendung des Min-max-Prinzips (siehe Sätze 6.14, 6.15 oder [RS4], Kap. XIII). Teile der Beweisidee greifen auf eine Diskussion mit Daniel Lenz zurück (betrifft Lemma 4.3); auch die ältere Quelle [Si95] sei an dieser Stelle erwähnt.

Wir beginnen mit einem vorbereitenden Lemma für beschränkte Operatoren.

4.2 Lemma *Seien S, T, V selbstadjungierte beschränkte Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, $T = S + V$ und dim $(\ker V)^\perp = d < \infty$. Die Spektren von S und T unterhalb* $\inf \sigma_{ess}(S)$ *bzw.* $\inf \sigma_{ess}(T)$ *mögen jeweils aus einer unendlichen Menge diskreter Eigenwerte bestehen.*

Dann gilt für die $m-$ten (in aufsteigender Ordnung entsprechend ihrer Vielfachheit gezählten) Eigenwerte

$$\lambda_m(T) \leq \lambda_{m+d}(S) \quad (\forall m \in \mathbb{N}).$$

Beweis: Sei $\tilde{L} := (\ker V)^\perp$. Nach dem Min-max-Prinzip (Satz 6.14) gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_m(T) &= \max_{\dim L = m-1} \min_{\|\varphi\|=1,\, \varphi \perp L} (\varphi \,|\, T\varphi) \\
&\leq \max_{\dim L = m-1} \min_{\|\varphi\|=1,\, \varphi \perp L+\tilde{L}} [(\varphi \,|\, S\varphi) + \underbrace{(\varphi \,|\, V\varphi)}_{=0}] \\
&\leq \max_{\dim \hat{L} = m+d-1} \min_{\|\varphi\|=1,\, \varphi \perp \hat{L}} (\varphi \,|\, S\varphi) \\
&= \lambda_{m+d}(S).
\end{aligned}$$

□

Natürlich ist Lemma 4.2 nicht direkt auf unsere Laplaceoperatoren anwendbar, handelt es sich dabei doch um unbeschränkte Operatoren. Allerdings ist es möglich, beschränkte Operatoren zu finden, die mit unseren Operatoren in enger Beziehung stehen: man verwendet geeignete Resolventen und bringt ihre Eigenwerte dann mittels Spektraltheorem in die richtige Reihenfolge und an den richtigen Platz.

4.3 Lemma *Für die Eigenwerte der Operatoren $-\Delta^N$ und $-\Delta^D$ gilt*

$$\lambda_m(-\Delta^D) \leq \lambda_{m+2}(-\Delta^N). \tag{4.3}$$

Beweis: Wir verschieben das Spektrum beider Operatoren durch Addition einer positiven Konstante und arbeiten im weiteren mit den zwei entstehenden strikt positiven Operatoren H_1 (Dirichlet-Randbedingungen) and H_2 (Neumann-Randbedingungen).

Sei $D_0 := D(H_1) \cap D(H_2)$. Dann gilt

$$H_1^{-1} - H_2^{-1}\,|_{H_2 D_0} = H_1^{-1}(H_2 - H_1)H_2^{-1}\,|_{H_2 D_0}. \tag{4.4}$$

Nach Definition ist $H_1|_{D_0} - H_2|_{D_0} = 0$ und somit wegen (4.4) und der Stetigkeit der Resolventen

$$H_1^{-1} - H_2^{-1}\,|_{\overline{H_2 D_0}} = 0,$$

also $\ker (H_1^{-1} - H_2^{-1})^\perp \subset H_2 D_0^\perp$.

Wir wollen Lemma 4.2 auf die beschränkten Operatoren $-H_1^{-1}$ und $-H_2^{-1}$ anwenden. Wir müssen also zeigen, dass $\dim \ker(H_1^{-1} - H_2^{-1})^\perp \leq 2$, wofür wiederum $\dim H_2 D_0^\perp \leq 2$ ausreicht. Um dies zu verfolgen zeigen wir zunächst, dass sich D_0 und $D(H_2)$ um einen zweidimensionalen Teilraum L unterscheiden.

Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(0, l_e)$ so, dass $\varphi_1 = 1$ in einer Umgebung von 0 und $\varphi_1 = 0$ in einer Umgebung von l_e, sowie $\varphi_2 = 0$ in einer Umgebung von 0 und $\varphi_2 = 1$ in einer Umgebung von l_e. Somit sind φ_1 und φ_2 linear unabhängige Elemente von $D(H_2) \setminus D_0$.

Sei nun $\psi \in D(H_2)$ beliebig, $c_1 := \psi(0)$ und $c_2 := \psi(l_e)$. Dann gilt

$$(\psi - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2)'(0) \quad \text{und} \quad (\psi - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2)'(l_e) = 0$$

sowie

$$(\psi - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2)(0) = 0 \quad \text{und} \quad (\psi - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2)(l_e) = 0.$$

Also ist $\psi - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2 \in D_0$, woraus $\dim D(H_2) \setminus D_0 = 2$ folgt.

Nun ist $H_2 : D(H_2) \to L_2(0, l_e)$ bijektiv, und wir erhalten

$$\begin{aligned} L_2(0, l_e) &= H_2 D(H_2) \\ &= H_2(D_0 + L) \\ &= H_2 D_0 + H_2 L. \end{aligned}$$

Damit gilt $\dim H_2 D_0^\perp \leq \dim H_2 L \leq 2$.

Folglich lässt sich Lemma 4.2 auf $-H_1^{-1}$ und $-H_2^{-1}$ anwenden, und die Ungleichung (4.3) erhält man mittels Spektralsatz.

□

Der Eigenwertindex wird also laut Lemma 4.3 beim Randbedingungswechsel um maximal den Rang der Störung verschoben. Dies ist gerade die Anzahl der geänderten Randwerte, also 2. Die hier bewiesene sowie analoge Aussagen für Störungen größeren Ranges werden wir im Beweis der Wegner-Abschätzung benötigen.

Es sei angemerkt, dass aufgrund der bestehenden Inklusionen bei den Definitionsbereichen der assoziierten Formen jeweils $\lambda_m(-\Delta^N) \leq \lambda_m(-\Delta^D)$ gilt. Das Ersetzen von Neumann- durch Dirichlet-Randbedingungen verschiebt die Eigenwerte also nach oben ("Dirichlet-Neumann-bracketing"), denn es gilt das Min-max-Prinzip - hier in der Form von Satz 6.15.

4.3 Das Problem des kleinen Trägers

Im Beweis der Wegner-Abschätzung aus Abschnitt 2.1 war die Reaktion der Eigenwerte von Würfeloperatoren auf simultane Anhebung aller Kopplungskonstanten ein wichtiger Punkt. Eine zentrale Rolle spielte hierbei, dass die dortigen Einzelplatzpotentiale charakteristische Funktionen auf Kanten waren, und damit eine "Überdeckungsbedingung" vom Typ

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u(x - k) \geq \sigma > 0 \tag{4.5}$$

galt. Bedingungen wie (4.5) sind charakteristisch für viele Beweise von Wegner-Abschätzungen im kontinuierlichen Fall, vgl. z. B. [CH94, Sto01]. Die Formel (2.7) für die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Kopplungskonstanten konnte man in diesem Falle leicht mit Hilfe des Min-max-Prinzips ableiten.

Wegen des kleineren Trägers unserer Einzelplatzpotentiale greift diese Argumentation hier nicht. Die Rolle von Formel (4.5) soll hier das folgende Lemma übernehmen. Es werden dabei Techniken aus [KV02] verwendet, die die lokal eindimensionale Struktur unseres Graphen nutzen.

4.4 Lemma *Zu den Eigenwerten λ_n^Λ von H_Λ innerhalb eines beschränkten Intervalls I existiert eine Konstante $C(I)$, so dass*

$$\sum_{e\in\Lambda} \frac{\partial\lambda_n^\Lambda(\omega)}{\partial\omega_e} \geq C(I) > 0. \tag{4.6}$$

Die Schranke $C(I)$ ist dabei unabhängig von der Kantenmenge $\Lambda \subset E$ und vom Eigenwertindex $n \in \mathbb{N}$.

Bevor wir zum Beweis dieses Lemmas kommen, soll eine weitere Aussage über Eigenfunktionen des Operators H_Λ zur Verfügung gestellt werden. Es soll gezeigt werden, dass diese Eigenfunktionen einen hinreichenden Anteil ihrer Masse auf die Intervalle S_e konzentrieren.

4.5 Lemma *Sei I ein beschränktes Intervall, $S_e \subset [0, l_e]$ wie im Modell. Dann existiert eine Konstante $\hat{C}(I) > 0$, so dass*

$$\int_{S_e} |\psi(x)|^2\,dx \geq \hat{C}(I) \int_0^{l_e} |\psi(x)|^2\,dx \tag{4.7}$$

für alle endlichen $\Lambda \subset E$, alle Kanten $e \in \Lambda$ und jede Eigenfunktion ψ zu einem Eigenwert $\lambda \in I$ von $H_\Lambda(\omega)$.

Beweis: Für $y \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $S_e + y := \{x \in (0, l_e) \,|\, x - y \in S_e\}$ die Translate des Intervalls S_e entlang der Kante e. Für die Ableitung der Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(y) := \int_{S_e+y} |\psi(x)|^2\,dx = \int_{S_e} |\psi(x-y)|^2\,dx$$

gilt dann

$$\begin{aligned} |\partial_y\phi(y)| &= \left| \int_{S_e} [\partial_y\psi(x-y)]\,\overline{\psi(x-y)}\,dx + \int_{S_e} \psi(x-y)\,\partial_y\overline{\psi(x-y)}\,dx \right| \\ &\leq 2 \cdot \|\psi\|_{L_2(S_e+y)} \cdot \|\psi'\|_{L_2(S_e+y)}. \end{aligned}$$

Mit geeigneten Sobolev-Norm-Abschätzungen (Satz 6.7, Folgerung 6.8) erhält man

$$\|\psi'\|_{L_2(S_e+y)} \leq C_1 \, \|\psi\|_{L_2(S_e+y)} + \|\psi''\|_{L_2(S_e+y)}.$$

Mit der Eigenwertgleichung ist der zweite Summand unter Kontrolle, so dass gilt:

$$|\partial_y \phi(y)| \leq C_2 \|\psi\|^2_{L_2(S_e+y)} = C_2 \, \varphi(y), \qquad C_2 = C_2(\|V - \lambda\|_\infty). \tag{4.8}$$

Die differenzierbare Variante des Lemmas von Gronwall (Satz 6.19 bzw. Folgerung 6.20) liefert nun $\varphi(y) \leq \exp(C_2|y|) \cdot \varphi(0)$. Durch Überdeckung von $[0, l_e]$ mit entsprechend vielen Translaten von S_e erhält man also

$$\int_0^{l_e} |\psi(x)|^2 \, dx \leq e^{C_2 \lfloor \underbrace{\frac{l_e}{|S_e|}}_{\leq l_+/s} + 1 \rfloor} \int_{S_e} |\psi(x)|^2 \, dx.$$

□

Beweis (Lemma 4.4): Sei $S := \cup_{e \in \Lambda} S_e$; ψ_n eine normierte Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda_n^\Lambda(\omega)$. Unter Verwendung des Feynman-Hellmann-Theorems (siehe Kapitel 6.7; in der dortigen Terminologie setze man $H_0 = H_\Lambda(\omega)$ und $H_1 = M_{u_e}$ als Multiplikationsoperator mit u_e) erhält man

$$\sum_{e \in \Lambda} \frac{\partial \lambda_n^\Lambda(\omega)}{\partial \omega_e} = \sum_{e \in \Lambda} (\psi_n \,|\, u_e \psi_n) \geq c_- \int_S |\psi_n(x)|^2 \, dx.$$

Falls sich der Integrationsbereich auf der rechten Seite über die kompletten Kanten erstreckt, ist alles gezeigt; insbesondere ist die Konstante $C = c_-$ vom Energieparameter λ (bzw. von I) unabhängig.

Andernfalls lässt sich das Integral auf der rechten Seite mit Lemma 4.5 abschätzen; in diesem Falle hängt C wegen (4.8) echt vom gewählten Intervall I ab.

□

Für den Beweis der Wegner-Abschätzung werden wir Lemma 4.4 nicht unmittelbar verwenden, sondern die folgende Aussage.

4.6 Folgerung *Sei $\varrho : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\varrho \in C^1(\mathbb{R})$ monoton mit $\rho = -1$ auf $(-\infty, -\varepsilon]$ und $\rho = 0$ auf $[\varepsilon, \infty)$. Dann gilt für den n-ten Eigenwert λ_n^Λ von $H_\Lambda(\omega)$:*

$$\varrho'(\lambda_n^\Lambda(\omega) - \lambda + t) \;\leq\; \tilde{C}(I) \cdot \sum_{e \in \Lambda} \frac{\partial \varrho(\lambda_n^\Lambda(\omega) - \lambda + t)}{\partial \omega_e}.$$

Beweis: Nach der Kettenregel gilt

$$\sum_{e\in\Lambda}\frac{\partial\rho(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)}{\partial\omega_e}=\varrho'(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)\cdot\sum_{e\in\Lambda}\frac{\partial\lambda_n^\Lambda(\omega)}{\partial\omega_e}.$$

Somit liefert (4.6) die Abschätzung

$$\varrho'(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)\le C(I)^{-1}\cdot\sum_{e\in\Lambda}\frac{\partial\varrho(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)}{\partial\omega_e}.$$

□

4.4 Beweis der Wegner-Abschätzung

Mit den erfolgten Vorbetrachtungen können wir nun den Beweis der linearen Wegner-Abschätzung in Angriff nehmen. Es gelten die bisher vereinbarten Bezeichnungen sowie die Terminologie von Satz 4.1.

Beweis (Satz 4.1): Sei $\varrho\in C^1(\mathbb{R})$ monoton wachsend mit $\varrho|_{(-\infty,-\varepsilon]}=-1$, $\varrho|_{[\varepsilon,\infty)}=0$ und $\|\varrho'\|_\infty\le 1/\varepsilon$. Dann gilt

$$\chi_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(x)\le\varrho(x-\lambda+2\varepsilon)-\varrho(x-\lambda-2\varepsilon)=\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\varrho'(x-\lambda+t)\,dt.$$

Nach dem Spektralsatz ist also

$$\chi_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(H_\Lambda(\omega))\le\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\rho'(H_\Lambda(\omega)-\lambda+t)\,dt.$$

Da $B_\varepsilon(\lambda)=[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]$ beschränkt und $\sigma(H_\Lambda(\omega))$ diskret ist, gehören obige Operatoren zu Spurklasse, und es gilt:

$$\operatorname{tr}\Big[\chi_{B_\varepsilon(\lambda)}(H_\Lambda(\omega))\Big]\le\operatorname{tr}\Big[\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\varrho'(H_\Lambda(\omega)-\lambda+t)\,dt\Big]=\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\varrho'(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)\,dt.$$

Dabei sind $\lambda_n^\Lambda(\omega)$ wieder die Eigenwerte von $H_\Lambda(\omega)$, gezählt in aufsteigender Ordnung und unter Beachtung der Vielfachheit. Die Summe enthält konstruktionsbedingt nur endlich viele Summanden ungleich Null. Ähnlich wie in [Ki96], S. 509, gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\operatorname{tr}\chi_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(H_\Lambda(\omega))\}&\le\mathbb{E}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\varrho'(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)\,dt\right\}\\&=\int_{[q_-,q_+]^\Lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon}\rho'(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)\,dt\prod_{\tilde e\in\Lambda}d\mu_{\tilde e}.\end{aligned}$$

Durch Anwendung von Folgerung 4.6 und des Satzes über die monotone Konvergenz lässt sich die rechte Seite nach oben beschränken mittels

$$\begin{aligned} \dots &= C_1 \int\limits_{[q_-,q_+]^\Lambda} \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \sum_{e\in\Lambda} \frac{\partial \rho(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)}{\partial \omega_e}\, dt \prod_{\tilde{e}\in\Lambda} d\mu_{\tilde{e}}(\omega_{\tilde{e}}) \\ &\leq C_1 \sum_{e\in\Lambda} \int\limits_{[q_-,q_+]^A} \prod_{\tilde{e}\in A} d\mu_{\tilde{e}}(\omega_{\tilde{e}}) \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \int\limits_{q_-}^{q_+} \frac{\partial \rho(\lambda_n^\Lambda(\omega)-\lambda+t)}{\partial \omega_e}\, d\mu_e(\omega_e) dt, \quad (4.9) \end{aligned}$$

wobei $A := \Lambda \setminus \{e\}$ sei.

Wir bezeichnen mit $H_\Lambda(e,q_-)$ und $H_\Lambda(e,q_+)$ Modifikationen von H_Λ, in denen die Zufallsvariable ω_e auf den minimalen bzw. maximalen Wert gesetzt ist. Für die n-ten Eigenwerte dieser Operatoren schreiben wir $\lambda_n^\Lambda(e,q_-)$ and $\lambda_n^\Lambda(e,q_+)$. Wegen der Monotonie von ϱ lässt sich die Summe über n in (4.9) abschätzen durch

$$\|g_e\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} \{\, \varrho(\lambda_n^\Lambda(e,q_+)-\lambda+t) - \varrho(\lambda_n^\Lambda(e,q_-)-\lambda+t)\,\}\, dt. \quad (4.10)$$

Wir führen weitere Modifikationen $H_\Lambda^*(e,\omega_\pm)$, $* \in \{D,N\}$, von $H_\Lambda(e,\omega_\pm)$ ein, die mit letztgenanntem Operator bis auf zusätzliche Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen an den Knoten $\iota(e)$ und $\tau(e)$ (Entkopplung) übereinstimmen. Die zugehörigen Eigenwerte werden mit $\lambda_n^{\Lambda,*}(e,\omega_\pm)$ bezeichnet.

Mittels Dirichlet-Neumann bracketing (vgl. die Diskussionen in den Abschnitten 4.2 und 6.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\varrho(\lambda_n^\Lambda(e,q_+)-\lambda+t) - \varrho(\lambda_n^\Lambda(e,q_-)-\lambda+t) \\ &\qquad \leq \varrho(\lambda_n^{\Lambda,D}(e,q_+)-\lambda+t) - \varrho(\lambda_n^{\Lambda,N}(e,q_-)-\lambda+t). \quad (4.11) \end{aligned}$$

Da die Kante e nun entkoppelt ist, lassen sich die so modifizierten Operatoren als direkte Summe

$$H_\Lambda^*(e,\omega_\pm) = H_\Lambda^{e,*}(e,\omega_\pm) \oplus H_\Lambda^{c,*}(e,\omega_\pm)$$

von Operatoren auf $L_2(0,l_e)$ und $L_2(\Gamma_\Lambda \setminus \{e\})$ schreiben. Somit kann die Summe über die Terme aus (4.11) in dazu korrespondierende Teile zerlegt werden:

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\varrho(\lambda_n^{\Lambda,D}(e,q_+)-\lambda+t) - \varrho(\lambda_n^{\Lambda,N}(e,q_-)-\lambda+t)\big) \\ &\quad = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\varrho(\lambda_n^{e,D}(e,q_+)-\lambda+t) - \varrho(\lambda_n^{e,N}(e,q_-)-\lambda+t)\big) \quad (4.12) \\ &\quad + \sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\varrho(\lambda_n^{c,D}(e,q_+)-\lambda+t) - \varrho(\lambda_n^{c,N}(e,q_-)-\lambda+t)\big). \quad (4.13) \end{aligned}$$

Wir beginnen mit der Abschätzung von (4.12). Die Differenz $H_\Lambda^{e,D} - H_\Lambda^{e,N}$ ist eine Störung vom Rang 2 im Resolventensinn (vgl. Kapitel 4.2 oder [Si95]). Nach Lemma 4.3 lassen sich die ersten Summanden in (4.12) beschränken durch

$$\varrho(\lambda_n^{e,D}(e,q_+) - \lambda + t) \leq \varrho(\lambda_{n+2}^{e,N}(e,q_+) - \lambda + t).$$

Mittels eines Teleskopsummenarguments erhält man außerdem

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \big(\varrho(\lambda_{n+2}^{e,N}(e,q_+) - \lambda + t) - \varrho(\lambda_n^{e,N}(e,q_+) - \lambda + t)\big) \leq 2,$$

wobei beachtet wurde, dass die totale Varianz von ϱ gleich 1 ist. Man beachte, dass beide ω_e-Argumente hier auf q_+ gesetzt sind. In der Behandlung von (4.12) bleibt also noch folgender Term abzuschätzen:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} &\big(\varrho(\lambda_n^{e,N}(e,q_+) - \lambda + t) - \varrho(\lambda_n^{e,N}(e,q_-) - \lambda + t)\big) \\ &\leq \operatorname{tr}\big[\varrho(H_\Lambda^{e,N}(e,q_+) - \lambda + t) - \varrho(H_\Lambda^{e,N}(e,q_-) - \lambda + t)\big]. \quad (4.14)\end{aligned}$$

Nach Definition von ϱ gilt für alle $t \in [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$:

$$\varrho(x - \lambda + t) \leq \chi_{[\lambda-3\varepsilon,\infty)}(x) - 1 \text{ und } -\varrho(x - \lambda + t) \leq 1 - \chi_{(\lambda+3\varepsilon,\infty)}(x).$$

Damit finden wir für die Spur aus (4.14) die Schranke

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\left[\chi_{[\lambda-3\varepsilon,\infty)}(H_\Lambda^{e,N}(e,q_+)) - \chi_{(\lambda+3\varepsilon,\infty)}(H_\Lambda^{e,N}(e,q_-))\right] \\ &\quad\leq \operatorname{tr}\left[\chi_{[\lambda-3\varepsilon,\infty)}(H_\Lambda^{e,N}(e,q_-) + (q_+ - q_-)\|u_e\|_\infty) - \chi_{(\lambda+3\varepsilon,\infty)}(H_\Lambda^{e,N}(e,q_-))\right] \\ &\quad= \operatorname{tr}\left(\chi_{[\lambda-3\varepsilon-(q_+-q_-)\|u_e\|_\infty,\lambda+3\varepsilon)}(H_\Lambda^{e,N}(e,q_-))\right) \\ &\quad\leq C_2.\end{aligned}$$

Die Konstante C_2 ist unabhängig von der Kantenmenge Λ und der Energie λ. Sie hängt lediglich von der Länge $6\varepsilon + (q_+ - q_-)\|u_e\|_\infty$ des betrachteten Energieintervalls ab, vgl. [RS4], Kap. XIII.15.

Nun soll die Summe in (4.13) behandelt werden. Sei

$$\tilde{d} := \deg(\iota(e)) + \deg(\tau(e)) - 2.$$

Ähnlich wie oben ist die Differenz $H_\Lambda^{c,D}(e,q_+) - H_\Lambda^{c,N}(e,q_+)$ eine Störung vom Rang $\tilde{d}$ im Resolventensinn. Damit gilt für die ersten Summanden in (4.13):

$$\varrho(\lambda_n^{c,D}(e,q_+) - \lambda + t) \leq \varrho(\lambda_{n+\tilde{d}}^{c,N}(e,q_+) - \lambda + t).$$

Die Operatoren $H_\Lambda^{c,D}(e,q_+)$ und $H_\Lambda^{c,N}(e,q_+)$ sind konstruktionsbedingt unabhängig von der Kopplungskonstante ω_e. Damit ist (4.13) per Teleskopsummenargument durch die $\tilde{d}$-fache totale Variation von ϱ beschränkt, d. h. durch $\tilde{d}$.

Zusammenfassend beendet die Angabe folgender Schranke an die Summe in (4.9) den Beweis:

$$C_1 \sum_{e\in\Lambda} \|g_e\|_\infty \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} (C_2 + 2 + \tilde{d})\, dt \;\leq\; 4C_1(C_2 + 2 + \tilde{d})\, c_g \cdot \varepsilon \cdot \sharp\Lambda.$$

Die geforderten Ab- bzw. Unabhängigkeiten der Konstanten von verschiedenen Parametern wurden bereits während des Beweises analysiert.

□

4.5 Konsequenz für die integrierte Zustandsdichte

Wie bereits am Anfang dieses Abschnittes erwähnt wurde, ist für die Multiskalenanalyse eine Wegner-Abschätzung mit polynomieller Schranke im Würfelvolumen bzw. der Kantenanzahl ausreichend. Das Wachstum muss lediglich schwächer sein als das der im Lokalisierungsbeweis vorkommenden exponentiellen Terme. Daher stellt sich die Frage, warum lineare Wegner-Abschätzungen überhaupt von Interesse sind. Dies zu erläutern soll Aufgabe dieses Abschnitts sein. Da das betreffende Gebiet etwas abseits von den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Themen liegt, soll die Zweckmäßigkeit solcher Abschätzungen nur grob umrissen und ansonsten auf die Literatur verwiesen werden. Dies betrifft vor allem die den Beweisen zugrundeliegende superadditive ergodische Theorie.

Wir beginnen mit einer Zusammenführung der betrachteten Modelle. Im folgenden betrachten wir wieder den anfangs eingeführten $\mathbb{Z}^d$-Gittergraphen, allerdings mit veränderten Anforderungen an die Kopplungskonstanten:

- Statt eines hölderstetigen Einzelplatzmaßes μ verwenden wir ein Maß $d\mu = g(t)dt$ mit Dichte $g \in L_\infty[q_-, q_+]$ (auf jeder Kante gleich).
- Auf die Unordnungsvoraussetzung (1.2) kann verzichtet werden; sie war nur für die Anfangslängenabschätzung notwendig.

Der Einfachheit halber verwenden wir wieder $\chi_{(0,1)}$ als Einzelplatzpotential, es wäre aber auch ein $u \in L_\infty(0,1)$ mit kleinem Träger wie in (4.1) möglich.

Es sei $H_L(\omega)$ die auf den Γ-kantenberandeten Würfel $\Lambda_L(0)$, $L \in 2\mathbb{N}$, eingeschränkte Version des so konstruierten zufälligen Schrödingeroperators $H(\omega)$ mit freien Randbedingungen. Die zugehörigen Eigenwerte in aufsteigender Ordnung werden mit $\lambda_n^L(\omega)$ bezeichnet.

Für $E \in \mathbb{R}$ können wir nun die Eigenwertzählfunktion des Operators $H_L(\omega)$ definieren mittels

$$n(H_L(\omega), E) := \sharp\{n \in \mathbb{N} :\; \lambda_n^L(\omega) \leq E\} = \operatorname{tr}\left(\chi_{(-\infty,E]}(H_L(\omega))\right).$$

Sie ist monoton wachsend, rechtsseitig stetig, und gibt die Anzahl von Eigenwerten eines Boxoperators kleiner oder gleich der betrachteten Energie E wieder. Im Falle der Existenz bezeichnen wir desweiteren

$$N(E) := \lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|}\mathbb{E}\{n(H_L(\omega), E)\}$$

als integrierte Zustandsdichte von $H(\omega)$. Sie gibt die durchschnittlich Anzahl von Eigenwerten/Energieniveaus pro Einheitsvolumen kleiner oder gleich E an und ist vor allem aus physikalischer Sicht wichtig. In Lokalisierungsbeweisen kann man Anfangslängenabschätzungen ohne die Unordnungsvoraussetzung (1.2) an das Potential beweisen, wenn man eine geeignete obere Schranke an N nahe den Bandkanten beweisen kann ("Lifshitz tails").

Es lässt sich nun bereits unter schwächeren Voraussetzungen an das Potential folgendes beweisen:

4.7 Satz *Es existiert eine Verteilungsfunktion $\tilde{N} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Menge $\Omega' \subset \Omega$ vollen Maßes, so dass für alle $\omega \in \Omega'$ und alle $E \in \mathbb{R}$, für die $\tilde{N}$ stetig ist, gilt:*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|} n(H_L(\omega), E) = \tilde{N}(E) = N(E).$$

Beweis: Für die fast sichere Existenz des Grenzwerts siehe [HV06], Kapitel 6. Der dortige Beweis folgt den Argumenten von [KM82], wo wiederum auf superadditive ergodische Theorie, namentlich auf [AK81], Theorem 2.4, und [Kr85], Kapitel 6.2, zurückgegriffen wird.

Die Gleichheit $\tilde{N}(E) = N(E)$ erhält man nach erfolgtem Existenzbeweis zu $\tilde{N}$ aus

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|} n(H_L(\omega), E) &= \mathbb{E}\{\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|} n(H_L(\omega), E)\} \\
&= \lim_{L\to\infty} \mathbb{E}\{\frac{1}{|\Lambda_L(0)|} n(H_L(\omega), E)\} \\
&= N(E).
\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt dabei aus der fast sicheren Existenz des Grenzwerts in Satz 4.7. Für die Vertauschbarkeit von Erwartungswert und Limes in L wurde der Satz von der majorisierten Konvergenz verwendet. Die dafür erforderliche Majorante erhält man aus der Beschränktheit des nichtnegativen Potentials in Verbindung mit dem Min-max-Prinzip und (2.5).

□

Wie schon erwähnt, gilt Satz 4.7 bereits unter deutlich schwächeren Anforderungen an das Potential. Im hier vorliegenden Fall wissen wir wesentlich mehr:

4.8 Folgerung (aus den Sätzen 4.1 und 4.7) *Im vorliegenden Fall existiert die integrierte Zustandsdichte $N(E)$ zu $H(\omega)$ und ist Lipschitz-stetig in der Energie.*

Beweis: Die Menge $\mathcal{C}$ möglicher Unstetigkeitsstellen von $\tilde{N}$ aus Satz 4.7 ist wegen der Monotonie abzählbar. Mit der linearen Wegner-Abschätzung (4.2) erhalten wir für $E_1, E_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{C},\ E_1 < E_2$:

$$\begin{aligned} |N(E_2) - N(E_1)| &= |\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|}(\mathbb{E}\{n(H_L(\omega), E_2)\} - \mathbb{E}\{n(H_L(\omega), E_1)\})| \\ &= |\lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|}\mathbb{E}\{\mathrm{tr}\,(\chi_{(E_1,E_2]}(H_L(\omega))\}| \\ &\leq C_W\,|E_2 - E_1| \end{aligned} \tag{4.15}$$

mit einer von E unabhängigen Konstante C_W. Damit folgt unmittelbar $\mathcal{C} = \emptyset$ bzw. die Lipschitz-Stetigkeit von $N(E)$.

□

Damit haben wir die wichtigste Konsequenz aus der Linearität in der Wegner-Abschätzung kennengelernt: die Stetigkeit der integrierten Zustandsdichte. Eine quadratische Wegner-Abschätzung im Volumen wie in Abschnitt 2.1 hilft an dieser Stelle nicht weiter, da nach die Mittelung über das Volumen noch ein volumenabhängiger Term in (4.15) übrigbleibt.

Kapitel 5

Einordnung in die laufende Forschung

Im vorletzten Kapitel soll versucht werden, den derzeitigen Forschungsstand zum bearbeiteten Thema kurz abzureißen. Die Literatur sowohl zu Lokalisierung und Wegner-Abschätzungen als auch zu Quantengraphen ist dabei mittlerweile so vielfältig, dass ein kompletter Überblick über diese Gebiete den Rahmen dieses Kapitels sprengen würde. Wir wollen uns daher im ersten Abschnitt darauf beschränken, die unmittelbar hinter der Arbeit liegenden Entwicklungsstränge grob und ohne Vollständigkeitsanspruch zu skizzieren. Es soll auf einige gegenwärtige Arbeiten verwiesen werden, deren Ergebnisse zu den hier erhaltenen Sätzen in Relation stehen. Im zweiten Abschnitt geht es exemplarisch um offene Fragestellungen, mit denen man an die Arbeit anknüpfen könnte.

5.1 Bisherige Arbeiten

Wenn man sich mit Lokalisierung beschäftigt, kommt man zu Anfang nicht umhin, an die Pioniere der Lokalisierungsforschung Anderson, Mott und Twose zu nennen, die mit ihren Forschungsergebnissen [An58, MT61] die Grundlage zum physikalischen Verständnis der unterdrückten Elektronenbewegung in ungeordneten Festkörpern lieferten. Die Arbeiten waren bedeutsam genug, dass man Anderson, Mott und van Vleck im Jahre 1977 "für die grundlegenden theoretischen Leistungen zur Elektronenstruktur in magnetischen und ungeordneten Systemen" den Nobelpreis verlieh.

Die mathematische Annäherung an das Thema erfolgte erst wesentlich später. Ein erster mathematischer Lokalisierungsbeweis in einer Dimension erfolgte 1977 in einer Arbeit von Goldsheidt, Molchanov und Pastur ([GMP77]).

Das erste (diskrete) mehrdimensionale Modell wurde von Fröhlich und Spencer in [FS83] behandelt. Dabei wurde eine Multiskalentechnik eingeführt, die im folgenden einige wesentliche Verbesserungen erfuhr, wobei vor allem die Arbeit [DK89] der Autoren von Dreifus und Klein erwähnenswert ist. Alle diese Arbeiten verwendeten diskrete Modelle und eine Multiskalenanalyse mit variabler Energie.

Eine erste Übertragung auf kontinuierliche Modelle gelang Holden und Martinelli in [HM84]. Ein etwas einfacherer Multiskalenbeweis mit fixierter Energie wurde 10 Jahre später von Combes und Hislop veröffentlicht ([CH94]). Es wird dort Anderson-Lokalisierung am unteren Ende des Spektrums bewiesen. Dabei spielt am Ende des Lokalisierungsbeweises ein Argument der spektralen Mittelung eine Rolle. Das Modell erfordert absolutstetige Einzelplatzmaße, kompakt getragene Einzelplatzpotentiale und die Überdeckungseigenschaft; Displacements sind inbegriffen. Der Erweiterung des Ergebnisses auf höhere Bandkanten sowie der Übertragung auf allgemeinere Potentiale (Einzelplatzpotentiale mit großem Träger und langreichweitigen Anteilen) widmeten sich im folgenden Arbeiten von Barbaroux, Combes und Hislop ([BCH97]) und von Kirsch, Stolz und Stollmann ([KSS98, KSS98a]). Mit dem Beweis der Wegner-Abschätzung für hölderstetige Einzelplatzmaße durch Stollmann ([Sto00]) wurde eine weitere Potentialklasse behandelbar. Einen noch etwas allgemeineren, aber prinzipiell ähnlichen Fall findet der Leser in [CHK06]. Kombinationen verschiedener genannter Ergebnisse finden sich z. B. in [Ze99, He03]. Der Fall zufälliger Störungen entlang von Oberflächen wurde in [BMSt03] behandelt. Schließlich wurde im Jahre 2005 das schwierige, aber gerade physikalisch sehr wichtige Problem der Anderson-Lokalisierung im Bernoulli-Anderson-Modell durch Bourgain und Kenig ([BK05]) mit einer modifizierten Multiskalentechnik gelöst.

Aus physikalischer Sicht war es nun notwendig, neben der spektraltheoretischen auch Aussagen über die echte Dynamik der Teilchen treffen zu können (siehe z.B. [RJLS95]). Dazu wurde eine Reihe weiterer Lokalisierungsbegriffe eingeführt. Ein erstes Ergebnis zur dynamischen Lokalisierung findet sich in der Arbeit [BG98] von de Bievre und Germinet; ein Beweis für die hier verwendete starke dynamische Lokalisierung wurde 2001 durch Damanik und Stollmann erbracht ([DS01]). Durch Germinet und Klein wurde das Ergebnis in [GK01] nochmals deutlich verbessert, so dass für alle Modelle, die sich mit Multiskalenanalyse mit variabler Energie behandeln lassen, dynamische Lokalisierung mehr oder weniger gesichert ist.

Eine gute Darstellung der Multiskalentechnik in einem anpassungsfähigem Setting findet sich in der hier schon oft zitierten Monographie [Sto01]. Die dort wie auch hier verwendete Form der Multiskalentechnik folgt dabei dicht der Linie von [DK89] unter Einarbeitung einiger Verbesserungen aus [CH94]. Der Beweis zur

dynamischen Lokalisierung ist der aus [DS01], die Wegner-Abschätzung stammt aus [Sto00].

Es sei erwähnt, dass neben der Multiskalenanalyse noch eine weitere sehr leistungsfähige Beweismethode zur Lokalisierung existiert. Es handelt sich um die von Aizenman und Molchanov in [AM93] eingeführte Fractional-Moments-Methode. Auch hier wurden zunächst diskrete Modelle behandelt. Eine Übertragung auf den kontinuierlichen Fall findet man in den Arbeiten [AENSS06] von Aizenman, Elgart, Naboko, Schenker und Stolz und [BMNSS05] von Boutet de Monvel, Naboko, Stollmann und Stolz.

Schrödingeroperatoren auf Graphen wurden ursprünglich durch Ruedenberg und Scherr eingeführt ([RS53]). Auch hier dauerte es bis Ende der 80'er Jahre, bis die Quantengraphen zum Studienobjekt für Mathematiker wurden. Für einen Überblick über die Arbeiten der ersten Jahre soll hier auf [Ex97] verwiesen werden, da diese Literatur nicht in unmittelbarer Verbindung mit unserem Untersuchungsgegenstand steht. Einen neueren Überblick findet man in den Veröffentlichungen von Kuchment ([Ku02, Ku04, Ku05]).

Für die Bestimmung des deterministischen Spektrums war für uns der zum Graphen-Schrödingeroperator gehörige Transitionsoperator auf der Knotenmenge von Interesse. Diese Dualität wurde für Schrödingeroperatoren mit δ- und δ-Kopplung Mitte der 90'er Jahre durch Exner untersucht ([Ex97]). Ansatz waren dabei eine bekannte Beziehung zwischen dem Kronig-Penney-Modell und bestimmten Jacobi-Matrizen (vgl. die Referenzen in [Ex97]). Im Falle von einheitlichen Kantenlängen und freien Randbedingungen erfolgte durch Cattaneo ([Ca97]) eine wesentlich präzisere Charakterisierung der Spektren bzw. spektralen Typen auch in Abhängigkeit vom unterliegenden Graphen. Ausführlichere Ergebnisse zu Operatoren mit δ-Kopplung auf Graphen mit einheitlicher Kantenlänge findet der Leser bei Pankrashkin ([Pa06]).

Der Frage der Selbstadjungiertheit von Schrödingeroperatoren auf Graphen mit verschiedensten Randbedingungen widmeten sich Kostrykin und Schrader in [KS99] und [KS00]. Eine Zusammenstellung einiger dieser Ergebnisse findet man auch in [Sch06]. Mit verschiedenen Randbedingungen, Eigenwerten des Laplaceoperators, Eigenschaften von Resolventen und Wärmeleitungshalbgruppe beschäftigt sich auch [KS06].

Zum Ende des Abschnitts kommen wir zur Synthese beider Forschungsgebiete, d. h. zur Lokalisierung auf Quantengraphen. Diese Idee wurde bisher kaum verfolgt, so dass es hier nur wenige Arbeiten gibt. Nennenswert sind die Arbeiten [ASW05] von Aizenman, Sims und Warzel und vor allem [HP06] von Hislop und Post. In der zweitgenannten Arbeit geht es um den Nachweis von Anderson-Lokalisierung für radialähnliche Baumgraphen mit zufälligen Kantenlängen bzw. zufälliger δ-Kopplung. Der erstgenannte Artikel beschäftigt sich mit der Stabilität

des absolutstetigen Spektrums unter zufälligen Störungen bei Baumquantengraphen. In einer Arbeit von Exner, Stollmann und einem weiteren Autor ([EHS06]), die eng mit dieser Dissertation verknüpft ist, wurde erstmals die Multiskalenanalyse auf einen (Gitter-)Quantengraphen mit zufälligem Potential übertragen.

5.2 Offene Probleme

Am Ende der eigentlichen Arbeit sollen exemplarisch einige Fragen gestellt werden, mit denen man an die bisherige Forschung anknüpfen könnte. Es geht dabei um die unmittelbare Ausweitung der hier gewonnenen Ergebnisse. Verallgemeinerungen, die ohne wesentliche Veränderungen möglich sind, wurden bereits in Kapitel 3.5 besprochen.

Zunächst wären Modelle anzusprechen, in denen der Zufall in anderer Weise eine Rolle spielt.

Zufällige Ausbreitungsgeschwindigkeiten. In [FK96] und [Sto01] wurden Operatoren vom Typ $\nabla a(\omega)\nabla$ mit

$$a(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(\omega)\chi_{\Lambda_1(k)},$$

auf $L_2(\mathbb{R}^d)$ untersucht. Dabei codiert die Diagonalmatrix $a_k(\omega)$ für jeden Würfel der Seitenlänge 1 zufällige Ausbreitungsgeschwindigkeiten entlang der Koordinatenrichtungen. Im Falle der lokal eindimensionalen Graphen ist dies äquivalent zu einer zufälligen Skalierung des Laplace auf den Kanten. Es ist sehr wahrscheinlich, dass sich die verwendeten Techniken in ähnlicher Weise wie bei zufälligen Potentialen auf den Fall des Gittergraphen übertragen lassen. Unter diesem Blickwinkel scheint dies der leichteste Fall zu sein.

Zufällige δ-Kopplung. Bei diesem Fall betrachtet man den reinen Laplaceoperator mit zufälligen Kirchhoff-Knoten-Randbedingungen, d. h. Randbedingungen vom Typ

$$\sum_{\iota(e)=v} f_e'(0) - \sum_{\tau(e)=v} f_e'(1) = \alpha_v(\omega) f(v).$$

Hier liegt die Schwierigkeit insbesondere darin, die Abhängigkeit der Eigenwerte eines Würfeloperators von den zufälligen Kopplungskonstanten zu beschreiben.

Zufällige Kantenlängen. Man variiert die Kantenlängen zufällig und verändert damit die Struktur des Graphen selbst. Dies scheint einer der schwierigsten Fälle zu sein.

Ein weiterer Punkt wäre der Nachweis von Lokalisierung an höheren Bandkanten. Dazu wäre es z. B. von Interesse, periodische Potentiale einzubauen bzw. dekorierte Graphen zu betrachten (siehe z. B. [AS00]). Auch andere Gitterformen, z. B. Rechteckgitter wären diesbezüglich von Interesse (vgl. [Ex95]).

Schließlich wäre es wünschenswert, die aus physikalischer Sicht nicht notwendige Unordnungsvoraussetzung 1.2 zu entfernen. Dies geschieht im allgemeinen mit dem Nachweis gewisser oberer Schranken für die integrierte Zustandsdichte in der Nähe der Bandkanten ("Lifshitz-tails"), die dann im Beweis der Anfangslängenabschätzung verwendet werden können, vgl. z. B. [Sto01], Kap. 2.1, 2.2. Beim Beweis von Lifshitz-tails spielt die Differenz zwischen den untersten beiden Eigenwerten des Würfel-Laplaceoperators eine zentrale Rolle. Im Falle von freien Randbedingungen geht es also darum, den zweiten Eigenwert in Abhängigkeit von der Seitenlänge des Würfels abzuschätzen. Dies erweist sich leider als schwierig, da auch im korrespondierenden Bild der Transitionsoperatoren keine Randbedingungen entstehen, die die hier übliche Methode der Trennung der Raumvariablen (vgl. [Si85, RS4]) zulassen.

Kapitel 6

Mathematische Hintergrundinformationen

In der vorliegenden Arbeit haben wir Anleihen aus verschiedensten Gebieten der Mathematik genommen. Dabei wurden an manchen Stellen Zäsuren gesetzt und auf weiterführende Literatur verwiesen. Diese Vorgehensweise wird sich in einer wissenschaftlichen Arbeit auch nicht vermeiden lassen, wenn die Übersichtlichkeit gewahrt bleiben und das eigentliche Thema nicht in einer Fülle von Informationen untergehen soll.

Das vorliegende Kapitel ist dazu gedacht, verbleibende Lücken aufzufüllen, ohne stundenlang Literatur wälzen und suchen zu müssen. Dabei geht es vor allem darum, verwendete Sätze aus der Literatur zu zitieren und an unsere Bedürfnisse anzupassen. Der Autor hofft, damit die Arbeit etwas besser in sich abzuschließen und dem Leser unnötigen Aufwand zu ersparen.

6.1 CW-Komplexe und Topologie

In Abschnitt 1.2 hatten wir uns mit der Metrisierung bzw. Topologisierung von Graphen beschäftigt. Dabei war der Begriff des CW-Komplexes gefallen. Da diese Objekte nicht zum gängigen Allgemeinwissen jeden Mathematikers gehören, wollen wir uns als erstes mit deren Natur beschäftigen. Die gesamte Darstellung folgt dabei [Jä94], Kap. 3.7 und 7.

Wir beginnen mit der Definition der Bausteine von CW-Komplexen, den Zellen.

6.1 Definition (n-Zelle, Zellenzerlegung, n-Skelett) *Ein topologischer Raum heißt n-Zelle, wenn er homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Eine Zerlegung $\mathcal{E}$ eines topologischen Raumes X in Teilräume, die Zellen sind, heißt Zellenzerlegung von X. Wir bezeichnen den zellenzerlegten Raum mit $(X, \mathcal{E})$.*

Ist X ein zellenzerlegter Raum, so heißt die Vereinigung aller Zellen mit Dimension $\leq n$ das n-Gerüst oder n-Skelett von X und wird mit X^n bezeichnet.

Dabei wollen wir unter einer Zerlegung einer Menge X eine Menge paarweise disjunkter nichtleerer Teilmengen verstehen, deren Vereinigung X ist.

Als Beispiele für Zellen seien Punkte als 0-Zellen und offene Intervalle in $\mathbb{R}$ als 1-Zellen genannt. Diese Beispiele sind für unsere Zwecke vollkommen ausreichend.

CW-Komplexe sind zellenzerlegte Räume, die gewisse Axiome erfüllen, was durch nachfolgende Definition präzise gemacht wird. Wir verwenden dabei die Bezeichnungen U^n und B^n für die offene bzw. abgeschlossene Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ und $S^{n-1} := B_n \setminus U_n$ für die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$.

6.2 Definition (CW-Komplex) *Ein Paar $(X, \mathcal{E})$, bestehend aus einem Hausdorffraum X und einer Zellenzerlegung $\mathcal{E}$ heißt CW-Komplex, wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(i) ***(“Charakteristische Abbildungen“)*** *Zu jeder n-Zelle $e \in \mathcal{E}$ gibt es eine stetige Abbildung $\Phi_e : B^n \to X$, die U^n homöomorph auf die Zelle e und S^{n-1} in die Vereinigung der höchstens $(n-1)$-dimensionalen Zellen abbildet.*

(ii) ***(“Hüllenendlichkeit“)*** *Die abgeschlossene Hülle $\bar{e}$ jeder Zelle $e \in \mathcal{E}$ trifft nur endlich viele Zellen.*

(iii) ***(“Schwache Topologie“)*** *$A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn jedes $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist.*

Axiom (i) besagt grob gesprochen, dass die n-Zellen an das $(n-1)$-Skelett “angeheftet“ sind. Die Axiome (ii) und (iii) regeln die Bedingungen, wie unendlich viele Zellen sinnvoll zugelassen werden können. Für eine endliche Anzahl von Zellen sind sie trivialerweise erfüllt. In [Jä94] findet der Leser eine Anzahl von Beispielen, die diese Bedingungen illustrieren. Die Abkürzung “CW“ kommt im übrigen von “closure finite“ und “weak topology“, d. h. von den letzten beiden Axiomen.

Damit ist geklärt, was wir unter einem CW-Komplex verstehen wollen; allerdings noch nicht, inwiefern die betrachteten metrischen Graphen in dieses Konzept passen. Um diese Frage zu beantworten, soll erörtert werden, wie man CW-Komplexe durch sukzessives Anheften höherdimensionaler Zellen konstruieren kann. Das “Aneinanderkleben“ topologischer Räume wird durch folgende Definition beschrieben:

6.3 Definition *Seien X und Y topologische Räume, $X_0 \subset X$ sowie $\varphi : X_0 \to Y$ stetig. Dann bezeichnet man mit $Y \cup_\varphi X$ den Quotientenraum $(X + Y)\setminus \sim$ nach der von $x \sim \varphi(x)$ erzeugten Äquivalenzrelation auf $X + Y$. Man sagt auch, $Y \cup_\varphi X$ entstehe durch Anheften von X an Y mittels der Anheftabbildung φ, oder $Y \cup_\varphi X$*

entstehe aus $X+Y$ durch Identifikation der Punkte $x \in X_0$ mit ihren Bildpunkten $\varphi(x) \in Y$.

Die Elemente/Äquivalenzklassen aus $Y \cup_\varphi X$ sind also entweder einpunktig (falls die Punkte weder zu X_0 noch zu $\varphi(X_0)$ gehören) oder von der Form $\varphi^{-1}(y) \cup \{y\}$, falls $y \in \varphi(X_0)$ gilt. Letztere Elemente charakterisieren anschaulich gesprochen die verklebten Punkte, wobei durchaus mehrere Punkte aus X_0 an ein und denselben Punkt in Y angeklebt werden dürfen.

Man kann nun induktiv jeden CW-Komplex durch Anheften von n-dimensionalen Zellen an das $(n-1)$-Gerüst X^{n-1} herstellen (für Details siehe [Jä94]). Ist z. B. X ein CW-Komplex, $\varphi : S^{n-1} \to X^{n-1}$ stetig, so ist $X \cup_\varphi B_n$ wieder ein CW-Komplex mit einer n-Zelle mehr. Die kanonische Einbettung $B_n \subset X + B_n \to X \cup_\varphi B_n$ ist die zur neuen Zelle gehörende charakteristische Abbildung. Analog kann man ganze Familien von n-Zellen zugleich anheften. Dies soll an dem etwas trivialen, aber für uns wichtigen Beispiel metrischer Graphen näher erläutert werden.

Wir beginnen mit der Knotenmenge V als 0-Gerüst. Wir versehen die Kantenmenge E (Menge der 1-Zellen) mit der diskreten Topologie und definieren eine Familie $\{\varphi_e\}_{e \in E}$ von Abbildungen $\varphi_e : S^0 = \{-1, 1\} \to V = X^0$ gemäß

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} \iota(e), & \text{für } x = -1; \\ \tau(e), & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Abbildungen $\iota, \tau : E \to V$ hatten dabei Anfangs- und Endknoten der Kanten codiert (vgl. Definition 1.1). Durch

$$\varphi : S^0 \times E \to V, \qquad \varphi(x, e) := \varphi_e(x)$$

ist dann eine (trivialerweise stetige) Anheftabbildung gegeben, und $V \cup_\varphi (B_n \times E)$ ist der gesuchte CW-Komplex. Dabei können die oben erwähnten kanonischen Einbettungen als charakteristische Abbildungen verwendet werden. Es ist der Vollständigkeit halber sofort einzusehen, dass die Intervalle $[0, l_e]$ und $[-1, 1]$ homöomorph aufeinander abgebildet werden können.

6.2 Einige Beziehungen in Sobolev-Räumen

Dieser Abschnitt stellt eine lose Ansammlung von Sätzen über Funktionen in Sobolevräumen zur Verfügung, die an verschiedenen Stellen der Arbeit zur Anwendung kamen. Wir beginnen mit einer Sobolev-Raum-Version der klassischen Produktregel für differenzierbare Funktionen.

6.4 Lemma (Produktregel) *Sei $u \in W_2^1(\Lambda)$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ offen. Sei $\varphi : \Lambda \to \mathbb{C}$ beschränkt und gleichmäßig Lipschitz-stetig. Dann ist $\varphi u \in W_2^1(\Lambda)$ und*

$$\nabla(\varphi u) = (\nabla\varphi) \cdot u + \varphi \cdot \nabla u. \tag{6.1}$$

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass $\nabla\varphi \in (L_\infty)^d$ gilt, da jede Komponente des Gradienten durch die Lipschitz-Konstante L nach oben abgeschätzt werden kann. Somit ist die rechte Seite von Gleichung (6.1) eine L_2-Funktion. Dasselbe gilt wegen der Beschränktheit von φ für das Produkt φu. Der Rest folgt mit der Standardapproximation von u durch $C_c^\infty-$Funktionen.

□

Es folgt eine Beziehung, die in der hier vorliegenden Form [Ma85], Kap. 1.4.8, entnommen ist, ursprünglich jedoch auf die älteren Arbeiten [Ga59] und [Ni59] zurückgeht.

6.5 Satz *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, welches der äußeren Kegelbedingung genügt. Dann gilt für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = j, |\beta| = l$ und alle $\tau \in [\frac{j}{l}, 1)$ die Ungleichung*

$$\|D^\alpha u\|_q \le c\,(\|D^\beta u\|_p + \|u\|_r)^\tau \|u\|_r^{1-\tau}, \tag{6.2}$$

wobei $p \le 1$ und

$$\frac{1}{q} = \frac{j}{n} + \tau(\frac{1}{p} - \frac{l}{n}) + \frac{1-\tau}{r}.$$

Im Spezialfall $\Omega = (0,1)$ erhalten wir somit mühelos für $\tau = \frac{1}{3}$, $p = q = 2$, $j = 0$ und $l = r = 1$:

6.6 Folgerung (Nash-Typ-Ungleichung) *Für $u \in W_1^2(0,1) \cap L_1(0,1)$ gilt*

$$\|u\|_2 \le c\,(\|u'\|_2 + \|u\|_1)^{\frac{1}{3}} \|u\|_1^{\frac{2}{3}}.$$

Es gibt eine Vielzahl von Ergebnisse für Sobolev-Norm-Abschätzungen, siehe z. B. [AdF03, GT83, Ma85]. Wir wollen uns nun mit einem Satz aus [GT83], Kapitel 7, auseinandersetzen, der bei der Behandlung von Potentialen mit kleinem Träger in Abschnitt 4.3 eine Rolle spielt. Für die Definition der Glattheitseigenschaften von Rändern sei der Leser auf oben genannte Quellen verwiesen. Im für uns relevanten Fall geht es um Intervalle, die diese Bedingungen trivialerweise erfüllen.

6.7 Satz *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein $C^{1,1}$-Gebiet, $u \in W_p^k(\Omega)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 < |\beta| < k$ eine Konstante $C = C(k, \Omega)$, so dass*

$$\|D^\beta u\|_p \le \varepsilon \|u\|_{k,p} + C\varepsilon^{\frac{|\beta|}{|\beta|-k}} \|u\|_p.$$

Dabei sei $\|u\|_{k,p} := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_p$.

Beweis: siehe [GT83], Theorem 7.25, 7.27 und 7.28 sowie die Bemerkung zur Äquivalenz von Sobolevraumnormen im dortigen Kapitel 7.5.

□

In Abschnitt 4.3 wird speziell folgende Version benötigt:

6.8 Folgerung *Zu $\Omega := (a, b)$ existiert eine Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}(\Omega) > 0$, so dass für alle $u \in W_2^2(\Omega)$ gilt:*

$$\|u'\|_2 \leq \tilde{C}\|u\|_2 + \|u''\|_2.$$

Beweis: Satz 6.7 mit $k = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ liefert

$$\|u'\|_2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_{2,2} + 2C\|u\|_2.$$

Durch Ausschreiben der Sobolevnorm und Umstellen erhält man

$$\frac{1}{2}\|u'\|_2 \leq (\frac{1}{2} + 2C)\|u\|_2 + \frac{1}{2}\|u''\|_2$$

und nach Multiplikation mit 2 und $\tilde{C} := 1 + 4C$ die Behauptung.

□

Es folgt ein klassischer Satz, der sich mit Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften von Funktionen aus Sobolev-Räumen auseinandersetzt. Insbesondere sichert der Sobolevsche Einbettungssatz zum Beispiel die Existenz stetiger Repräsentanten von $W_2^1(0, l)-$Funktionen oder die Existenz der Grenzwerte der ersten Ableitung von $W_2^2(0, l)-$Funktionen an den Intervallrändern.

Wir bezeichnen für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $C_B^j(\Omega)$ den Raum der Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, die stetige Ableitungen bis zur Ordnung j besitzen, normiert mit

$$\|f\|_{C_B^j(\Omega)} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|.$$

6.9 Satz (Sobolevscher Einbettungssatz, Auszüge) *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $j \geq 0$, $m \geq 1$ natürliche Zahlen und $1 \leq p < \infty$.*

Falls Ω der äußeren Kegelbedingung genügt, und entweder $mp > n$ oder $m = n$ und $p = 1$ gilt, so existiert die Einbettung

$$W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

Genügt Ω einer starken lokalen Lipschitzbedingung, so existiert weiterhin die Einbettung

$$W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega}).$$

Beweis: siehe [AdF03], S. 87 ff.

□

Für die genaue Definition von Kegel- und Lipschitzbedingung sei der Leser auf Kapitel 4 von [AdF03] verwiesen. Für unsere Zwecke reicht es wieder aus, sich Ω als beschränktes Intervall vorzustellen; dieses erfüllt mit seinem Rand aus zwei Punkten trivialerweise beide Bedingungen.

6.3 Kriterien für Ultrakontraktivität

Für den Nachweis der Ultrakontraktivität von Halbgruppen sollen hier zwei Kriterien zur Verfügung gestellt werden. Die Idee hinter diesen Aussagen geht auf [Na58] zurück; in der konkreteren Form auf [FS86]. Der Leser findet die hier zitierte Aussage in [Ou05], Theorem 6.3, und den Bemerkungen im Anschluss bzw. auch (in etwas schwächerer Form) in [Da89]. Dabei sollte man bei H an den ungestörten Operator aus Abschnitt 2.5 und bei $\mathfrak{h}$ an die assoziierte Form denken.

6.10 Satz *Für die symmetrische Halbgruppe $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ und $\mu > 0$ sind äquivalent:*

(i) $\|e^{-tH}\|_{L_2 \to L_\infty} \leq c_1 \cdot t^{-\frac{\mu}{4}}$ *für ein $c_1 > 0$ und alle $t > 0$,*

(ii) $\|f\|_2^{2+\frac{4}{\mu}} \leq c_2 \cdot \mathfrak{h}(f) \cdot \|f\|_1^{\frac{4}{\mu}}$ *für ein $c_2 > 0$ und alle $f \in D(\mathfrak{h}) \cap L_1$.*

Beweis: siehe [Ou05].

□

Durch Anwendung von Satz 6.10 auf $H + 1$ erhält man das folgende Ergebnis (vgl. [Da89], [Ou05]):

6.11 Folgerung *Für die symmetrische Halbgruppe $(e^{-tH})_{t\geq 0}$ und $\mu > 0$ sind äquivalent:*

(i) $\|e^{-tH}\|_{L_2 \to L_\infty} \leq c_1 \cdot t^{-\frac{\mu}{4}}$ *für ein $c_1 > 0$ und alle $t \in (0, 1]$,*

(ii) $\|f\|_2^{2+\frac{4}{\mu}} \leq c_2 \cdot \|f\|_{\mathfrak{h}}^2 \cdot \|f\|_1^{\frac{4}{\mu}}$ *für ein $c_2 > 0$ und alle $f \in D(\mathfrak{h}) \cap L_1$.*

6.4 Ein weiterer Zugang zur Ultrakontraktivität der Halbgruppe

In Abschnitt 2.5 wurde zum Beweis der Existenz verallgemeinerter Eigenfunktionen die Beschränktheit des Operators $e^{-tH_0} : L_2(\Gamma) \to L_\infty(\Gamma)$ für ein $t \in (0,1)$ benötigt, wobei H_0 der freie Laplace auf Γ war. Die Ultrakontraktivitätseigenschaft der Halbgruppe wurde dabei mit Hilfe der Nash-Ungleichungen (siehe Abschnitt 6.2) bewiesen. Dies ist - wie auch z. B. die Verwendung logarithmischer Sobolev-Ungleichungen oder die direkte Abschätzung des Integralkerns - eine Standardmethode (siehe z. B. [Da89]). Der hier aufgezeigte Weg beweist oben genannte Beschränktheit mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes und verwendet dabei die lokal eindimensionale Struktur des unterliegenden Graphen.

6.12 Lemma *Für $t \in (0,1]$ existiert ein $C > 0$, so dass*

$$\|e^{-tH_0}\|_{L_2(\Gamma)\to L_\infty(\Gamma)} \le C t^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Sei $f \in L_2(\Gamma)$. Wir zeigen zunächst, dass $e^{-tH_0} f \in D(H_0)$. Dazu seien $T_n := H_0 \chi_{[0,n]}(H_0) e^{-tH_0}$ und $T := H_0 e^{-tH_0}$. Nach dem Spektralabbildungssatz gilt $T_n, T \in \mathcal{L}(L_2(\Gamma))$ mit $\|T_n\| \le \|T\| \le t^{-1}$. Weiterhin ist $D(H)$ dicht in $L_2(\Gamma)$, und für $g \in D(H)$ haben wir $T_n g \to Tg$ $(n\to\infty)$. Somit liefert das Banach-Steinhaus-Theorem die gewünschte Beziehung $e^{-tH_0} f \in D(H_0) \subset W_2^1(\Gamma)$.

Unter Verwendung des Spektralsatzes erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \|e^{-tH_0} f\|^2_{W_2^1(\Gamma)} &= ((H_0+1)\, e^{-tH_0} f \,|\, e^{-tH_0} f)_{L_2(\Gamma)} \\ &\le t^{-1} \|e^{-tH_0} f\|_{L_2(\Gamma)} \|f\|_{L_2(\Gamma)} \qquad (t \in (0,1]) \\ &\le t^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Gamma)}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt für jede Kante $e \in E(\Gamma)$:

$$\|(e^{-tH_0} f)_e\|_{L_\infty(0,1)} \le C \, \|(e^{-tH_0} f)_e\|_{W_2^1(0,1)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|e^{-tH_0} f\|_{L_\infty(\Gamma)} &= \sup_{e\in E(\Gamma)} \|(e^{-tH_0} f)_e\|_{L_\infty(0,1)} \\ &\le C \sup_{e\in E(\Gamma)} \|(e^{-tH_0} f)_e\|_{W_2^1(0,1)} \\ &\le C \Big(\sum_{e\in E(\Gamma)} \|(e^{-tH_0} f)_e\|^2_{W_2^1(0,1)} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \, \|e^{-tH_0} f\|_{W_2^1(\Gamma)} \\ &\le C\, t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Gamma)} \qquad \text{(nach (6.3))}. \end{aligned}$$

□

6.5 Eine Faktorisierungsaussage aus dem Bereich der Operatorideale

In Abschnitt 3.4 wurde eine Aussage verwendet, die Abschätzungen der Hilbert-Schmidt-Norm für geeignet faktorisierte Operatoren trifft. Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall einer grundlegenderen Aussage, die mitunter als "little Grothendieck theorem" bezeichnet wird. Der Beweis ist recht aufwändig; der interessierte Leser sei auf [DF93] verwiesen. Wir wollen hier nur einen angepassten Spezialfall zitieren, den man samt überschaubarem Beweis in [Sto94], Kap. 4, wiederfinden kann.

6.13 Satz (Little Grothendieck theorem, angepasster Spezialfall) *Seien $A \in \mathcal{L}(L_\infty(\Gamma), L_2(\Gamma))$ und $B \in \mathcal{L}(L_2(\Gamma), L_\infty(\Gamma))$ sowie A positivitätserhaltend (d. h. aus $f \geq 0$ folgt $Af \geq 0$). Dann ist AB Hilbert-Schmidt-Operator mit*

$$\|AB\|_{HS} \leq C_G \cdot \|A\| \cdot \|B\|.$$

6.6 Zum Min-max-Prinzip

Immer wieder wurden in der vorliegenden Arbeit Eigenwerte verschiedener Würfeloperatoren verglichen. Unter anderem ging es in Kapitel 4 um die Anzahl von Eigenwerten, die bei Änderung von Randbedingungen über eine fixierte Energie geschoben werden können. Der Hintergrund für diese Anwendungen soll hier näher beleuchtet werden. Es handelt sich um den folgenden Satz.

6.14 Satz (Min-max-Prinzip) *Sei H selbstadjungierter Operator, von unten beschränkt, d. h. $H \geq c\,I$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Sei*

$$\mu_n(H) := \sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} \inf_{\psi \in D(H):\, \|\psi\|=1,\, \psi \in \{\varphi_1,\ldots\varphi_n\}^\perp} (H\psi \,|\, \psi).$$

Dann gilt für jedes n entweder

(a) Es gibt n entsprechend ihrer Vielfachheit gezählte Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums von H, und μ_n ist der $n-$te Eigenwert.

oder

(b) $\mu_n = \inf \sigma_{ess}(H)$ und $\mu_n = \mu_{n+1} = \ldots$. Es gibt höchstens $n-1$ entsprechend der Vielfachheit gezählte Eigenwerte unterhalb μ_n.

Beweis: siehe [RS4], Kapitel XIII, S. 77 f.

□

Für unsere Zwecke ist auch folgende Variante in der Terminologie der quadratischen Formen interessant:

6.15 Satz (Min-max-Prinzip, Formversion) *Sei H selbstadjungiert, von unten beschränkt und $\mathfrak{h}$ die assoziierte Form. Dann gilt*

$$\mu_n(H) = \sup_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}} \inf_{\psi\in D(\mathfrak{h}):\, \|\psi\|=1,\, \psi\in\{\varphi_1,\ldots\varphi_n\}^\perp} \mathfrak{h}(\psi).$$

Beweis: siehe [RS4], Kapitel XIII, S. 78.

□

Eine wichtige Anwendung der letztgenannten Sätze ist der Vergleich von Eigenwerten zu verschiedenen Operatoren gemäß obigen Voraussetzungen. Schreibt man $H_1 \leq H_2$, falls für die zugehörigen Formen $D(\mathfrak{h}_1) \supset D(\mathfrak{h}_2)$ und

$$\mathfrak{h}_1(\psi) \leq \mathfrak{h}_2(\psi) \qquad (\forall \psi \in D(\mathfrak{h}_2))$$

gilt, so erhält man mühelos $\mu_n(H_1) \leq \mu_n(H_2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere lassen sich damit Eigenwerte zu Würfeloperatoren mit verschiedenen Randbedingungen vergleichen (z. B. beim Dirichlet-Neumann-bracketing).

Wie eingangs angedeutet, sind diese Sätze auch der Ausgangspunkt für die Abschätzung der Anzahl von Eigenwerten, die von einer Störung endlichen Rangs, wie sie z. B. beim Wechsel von Randbedingungen vorliegt, über eine fixierte Energie geschoben werden können, vgl. Abschnitt 4.2.

6.7 Etwas Störungstheorie

Bei der Behandlung von Potentialen mit kleinem Träger in Abschnitt 4.3 musste an einer Stelle die Abhängigkeit eines Eigenwertes von den Kopplungskonstanten analysiert werden. Hier soll das notwendige Werkzeug - ein Störungssatz für Störungen erster Ordnung - zur Verfügung gestellt werden.

6.16 Satz (Feynman-Hellmann-Theorem) *Seien H_0 ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, H_1 ein beschränkter symmetrischer Operator und*

$$H(t) := H_0 + t \cdot H_1 \qquad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon)).$$

Sei $\varphi(t)$ eine normierte Eigenfunktion zum Eigenwert $E(t)$ von $H(t)$. Dann gilt: Ist $\varphi(t)$ differenzierbar auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$, so ist auch $E(t)$ differenzierbar auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$, und es gilt

$$E'(0) = (H_1\varphi(0) \,|\, \varphi(0)).$$

Beweis: siehe z. B. [Sto01], Theorem 4.1.29.

□

Nun drängt sich die Frage auf, wie man die Differenzierbarkeit von $\varphi(t)$ zeigen kann. Eine mögliche Antwort gibt der folgende Satz für isolierte einfache Eigenwerte.

6.17 Satz *Seien H_0 und H_1 wie in Satz 6.16, $\|H_1\| \leq 1$. Sei E_0 ein isolierter einfacher Eigenwert von H_0 d. h. es existiere ein $\vartheta > 0$ mit $\sigma(H_0) \cap B_\vartheta(E_0) = \{E_0\}$. Dann gilt:*

(i) Für $z \in U_{\frac{\vartheta}{2}}(0) \subset \mathbb{C}$ besteht das Spektrum von $H(z) := H_0 + zH_1$ in $B_{\frac{\vartheta}{2}}(E_0)$ aus einem einfachen Eigenwert $E(z)$.

(ii) Die Funktion $U_{\frac{\vartheta}{2}}(0) \ni z \mapsto E(z)$ ist holomorph.

(iii) Es gibt eine holomorphe Funktion $U_{\frac{\vartheta}{2}}(0) \ni z \mapsto \varphi(z) \in \mathcal{H}$, so dass $\varphi(z)$ normierte Eigenfunktion von $H(z)$ zum Eigenwert $E(z)$ ist.

Beweis: siehe z. B. [Sto01], Theorem 4.1.30.

□

Diese Sätze kann man in einer ganzen Reihe von Quellen finden; es sei vor allem der Klassiker [Ka76] erwähnt. Dort (wie auch z. B. in [RS4], Thm. XII.13) wird auch der Fall von Eigenwerten größerer (endlicher) Vielfachheit diskutiert. Die Aussage dabei ist, dass Satz 6.17 verallgemeinert werden kann, wobei man die betreffenden Funktionen durch gelegentliches Umnummerieren geeignet voneinander isolieren muss. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die Voraussetzung $\|H_1\| \leq 1$ eine Bequemlichkeit darstellt, die mittels Reskalierung leicht entfernt werden kann.

Die Aussage von Satz 6.17 in Verbindung mit der letzteren Bemerkung sichert uns die Anwendbarkeit von Satz 6.16 in Abschnitt 4.3, da die dortigen Operatoren kompakte Resolventen besitzen.

6.8 Zum Lemma von Gronwall

Wie schon mehrfach erwähnt, handelt es sich bei Graphen um lokal eindimensionale Objekte, so dass sich eine Reihe von Sätzen für gewöhnlichen Differentialgleichungen übertragen lassen. Es stellt sich dem Leser meiner Dissertation vielleicht dennoch die Frage, was ein derart elementarer Stoff wie das Lemma von Gronwall hier zu suchen hat. Die Antwort ist, dass wir für unsere Arbeit eine "differenzierbare Variante" dieses Satzes benötigen, die man selten in Lehrbüchern findet. Beginnen wir also mit einer nostalgischen Erinnerung an unser Grundstudium...

6.18 Satz (Gronwall-Lemma, Standard-/Integralvariante) *Seien $T > 0$, $u, M \in C[0,T]$; $u, M \geq 0$ und $K > 0$ so, dass*

$$u(t) \leq K + \int_0^t M(s)u(s)\,ds$$

für alle $t \in [0,T]$. Dann gilt für alle $t \in [0,T]$:

$$u(t) \leq K \cdot e^{\int_0^t M(s)\,ds}.$$

Beweis: siehe z.B. [Am95], S. 99 f.

□

Für uns ist folgende Version relevant:

6.19 Satz (Gronwall-Lemma, "differenzierbare" Variante) *Seien $\eta \geq 0$ differenzierbar, $\varphi, \psi \geq 0$ stetig auf $[0,T]$, und es gelte*

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t) \qquad (\forall t \in [0,T]).$$

Dann gilt für $t \in [0,T]$:

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s)\,ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds \right).$$

Insbesondere folgt aus $\eta(0) = 0$ und $\psi = 0$ die Beziehung $\eta = 0$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t \varphi(s)\,ds}\eta(t) \right) = e^{-\int_0^t \varphi(s)\,ds}(\eta'(t) - \varphi(t)\eta(t)) \leq e^{-\int_0^t \varphi(s)\,ds}\psi(t).$$

Integration beider Seiten von 0 bis t liefert

$$e^{-\int_0^t \varphi(s)\,ds}\eta(t) - \eta(0) \leq \int_0^t e^{-\int_0^s \varphi(\tilde{s})\,d\tilde{s}}\psi(s)\,ds \leq \int_0^t \psi(s)\,ds.$$

Einfache Umformungen erzeugen die Behauptung.

□

Mitunter ist es notwendig, auch die zeitliche Entwicklung bestimmter Funktionen in der Vergangenheit zu untersuchen. Dies ist Gegenstand der nächsten Aussage.

6.20 Folgerung *Seien $C > 0$, $T_1 \leq 0 < T_2$ sowie $\eta \geq 0$ eine differenzierbare Funktion auf $[T_1, T_2]$ mit*

$$|\eta'(t)| \leq C \cdot \eta(t) \qquad (\forall t \in [T_1, T_2]).$$

Dann gilt

$$\eta(t) \leq e^{C|t|} \qquad (\forall t \in [T_1, T_2]).$$

Beweis: Für $t \in [0, T_2]$ folgt die Aussage unmittelbar aus Satz 6.19. Wir betrachten also im folgenden $t \in [T_1, 0]$. Sei $\hat{\eta} : [0, -T_1] \to \mathbb{R}$, $\hat{\eta} := \eta(-\cdot)$. Dann ist $\hat{\eta}$ differenzierbar, und

$$\hat{\eta}'(\hat{t}) = -\eta'(-\hat{t}) \leq C \cdot \eta\,(-\hat{t}) = C \cdot \hat{\eta}\,(\hat{t}).$$

Wiederum mit Satz 6.19 folgt

$$\eta(-\hat{t}) = \hat{\eta}(\hat{t}) \leq C \cdot e^{C\hat{t}} \qquad (\forall \hat{t} \in [0, -T_1])$$

und mittels Variablensubstitution $t := -\hat{t}$ schlussendlich die Behauptung.

□

6.9 Elementarstochastische Hilfsmittel

Sei (A_n) eine Folge von Ereignissen. Wir definieren

$$\liminf A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} (\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k)$$

und bemerken, dass dieses Ereignis alle Elemente enthält, die in allen A_n liegen. Mit dieser Terminologie formulieren wir dann:

6.21 Lemma (Borel-Cantelli-Lemma) *Sei (A_n) eine Folge messbarer Mengen mit $\sum_n \mathbb{P}(A_n^c) < \infty$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = 1.$$

Beweis: Sei $\omega \notin \liminf A_n$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\omega \notin \bigcap_{k=m}^{\infty} A_k$$

und damit

$$\mathbb{P}((\liminf A_n)^c) \leq \mathbb{P}(\bigcup_{k=m} A_k^c) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c).$$

Mit $\sum_n \mathbb{P}(A_n^c) < \infty$ folgt für $m \to \infty$ die Behauptung.

□

Literaturverzeichnis

[AdF03] R. A. Adams und J. J. F. Fournier: Sobolev spaces. Second Edition, Pure and applied mathematics series 140, Elsevier Science Ltd., Oxford 2003.

[AENSS06] M. Aizenman, A. Elgart, S. Naboko, J. Schenker und G. Stolz: Moment analysis for localization in random Schrödinger operators. Invent. Math. 163, S. 343-413, 2006.

[AK81] M. A. Akcoglu und U. Krengel: Ergodic theorems for supperadditive processes. J. Reine Angew. Math. 323, S. 53-67, 1981.

[AM93] M. Aizenman und S. Molchanov: Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation. Comm. Math. Phys. 157, S. 245-278, 1993.

[Am95] H. Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin 1995.

[An58] P. W. Anderson: Absence of diffusion in certain random lattices. Phys. Rev. 109, S. 1492-1505, 1958.

[AS00] M. Aizenman und J. Schenker: The creation of spectral gaps by graph decoration. Lett. Math. Phys. 53, S. 253-262, 2000.

[ASW05] M. Aizenman, R. Sims und S. Warzel: Fluctuation based proof of the stability of ac spectra of random operators on tree graphs. Preprint, math-ph/0510069, 2005. Erscheint in Recent Advances in Differential Equations and Mathematical Physics.

[BCH97] J. M. Barbaroux, J. M. Combes und P. D. Hislop: Localization near band edges for random Schrödinger operators. Helv. Phys. Acta 70, S. 16-43, 1997.

[BFM99] J. M. Barbaroux, W. Fischer und P. Müller: Dynamical properties of random Schrödinger operators. Preprint, math-ph/9907002, 1999.

[BG98] F. Germinet und S. de Bievre: Dynamical localization for discrete and continuous random Schrödinger operators. Commun. Math. Phys. 194, S. 323-341, 1998.

[BK05] J. Bourgain und C. E. Kenig: On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension. Invent. math. 161, S. 389-426, 2005.

[BMNSS05] A. Boutet de Monvel, S. Naboko, P. Stollmann und G. Stolz: Localization near fluctuation boundaries via fractional moments and applications. Preprint, mp_arc 05-324, 2005.

[BMSt03] A. Boutet de Monvel und P. Stollmann: Eigenfunction expansions for generators of Dirichlet forms. J. reine angew. Math. 561, S. 131-144, 2003.

[BSI07] Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik: Nanotechnologie. Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik, Bonn 2007.

[Ca97] C. Cattaneo: The spectrum of the continuous Laplacian on a graph. Mh. Math. 124, S. 215-235, 1997.

[CFKS82] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch und B. Simon: Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry. Springer, Berlin 1982.

[CH94] J. M. Combes und P. D. Hislop: Localization for some continuous, random Hamiltonians in d-dimensions. J. Funct. Anal. 124, S. 149-180, 1994.

[CHK06] J.-M. Combes, P. D. Hislop und F. Klopp: An optimal Wegner estimate and its application to the global continuity of the integrated density of states for random Schrödinger operators. Preprint, math-ph/0605029, 2006.

[CL90] R. Carmona und L. Lacroix: Spectral theory of random Schrödinger operators. Birkhäuser, Boston 1990.

[CT73] J.-M. Combes und L. Thomas: Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators. Commun. Math. Phys. 34, S. 251-270, 1973.

[Da89] E. B. Davies: Heat kernels and spectral theory. Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[DF93] A. Defant und K. Floret: Tensor products and operator ideals. North Holland, Amsterdam 1993.

[DK89] H. von Dreifus und A. Klein: A new proof of localization in the Anderson tight binding model. Commun. Math. Phys. 124, S. 285-299, 1989.

[DS01] D. Damanik und P. Stollmann: Multi-scale analysis implies strong dynamical localization. Geom. funct. anal. (GAFA) 11, S. 11-29, 2001.

[EHS06] P. Exner, M. Helm und P. Stollmann: Localization on a quantum graph with a random potential on the edges. Preprint, math-ph/0611609, 2006, erscheint in Rev. Math. Phys.

[EP05] P. Exner und O. Post: Convergence of spectra of graph-like thin manifolds. J. Geom. Phys. 54, S. 77-115, 2005.

[Ex95] P. Exner: Lattice Kronig-Penney models. Phys. Rev. Lett. 74, S. 3503-3506, 1995.

[Ex97] P. Exner: A duality between Schrödinger operators and certain Jacobi matrices. Ann. Inst. H. Poincaré 66, S. 359-371, 1997.

[FS83] J. Fröhlich und T. Spencer: Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy. Commun. Math. Phys. 88, S. 151-184, 1983.

[FS86] E. B. Fabes und D. W. Stroock: A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old ideas of Nash. Arch. Rat. Mech. Anal. 96(4), S. 327-338, 1986.

[FK96] A. Figotin und A. Klein: Localization of classical waves I: Acoustic waves. Commun. Math. Phys. 180, S. 439-482, 1996.

[Ga59] E. Gagliardo. Ulteriori propieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. Ric. Mat. 8N1, S. 24-51, 1959.

[GK01] F. Germinet und A. Klein: Bootstrap multiscale analysis and localization in random media. Commun. Math. Phys. 222(2), S. 415-448, 2001.

[GK03] F. Germinet und A. Klein: Operator kernel estimates for functions of generalized Schrödinger operators. Proc. Amer. Math. Soc. 131, S. 911-920, 2003.

[GLV06] M. Gruber, D. Lenz und I. Veselić: Uniform existence of the integrated density of states for random Schrödinger operators on metric graphs over $\mathbb{Z}^d$. Preprint, arXiv:math/0612743v1, 2006.

[GMP77] I. Ya. Goldsheidt, S. A. Molchanov und L. A. Pastur: Typical one-dimensional Schrödinger operator has pure point spectrum. Funktsional Anal. i Prilozhen. 11(1), S. 1-10, 1977; engl. Version in: Functional Anal. Appl. 11, 1977.

[GT83] D. Gilbarg und N. S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order. 2nd edition, Springer, Berlin/Heidelberg 1983.

[He03] M. Helm: Schrödingeroperatoren mit zufälliger Abweichung der Potentiale von den Gitterpositionen. Diplomarbeit, TU Dresden 2003.

[HM84] H. Holden und F. Martinelli: On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator in $L_2(\mathbb{R}^\nu)$. Commun. Math. Phys. 93, S. 197-217, 1984.

[HP06] P. Hislop und O. Post: Anderson localization for radial tree-like random quantum graphs, Preprint, math-ph/0611022, 2006.

[HV06] M. Helm und I. Veselić: A linear Wegner estimate for alloy type Schrödinger operators on metric graphs. Preprint, arXiv: math.SP/0611609v1, 2006.

[Jä94] K. Jänich: Topologie. 4. Auflage, Springer, Berlin/Heidelberg 1994.

[Ka76] T. Kato: Perturbation Theory for linear Operators. 2nd. edition, Springer, Berlin 1976.

[Ki96] W. Kirsch: Wegner estimates and Anderson localization for alloy-type potentials. Math. Z. 221, S. 507-512, 1996.

[KM82] W. Kirsch und F. Martinelli: On the density of states of Schrödinger operators with a random potential. J. Phys. A: Math. Gen. 15, S. 2139-2156, 1982.

[KMS06] M. Kramar Fijavž, D. Mugnolo und E. Sikolya: Variational and graph theoretical methods for waves. and diffusion in networks. Preprint, erscheint in Appl. Math. Optim.

[Kr85] U. Krengel: Ergodic theorems. Studies in Mathematics 6, Walter de Gruyter, New York 1985.

[KS99] V. Kostrykin und R. Schrader: Kirchhoff's rule for quantum wires. J. Phys. A: Math. Gen., 32, S. 595-630, 1999.

[KS00] V. Kostrykin und R. Schrader: Kirchhoff's rule for quantum wires. II: The inverse problem with possible applications to quantum computers. Fortschr. Phys. 48(8), S. 703-716, 2000.

[KS06] V. Kostrykin und R. Schrader: Laplacians on metric graphs: Eigenvalues, resolvents and semigroups. Cont. Math. 415, S. 201-225, 2006.

[KSS98] W. Kirsch, P. Stollmann und G. Stolz: Localization for random perturbations of periodic Schrödinger operators. Random Operators and Stochastic Equations 8(2), S. 153-180, 1998.

[KSS98a] W. Kirsch, P. Stollmann und G. Stolz: Anderson localization for random Schrödinger operators with long range interactions. Commun. Math. Phys. 195, S. 495-507, 1998.

[Ku02] P. Kuchment: Graph models of wave propagation in thin structures. Waves in Random Media 12, no. 4, R1-R24, 2002.

[Ku04] P. Kuchment: Quantum Graphs I. Some basic structures. Waves in Random media 14, S. 107-128, 2004.

[Ku05] P. Kuchment: Quantum Graphs II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs. J. Phys. A: Math. Gen. 38, S. 4887-4900, 2005.

[KV02] W. Kirsch und I. Veselić: Existence of the density of states for one-dimensional alloy-type potentials with small support. Contemp. Math. 307, S. 171-176, 2002.

[KZ01] P. Kuchment und H. Zeng: Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph. J. Math. Anal. Appl. 258, S. 671-700, 2001.

[Ma85] V. G. Maz'ja: Prostranstva S. L. Soboleva. Isdatjelstvo Leningradskovo Universiteta, Leningrad 1985.

[MT61] N. F. Mott und W. D. Twose: The theory of impurity conduction. Adv. Phys. 10, S. 107-163, 1961.

[Mu05] D. Mugnolo: Gaussian estimates for a heat equation on a network. Erhältlich unter www.montag.it/pubblicodimerda/diffdirrob.pdf (Stand 16.05.2006), 2005.

[Na58] J. Nash: Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. 80, S. 931-954, 1958.

[Ni59] L. Nirenberg: On elliptic partial differential equation (Lecture II). Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3, 13, S. 115-162, 1959.

[Ou05] E. M. Ouhabaz: Analysis of heat equations on domains. LMS Monograph series 31, Princeton University Press, 2005.

[Pa06] K. Pankrashkin: Spectra of Schrödinger operators on equiliteral quantum graphs. Preprint, math-ph/0512090v2, 2006.

[Po06] O. Post: Spectral convergence of non-compact quasi-one-dimensional spaces. Preprint, math-ph/0512081v2, 2006.

[RJLS95] R. del Rio, S. Jitomirskaya, Y. Last und B. Simon: What is localization? Phys. Review Lett. 75, S. 117-119, 1995.

[RS1] M. Reed und B. Simon: Methods of modern mathematical physics I, Functional analysis, Revised and enlarged edition. Academic Press, San Diego 1980.

[RS2] M. Reed und B. Simon: Methods of modern mathematical physics II, Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press, San Diego 1975.

[RS3] M. Reed und B. Simon: Methods of modern mathematical physics III, Scattering theory. Academic Press, San Diego 1979.

[RS4] M. Reed und B. Simon: Methods of modern mathematical physics IV, Analysis of operators. Academic Press, San Diego 1978.

[RS53] K. Ruedenberg und C. W. Scherr: Free-electron network model for conjugated systems, I. theory. J. Chem. Phys. 21, S. 1565-1581, 1953.

[Sch06] C. Schubert: Laplace-Operatoren auf Quantengraphen. Diplomarbeit, Technische Universität Chemnitz 2006.

[Si85] B. Simon: Lifshitz tails for the Anderson model. J. Stat. Phys. 38, S. 65-76, 1985.

[Si95] B. Simon: Spectral analysis of rank one pertubation and applications. CRM Lecture notes, Vol. 8, S. 109-149, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1995.

[Sto94] P. Stollmann: Störungstheorie von Dirichletformen mit Anwendungen auf Schrödingeroperatoren. Habilitationsschrift, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität Frankfurt am Main, 1994. Erhältlich unter www-user.tu-chemnitz.de/∼stollman/preprints/habil.ps.

[Sto00] P. Stollmann: Wegner estimates and localization for continuum Anderson models with some singular distribution. Arch. Math. 75, S. 307-311, 2000.

[Sto01] P. Stollmann: Caught by disorder - bound states in disordered media. Progress in Math. Phys., Birkhäuser, Boston 2001.

[Stu94] K.-Th. Sturm: Analysis of local Dirichlet spaces. Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties. J. reine angew. Math. 456, S. 173-196, 1994.

[SV96] P. Stollmann und J. Voigt: Perturbation of Dirichlet forms by Measures. Potential Analysis 5, S. 109-138, 1996.

[Ze99] H. Zenk: Anderson localization for a multidimensional model including long range potentials and displacements. Preprint-Reihe des Fachbereichs Mathematik, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz 1999.

Thesen

In der vorliegenden Dissertation werden zufällige Schrödingeroperatoren der Form

$$H(\omega) = -\Delta + V_\omega$$

auf einem $\mathbb{Z}^d$-Gittergraphen Γ mit freien Randbedingungen betrachtet. Das zufällige Potential V_ω hat dabei die Struktur

$$V_\omega(x) = \sum_{e \in E(\Gamma)} q_e(\omega)\chi_e$$

mit identisch unabhängig verteilten Zufallsvariablen q_e ("Kopplungskonstanten"). Die betrachtete zugehörige Verteilung ("Einzelplatzmaß") hat ihren Träger auf einem Intervall $[q_-, q_+]$, ist hölderstetig und erfüllt eine Unordnungsvoraussetzung vom Typ $\mu([q_-, q_- + h]) \leq h^\tau$ für kleine h. Für diese Operatoren auf $L_2(\Gamma)$ wird gezeigt:

(1) **[Deterministisches Spektrum]** Es gilt

$$\sigma(H(\omega)) = [q_-, \infty) \quad \text{für fast alle } \omega.$$

(2) **[Anderson-Lokalisierung]** Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $H(\omega)$ für fast alle ω in $[q_-, q_- + \varepsilon]$ reines Punktspektrum mit exponentiell abfallenden Eigenfunktionen besitzt.

(3) **[Starke dynamische Lokalisierung]** Zu $p > 2(2\tau - d)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für $K \subset \Gamma$ kompakt und alle Intervalle $I \subset [q_-, q_- + \varepsilon]$ gilt:

$$\mathbb{E}\{\sup_{t>0} \| |X|^p e^{-itH(\omega)} P_I(H(\omega))\chi_K \|\} < \infty.$$

Zum Beweis der Lokalisierungsergebnisse wird eine Multiskalentechnik verwendet. Bei dieser wird das Verhalten der Resolventen $R_\Lambda(E)$ zu Einschränkungen $H_\Lambda(\omega)$ des Modelloperators auf geeignet an die Graphenstruktur angepasste Würfel analysiert. Im Kern zielt die Technik auf den Beweis folgender Aussage:

(4) **[Exponentielles Abfallen der lokalen Resolventen]** Es existieren eine Folge $(l_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Längenskalen und ein $\gamma > 0$, so dass mit hoher Wahrscheinlichkeit für mindestens einen zweier disjunkter Würfel mit Seitenlänge l_k gilt:

$$\| \chi_\Lambda^{\text{out}} R_\Lambda(E) \chi_\Lambda^{\text{int}} \| \leq e^{-\gamma l_k}.$$

Hierbei bezeichnen $\chi_\Lambda^{\text{int}}$ und $\chi_\Lambda^{\text{out}}$ charakteristische Funktionen zu gewissen Innen- und Außenbereichen des Würfels Λ (vgl. (7)).

Für die Multiskalenanalyse werden in der Dissertation eine Reihe vorbereitender Aussagen gezeigt. Dies sind:

(5) **[Wegner-Abschätzung]** Für Intervalle $I \subset (-R, R)$ und Operatoreinschränkungen auf geeignete Würfel gilt eine Ungleichung der Form

$$\mathbb{P}\{\sigma(H_\Lambda(\omega)) \cap I \neq \emptyset\} \leq C_R \cdot |\Lambda|^2 \cdot |I|^\alpha.$$

Dabei ist α der Hölder-Exponent des Einzelplatzmaßes.

(6) **[Anfangslängenabschätzung]** Es existiert eine Anfangslänge l^*, so dass für alle Würfel mit Seitenlänge $l \geq l^*$ eine Abschätzung folgenden Typs gilt:

$$\mathbb{P}\{\text{dist}(\sigma(H_\Lambda(\omega)), q_-) \leq l^{\beta-2}\} \leq l^{-\xi}.$$

(7) **[Geometrische Resolventenungleichung]** Für die Resolventen von Operatoreinschränkungen zu ineinandergeschachtelten Würfeln $\Lambda \subset \Lambda'$ gilt:

$$\|\chi_B R_{\Lambda'}(E)\chi_A\| \leq C_{\text{geom}} \cdot \|\chi_B R_{\Lambda'}(E)\chi_\Lambda^{\text{out}}\| \, \|\chi_\Lambda^{\text{out}} R_\Lambda(E)\chi_A\|.$$

Dabei sind A und B geeignete Mengen im Inneren von Λ bzw. in $\Lambda' \setminus \Lambda$.

(8) **[Combes-Thomas-Abschätzung]** Für gewisse Teilmengen A und B eines geeigneten Würfels Λ mit $\delta := \text{dist}(A, B) \geq 1$, $E \in (r, s) \subset \varrho(H_\Lambda) \cap (-R, R)$ und $\eta := \text{dist}(E, (r, s)^c) > 0$ gilt:

$$\|\chi_A R_\Lambda(E)\chi_B\| \leq c_1 \cdot \eta^{-1} \cdot e^{-c_2\sqrt{\eta(s-r)}\,\delta}.$$

(9) Zu bezüglich des Spektralmaßes fast jedem $\lambda \in \sigma(H(\omega))$ existiert eine polynomiell beschränkte verallgemeinerte Eigenfunktion.

Zusätzlich werden in der Arbeit sehr allgemeine Quantengraphen untersucht. In diesem Setting werden Einzelplatzpotentiale $u_e \in L_\infty[0, l_e]$ und Einzelplatzmaße mit gleichmäßig beschränkten Dichten $g_e \in L_\infty[q_-, q_+]$ betrachtet. Bei den Einzelplatzpotentialen werden Schranken der Form $c_-\chi_{S_e} \leq u_e \leq c_+\chi_{[0,l_e]}$ mit $c_- > 0$, vorausgesetzt, wobei S_e Intervalle mit Länge $|S_e| \geq s$ sind. Für dieses allgemeinere Modell wird gezeigt:

(10) **[Lineare Wegner-Abschätzung]** Für endliche Subgraphen Γ_Λ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [0, 1]$ gilt

$$\mathbb{E}\{\text{tr}\, \chi_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}(H_\Lambda(\omega))\} \leq C \cdot \varepsilon \cdot \sharp E(\Gamma_\Lambda).$$

(11) Im Falle des $\mathbb{Z}^d$-Gittergraphen mit gleichmäßig gewählten Einzelplatzpotentialen und -maßen folgt aus (10) die Lipschitz-Stetigkeit der integrierten Zustandsdichte

$$N(E) := \lim_{L\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_L(0)|}\mathbb{E}\{\mathrm{tr}\,(\chi_{(-\infty,E]}(H_L(\omega)))\}.$$

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Mario Helm
Geburtsdatum:	18. Februar 1975
Geburtsort:	Schlema
Nationalität:	deutsch
Familienstand:	getrennt lebend

Ausbildung

2000-2003	Studium der Mathematik an der TU Dresden, Abschlüsse als Gymnasiallehrer Mathematik/Physik (1.Staatsprüfung, 2001) und Diplom-Mathematiker (2003), Studienschwerpunkte in Analysis, Numerik und Theoretischer Physik, Diplomthema: "Schrödingeroperatoren mit zufälliger Abweichung der Potentiale von den Gitterpositionen"
1993-1999	Studium Lehramt an Gymnasien (Mathematik/Physik), später parallel Mathematik (Diplom) an der TU Dresden
1997/1998	Auslandsseminare zu Kernphysik und alternativen Energieträgern in Athen und Reykjavik
1990-1993	Abitur am Clemens-Winkler-Gymnasium in Aue
1981-1990	Polytechnische Oberschule "Clara Zetkin" in Eibenstock (Erzgebirge)

Berufserfahrung

2003-2007	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der TU Chemnitz, AG Mathematische Physik

2000-2001	Tutorien zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler an der TU Dresden, später auch private Tutorien für Bauingenieure und Lehrämtler, Nachhilfe im Schüler- und Studentenbereich
Sommer 2000	Mathematisches Praktikum am Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme Dresden
1999-2000	Zivildienst am Diakonissenkrankenhaus Dresden (Öffentlichkeitsarbeit)
Sept. 1998	Sternwartenpraktikum an der Schulsternwarte Schneeberg
1997-1998	Studentische Hilfskraft in der Elektronenmikroskopie der TU Dresden

Veröffentlichungen

- W. Just, C. Rödenbeck, H. Kantz und M. Helm: Stochastic modelling: replacing fast degrees of freedom by noise. Journal of Physics A: Math. and General 34, S. 3199-3213, 2001.
- P. Exner, M. Helm und P. Stollmann: Localization on a quantum graph with a random potential on the edges. Preprint, math-ph/0611609, 2006, erscheint in Rev. Math. Phys.
- M. Helm und I. Veselić: A linear Wegner estimate for alloy type Schrödinger operators on metric graphs. Preprint, arXiv: math.SP/0611609v1, 2006.

Sonstige Aktivitäten

2003-2007	Konzeptionelle und praktische Mitarbeit (als Trainer) bei der Karatevereinigung Südsachsen e.V.
1994-1999	Arbeit als Karatetrainer im Kinder- und Jugendbereich; Mitarbeit in verschiedenen Vereinsvorständen bis 2000
1988-1998	Mitarbeit im Chor der Stadtkirche Eibenstock
1983-1993	Klavierunterricht bei Kantor Konrad Kanis in Eibenstock

Weitere Interessen: Ausdauersport (Laufen, Radfahren, Skaten), Wandern, Bergwandern, Trekking, Reisen, Klavierspielen (klassisch), Amateurastronomie

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die am heutigen Tag eingereichte Dissertation zum Thema “Lokalisierung auf Gittergraphen mit zufälligem Potential“ unter der Betreuung von Herrn Prof. Dr. Peter Stollmann selbständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt.

Die Dissertation wurde in dieser oder ähnlicher Form an keiner anderen Stelle zum Zwecke eines Promotionsverfahrens eingereicht. Es wurde von mir bisher kein Promotionsverfahren an anderer Stelle beantragt.

Ort/Datum Unterschrift