

Parabolische Randanfangswertaufgaben mit zufälliger Anfangs- und Randbedingung

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ
Fakultät für Mathematik



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

vorgelegt von Dipl.-Math. oec Anne Kandler
geb. am 15. 03. 1978 in Görlitz

Betreuer: Prof. Dr. Jürgen vom Scheidt (TU Chemnitz)
Gutachter: Prof. Dr. Jürgen vom Scheidt (TU Chemnitz)
Prof. Dr. Werner Römisch (Humboldt-Universität zu Berlin)
Prof. Dr. Matthias Richter (HTW Dresden)

Tag der Verteidigung: 20. Dezember 2006

Verfügbar im MONARCH der TU Chemnitz:
<http://archiv.tu-chemnitz.de/pub/2007/0057>

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Gliederung der Arbeit	9
1.2	Stochastische Grundlagen	11
1.3	Problembeschreibung	13
2	Einführung in die Finite-Element-Methode	17
3	Einführung in die Fourier-Methode	25
3.1	Das homogene parabolische RAWP	27
3.2	Das inhomogene parabolische RAWP	29
3.3	Anwendung der Fourier-Methode auf die Variationsformulierung	31
3.3.1	Das homogene parabolische RAWP	31
3.3.2	Das inhomogene parabolische RAWP	32
4	Randanfangswertproblem mit zufälliger Anfangsbedingung	35
4.1	Berechnung der Korrelationsfunktion über die Finite-Elemente-Methode .	36
4.1.1	Asymptotische Entwicklung höherer Ordnung	43
4.1.2	Direkte Berechnung für bilineare Ansatzfunktionen	52
4.1.3	Explizite Berechnung	55
4.2	Berechnung der Korrelationsfunktion über die Fourier-Methode	58
5	Randanfangswertproblem mit zufälliger Randbedingung	65
5.1	Berechnung der Korrelationsfunktion über die Finite-Elemente-Methode .	66
5.1.1	Asymptotische Entwicklung höherer Ordnung	72
5.1.2	Direkte Berechnung bei linearen oder bilinearen Ansatzfunktionen .	80
5.1.3	Explizite Berechnung	84
5.2	Berechnung der Korrelationsfunktion über die Fourier-Methode	85

6	Simulation	93
6.1	Definition und Eigenschaften von Moving-Average-Felder	94
6.2	Bestimmung der Koeffizienten	101
6.2.1	Faktorisierung der kovarianzerzeugenden Funktion	101
6.2.2	Algorithmus von Wilson	102
6.2.3	Zerlegung der Spektraldichte	103
6.3	Interpolation von Moving-Average-Feldern	103
6.4	Approximation von homogenen Zufallsfeldern	110
6.4.1	Verschiebung der Stützstellen mit Hilfe einer Zufallsvariablen	110
6.4.2	Verschiebung der Stützstellen mit Hilfe verschiedener Zufallsvariablen	113
7	Numerische Beispiele	119
7.1	RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung	119
7.2	Analysis des RAWP mit zufälliger Randbedingung	129
	Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	143
	Thesen	145
	Lebenslauf	147
	Erklärung	149

Kapitel 1

Einleitung

Viele Vorgänge in Natur, Technik und Wirtschaft werden durch Randanfangswertprobleme (RAWP) partieller Differentialgleichungen beschrieben. Wenn deren Eingangsdaten wie z.B. Gebiet, Materialparameter, Rand- oder Anfangsbedingungen deterministisch sind, so sind diese Probleme bereits gut analysiert (vgl. z.B. [10],[12],[31],[37],[43]). In den meisten Fällen können die Lösungen effektiv berechnet werden. Oftmals sind jedoch die Eingangsdaten mit Unsicherheiten behaftet, so dass ein deterministisches Modell nicht länger geeignet erscheint. Einige typische Beispiele derartiger Probleme sind Schwingungen von Gebäuden infolge von Windbelastungen oder Erdbeben, Schiffe oder Erdölplattformen, welche Wind und Wellen ausgesetzt sind, Preisprozesse an Finanzmärkten oder zufällige Wärme- bzw. Wellenausbreitung. Um diese Zufälligkeit in den Eingangsdaten zu berücksichtigen, werden geeignete stochastische Modelle benötigt. Hier setzt die vorliegende Dissertation an.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem der zufälligen Wärmeausbreitung in beschränkten Gebieten. Als technischer Hintergrund kann der Bremsvorgang während des Fahrens eines PKWs angesehen werden (vgl. Abb. 1.1).

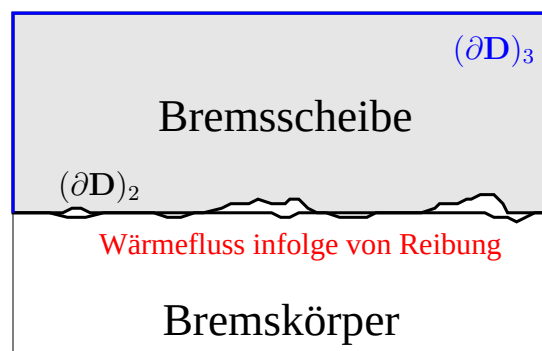


Abbildung 1.1: Zweidimensionales Modell des Bremsvorgangs

Der Bremskörper drückt auf die Bremssscheibe, wobei es infolge der Reibung zu einem Wärmefluss über die Oberfläche der Bremssscheibe kommt. Je nach Beschaffenheit der Oberflächen der Bremssscheibe und des Bremskörpers ist die Reibung und damit der Wärmeeinfluss unterschiedlich stark. Anlehnend an vom Scheidt [44] erscheint es sinnvoll,

diesen Wärmefluss und damit indirekt die Oberflächen von Bremsscheibe und Bremskörper als zufällige Felder zu approximieren. Die Temperaturverteilung der Bremsscheibe zu Beginn des Bremsvorgangs ist nicht bekannt, kann also ebenso als zufällig angenommen werden.

Die mathematische Formulierung dieses Bremsvorgangs erfolgt als zweidimensionales Problem mittels einer instationären, parabolischen Differentialgleichung für die Temperaturverteilung u

$$c\rho u_t - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(t, x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, t \in (0, T]. \quad (1.1)$$

Das Gebiet der Bremsscheibe wird dabei mit D bezeichnet. Die Materialparameter c und ρ stehen für die spezifische Wärmekapazität und die Dichte des betrachteten Materials. Die Wärmeleitzahlen λ_i geben an, wie gut das Material Wärme in x_i -Richtung leitet. Weiter beschreibt die Anfangsbedingung

$$u(0, x, \omega) = u_0(x, \omega), \quad x \in D, \quad (1.2)$$

die zufällige Temperaturverteilung über dem Gebiet D zum Zeitpunkt $t = 0$. Der zufällige Wärmefluss über den Rand $(\partial D)_2$ (vgl. Abb. 1.1) infolge der Reibung zwischen Bremsscheibe und Bremskörper wird durch die zufällige Neumann-Bedingung

$$\left. \frac{\partial u}{\partial N}(t, x, \omega) \right|_{(\partial D)_2} = P(t, x, \omega) \quad (1.3)$$

modelliert. Am Rand $(\partial D)_3$ (vgl. Abb. 1.1) dagegen liegt die deterministische Robin-Bedingung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha(u(t, x, \omega) - u_A(t, x)) \right) \Big|_{(\partial D)_3} = 0 \quad (1.4)$$

an, welche den Wärmefluss über den Rand $(\partial D)_3$ infolge von Temperaturdifferenzen zwischen dem Gebiet D und seiner Umgebung beschreibt. Die Wärmeübergangszahl α ist dabei ein Maß für die Stärke des Temperaturdifferenz abhängigen Wärmeflusses über dem Rand des betrachteten Gebietes.

Da in obigem Problem der Anfangszustand u_0 und der Wärmefluss P als zufällig angenommen sind, stellt sich die Frage, wie diese Größen realitätsgetreu modelliert werden können. Dazu wurde in dieser Arbeit der auf vom Scheidt zurückgehende Ansatz über schwach bzw. ε -korrelierte Funktionen gewählt. Die Eigenschaft der ε -Korreliertheit besagt, dass die Korrelationsfunktion

$$R_{\varepsilon f}(x, y) = \mathbf{E}\{\varepsilon f(x) \varepsilon f^T(y)\}$$

einer zufälligen Funktion εf für $x, y \in \mathbb{R}^m$ verschwindet, wenn mindestens einer der Abstände $|y_i - x_i|$ zwischen den Komponenten der Punkte x und y größer als die jeweilige Korrelationslänge $\varepsilon_i > 0$ ist. Die Zufallsgrößen $\varepsilon f(x, \omega)$ und $\varepsilon f(y, \omega)$ sind dann unkorreliert. Somit sind ε -korrelierte Funktionen durch das Fehlen einer Fernwirkung charakterisiert. Im Gegensatz zum viel benutzten White-Noise Modell können diese Zufallsfunktionen aber beliebige Glattheit besitzen. Die Bedingung der ε -Korreliertheit ist schwächer als

die Bedingung der schwachen Korreliertheit, welche in [44] und [46] eingeführt wurde. Bei Letzterer wird nicht nur die Unkorreliertheit der obigen Werte von εf gefordert, sondern auch bestimmte Zerfalleigenschaften der höheren Momente. Diese sind unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen äquivalent zur Unabhängigkeit der obigen Werte.

Die Theorie schwach korrelierter Funktionen wurde auf viele aus der mathematischen Physik kommende Probleme angewendet. Ein guter Überblick dazu ist in [44] sowie [46] gegeben. Neuere Publikationen betrachten Problemstellungen mit zufälligen Differentialoperatoren, so z.B. instationäre Diffusionsgleichungen mit zufälligem Parameter ([20]), Eigenwertprobleme zufälliger Differentialoperatoren ([29],[30]) oder Randwertprobleme für Differentialgleichungen ([35],[36]). Hierbei sind die den Differentialoperator beschreibenden Parameter schwach korrelierte Funktionen. Ein weiteres Anwendungsgebiet liegt in der Betrachtung von Differentialgleichungen mit deterministischem Differentialoperator aber zufälligen Erregungen (vgl. dazu z.B. [22],[23],[45],[47],[48],[51]).

Ziel dieser Arbeit ist die Lösung des stochastischen RAWP (1.1)-(1.4) sowie die Bestimmung von Momentenfunktionen wie Mittelwertfunktion und Varianz- bzw. Korrelationsfunktion, der erhaltenen Lösung. Die verschiedenen Herangehensweisen zur Lösung von RAWP mit zufälligen Einflussgrößen können dabei im Wesentlichen in zwei Gruppen eingeteilt werden. Es wird zum Einen versucht, die Probleme mittels geeigneter stochastischer Integrationsmethoden zu lösen (vgl. z.B. [1],[33]). Zum Anderen wird die pfadweise Lösung unter Nutzung der Theorie entsprechender deterministischer Problemstellungen und anschließender Anwendung von Prinzipien der stochastischen Analysis in den Vordergrund gestellt (vgl. z.B. [8]). Die letztere Herangehensweise wird auch in dieser Arbeit genutzt.

Der Begriff Lösung eines RAWP lässt sich dabei in eine klassische bzw. strenge Lösung und in eine schwache Lösung unterscheiden. Das Konzept der strengen Lösbarkeit fordert, dass eine Funktion u existiert, welche die Differentialgleichung sowie die Anfangs- und Randbedingungen erfüllt und alle vorkommenden Ableitungen besitzt. Nicht für alle Probleme lassen sich aber Lösungen finden, die diese strengen Forderungen erfüllen. Beispielsweise lassen sich Probleme der Fluid-Dynamik, insbesondere das Problem der Bildung und Ausbreitung von Schock-Wellen, oder Wärmeleitprobleme mit unstetigem Daten i.a. nicht im klassischen Sinn lösen (vgl. [12]). Sie besitzen aber durchaus hohe praktische Bedeutung. Eine Verallgemeinerung der klassischen Vorgehensweise bietet daher das Konzept der schwachen Lösbarkeit. Hierbei werden geringere Glattheitsforderungen an Lösung und an Eingangsdaten, wie beispielsweise Anfangs- oder Randbedingungen, gestellt. Selbst für Probleme, die im klassischen Sinn lösbar sind, ist es oft einfacher, zunächst die schwache Lösung zu finden. Dabei gilt folgender Zusammenhang: Erfüllt die schwache Lösung die Glattheitsforderungen der klassischen Lösung, dann ist sie ebenso eine klassische Lösung.

In dieser Arbeit wird das RAWP (1.1)-(1.4) einerseits mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode gelöst. Diese Methode ist ein Lösungsverfahren, welches nach schwachen Lösungen sucht. Der Ausgangspunkt ist dabei die aus dem RAWP (1.1)-(1.4) abgeleitete schwache Formulierung, auch Variationsformulierung genannt. Die Lösungsidee besteht in der Transformation des kontinuierlichen Problems in ein endlichdimensionales Ersatzproblem. Mittels einer örtlichen Diskretisierung ergibt sich dann der Lösungsansatz

$$u_h(t, x, \omega) = \sum_{i \in \chi_h} u_{h,i}(t, \omega) p_i(x).$$

Die Indexmenge χ_h beschreibt dabei die endliche Diskretisierung des Gebietes D in finite Elemente, welche in dieser Arbeit als geradlinig berandete Dreiecke oder Vierecke angenommen werden. Die ortsabhängigen Ansatzfunktionen p_i , $i \in \chi_h$, bilden eine Basis des Approximationsraumes. Die Idee der FEM ist nun, dass diese Funktionen einen lokalen Träger besitzen sollen. Die zeitabhängigen Koeffizienten sind die Lösungen des sich durch die Diskretisierung ergebenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Andererseits erfolgt zum Vergleich der über die Finite-Elemente-Methode erhaltenen Ergebnisse auch eine Lösung des RAWP mittels der Fourier-Methode (vgl. dazu auch [13] und [44]) und der Monte-Carlo-Simulation.

Die Fourier-Methode lässt sich dabei auf die klassische Formulierung (1.1)-(1.4) als auch auf die daraus abgeleitete Variationsformulierung anwenden. Entsprechend wird nach strengen bzw. schwachen Lösungen gesucht und es zeigt sich, dass nur die Glattheit der Eingangsdaten dafür verantwortlich ist, ob es sich um eine Lösung im strengen oder schwachen Sinn handelt. Die Fourier-Methode unterstellt, dass das RAWP (1.1)-(1.4) bzw. die daraus abgeleitete Variationsformulierung eine Lösung besitzt und diese über einen Separationsansatz nach den Eigenfunktionen des negativen Laplace Operators mit dazugehörigen Randbedingungen entwickelt werden kann. D.h. es wird eine Lösung u in der Form

$$u(t, x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (u(t, \cdot, \omega), f_n) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t, \omega) f_n(x)$$

gesucht. Die Eigenfunktionen f_n bilden eine orthonormale Basis des $L_2(D)$ und besitzen im Vergleich zu den Ansatzfunktionen der FEM einen globalen Träger. Sie bestimmen sich als Lösungen der Eigenwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \mu f \\ RB : \quad \frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{(\partial D)_2} &= 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial N} + \alpha f \right) \Big|_{(\partial D)_3} = 0. \end{aligned}$$

Diese lässt sich für „einfache“ Geometrien, wie z.B. Rechtecke, Kreise, Ellipsen, Quader oder Kugeln, gut lösen (vgl. z.B. [34],[44]). Die zeitabhängigen Koeffizienten $c_n(t, \omega)$ ergeben sich als Lösungen eines, aufgrund der Orthonormalität der Eigenfunktionen entkoppelten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

In diesem Zusammenhang sei das auf der Finite-Elemente-Methode aufbauende Lösungsverfahren der stochastischen Finite-Elemente-Methode (SFEM) erwähnt, welches eine weitere Möglichkeit zur Behandlung von RAWP mit zufälligen Parametern bietet. Da es im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt wird, sei im Folgenden deshalb nur die Idee dieses Verfahrens umrissen. Bei der SFEM wird neben der örtlichen Diskretisierung auch zu einer Diskretisierung des Zufalls übergegangen. Ausgehend vom FEM-Ansatz

$$u_h(t, x, \omega) = \sum_{i \in \chi_h} u_{h,i}(t, \omega) p_i(x)$$

wird die Lösung bezüglich der stochastischen Dimension in eine endliche Anzahl linear unabhängiger Ansatzfunktionen $\{H_\beta\}$ entwickelt. Diese Ansatzfunktionen sind beispielsweise Elemente des $L_2(\Omega)$. Damit ergibt sich folgender Lösungsansatz

$$u_h(t, x, \omega) = \sum_{i \in \chi_h} \sum_{\beta} u_{h,i}^{(\beta)}(t) p_i(x) H_\beta(\omega).$$

Aufgrund der zusätzlichen Dimension der stochastischen Diskretisierung erhöht sich die Dimension des nun zufälligen Approximationsraumes im Vergleich zur herkömmlichen FEM. Um die Koeffizienten $u_{h,i}^{(\beta)}(t)$ zu bestimmen, sind verschiedene Verfahren wie die Störungsrechnung (z.B. [26],[42]), die Neumann-Reihen-Entwicklung (z.B. [2],[16]) oder die Polynomial-Chaos-Entwicklung (z.B. [28]) bekannt. Weiter wurde in [16] eine stochastische Galerkin-Methode entwickelt. Der stochastische Ansatzraum ist dabei das polynomi-ale Chaos. Neben der üblichen örtlichen Diskretisierung wird für die zufälligen Komponenten eine Karhunen-Loeve-Entwicklung (vgl. [27]) angesetzt. Diese Entwicklung kann als Verallgemeinerung des Fourierreihenansatzes auf stochastische Funktionen angesehen werden.

Die eben vorgestellten Finite-Elemente basierenden Methoden bzw. die Fourier-Methode führen im Gegensatz zu Monte-Carlo-Methoden auf einen expliziten funktionalen Zusammenhang zwischen der Lösung und den zufälligen Einflussgrößen, so dass Momentenfunktionen davon abgeleitet werden können. Die in dieser Arbeit genutzte Monte-Carlo-Simulation stützt sich auf das durch Finite-Elemente-Diskretisierung erhaltene System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Das Ziel besteht darin, Simulationsmodelle für die zufälligen Größen u_0 und P zu finden, so dass gewisse vorausgesetzte Eigenschaften, wie ε -Korreliertheit oder Homogenität, so gut wie möglich erfüllt sind. Dazu wird ein Ansatz auf Basis zeitdiskreter Moving-Average-Felder der Form

$$\eta_{s,t} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_i b_j \xi_{s-i,t-j}, \quad s, t \in \mathbb{Z}, \quad p, q \in \mathbb{N}_0 \quad (1.5)$$

genutzt, da die Korrelationsstruktur dieser Moving-Average-Felder gut mit der definierenden Eigenschaft ε -korrelierter Funktionen übereinstimmt. Anhand dieses Modells können Realisierungen der zufälligen Anfangs- bzw. Randbedingung gewonnen werden und damit das durch Finite-Elemente-Diskretisierung erhaltene System gewöhnlicher Differentialgleichungen als deterministisches Problem gelöst werden. Aus diesen Lösungen kann mit Hilfe statistischer Methoden eine approximative Lösung des RAWP (1.1)-(1.4) sowie deren Momente bestimmt werden. Dieses Vorgehen wird in [3] als Monte-Carlo-Galerkin-Finite-Elemente-Methode bezeichnet.

1.1 Gliederung der Arbeit

Die nächsten Abschnitte dieses Kapitels beschäftigen sich mit einer kurzen Zusammenstellung der benötigten stochastischen Grundlagen sowie der Problembeschreibung. Dabei zeigt es sich, dass aufgrund der Linearität der Differentialgleichung (1.1) und der Anfangs- bzw. Randbedingungen (1.2)-(1.4) sowie der vorausgesetzten Unabhängigkeit der zufälligen Einflussgrößen u_0 und P , sich die Lösung des RAWP (1.1)-(1.4) als Summe der Lösung des RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung und homogener Neumann-Bedingung und der Lösung des RAWP mit zufälliger Neumann-Bedingung und homogener Anfangsbedingung ergibt. Dieser Zusammenhang bestimmt auch das weitere Vorgehen in dieser Arbeit, beide RAWP werden getrennt voneinander analysiert.

Kapitel zwei liefert einen Abriss der allgemeinen Vorgehensweise des bereits erwähnten Lösungsverfahrens Finite-Elemente-Methode für deterministische Problemstellungen.

Ausgehend von der aus der klassischen Formulierung abgeleiteten Variationsformulierung liefert der Diskretisierungsansatz

$$u_h(t, x) = \sum_{j \in \chi_h} u_j(t) p_j(x)$$

eine approximative schwache Lösung des betrachteten RAWP. Demgegenüber wird in Kapitel drei das Vorgehen der Fourier-Methode gestellt. Diese lässt sich sowohl auf die klassische Formulierung des RAWP als auch auf die davon abgeleitete Variationsformulierung anwenden. Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u(t, \cdot), f_n) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) f_n(x)$$

ergeben sich so strenge bzw. schwache Lösungen des betrachteten RAWP.

Die Kapitel vier und fünf widmen sich der Untersuchung der RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung bzw. mit zufälliger Randbedingung. Neben der Lösung dieser Probleme mittels FEM und Fourier-Methode steht die Bestimmung der ersten und zweiten Momente der erhaltenen Lösungen im Vordergrund. Die Finite-Elemente-Lösungen und Fourier-Lösungen weisen für den Fall der zufälligen Anfangsbedingung bzw. der zufälligen Randbedingung eine ähnliche Struktur auf. Sie ergeben sich als Summen von Integralfunktionalen der ε -korrelierten zufälligen Funktionen u_0 bzw. P .

Ausgehend von der Finite-Elemente-Lösung werden die Möglichkeiten der asymptotischen Entwicklung sowie zweier expliziter Berechnungsverfahren zur Berechnung der zweiten Momente, welche sich als Summen über Vierfachintegrale darstellen, untersucht.

Mit Hilfe asymptotischer Entwicklungen nach der Korrelationslänge ε lassen sich Charakteristiken der Lösungen oder zumindest deren Approximationen auf analytischem Wege bestimmen (vgl. [39],[44]). In dieser Arbeit werden die Korrelationsfunktionen der Lösungen anlehnend an die Arbeit von Starkloff [39] mittels einer Taylorentwicklung nach den Korrelationslängen der zufälligen Einflussgrößen bestimmt. Dazu muß allerdings im Vergleich zu der in [44] angegebenen Entwicklung zusätzlich vorausgesetzt werden, dass sich die Korrelationsfunktionen der ε -korrelierten Einflussgrößen aus der Korrelationsfunktion einer 1-korrelierten Funktion ableiten lassen. Das Ziel dieser Überlegungen besteht darin, die Korrelationsfunktionen der approximativen Lösungen der betrachteten RAWP, welche sich als Summen von Vierfachintegralen ergeben, in Summen von Doppelintegralen zu transformieren. Weiter zeigt sich, dass durch die ε -Korreliertheit der Einflussgrößen u_0 und P der Rechenaufwand erheblich verringert wird.

Die eben genannte Taylorentwicklung kann in Spezialfällen durch eine direkte Berechnungsvorschrift ersetzt werden. Diese beruht auf FEM-Techniken. Die zu berechnenden Doppelintegrale werden auf ein Referenzgebiet transformiert und können dort Koordinaten unabhängig berechnet werden. Aufgrund der speziellen Struktur der Integranden und der ε -Korreliertheit der Einflussgrößen gelingt es auch, die Vierfachintegrale der Korrelationsfunktionen explizit zu lösen. Somit ergibt sich für das Problem der Bestimmung der zweiten Momente der FE-Lösungen die komfortable Situation, mehrere Berechnungsmöglichkeiten zu besitzen, womit auch die Genauigkeit der asymptotischen Entwicklung überprüft werden kann.

Da die Fourier-Lösungen des RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung bzw. mit zufälliger Randbedingung eine ähnliche Struktur wie die Finite-Elemente-Lösungen besitzen, lassen sich analoge Verfahren zur Berechnung der Korrelationsfunktionen anwenden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die im Zusammenhang mit der Fourier-Methode auftretenden Eigenfunktionen i.a. über dem gesamten betrachteten Gebiet ungleich null sind und nicht wie die FE-Ansatzfunktionen einen lokalen Träger aufweisen.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit der Simulation der beiden betrachteten RAWP. Wie bereits erwähnt, sind Simulationsmodelle für die zufälligen Größen u_0 und P zu finden, sodass gewisse Eigenschaften, wie ε -Korreliertheit oder Homogenität, so gut wie möglich erfüllt sind. Diese Modelle basieren auf zeitdiskreten Moving-Average-Feldern der Form (1.5). Die grundlegende Idee ist dabei Folgende: In äquidistanten Gitterpunkten werden abhängige Zufallsgrößen $\eta_{s,t}$ generiert und zwischen ihnen mittels geeigneter Funktionen interpoliert. Es zeigt sich aber, dass das so erhaltene kontinuierliche Feld $f(x, \omega)$ nicht homogen ist. Allerdings lässt sich dies durch zwei Transformationsmöglichkeiten, welche auf der zufälligen Verschiebung der Argumente der Approximationsfunktion f beruhen, beheben.

Das letzte Kapitel beinhaltet den Vergleich der erhaltenen analytischen Resultate anhand eines konkreten Beispiels für das RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung bzw. mit zufälliger Randbedingung. Hauptaugenmerk wird dabei auf den Vergleich der auf den verschiedenen Wegen erhaltenen Varianzfunktionen der FE-Lösungen untereinander und insbesondere auf den Vergleich mit der Varianzfunktion der FE-Lösung und der Fourier-Lösung gelegt. Es zeigt sich, dass die betrachteten Varianzfunktionen gut übereinstimmen.

Abschließend möchte ich all jenen herzlich danken, die am Zustandekommen dieser Arbeit beteiligt waren. An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Professor Dr. J. vom Scheidt für die Anregungen zu diesem Thema und die wertvollen Hinweise bei der Erstellung dieser Arbeit. Weiterhin möchte ich meine Kollegen Dr. Matthias Richter, Dr. Hendrik Weiß, Roman Unger, Katrin Ilzig, Holger Hähnel sowie Prof. Dr. Hans-Jörg Starkloff und Prof. Dr. Ralf Wunderlich nennen, die mit ihrer Hilfs- und Diskussionsbereitschaft ebenfalls zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen.

1.2 Stochastische Grundlagen

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra von Teilmengen von Ω , auf welcher das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ definiert ist, bezeichnet.

Definition 1.1 *Eine zufällige Funktion $f : \mathbf{D} \times \Omega \rightarrow \mathcal{W}$, $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ heißt streng homogen, wenn für jede Folge $x^1, \dots, x^n \in \mathbf{D}$, $n \in \mathbb{N}$ die endlichdimensionalen Verteilungen der Zufallsvariablen $f(x^1 + l), \dots, f(x^n + l)$ unabhängig von $l \in \mathbb{R}^m$ sind, d.h.*

$$\mathbf{P}(f(x^1) \in B_1, \dots, f(x^n) \in B_n) = \mathbf{P}(f(x^1 + l) \in B_1, \dots, f(x^n + l) \in B_n) \quad (1.6)$$

gilt für alle $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Eine zufällige Funktion heißt schwach homogen, falls $\mathbf{E}\{f(x)\} = \text{const}$, $\forall x \in \mathbf{D}$ und $R_{ff}(x, y) = R_{ff}(y - x)$, $\forall x, y \in \mathbf{D}$ gilt, d.h. die Korrelationsfunktion hängt nur von der Differenz der Argumente x und y ab.

Gilt die Beziehung (1.6) nur für ganzzahlige Vielfache von $\theta \in \mathbb{R}_+^m \setminus \mathbf{0}$, d.h. $l = k\theta = (k_1\theta_1, \dots, k_m\theta_m)$ mit $k \in \mathbb{Z}^m$, dann heißt die zufällige Funktion f periodisch verteilt mit der Periode θ . Eine streng homogene Funktion ist periodisch mit beliebiger Periode $\theta \in \mathbb{R}^m$.

Definition 1.2 Eine zentrierte zufällige Funktion ${}^\varepsilon f$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > \mathbf{0}$ mit ${}^\varepsilon f : D \times \Omega \rightarrow \mathcal{W}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, welche die Eigenschaft

$$\mathbf{E}\{{}^\varepsilon f(x){}^\varepsilon f^T(y)\} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad |y_1 - x_1| \geq \varepsilon_1 \vee \dots \vee |y_m - x_m| \geq \varepsilon_m$$

besitzt, heißt ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ (vgl. [39]).

Die Korrelationslänge ε der zufälligen Funktion ${}^\varepsilon f$ ist nach obiger Definition komponentenweise erklärt. ε -korrelierte Funktionen sind also Funktionen ohne Fernwirkung, da die Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{{}^\varepsilon f(x){}^\varepsilon f^T(y)\}$ verschwindet, wenn mindestens ein Abstand $|y_i - x_i|$ zwischen den Komponenten der Punkte x und y größer als die jeweilige Korrelationslänge $\varepsilon_i > 0$ ist. Im Gegensatz zum viel benutzten White-Noise Modell können diese Zufallsfunktionen aber eine beliebige Glattheit besitzen. Wie bereits erwähnt ist die Bedingung der ε -Korreliertheit schwächer als die Bedingung der schwachen Korreliertheit. Im Fall der schwachen Korreliertheit wird nicht nur die Unkorreliertheit der Werte ${}^\varepsilon f(x)$ und ${}^\varepsilon f(y)$ gefordert, sondern auch bestimmte Zerfalleigenschaften der höheren Momente. Diese sind unter schwachen zusätzlichen Voraussetzungen äquivalent zur Unabhängigkeit der obigen Werte (vgl. [44],[46]).

Es sei im Weiteren angenommen, dass Familien $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > \mathbf{0}}$ von ε -korrelierten Funktionen folgende Voraussetzungen erfüllen.

Annahme 1.3 1. Die zufälligen Funktionen ${}^\varepsilon f$, $\varepsilon > \mathbf{0}$ sind schwach homogen, d.h. es gilt

$$R_{{}^\varepsilon f}({}^\varepsilon f(x), y) = R_{{}^\varepsilon f}({}^\varepsilon f(y - x)) = R_{{}^\varepsilon f}({}^\varepsilon f(z)), \quad z = y - x, \quad z \in \mathbb{R}^m.$$

2. Die Korrelationsfunktionen $R_{{}^\varepsilon f}(\cdot)$ werden durch die Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ einer 1-korrelierten, homogenen Zufallsfunktion erzeugt, d.h. es gilt

$$R_{{}^\varepsilon f}({}^\varepsilon f(z)) = R\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = R\left(\frac{z_1}{\varepsilon_1}, \dots, \frac{z_m}{\varepsilon_m}\right), \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon > \mathbf{0}.$$

3. Die zufälligen Funktionen ${}^\varepsilon f$, $\varepsilon > \mathbf{0}$ sind im Quadratmittel stetig, was die Stetigkeit der erzeugende Korrelationsfunktion $R(\cdot)$ impliziert.

Definition 1.4 Eine zentrierte zufällige Funktion ${}^\varepsilon f$, $\varepsilon > \mathbf{0}$ mit ${}^\varepsilon f : D \times \Omega \rightarrow \mathcal{W}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ heißt ε -abhängig mit der Abhängigkeitslänge $\varepsilon > \mathbf{0}$, falls für jede Familie nichtleere Teilmengen $(\mathcal{X}_j)_{j=1, \dots, s}$, $s \geq 2$ mit $\mathcal{X}_j \subset D$, $j = 1, \dots, s$, und $d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) > \varepsilon$ für $i \neq j$ die zufälligen Funktionen ${}^\varepsilon f_j : \mathcal{X}_j \times \Omega \rightarrow \mathcal{W}$, mit ${}^\varepsilon f_j(x) = {}^\varepsilon f(x)$ für $x \in \mathcal{X}_j$, $j = 1, \dots, s$ unabhängig sind. Dabei ist der Abstand der Mengen $\mathcal{X}_i$ und $\mathcal{X}_j$ wie folgt definiert

$$d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) := (\inf\{|x_1^{i'} - y_1^{j'}|\}, \dots, \inf\{|x_m^{i'} - y_m^{j'}|\}), \quad \text{inf über } x^{i'} \in \mathcal{X}_i, \quad y^{j'} \in \mathcal{X}_j,$$

(vgl. [39]).

Definition 1.5 Eine zentrierte homogene zufällige Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ mit der Korrelationsfunktion $R_{ff}(\tau) = \mathbf{E}\{f(x)f(x+\tau)\}$, $\tau, x \in \mathbb{R}^m$ gehört zur Klasse der orthotropen Zufallsfunktionen, wenn die Beziehung

$$R_{ff}(\tau) = \tilde{R}(|\tau_1|, \dots, |\tau_m|) \quad \text{mit} \quad \tilde{R} : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$$

erfüllt ist (vgl. [50]).

Bemerkung 1.6 Insbesondere gehört eine zentrierte homogene zufällige Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$ zur Klasse der orthotropen Zufallsfunktionen, falls sich die Korrelationsfunktion in der Form

$$R_{ff}(\tau) = \prod_{i=1}^m R_i(|\tau_i|) \quad \text{mit} \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \quad \text{und} \quad R_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m$$

darstellen lässt.

1.3 Problembeschreibung

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, werden in dieser Arbeit parabolische Differentialgleichungen der Art

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \Delta u = f(t, x), \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \quad (1.7)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, x, \omega) = u_0(x, \omega), \quad x \in \bar{D} \quad (1.8)$$

und den Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial N}(t, x, \omega) \Big|_{(\partial D)_2} = P(t, x, \omega), \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha(u(t, x, \omega) - u_A(t, x)) \right) \Big|_{(\partial D)_3} = 0 \quad (1.10)$$

behandelt. Dieses RAWP wird dabei als Modell für die Wärmeausbreitung in beschränkten Gebieten unter zufälligen Einflussgrößen interpretiert. Auf diese Weise kann beispielsweise der eingangs erwähnte Bremsvorgang während des Fahrens eines PKWs beschrieben werden. Das zufällige Feld u steht für das zu bestimmende Temperaturfeld in Abhängigkeit von Zeit und Ort, P beschreibt den zufälligen Wärmefluss über dem Rand $(\partial D)_2$ (vgl. Abb. 1.2) und u_0 die zufällige Anfangstemperatur des Gebietes D . Dabei sei angenommen, dass die Felder P und u_0 voneinander stochastisch unabhängig sind. Im Weiteren werden die spezifische Wärmekapazität c und die Dichte des betrachteten Materials auf eins gesetzt. Die Wärmeleitzahl λ , welche angibt, wie gut das Material Wärme leitet, sowie die Wärmeübergangszahl α , die ein Maß für die Stärke des Temperaturdifferenz anhängigen Wärmestroms zwischen dem Gebiet D und dessen Umgebung darstellt, werden als konstant angenommen.

Die folgenden Überlegungen lassen sich auch auf Problemklassen mit weiteren zufälligen Einflussfaktoren, wie z.B. eine zufällige rechte Seite $f(t, x, \omega)$ der Differentialgleichung oder eine zufällige Umgebungstemperatur $u_A(t, x, \omega)$ übertragen. Dazu sei an dieser Stelle auf Bemerkung 1.8 verwiesen.

Das Gebiet D (vgl. Abb. 1.2) besitzt einen stückweise hinreichend glatten Rand ∂D , welcher sich wie folgt darstellen lässt

$$\partial D = (\partial D)_2 \cup (\partial D)_3.$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial u}{\partial N} := \lambda \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i, \quad (\vec{n} = (n_1, n_2)^T \text{ Normalenvektor}).$$

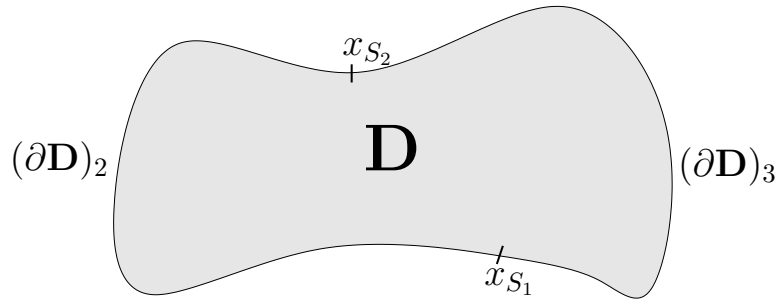


Abbildung 1.2: Gebiet D

Im Weiteren wird das Temperaturfeld $\bar{u}$, das sich aus der Beziehung

$$\bar{u}(t, x, \omega) := u(t, x, \omega) - w(t, x)$$

ergibt, untersucht. Das deterministische Feld w stellt dabei die Lösung des gemittelten Problems (1.11) zum Ausgangsproblem (1.7)-(1.10) dar, welches durch Ersetzen der zufälligen Einflüsse P und u_0 durch ihre Erwartungswerte entsteht

$$\begin{aligned} w_t - \lambda \Delta w &= f(t, x), \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\ \text{AB: } w(0, x) &= \mathbf{E}\{u_0(x)\} \quad x \in \bar{D} \\ \text{RB: } \frac{\partial w}{\partial N}(t, x) \Big|_{(\partial D)_2} &= \mathbf{E}\{P(t, x)\} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial N}(t, x) + \alpha(w(t, x) - u_A(t, x)) \right) \Big|_{(\partial D)_3} &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Damit ist folgendes RAWP für $\bar{u}$ zu untersuchen

$$\begin{aligned} \bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\ \text{AB: } \bar{u}(0, x, \omega) &= u_0(x, \omega) - \mathbf{E}\{u_0(x)\} =: \bar{u}_0(x, \omega), \quad x \in \bar{D} \\ \text{RB: } \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \Big|_{(\partial D)_2} &= P(t, x, \omega) - \mathbf{E}\{P(t, x)\} =: \bar{P}(t, x, \omega) \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_3} &= 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

wobei $\overline{P}$ und $\overline{u}_0$ zufällige zentrierte Felder bezeichnen.

Eine Lösung im klassischen Sinne des RAWP (1.12) muss den Glattheitsforderungen

$$\overline{u} \in C^{(1,2)}((0, T] \times \mathbf{D}) \cap C^{(0,1)}((0, T] \times \overline{\mathbf{D}}) \cap C([0, T] \times \overline{\mathbf{D}})$$

genügen. Der Raum $C^{(1,2)}((0, T] \times \mathbf{D})$ umfasst dabei alle Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar bezüglich des Ortes $x \in \mathbf{D}$ und einmal stetig differenzierbar bezüglich der Zeit $t \in (0, T]$ sind. Entsprechend sind die Räume $C^{(0,1)}((0, T] \times \overline{\mathbf{D}})$ und $C([0, T] \times \overline{\mathbf{D}})$ definiert.

Für die Existenz der klassischen Lösung $\overline{u}$ des Problems (1.12) ist die Kompatibilität zwischen Anfangs- und Randbedingungen und der Randbedingungen verschiedenen Typs untereinander notwendig, d.h. die Anfangsbedingung $\overline{u}_0$ und die Randbedingung $\overline{P}$ müssen folgende Beziehungen erfüllen

$$\left. \frac{\partial \overline{u}_0}{\partial N}(x, \omega) \right|_{(\partial \mathbf{D})_2} = \overline{P}(0, x, \omega), \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{\partial \overline{u}_0}{\partial N}(x, \omega) + \alpha \overline{u}_0(x, \omega) \right) \Big|_{(\partial \mathbf{D})_3} = 0, \quad (1.14)$$

$$\left(\frac{\partial \overline{P}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha \overline{P}(t, x, \omega) \right) = 0 \quad \text{für } x = x_{S_1}, x_{S_2} \quad (\text{vgl. Abb. 1.2}). \quad (1.15)$$

Bemerkung 1.7 Sollten die Verträglichkeitsbedingungen verletzt sein, so sind diese Phänomene in der Literatur als „space-space-corner singularity“ bzw. „time-space-corner singularity“ bekannt. Für parabolische Differentialgleichungen sind diese Irregularitäten allerdings äußerst kurzlebig in Zeit und Ort (vgl. [5], [15]).

Aufgrund der Linearität des Laplace-Operators Δ und der Anfangs- und Randbedingungen, sowie der Unabhängigkeit der zufälligen Einflussfaktoren kann das RAWP (1.12) als Summe zweier RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung $\overline{u}_0$ und homogener Randbedingung, d.h. $\overline{P} \equiv 0$ bzw. homogener Anfangsbedingung, d.h. $\overline{u}_0 \equiv 0$ und zufälliger Randbedingung $\overline{P}$ dargestellt werden. Die Lösung des RAWP (1.12) ergibt sich dann aus der Summe der Lösungen dieser beiden Teilprobleme. Es gilt

$$\overline{u}(t, x, \omega) = {}_1\overline{u}(t, x, \omega) + {}_2\overline{u}(t, x, \omega), \quad (1.16)$$

wobei ${}_1\overline{u}(t, x, \omega)$ die Lösung des RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} & {}_1\overline{u}_t - \lambda \Delta {}_1\overline{u} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\ \text{AB: } & {}_1\overline{u}(0, x, \omega) = \overline{u}_0(x, \omega), \quad x \in \overline{\mathbf{D}} \\ \text{RB: } & \frac{\partial {}_1\overline{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \Big|_{(\partial \mathbf{D})_2} = 0 \\ & \left(\frac{\partial {}_1\overline{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha {}_1\overline{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial \mathbf{D})_3} = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

und ${}_2\bar{u}(t, x, \omega)$ die Lösung des RAWP mit zufälliger Randbedingung

$$\begin{aligned}
 & {}_2\bar{u}_t - \lambda \Delta {}_2\bar{u} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\
 \text{AB: } & {}_2\bar{u}(0, x, \omega) = 0, \quad x \in \bar{D} \\
 \text{RB: } & \left. \frac{\partial {}_2\bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \right|_{(\partial D)_2} = \bar{P}(t, x, \omega) \\
 & \left(\frac{\partial {}_2\bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha {}_2\bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_3} = 0
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

bezeichnen. Aus der Summendarstellung (1.16) von $\bar{u}$ lässt sich die weitere Vorgehensweise, die beiden RAWP (1.17) und (1.18) getrennt voneinander zu betrachten, ableiten.

Bemerkung 1.8 *Durch obigen Summenansatz (1.16) lässt sich die betrachtete Problemklasse auf folgende RAWP erweitern*

$$\begin{aligned}
 & u_t - \lambda \Delta u = f(t, x, \omega), \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\
 \text{AB: } & u(0, x, \omega) = u_0(x, \omega), \quad x \in \bar{D} \\
 \text{RB: } & \left. \frac{\partial u}{\partial N}(t, x, \omega) \right|_{(\partial D)_2} = P(t, x, \omega) \\
 & \left(\frac{\partial u}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha(u(t, x, \omega) - u_A(t, x, \omega)) \right) \Big|_{(\partial D)_3} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Das zufällige Feld f modelliert dabei Wärmequellen oder -senken innerhalb des Gebietes D und u_A beschreibt die zufällige Temperatur außerhalb des Gebietes D . Die stochastischen Einflussgrößen f , u_0 , P und u_A werden als unabhängig voneinander vorausgesetzt.

Wieder aufgrund der Linearität des Laplace-Operators Δ und der Anfangs- und Randbedingungen, sowie der Unabhängigkeit der zufälligen Einflussfaktoren lässt sich das RAWP (1.19) als Summe von RAWP in denen jeweils genau eine der Größen f , u_0 , P oder u_A zufällig und die anderen drei homogen sind, darstellen. Die Lösung des RAWP (1.19) ergibt sich dann aus der Summe der Lösungen der vier Teilprobleme. Es gilt

$$u(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^4 u_i(t, x, \omega),$$

wobei beispielsweise ${}_3\bar{u}(t, x, \omega)$ die Lösung des RAWP mit zufälligen inhomogenen Term der Differentialgleichung und homogenen Anfangs- bzw. Randbedingungen beschreibt. Es zeigt sich allerdings, dass die Lösung der RAWP mit zufälliger Robin-Bedingung bzw. zufälliger Inhomogenität der Differentialgleichung und homogenen sonstigen Bedingungen mittels der Fourier-Methode oder der Finite-Elemente-Methode auf einem sehr ähnlichen Weg wie die Lösung des RAWP (1.18) mit zufälliger Neumann-Bedingung erfolgt.

Kapitel 2

Einführung in die Finite-Element-Methode

Viele in der Praxis auftretenden Vorgänge, z.B. die in dieser Arbeit betrachtete Wärmeleitung in einem beschränkten Gebiet, werden durch Differential- bzw. Integralgleichungen beschrieben. Diese Gleichungen können allerdings oft nur für Spezialfälle analytisch gelöst werden. Die deshalb entwickelten numerischen Methoden wie etwa die Finite-Elemente-Methode, die Differenzenmethode (vgl. dazu z.B. [17], [37]) oder die Randelemente-Methode (vgl. dazu z.B. [18]) transformieren das kontinuierliche Problem in ein endlichdimensionales Ersatzproblem. Die dadurch erhaltenen approximativen Lösungen sind gute Näherungen für die Lösung des ursprünglichen Problems.

Die Finite-Elemente-Methode kurz FEM ist dabei das in der Praxis am häufigsten genutzte Diskretisierungsverfahren (vgl. [21]), womit lineare und nichtlineare Probleme in hinreichend glatt berandeten Gebieten approximiert werden können.

Die Grundidee der FEM besteht nun darin, den Definitionsbereich der partiellen Differentialgleichung in „kleine“ nicht überlappende Teilbereiche zu zerlegen und die Lösung durch einfache, auf diesen Teilbereichen definierten Funktionen zu approximieren.

Den Ausgangspunkt dieser Methode bildet nicht wie etwa beim Differenzenverfahren die klassische Formulierung des betrachteten RAWP, sondern die daraus abgeleitete Variationsformulierung (schwache Formulierung). Die Variationsformulierung ist dabei als Verallgemeinerung der klassischen Formulierung zu sehen. Es werden geringere Glattheitsforderungen an die Eingangsdaten gestellt. Diese können beispielsweise als stückweise stetige beschränkte Funktionen gewählt werden. Für die Lösung der Variationsformulierung, der sogenannten schwachen Lösung, wird ebenfalls eine geringere Glattheit gefordert. Es besteht allerdings der folgende wichtige Zusammenhang zwischen der klassischen und schwachen Lösung. Falls die schwache Lösung aber die Glattheitsforderungen der klassischen Lösung erfüllt, dann ist sie auch Lösung des klassischen Problems (vgl. [21]).

Anlehnend an [21] soll in diesem Abschnitt die Theorie der Finite-Elemente-Methode zur

Lösung parabolischer RAWP der Art

$$\frac{u}{\partial t}(t, x) - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \right) = f(t, x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T] \quad (2.1)$$

$$\text{AB} \quad : \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \bar{D} \quad (2.2)$$

$$\text{RB 1. Art:} \quad u(t, x) = g(t, x), \quad x \in (\partial D)_1 \quad (2.3)$$

$$\text{2. Art:} \quad \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) = P(t, x), \quad x \in (\partial D)_2 \quad (2.4)$$

$$\text{3. Art:} \quad \frac{\partial u}{\partial N}(t, x) + \alpha(t, x) \left(u(t, x) - u_A(t, x) \right) = 0, \quad x \in (\partial D)_3 \quad (2.5)$$

mit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ kurz erläutert werden. Es bezeichnen $(\partial D)_i$ die Randstücke des betrachteten Gebietes D für welche gilt: $(\partial D)_1 \cup (\partial D)_2 \cup (\partial D)_3 = \partial D$.

Um die Variationsformulierung aus dem RAWP (2.1)-(2.5) abzuleiten, wird zunächst der Raum der Testfunktionen V_0 als

$$V_0 := \{v \in H^1(D) : v = 0 \text{ auf } (\partial D)_1\} \quad (2.6)$$

definiert, wobei $H^1(D)$ den Sobolevraum

$$H^1(D) = \{u \in L_2(D) : \exists \text{ verallgemeinerte Ableitungen } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(D), \quad i = 1, 2\}$$

bezeichnet. Der Raum $L_2(D)$ umfasst alle quadratisch integrierbaren Funktionen über dem Gebiet D . Als Testfunktionen v werden also immer Funktionen gewählt, welche auf dem Rand $(\partial D)_1$ identisch null sind.

Durch Multiplikation der Differentialgleichung (2.1) mit einer Testfunktion $v \in V_0$ und Integration über dem Gebiet D ergibt sich

$$\int_D \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] v(x) dx = \int_D f(t, x) v(x) dx.$$

Die partielle Integration des zweiten Summanden bezüglich x_i , $i = 1, 2$ liefert

$$\int_D \left[\frac{\partial u}{\partial t} v(x) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N} v(x) ds = \int_D f(t, x) v(x) dx.$$

Das Integral über dem Rand ∂D kann nun mit Hilfe der Randbedingungen (2.3)-(2.5) wie folgt geschrieben werden

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial N} v(x) ds = \int_{(\partial D)_2} P(t, x) v(x) ds + \int_{(\partial D)_3} \alpha(t, x) (u_A(t, x) - u(t, x)) v(x) ds,$$

da aufgrund der Definition des Raumes der Testfunktionen V_0 für das Integral über die Dirichlet-Bedingung gilt

$$\int_{(\partial D)_1} g(t, x) v(x) ds = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{D}} \left[\frac{\partial u}{\partial t} v(x) + \sum_{i=1}^2 \lambda_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx + \int_{(\partial \mathbf{D})_3} \alpha(t, x) u(t, x) v(x) ds \\ = \int_{\mathbf{D}} f(t, x) v(x) dx + \int_{(\partial \mathbf{D})_2} P(t, x) v(x) ds + \int_{(\partial \mathbf{D})_3} \alpha(t, x) u_A(t, x) v(x) ds. \end{aligned}$$

Um auch die Dirichlet-Bedingung zu berücksichtigen, wird die Menge der zulässigen Lösungen u als

$$V_g := \{u \in H^1(\mathbf{D}) : u(t, x) = g(t, x) \text{ auf } (\partial \mathbf{D})_1\}$$

definiert. Unter Beachtung, dass auch die Anfangsbedingung (2.2) mit einer Testfunktion $v \in V_0$ multipliziert und über dem Gebiet $\mathbf{D}$ integriert wurde, besitzt die Variationsformulierung für das RAWP (2.1)-(2.5) die Form

$$\begin{aligned} (u_t, v) + a(t; u, v) &= \langle F(t), v \rangle \quad \forall v \in V_0, \quad \forall t \in (0, T] \\ \text{AB:} \quad (u(0, \cdot), v) &= (u_0, v) \quad \forall v \in V_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei

$$\begin{aligned} (u_t, v) &= \int_{\mathbf{D}} u_t(t, x) v(x) dx, \\ a(t; u, v) &= \int_{\mathbf{D}} \left[\sum_{i=1}^2 \lambda_i(t, x) u_{x_i}(t, x) v_{x_i}(x) \right] dx + \int_{(\partial \mathbf{D})_3} \alpha(t, x) u(t, x) v(x) ds, \\ \langle F(t), v \rangle &= \int_{\mathbf{D}} f(t, x) v(x) dx + \int_{(\partial \mathbf{D})_2} P(t, x) v(x) ds + \int_{(\partial \mathbf{D})_3} \alpha(t, x) u_A(t, x) v(x) ds, \\ (u_0, v) &= \int_{\mathbf{D}} u_0(x, \omega) v(x) dx. \end{aligned}$$

Der Term $a(t; u, v)$ bezeichnet eine symmetrische Bilinearform, wogegen $\langle F(t), v \rangle$ für eine Linearform steht.

Definition 2.1 Eine Funktion $u(t, x)$ mit

$$u(t, \cdot) \in V_g \text{ und } u_t \in L_2(\mathbf{D}), \quad t \in (0, T]$$

heißt schwache Lösung des RAWP (2.1)-(2.5), wenn sie dem Problem (2.7) genügt.

Um eine Approximation der Lösung des Problems (2.7) zu erhalten, wird zu einer Diskretisierung bezüglich des Ortes übergegangen. Das Gebiet $\mathbf{D}$ wird dabei in finite Elemente $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$, z.B. in Dreiecke oder Vierecke zerlegt, wobei die Menge $\psi_h = \{1, \dots, R_h\}$ die Nummern aller finiten Elemente enthält. Nach [21] soll die Zerlegung folgende Eigenschaften besitzen.

Annahme 2.2 i) $\bar{\mathbf{D}} = \bigcup_{r=1}^{R_h} \bar{T}^{(r)}$ bzw. $\bar{\mathbf{D}}_h = \bigcup_{r=1}^{R_h} \bar{T}^{(r)} \rightarrow \bar{\mathbf{D}}$ für $R_h \rightarrow \infty$.

ii) Für alle $r, r' \in \psi_h$ mit $r \neq r'$ gilt

$$\overline{T}^{(r)} \cap \overline{T}^{(r')} = \begin{cases} \emptyset & \text{oder} \\ \text{ein gemeinsamer Knoten} & \text{oder} \\ \text{eine gemeinsame Kante.} \end{cases}$$

iii) Die Zerlegung ist zulässig (vgl. [21]).

Bemerkung 2.3 1. Die Eigenschaft $\overline{D}_h = \bigcup_{r=1}^{R_h} \overline{T}^{(r)} \rightarrow \overline{D}$ für $R_h \rightarrow \infty$ bedeutet, dass z.B. krummlinig berandete Gebiete für immer feiner werdende Diskretisierung immer genauer approximiert werden (vgl. Abb. 2.1).

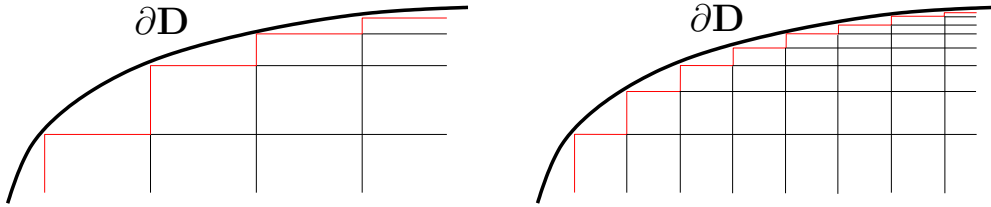


Abbildung 2.1: Beispiel für die Verbesserung der Approximationsgüte für krummlinig berandete Gebieten bei feinerer Diskretisierung

2. Eine Zerlegung heißt zulässig, wenn der maximale Elementdurchmesser $h = \max_{r=1, \dots, R_h} h^{(r)}$ für $R_h \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Der Elementdurchmesser $h^{(r)}$ des Elementes $T^{(r)}$ ist der maximale Abstand zweier beliebiger Punkte in $\overline{T}^{(r)}$.

Die Eckpunkte der finiten Elemente $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ werden Knoten P_j , $j \in \overline{\chi}_h$ genannt. Die Menge $\overline{\chi}_h$ enthält dabei alle globalen Knotennummern der Diskretisierung des Gebietes D . Weiterhin werden die Indexmengen $\chi_h = \{1, 2, \dots, N_h\}$ und $\gamma_h = \{N_h + 1, \dots, \overline{N}_h\}$ eingeführt, so dass gilt

$$\overline{\chi}_h = \chi_h \cup \gamma_h.$$

Die Menge γ_h enthält nur die Nummern der Knoten P_j , welche auf dem Dirichlet-Rand $(\partial D)_1$ liegen und χ_h die Knoten, welche in $D \cup (\partial D)_2 \cup (\partial D)_3$ liegen.

Zusätzlich zur globalen Nummerierung werden die Knoten in jedem finiten Element $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ lokal von $1, \dots, \hat{N}_h$ nummeriert, wobei $\hat{N}_h$ die Anzahl der Knoten pro Element bezeichnet. Ausgehend von der Zuordnungsvorschrift (vgl. als Beispiel Abb. 2.2)

$$\alpha \longleftrightarrow i = i(r, \alpha) \quad \alpha = 1, \dots, \hat{N}_h, \quad i \in \overline{\chi}_h \quad (2.8)$$

beschreibt die Matrix $C^{(r)} = [C_{\alpha i}^{(r)}]_{\alpha=1, \dots, \hat{N}_h, i \in \overline{\chi}_h}$ für alle $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ den Zusammenhang zwischen der lokalen und globalen Nummerierung und ist wie folgt definiert

$$C_{\alpha i}^{(r)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ die globale Knotennummer des Knotens mit der} \\ & \text{lokalen Knotennummer } \alpha \text{ im Element } T^{(r)} \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

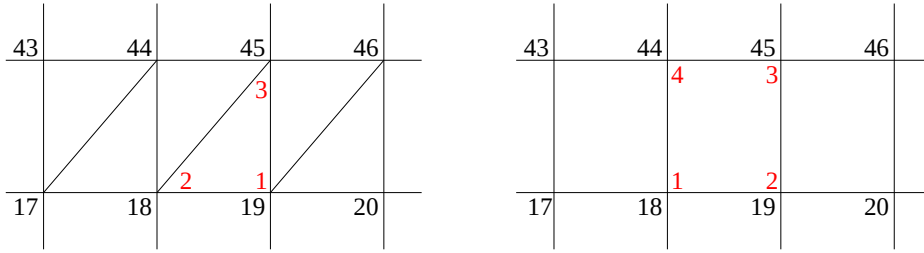


Abbildung 2.2: Globale und lokale Nummerierung Finiter Elemente

Im Zuge der Diskretisierung wird die Menge der zulässigen Lösungen V_g und der Raum der Testfunktionen V_0 durch die endlichdimensionalen Mengen

$$V_{gh} := \left\{ u_h(t, x) : u_h(t, x) = \sum_{j \in \chi_h} u_j(t) p_j(x) + \sum_{j \in \gamma_h} g(x_j, t) p_j(x) \right\}$$

und

$$V_{0h} := \left\{ v(x) : v_h(x) = \sum_{i \in \chi_h} v_i p_i(x) \right\}$$

ersetzt. Die Funktionen p_j , $j \in \bar{\chi}_h$ werden dabei als Ansatzfunktionen bezeichnet. Sie sind als linear unabhängig vorausgesetzt und bilden eine Basis des Approximationsraumes. Weiterhin ist die Idee der Finite-Elemente-Methode, dass diese Funktionen einen lokalen Träger besitzen.

Ausgehend von der Zuordnungsvorschrift (2.8) zwischen lokaler und globaler Nummerierung in jedem Element $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ werden die Ansatzfunktionen lokal über den finiten Elementen $T^{(r)}$, welche den Knoten P_j enthalten, durch die Beziehung

$$p_j(x) = \begin{cases} p_\alpha^{(r)}(x) & x \in \bar{T}^{(r)}, r \in B_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die Menge B_j enthält dabei die Nummern aller Elemente, für die $P_j \in \bar{T}^{(r)}$ gilt. Die Elementansatzfunktionen $p_\alpha^{(r)}$ wiederum ergeben sich aus der Transformation der auf dem entsprechenden Referenzelement gegebenen Formfunktionen φ_α . Es gilt

$$p_\alpha^{(r)}(x) = \varphi_\alpha(\xi_{T^{(r)}}(x)), \quad \forall x \in \bar{T}^{(r)}.$$

Im Fall einer Vernetzung mit Dreieckselementen ergibt sich das Referenzelement durch

$$\hat{T} = \{(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}.$$

Mittels der Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned} x &= x_{T^{(r)}}(\xi) = J^{(r)}\xi + x_1^{(r)} && \text{oder} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(r)} & x_{31}^{(r)} - x_{11}^{(r)} \\ x_{22}^{(r)} - x_{12}^{(r)} & x_{32}^{(r)} - x_{12}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11}^{(r)} \\ x_{12}^{(r)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wird die Abbildung des Referenzdreiecks $\hat{T}$ auf ein beliebiges Dreieck $T^{(r)}$ mit $(x_{\alpha 1}^{(r)}, x_{\alpha 2}^{(r)})$ als Koordinaten der Eckpunkte $P_\alpha^{(r)}$ gewährleistet (vgl. Abb 2.3).

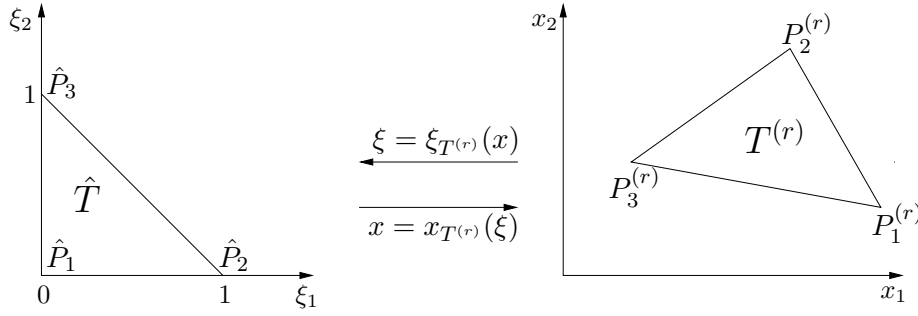


Abbildung 2.3: Abbildung zwischen dem Referenzdreieck $\hat{T}$ und einem beliebigen Dreieck $T^{(r)}$ der Vernetzung

Im Falle einer Vernetzung mit Parallelogrammen ergibt sich die Abbildung des Referenzelementes

$$\hat{T} = \{(\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$$

auf ein beliebiges Parallelogramm $T^{(r)}$ durch

$$\begin{aligned} x &= x_{T^{(r)}}(\xi) = J^{(r)}\xi + x_1^{(r)} && \text{oder} && (2.9) \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(r)} & x_{41}^{(r)} - x_{11}^{(r)} \\ x_{22}^{(r)} - x_{12}^{(r)} & x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11}^{(r)} \\ x_{12}^{(r)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(vgl. Abb 2.4).

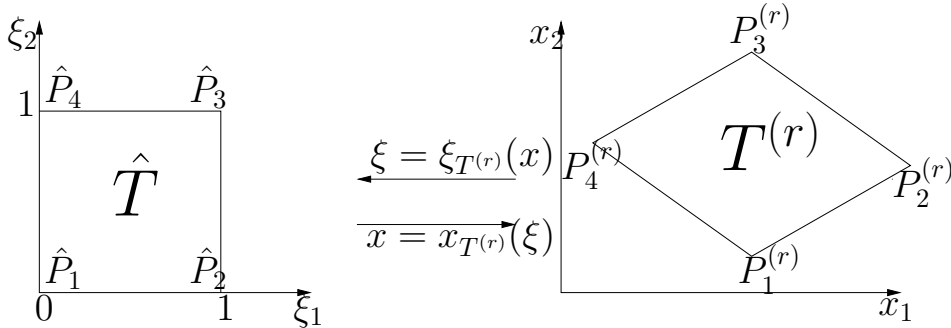


Abbildung 2.4: Abbildung zwischen dem Referenzviereck $\hat{T}$ und einem beliebigen Parallelogramm $T^{(r)}$ der Vernetzung

Für beliebige Vierecke ist die Abbildung (2.9) allerdings nichtlinear. Aussagen dazu sind etwa in [6],[21] zu finden.

Weiterhin gilt zwischen dem Vektor $\underline{p} = [p_j]_{j \in \bar{\chi}_h}$ der Ansatzfunktionen und dem Vektor $\underline{p}^{(r)} = [p_\alpha^{(r)}]_{\alpha=1, \dots, \hat{N}_h}$ der Elementansatzfunktionen des finiten Elements $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ die Beziehung

$$\underline{p}(x) = (C^{(r)})^T \underline{p}^{(r)}(x), \quad x \in T^{(r)}. \quad (2.10)$$

Gesucht ist nun eine approximative Lösung des Problems (2.7) in der Form

$$u_h(t, x) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}(t) p_j(x) + \sum_{j \in \gamma_h} u_{h,j}(t) p_j(x) \quad (2.11)$$

mit den zeitabhängigen Koeffizienten $\{u_{h,j}(t)\}_{j \in \chi_h}$ und den durch die Dirichlet-Bedingung vorgegebenen Koeffizienten $u_{h,j}(t) = g(x_j, t)$, $j \in \gamma_h$, so dass für alle $v_h \in V_h$ erfüllt ist

$$((u_h)_t, v_h) + a(t; u_h, v_h) = \langle F(t), v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_{0,h}, t \in (0, T]$$

$$\text{AB: } (u_h(0, \cdot), v_h) = (u_0, v_h).$$

Da die Menge $\{p_i\}_{i \in \chi_h}$ eine Basis des Raumes V_{0h} darstellt, ist obige diskrete Variationsformulierung für alle $v_h \in V_{0h}$ erfüllt, wenn sie für alle Basiselemente p_i , $i \in \chi_h$ erfüllt ist, d.h. für alle $i \in \chi_h$ gilt

$$((u_h)_t, p_i) + a(t; u_h, p_i) = \langle F(t), p_i \rangle, \quad t \in (0, T], \quad (2.12)$$

$$\text{AB: } (u_h(0, \cdot), p_i) = (u_0, p_i).$$

Die Funktion u_h der Form (2.11) kann als Näherungslösung des RAWP (2.1)-(2.5) aus dem endlichdimensionalen Unterraum V_{gh} betrachtet werden.

Die Aufgabe (2.12) ist äquivalent zu folgendem Anfangswertproblem eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen für die unbekannten Koeffizienten $\underline{u}_h(t) = (u_{h,i}(t))_{i \in \chi_h}$

$$M_h \dot{\underline{u}}_h(t) + K_h \underline{u}_h(t) = \underline{f}_h(t), \quad t \in (0, T] \quad (2.13)$$

$$\text{AB: } M_h \underline{u}_h(0) = \underline{d}_h.$$

Die Matrizen M_h und K_h stellen dabei Masse- bzw. Steifigkeitsmatrix dar, die Vektoren $\underline{f}_h$ und $\underline{d}_h$ den Lastvektor bzw. die Momente der Anfangstemperatur. Diese Größen sind definiert durch

$$M_h = [(p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h}, \quad (2.14)$$

$$K_h = [a(t; p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h}, \quad (2.15)$$

$$= \left[\int_{\mathcal{D}} \left[\sum_{k=1}^2 \lambda_k(t, x) \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right] dx + \int_{(\partial \mathcal{D})_3} \alpha(t, x) p_j(x) p_i(x) ds \right]_{i,j \in \chi_h},$$

$$\underline{f}_h = \left[\langle F(t), p_i \rangle - \sum_{j \in \gamma_h} u_{h,j}(t) a(t; p_j, p_i) - \sum_{j \in \gamma_h} (u_{h,j})_t(t) (p_j, p_i) \right]_{i \in \chi_h}^T \quad (2.16)$$

$$\underline{d}_h = \left[(\bar{u}_0, p_i) - \sum_{j \in \gamma_h} u_{h,j}(0) (p_j, p_i) \right]_{i \in \chi_h}^T. \quad (2.17)$$

Aufgrund der vorausgesetzten lokalen Träger der Ansatzfunktionen sind die Matrizen M_h und K_h dünn besetzt.

Für spezielle Wahlen der Eingangsdaten kann dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der Anfangsbedingung $\underline{u}_h(0) = M_h^{-1} \underline{d}_h$ explizit gelöst werden (vgl. Abschnitte 4.1 und 5.1). Andernfalls kann zur näherungsweisen Lösung dieses Systems das σ -gewichtete Differenzenverfahren verwendet werden (vgl. dazu etwa [21]).

Ausgehend von der durch (2.11) bestimmten Lösung u_h des diskretisierten Problems (2.12) ergibt sich die schwache Lösung u der Variationsformulierung (2.7) durch die Grenzwertbildung

$$u = \lim_{R_h \rightarrow \infty} u_h.$$

Dieser Grenzwert existiert, ist eindeutig und löst das RAWP (2.1)-(2.5) in der Variationsformulierung (2.7). Für den Beweis dieser Aussagen sei beispielsweise auf [12] verwiesen.

Kapitel 3

Einführung in die Fourier-Methode

Die Fourier-Methode zur Lösung von RAWP für parabolische Differentialgleichungen ist eine Anwendung der Separation der Variablen sowie des verallgemeinerten Superpositionsprinzips (vgl. [43]), welches sich aus der Linearität der Differentialgleichung ergibt. Es werden Lösungen in Form von unendlichen Reihen gesucht, in denen jedes Glied Lösung der Differentialgleichung ist und die Randbedingungen erfüllt. Die Koeffizienten dieser Reihen sind dabei so gewählt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Lösungen an den gegebenen Anfangszustand angepasst sind. Ausgangspunkt dieser Überlegungen kann die klassische aber auch die Variationsformulierung sein, wobei die Glattheit der erhaltenen Lösung von der Glattheit der Eingangsdaten abhängt.

Im Folgenden werden mit Hinblick auf die Probleme (1.17) und (1.18) die Lösungsverfahren für parabolische RAWP mit homogener Differentialgleichung, inhomogener Anfangsbedingung und homogenen Randbedingungen bzw. für parabolische RAWP mit inhomogener Differentialgleichung und homogener Anfangsbedingung und Randbedingungen vorgestellt. Auf die letztgenannte Form kann das Teilproblem (1.18) mit homogener Differentialgleichung aber inhomogener Randbedingung mittels geeigneter Transformationen zurückgeführt werden (vgl. [10]). Das Gebiet D wird im Rahmen der Fourier-Methode auf ein Rechteck beschränkt (vgl. Abb. 3.1).

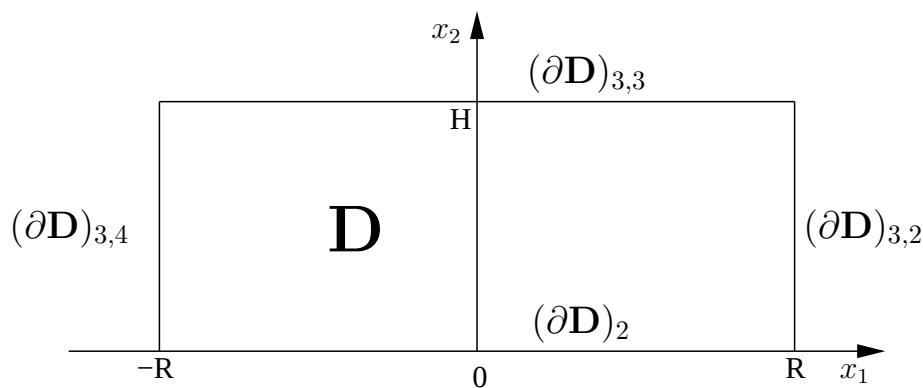


Abbildung 3.1: Gebiet D

In der Literatur sind auch Anwendungen der Fourier-Methode auf andere Geometrien wie beispielsweise den Kreis, die Ellipse oder den Zylinder zu finden (vgl. etwa [34],[41]). Des

Weiteren kann die Fourier-Methode auch auf die aus dem RAWP abgeleitete Variationsformulierung angewandt werden (vgl. Abschnitt 3.3).

Vorangestellt seien allerdings anlehnend an [7] einige Überlegungen zu allgemeinen Eigenwertproblemen der Art

$$Lf(x) = \mu f(x) \quad (x_1, \dots, x_n) \in D \quad (3.1)$$

mit dem Operator L

$$Lf(x) := - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right) + q(x)f(x)$$

und den Randbedingungen

$$\left(h(x)f(x) + l(x) \frac{\partial f(x)}{\partial n} \right) \Big|_{\partial D} = 0, \quad (3.2)$$

da die Lösung von RAWP mittels der Fourier-Methode auf ebensolche Probleme führt. Das Gebiet D ist dabei ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂D und $\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichnet die Normalenableitung an ∂D . Für die später durchgeführten Betrachtungen ist es ausreichend die Parameter $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $h = \text{const} \geq 0$ und $l = \text{const} \geq 0$ zu setzen, womit sich die Differentialgleichung (3.1) zu

$$Lf = -\Delta f$$

vereinfacht. Gesucht werden nichttriviale Lösungen f , d.h. Lösungen, die nicht gleich der Nulllösung sind, welche in D zweimal stetig differenzierbar und auf der Abschließung $\overline{D}$ einmal stetig differenzierbar sind, was auf folgende Definition führt (vgl. [7]).

Definition 3.1 *Eine nichttriviale Lösung der Eigenwertaufgabe (3.1),(3.2) heißt Eigenfunktion und der dazugehörige Wert μ Eigenwert.*

Der nächste Satz beinhaltet eine Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften von Eigenfunktionen und Eigenwerten, welche beispielsweise in [43] zu finden sind.

Satz 3.2 1. Die Eigenwerte des Operators L sind nicht negativ.

2. Die Eigenfunktionen des Operators L , die zu verschiedenen Eigenwerten gehören sind zueinander orthogonal, womit die Eigenfunktionen als orthonormiert vorausgesetzt werden können (vgl. Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren z.B. in [7]).

3. Die Menge der Eigenwerte des Operators L ist abzählbar und besitzt keine endlichen Häufungspunkte. Die Eigenwerte können also nach wachsendem Betrag geordnet werden

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \quad \text{mit} \quad \mu_k \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty.$$

4. Zu jedem Eigenwert kann es nur endlich viele Eigenfunktionen geben.

5. Das System der Eigenfunktionen ist im Raum $L_2(D)$ dicht.

6. Es gilt $Lf_k = \mu_k f_k$, $k = 1, 2, \dots$, wobei f_k die Randbedingungen (3.2) erfüllt und die Eigenfunktion zum Eigenwert μ_k bezeichnet.
7. (Entwicklungssatz) Jede Funktion u , welche die Randbedingungen (3.2) erfüllt und zweimal bezüglich des Ortes differenzierbar ist, kann in eine gleichmäßig und absolut konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen des Operators L entwickelt werden. Es gilt

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x) \quad \text{mit} \quad c_k = \int_{\mathbf{D}} u(x) f_k(x) dx. \quad (3.3)$$

Die Beweise dieser Aussagen sind etwa in [43] angegeben.

Bemerkung 3.3 Nach dem obigen Entwicklungssatz konvergiert die Reihe (3.3) gleichmäßig gegen die Funktion u , wenn diese die Randbedingungen (3.2) erfüllt und zweimal bzgl. des Ortes differenzierbar ist. Die starke Glattheitsforderung kann abgeschwächt werden, wenn nur die Konvergenz im quadratischem Mittel der Reihe (3.3) gefordert wird. Die Reihenentwicklung (3.3) konvergiert auf $\mathbf{D}$ im quadratischen Mittel gegen u , falls

$$\int_{\mathbf{D}} |u(x)|^2 dx < \infty,$$

d.h. $u \in L_2(\mathbf{D})$ gilt (vgl. [41]).

3.1 Das homogene parabolische RAWP

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Lösung des RAWP mit homogener parabolischer Differentialgleichung

$$u_t - \lambda \Delta u = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \quad (3.4)$$

$$AB: \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\mathbf{D}} \quad (3.5)$$

$$RB: \quad \left(hu + l \frac{\partial u}{\partial n} \right) \bigg|_{\partial \mathbf{D}} = 0 \quad (3.6)$$

nach der Fourier-Methode. Die Summe spezieller Lösungen des obigen RAWP ist dabei wieder eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Die Idee der Fourier-Methode liegt in der Trennung der Veränderlichen, d.h. es wird unterstellt, dass eine spezielle Lösung des RAWP die Form

$$u(t, x) = c(t)f(x) \quad (3.7)$$

besitzt. Das Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung (3.4) liefert

$$\frac{1}{\lambda} \frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{\Delta f(x)}{f(x)} = -\mu,$$

wobei μ konstant ist. Damit ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Funktionen $c(t)$ und $f(x)$

$$-\Delta f = \mu f \quad (3.8)$$

$$RB : \left(hf + l \frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_{\partial D} = 0 \quad (3.9)$$

und

$$c'(t) + \lambda \mu c(t) = 0. \quad (3.10)$$

Die partielle Differentialgleichung (3.8) und die Randbedingung (3.9) stellen ein Eigenwertproblem dar. Es sind also die Eigenwerte μ_n zu berechnen, welche zu den nicht trivialen Lösungen, d.h. den Eigenfunktionen f_n der homogenen Gleichung (3.8) mit der homogenen Randbedingung (3.9) gehören.

Seien nun mit $\mu_1, \mu_2, \dots$ die Eigenwerte zu den entsprechenden Eigenfunktionen $f_1, f_2, \dots$ des Problems (3.8),(3.9) bezeichnet. Nach Satz 3.2, Eigenschaften 2 und 5 bilden diese Funktionen ein vollständiges Orthonormalsystem im $L_2(D)$.

Die Lösungen $c_n(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.10) lassen sich in Abhängigkeit der Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \dots$ in der Form

$$c_n(t) = a_n e^{-\lambda \mu_n t}$$

darstellen. Nach Ansatz (3.7) erfüllen die Funktionen

$$u_n(t, x) = c_n(t) f_n(x) = a_n f_n(x) e^{-\mu_n \lambda t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

die Differentialgleichung (3.4) und genügen den Randbedingungen (3.6). Um auch die Anfangsbedingung (3.5) zu erfüllen, wird die Reihe

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) e^{-\lambda \mu_n t}$$

gebildet und an den vorgegebenen Anfangszustand $\varphi(x)$ angepasst. Es gilt

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x), \quad x \in D,$$

d.h. die Koeffizienten a_n sind die Koeffizienten der Reihenentwicklung der Funktion φ nach den Eigenfunktionen

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, f_n) f_n(x), \quad a_n = (\varphi, f_n). \quad (3.11)$$

Der Entwicklungssatz (vgl. Satz 3.2 Eigenschaft 7) impliziert, dass der Anfangszustand φ die Randbedingung

$$\left(h\varphi + l \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \Big|_{\partial D} = 0$$

erfüllen und zweimal stetig differenzierbar sein muss, damit die Reihe (3.11) gleichmäßig konvergiert. Die Randbedingung für φ stellt gleichzeitig die Verträglichkeitsbedingung zwischen der Anfangsbedingung (3.5) und der Randbedingung (3.6) dar. Falls die Anfangsbedingung nur schwächere Glattheitsforderungen, wie etwa $\varphi \in L_2(D)$ erfüllt, so konvergiert die Reihe (3.11) im Gebiet D nach Bemerkung 3.3 immer noch im quadratischen Mittel. Damit lässt sich die Lösung u des homogenen RAWP in der Form

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, f_n) f_n(x) e^{-\lambda_{\mu_n} t} \quad (3.12)$$

darstellen. Aufgrund der Linearität der Differentialgleichung (3.4) ist die Reihe (3.12) nach dem verallgemeinerten Superpositionsprinzip ebenfalls Lösung des RAWP (3.4)-(3.6), falls diese konvergiert und die geforderte Glattheit aufweist. Besitzt die Lösung nur schwächere Glattheitseigenschaften, z.B. wenn gilt $\varphi \in L_2(D)$, so entspricht die Darstellung (3.12) einer schwachen Lösung (vgl. [52]).

3.2 Das inhomogene parabolische RAWP

In diesem Abschnitt soll die Lösung von parabolischen RAWP mit inhomogenen Differentialgleichungen und homogenen Anfangs- bzw. Randbedingungen der Form

$$u_t - \lambda \Delta u = g(t, x), \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \quad (3.13)$$

$$AB: \quad u(0, x) = 0, \quad x \in \bar{D} \quad (3.14)$$

$$RB: \quad \left(hu + l \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial D} = 0, \quad (3.15)$$

mittels der Fourier-Methode im Vordergrund stehen. Dazu wird die gesuchte Lösung u nach den Eigenfunktionen f_n , $n = 1, 2, \dots$ des negativen Laplace-Operators $-\Delta$, also den Lösungen des Eigenwertproblems (3.8),(3.9) entwickelt und besitzt damit die Form

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (u(t, \cdot), f_n) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) f_n(x). \quad (3.16)$$

Die Lösung des RAWP (3.13)-(3.15) wird demnach auf die Bestimmung der Koeffizienten $c_n(t) = (u(t, \cdot), f_n) = \int_D u(t, x) f_n(x) dx$, $n = 1, 2, \dots$ zurückgeführt.

Unter geeigneten Glattheitsforderungen kann die Reihe (3.16) gliedweise differenziert werden. Dabei reicht allerdings die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe stetig differenzierbarer Funktionen nicht aus, um die Differenzierbarkeit der Summe dieser Reihe zu gewährleisten. Zusätzlich muss die aus den Ableitungen der Funktionen bestehende Reihe gleichmäßig konvergieren (vgl. z.B. [14]).

Damit ergibt sich durch Einsetzen des Lösungsansatzes (3.16) in die Differentialgleichung (3.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) f_n(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \Delta f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) f_n(x),$$

wobei die Inhomogenität g in folgende Reihe bezüglich der Eigenfunktionen entwickelt wurde

$$g(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g(t, \cdot), f_n) f_n(x), \quad g_n(t) = (g(t, \cdot), f_n).$$

Um die gleichmäßige Konvergenz der obigen Reihe zu gewährleisten, muss der inhomogene Term g eine zweimal stetig nach dem Ort differenzierbare Funktion bezeichnen und die Randbedingung (3.15) erfüllen (vgl. Entwicklungssatz ((Satz 3.2, Eigenschaft 7))). Schwächere Glattheitseigenschaften von g führen nach Bemerkung 3.3 auf Konvergenz im quadratischen Mittel im Gebiet D .

Mit der Beziehung $-\Delta f_n = \mu_n f_n$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c'_n(t) + \lambda \mu_n c_n(t)) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) f_n(x).$$

Ein Koeffizientenvergleich führt für $n = 1, 2, \dots$ auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$c'_n(t) + \lambda \mu_n c_n(t) = g_n(t). \quad (3.17)$$

Die homogene Anfangsbedingung (3.14) liefert die Gleichung

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) f_n(x) = 0,$$

womit aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Eigenfunktionen f_n

$$c_n(0) = 0 \quad (3.18)$$

für die zeitabhängigen Koeffizienten c_n , $n = 1, 2, \dots$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gelten muss. Das Anfangswertproblem (3.17), (3.18) besitzt dann die Lösung

$$c_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda \mu_n(t-s)} g_n(s) ds = \int_0^t \int_D e^{-\lambda \mu_n(t-s)} g(s, z) f_n(z) dz ds,$$

womit die Lösung des RAWP (3.13)-(3.15) durch die Reihe

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_D e^{-\lambda \mu_n(t-s)} g(s, z) f_n(z) dz ds f_n(x) \quad (3.19)$$

bestimmt ist.

Die auf diese Weise erhaltenen Lösungen (3.12) bzw. (3.19) erweisen sich als besonders geeignet zur Untersuchung hinreichend weit fortgeschrittener Stadien der Ausbreitungsprozesse. Die positiven Eigenwerte μ_n wachsen für ein beliebiges Gebiet schnell mit der Zahl n , was eine rasche Konvergenz der Reihen für große Zeiten t sichert (vgl. [43]).

3.3 Anwendung der Fourier-Methode auf die Variationsformulierung

Wie bereits im Kapitel 2 beschrieben, ergibt sich die Variationsformulierung eines RAWP aus der Multiplikation der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung mit einer Testfunktion v aus dem Raum V_0 (vgl. (2.6))

$$V_0 := \{v \in H^1(D) : v = 0 \text{ auf dem Dirichlet-Rand}\}$$

und der anschließenden Integration über dem Gebiet D . Auf die darauf folgende partielle Integration des Hauptteils wird hier allerdings verzichtet. Stattdessen wird die gesuchte Lösung u der Variationsformulierung wieder nach den Eigenfunktionen f_n des negativen Laplace-Operators $-\Delta$ entwickelt und lässt sich damit in Form einer unendlichen Reihe

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) f_n(x) \quad (3.20)$$

mit $c_n(t) = (u(t, \cdot), f_n)$ darstellen. Die Eigenfunktionen erfüllen als Lösungen der Eigenwertprobleme (3.8), (3.9) für μ_n insbesondere die gegebenen Randbedingungen. Nach dem Lösungsansatz (3.20) ist damit die Menge der zulässigen Lösung V_g definiert als

$$V_g = \left\{ u \in H^1(D) : \left(hu + l \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial D} = 0 \right\}.$$

Im Gegensatz dazu wird bei der Finite Elemente Methode die Menge V_g als

$$V_g := \{u \in H^1(D) : u(t, x) = g(t, x) \text{ auf } (\partial D)_1\}$$

definiert, die Menge der zulässigen Lösungen ist also nur auf die Funktionen eingeschränkt, welche die Dirichlet-Bedingungen auf dem Rand $(\partial D)_2$ erfüllen.

3.3.1 Das homogene parabolische RAWP

Die Variationsformulierung des homogenen RAWP (3.4)-(3.6) besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} (u_t, v) - \lambda(\Delta u, v) &= 0 \\ \text{AB: } (u(0, x), v) &= (\varphi, v). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Da das System der Eigenfunktionen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Basis des Raumes $L_2(D)$ bildet, ist obige Variationsformulierung für alle $v \in V_0$ erfüllt, wenn sie für alle Basiselemente f_n erfüllt ist. Mit Hilfe des Lösungsansatzes (3.20) und unter Beachtung der Orthonormalität der Eigenfunktionen

$$\int_D f_n(x) f_k(x) dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt für $n = 1, 2, \dots$ die Beziehung

$$(u_t, f_n) = \frac{d}{dt}(u(t, \cdot), f_n) = \frac{d}{dt}c_n(t) = c'_n(t),$$

des Weiteren folgt aus der Selbstadjungiertheit des Laplace-Operators $-\Delta$ im hier betrachteten Fall

$$(\Delta u(t, \cdot), f_n) = (u(t, \cdot), \Delta f_n) = -\mu_n(u(t, \cdot), f_n) = -\mu_n c_n(t).$$

Damit ergibt sich folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Koeffizienten c_n , $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} c'_n(t) + \lambda \mu_n c_n(t) &= 0 \\ \text{AB: } c_n(0) &= (\varphi, f_n). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aufgrund der Orthonormalität der Eigenfunktionen f_n ist (3.22) ein im Vergleich zu (2.13) entkoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Matrizen M_h und K_h des FE-Systems (2.13) sind allerdings durch die vorausgesetzten lokalen Träger der Ansatzfunktionen p_i dünn besetzt.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe (3.22) lässt sich dann in der Form

$$c_n(t) = e^{-\lambda \mu_n t} (\varphi, f_n) = e^{-\lambda \mu_n t} \int_{\mathbf{D}} \varphi(x) f_n(x) dx$$

darstellen. Somit besitzt die Variationsformulierung (3.21) nach Ansatz (3.20) die Lösung

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda \mu_n t} \int_{\mathbf{D}} \varphi(z) f_n(z) dz f_n(x). \quad (3.23)$$

3.3.2 Das inhomogene parabolische RAWP

Die Variationsformulierung des inhomogenen RAWP (3.13)-(3.15) hat die Form

$$\begin{aligned} (u_t, v) - \lambda (\Delta u, v) &= (g(t, \cdot), v) \\ \text{AB: } (u(0, x), v) &= 0. \end{aligned}$$

Analog zum homogenen Fall ergibt sich durch den Lösungsansatz (3.20) eine entkoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Koeffizienten c_n

$$\begin{aligned} c'_n(t) + \lambda \mu_n c_n(t) &= (g(t, \cdot), f_n) \\ \text{AB: } c_n(0) &= 0, \end{aligned}$$

dessen Lösung das Integralfunktional

$$c_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda \mu_n (t-s)} (g_n(s, \cdot), f_n) ds = \int_0^t \int_{\mathbf{D}} e^{-\lambda \mu_n (t-s)} g(s, x) f_n(x) dx ds$$

ist. Wieder nach Ansatz (3.20) besitzt dann die Lösung der Variationsformulierung die Gestalt

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\mathbf{D}} e^{-\lambda \mu_n (t-s)} g_n(s, z) f_n(z) dz ds f_n(x). \quad (3.24)$$

Die Lösungsdarstellungen (3.23) und (3.24) der Variationsformulierung für den homogenen und inhomogenen Fall stimmen mit den Darstellungen der klassischen Lösungen (3.12) und (3.19) überein. Somit ist gewährleistet, dass wenn die schwache Lösung die Glattheitsforderungen der klassischen Lösung erfüllt, dann ist es auch eine klassische. Die Frage, wann eine Lösung nun klassisch oder schwach ist, lässt sich auf die Frage nach der Glattheit der Eingangsdaten u_0 bzw. g zurückführen. Wenn diese hinreichend glatt sind, dann ist die Lösung auch klassisch.

Kapitel 4

Randanfangswertproblem mit zufälliger Anfangsbedingung

In diesem Kapitel soll die Lösung des ersten Teilproblems (1.17) aus Abschnitt 1.3, des RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung ${}^\varepsilon\bar{u}_0$

$$\bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \quad (4.1)$$

$$\text{AB: } \bar{u}(0, x, \omega) = {}^\varepsilon\bar{u}_0(x, \omega), \quad x \in \bar{D} \quad (4.2)$$

$$\text{RB: } \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \right|_{(\partial D)_2} = 0 \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha \bar{u}(t, x, \omega) \right) \bigg|_{(\partial D)_3} = 0, \quad (4.4)$$

sowie deren stochastischer Kenngrößen, wie Korrelations- bzw. Varianzfunktion bestimmt werden. Die homogene Neumann-Bedingung (4.3) am Rand $(\partial D)_2$ lässt sich als Wärmeisolation interpretieren. Am Rand $(\partial D)_3$ dagegen liegt eine Robin-Bedingung an, welche den Wärmefluss aufgrund von Temperaturunterschieden zwischen dem Gebiet D und dessen Umgebung beschreibt. Die Umgebungstemperatur ist dabei auf null gesetzt. Da die Wärmeübergangszahl α konstant gewählt wurde, sind die homogene Neumann-Bedingung (4.3) und die Robin-Bedingung (4.4) nicht verträglich. Wird dagegen $\alpha = \alpha(x)$ als hinreichend glatte, ortsabhängige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow x_{S_1}, x_{S_2}} \alpha(x) = 0$$

vorausgesetzt, so lässt sich diese Unverträglichkeit vermeiden. Die Punkte x_{S_1} und x_{S_2} stellen gemäß Abb. 1.2 die Übergangspunkte der Randbedingungen dar.

Die zufällige Anfangsbedingung ${}^\varepsilon\bar{u}_0$ steht für die Temperaturverteilung über dem Gebiet D zum Zeitpunkt $t = 0$ und wird als Element einer Familie reellwertiger ε -korrelierter Zufallsfelder (${}^\varepsilon\bar{u}_0$, $\varepsilon > 0$) mit der Korrelationsfunktion $R_{{}^\varepsilon\bar{u}_0}({}^\varepsilon\bar{u}_0)(x, y) = \mathbf{E}\{{}^\varepsilon\bar{u}_0(x){}^\varepsilon\bar{u}_0(y)\}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ modelliert. Somit ist vorausgesetzt, dass ${}^\varepsilon\bar{u}_0$, $\varepsilon > 0$ die in Annahme 1.3 formulierten Bedingungen erfüllt. Die Komponenten ε_1 bzw. ε_2 der Korrelationslänge ε beschreiben dabei die Länge der Korrelationen in x_1 - bzw. x_2 -Richtung.

Bemerkung 4.1 Aufgrund dieser gewählten Eigenschaften des zufälligen Feldes ${}^\varepsilon\bar{u}_0$ sind die Verträglichkeitsbedingungen (1.13) und (1.14) nicht erfüllt. Diesem Phänomen wird allerdings im Weiteren keine Beachtung geschenkt, es sei hier auf Bemerkung 1.7 verwiesen. Nach [15] ist zudem der Approximationsfehler, welcher sich durch die Anwendung der Finite-Elemente-Diskretisierung ergibt, größer als diese zusätzliche Fehlerquelle. Darüber hinaus wird beispielsweise in [20],[43],[44] auf diese Problematik eingegangen.

Zur Lösung des RAWP (4.1)-(4.4) werden zwei unterschiedliche Verfahren, die Finite-Elemente-Methode und die Fourier-Methode, angewendet. Wie sich in Kapitel 7 zeigen wird, stimmen die stochastischen Kenngrößen der auf diesen beiden unterschiedlichen Wegen berechneten Lösungen recht gut überein.

4.1 Berechnung der Korrelationsfunktion über die Finite-Elemente-Methode

In diesem Abschnitt wird das zufällige RAWP (4.1)-(4.4) mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode gelöst. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei an Kapitel 2, wobei zu beachten ist, dass keine Dirichlet-Bedingungen vorliegen, d.h. $\gamma_h = \emptyset$ und die Differentialgleichung (4.1) sowie die Neumann-Bedingung (4.3) homogenen Charakter besitzen.

Die aus dem RAWP (4.1)-(4.4) abgeleitete Variationsformulierung hat die Form (vgl. (2.7))

$$\begin{aligned} (\bar{u}_t, v) + a(t; \bar{u}, v) &= 0, & \forall v \in H^1(D), \forall t \in (0, T] \\ \text{AB: } (\bar{u}(0, \cdot, \omega), v) &= ({}^\varepsilon\bar{u}_0, v), & \forall v \in H^1(D), \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei der Raum der Testfunktionen dem Sobolevraum $H^1(D)$ entspricht. In (4.5) sind folgende Bezeichnungen eingeführt

$$\begin{aligned} (\bar{u}_t, v) &= \int_D \bar{u}_t(t, x, \omega) v(x) dx, \\ a(t; \bar{u}, v) &= \lambda \int_D \sum_{k=1}^2 \bar{u}_{x_k}(t, x, \omega) v_{x_k}(x) dx + \alpha \int_{(\partial D)_3} \bar{u}(t, x, \omega) v(x) ds, \\ ({}^\varepsilon\bar{u}_0, v) &= \int_D {}^\varepsilon\bar{u}_0(x, \omega) v(x) dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der Diskretisierung im Ort wird der Sobolevraum $H^1(D)$ durch den endlichdimensionalen Raum

$$V_h = \left\{ v_h : v_h(x) = \sum_{i \in \chi_h} v_i p_i(x) \right\}$$

ersetzt und die approximative Lösung $\bar{u}_h$ der Variationsformulierung (4.5) besitzt die Gestalt

$$\bar{u}_h(t, x, \omega) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}(t, \omega) p_j(x). \quad (4.6)$$

Damit ergibt sich für die zeitabhängigen Koeffizienten $\underline{u}_h(t, \omega) = [u_{h,i}(t, \omega)]_{i \in \chi_h}$ folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. (2.13))

$$\begin{aligned} M_h \dot{\underline{u}}_h(t, \omega) + K_h \underline{u}_h(t, \omega) &= \mathbf{0} \\ \text{AB: } M_h \underline{u}_h(0, \omega) &= \underline{d}(\omega). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Massematrix M_h (vgl. (2.14)), die Steifigkeitsmatrix K_h (vgl. (2.15)) und der Vektor $\underline{d}_h$ (vgl. (2.17)) sind definiert als

$$M_h = [(p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h}, \quad (4.8)$$

$$K_h = [a(p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h} = \left(\lambda \int_{\mathbb{D}} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} dx + \alpha \int_{(\partial \mathbb{D})_3} p_j p_i ds \right)_{i,j \in \chi_h}, \quad (4.9)$$

$$\underline{d}_h(\omega) = [(\varepsilon \bar{u}_0, p_i)]_{i \in \chi_h}^T.$$

Die Aufgabe (4.7) beschreibt für jede Diskretisierung $\chi_h = \{1, 2, \dots, N_h\}$ ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit im betrachteten Fall zeitunabhängiger Systemmatrix, womit die Existenz einer eindeutigen Lösung $\underline{u}_h$ gesichert ist (vgl. z.B. [9]).

Die Lösung des Anfangswertproblems (4.7) ist ein Integralfunktional der Form

$$\underline{u}_h(t, \omega) = G_h(t) \underline{d}_h(\omega) = G_h(t) \int_{\mathbb{D}} \varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) \underline{p}(x) dx \quad \text{mit} \quad \underline{p} = (p_i)_{i \in \chi_h}^T. \quad (4.10)$$

Die Matrixfunktion $G_h(t)$ ist dabei definiert als

$$G_h(t) = \exp(-M_h^{-1} K_h t) M_h^{-1}.$$

Durch folgendes Lemma kann diese Matixexponentialfunktion in eine für die numerischen Berechnungen günstigere Form überführt werden.

Lemma 4.2 *Es seien M_h und K_h die Masse- bzw. Steifigkeitsmatrizen des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (4.7). Dann ist die Systemmatrix $A_h = M_h^{-1} K_h$ diagonalisierbar, d.h. es existieren Matrizen V_h und Λ_h , so dass gilt*

$$A_h = V_h \Lambda_h V_h^{-1}.$$

Die Matrix $\Lambda_h = \text{diag}(\lambda_{h,1}, \lambda_{h,2}, \dots, \lambda_{h,N_h})$ besitzt Diagonalform, wobei die Einträge die Eigenwerte der Systemmatrix A_h sind. Die Matrix V_h besteht aus den zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren.

Beweis. Die Bestimmung der Eigenwerte $\lambda_{h,i}$, $i = 1, \dots, N_h$ von $A_h = M_h^{-1} K_h$ führt auf die Lösung des Problems $(M_h^{-1} K_h)x = \lambda_h x$. Aufgrund der Definitionen (4.8) und (4.9) sind die Massematrix M_h und die Steifigkeitsmatrix K_h symmetrisch und positiv definit. Damit lassen sich Aussagen über das dazugehörige verallgemeinerte Eigenwertproblem $K_h x = \lambda_h M_h x$ nutzen. Nach [25] existiert dann eine Matrix V_h , so dass gilt

$$\begin{aligned} V_h^T K_h V_h &= \Lambda_h = \text{diag}(\lambda_{h,1}, \dots, \lambda_{h,N_h}) \\ V_h^T M_h V_h &= I, \end{aligned}$$

wobei Λ_h die Eigenwerte der Matrix $M_h^{-1}K_h$ enthält. Daraus folgt

$$\begin{aligned} K_h &= V_h^{-T} \Lambda_h V_h^{-1}, \\ M_h &= (V_h V_h^T)^{-1} \quad \text{und} \quad M_h^{-1} = V_h V_h^T, \end{aligned} \quad (4.11)$$

woraus sich $M_h^{-1}K_h = V_h \Lambda_h V_h^{-1}$ ergibt. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann $G_h(t)$ dargestellt werden als

$$G_h(t) = e^{-M_h^{-1}K_h t} M_h^{-1} = V_h e^{-\Lambda_h t} V_h^{-1} M_h^{-1}.$$

Aus Beziehung (4.11) folgt $V_h^{-1} M_h^{-1} = V_h^T$ und somit

$$G_h(t) = V_h e^{-\Lambda_h t} V_h^T. \quad (4.12)$$

Die approximative Lösung $\bar{u}_h$ der Variationsformulierung (4.5) hat damit nach Ansatz (4.6) die Gestalt

$$\bar{u}_h(t, x, \omega) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}(t, \omega) p_j(x) = \sum_{j \in \chi_h} [G_h(t)]_j \int_{\mathbb{D}} \underline{p}(z)^\varepsilon \bar{u}_0(z, \omega) dz p_j(x),$$

wobei $[G_h(t)]_j$ die j -te Zeile der Matrix $G_h(t)$ bezeichnet.

Ziel der weiteren Überlegungen ist es, Momentenfunktionen der erhaltenen approximativen Lösung $\bar{u}_h$ zu berechnen. Aufgrund der Zentriertheit des zufälligen Feldes $^\varepsilon \bar{u}_0$ gilt für das erste Moment von $\bar{u}_h$

$$\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)\} = \sum_{j \in \chi_h} [G_h(t)]_j \int_{\mathbb{D}} \mathbf{E}\{^\varepsilon \bar{u}_0(z)\} \underline{p}(z) dz p_j(x) = \mathbf{0}.$$

Die Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x) \bar{u}(t_2, y)\}$ der Lösung $\bar{u}$ der Variationsformulierung (4.5) ist näherungsweise durch die Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t_1, x) \bar{u}_h(t_2, y)\}$ bestimmt. Aufgrund der Beziehung (4.6) gilt

$$\mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x) \bar{u}(t_2, y)\} \approx \mathbf{E}\{\bar{u}_h(t_1, x) \bar{u}_h(t_2, y)\} = \sum_{i,j \in \chi_h} \mathbf{E}\{u_{h,i}(t_1) u_{h,j}(t_2)\} p_i(x) p_j(y),$$

d.h. die Berechnung der Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t_1, x) \bar{u}_h(t_2, y)\}$ setzt die Kenntnis der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\}$ der Lösung $\underline{u}_h$ des stochastischen Anfangswertproblems (4.7) voraus.

Diese Korrelationsmatrix berechnet sich als

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\} &= \mathbf{E} \left\{ \left(G_h(t_1) \int_{\mathbb{D}} ^\varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) \underline{p}(x) dx \right) \left(G_h(t_2) \int_{\mathbb{D}} ^\varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) \underline{p}(x) dx \right)^T \right\} \\ &= G_h(t_1) \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \mathbf{E}\{^\varepsilon \bar{u}_0(x) ^\varepsilon \bar{u}_0(y)\} \underline{p}(x) \underline{p}^T(y) dy dx G_h^T(t_2). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Aufgrund der in Annahme 1.3 formulierten Voraussetzungen an das zufällige Feld ${}^\varepsilon \bar{u}_0$ gilt für die Korrelationsfunktion

$$\mathbf{E}\{{}^\varepsilon \bar{u}_0(x_1, x_2){}^\varepsilon \bar{u}_0(y_1, y_2)\} = R_{{}^\varepsilon \bar{u}_0}({}^\varepsilon \bar{u}_0)(y_1 - x_1, y_2 - x_2) = R\left(\frac{y_1 - x_1}{\varepsilon_1}, \frac{y_2 - x_2}{\varepsilon_2}\right).$$

Unter Nutzung der gegebenen Diskretisierung kann die Gleichung (4.13) als Summe von Integralen über den finiten Elemente geschrieben werden. Dabei sind im Folgenden die finiten Elemente $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ als Rechtecke vorausgesetzt. Die Koordinaten der Eckpunkte $P_i^{(r)}$, $i = 1, \dots, 4$ von $T^{(r)}$ werden mit $P_i^{(r)} = (x_{i1}^{(r)}, x_{i2}^{(r)})$ bezeichnet (vgl. Abb. 4.1).

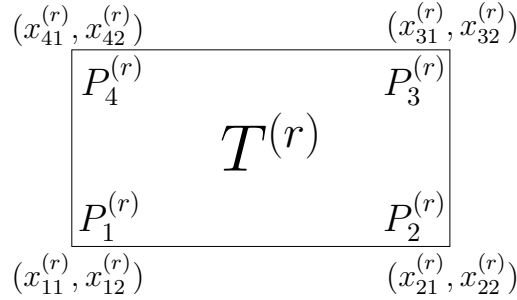


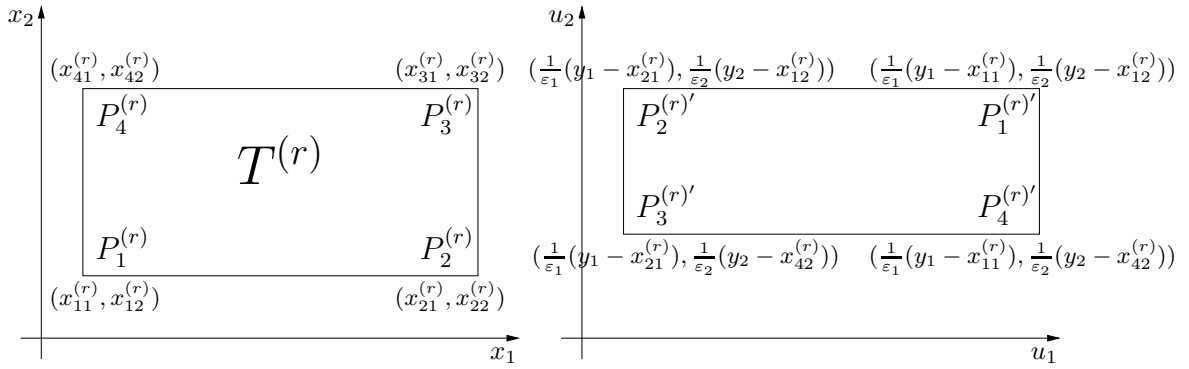
Abbildung 4.1: Lokale Nummerierung der Knoten des Elements $T^{(r)}$

Unter Beachtung von Beziehung (2.10) gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= G_h(t_1) \sum_{r,s=1}^{R_h} (C^{(r)})^T \int_{T^{(r)}} \int_{T^{(s)}} R\left(\frac{y_1 - x_1}{\varepsilon_1}, \frac{y_2 - x_2}{\varepsilon_2}\right) \underline{p}^{(r)}(x_1, x_2) \\ &\quad \cdot (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) dy_2 dy_1 dx_2 dx_1 C^{(s)} G_h^T(t_2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mittels der Transformation $x_1 \rightarrow u_1 : u_1 = \frac{y_1 - x_1}{\varepsilon_1}$ und $x_2 \rightarrow u_2 : u_2 = \frac{y_2 - x_2}{\varepsilon_2}$ ergibt sich für die Summanden aus Gleichung (4.14) (vgl. Abb. 4.2)

$$\begin{aligned} &\int_{T^{(r)}} \left(\int_{T^{(s)}} R\left(\frac{y_1 - x_1}{\varepsilon_1}, \frac{y_2 - x_2}{\varepsilon_2}\right) \underline{p}^{(r)}(x_1, x_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \right) dx_2 dx_1 \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_{x_{11}^{(s)}}^{x_{21}^{(s)}} dy_1 \int_{x_{12}^{(s)}}^{x_{42}^{(s)}} dy_2 \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(y_1 - x_{21}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(y_1 - x_{11}^{(r)})} du_1 \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(y_2 - x_{42}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(y_2 - x_{12}^{(r)})} du_2 \\ &\quad R(u_1, u_2) \underline{p}^{(r)}(y_1 - \varepsilon_1 u_1, y_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[\int_{x_{11}^{(s)}}^{x_{21}^{(s)}} dy_1 \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(y_1 - x_{21}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(y_1 - x_{11}^{(r)})} du_1 \right] \left[\int_{x_{12}^{(s)}}^{x_{42}^{(s)}} dy_2 \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(y_2 - x_{42}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(y_2 - x_{12}^{(r)})} du_2 \right] \\ &\quad R(u_1, u_2) \underline{p}^{(r)}(y_1 - \varepsilon_1 u_1, y_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Abbildung 4.2: Transformation $(x_1, x_2) \rightarrow (u_1, u_2)$ von $T^{(r)}$

Mit Hilfe der Definitionen

$$h_1^{(r)} = x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(r)} = x_{31}^{(r)} - x_{41}^{(r)} \quad \text{und} \quad h_2^{(r)} = x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(r)} = x_{32}^{(r)} - x_{22}^{(r)},$$

und der Vertauschung der Integrationsreihenfolge ergibt sich für das Doppelintegral (vgl. Abb. 4.3)

$$\begin{aligned} & \int_{x_{11}^{(s)} - \frac{1}{\varepsilon_1}(y_1 - x_{21}^{(r)})}^{x_{21}^{(s)} - \frac{1}{\varepsilon_1}(y_1 - x_{11}^{(r)})} \int R(u_1, u_2) \underline{p}^{(r)}(y_1 - \varepsilon_1 u_1, y_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) du_1 dy_1 \\ &= \begin{cases} \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(s)} - x_{21}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(s)} - x_{21}^{(r)})} du_1 \int_{x_{11}^{(s)}}^{\varepsilon_1 u_1 + x_{21}^{(r)}} dy_1 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(s)} - x_{21}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(s)} - x_{11}^{(r)})} du_1 \int_{x_{11}^{(s)}}^{\varepsilon_1 u_1 + x_{21}^{(r)}} dy_1 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(s)} - x_{11}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(s)} - x_{11}^{(r)})} du_1 \int_{\varepsilon_1 u_1 + x_{11}^{(r)}}^{x_{21}^{(s)}} dy_1 \right] \\ R(u_1, u_2) \underline{p}^{(r)}(y_1 - \varepsilon_1 u_1, y_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) \quad \text{für } h_1^{(r)} \geq h_1^{(s)} \\ \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(s)} - x_{21}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(s)} - x_{11}^{(r)})} du_1 \int_{x_{11}^{(s)}}^{\varepsilon_1 u_1 + x_{21}^{(r)}} dy_1 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(s)} - x_{21}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(s)} - x_{11}^{(r)})} du_1 \int_{\varepsilon_1 u_1 + x_{11}^{(r)}}^{x_{21}^{(s)}} dy_1 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(s)} - x_{11}^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(s)} - x_{11}^{(r)})} du_1 \int_{\varepsilon_1 u_1 + x_{11}^{(r)}}^{x_{21}^{(s)}} dy_1 \right] \\ R(u_1, u_2) \underline{p}^{(r)}(y_1 - \varepsilon_1 u_1, y_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) \quad \text{für } h_1^{(r)} \leq h_1^{(s)} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

und ein entsprechendes Ergebnis für

$$\int_{x_{12}^{(s)} - \frac{1}{\varepsilon_2}(y_2 - x_{42}^{(r)})}^{x_{42}^{(s)} - \frac{1}{\varepsilon_2}(y_2 - x_{12}^{(r)})} \int R(u_1, u_2) \underline{p}^{(r)}(y_1 - \varepsilon_1 u_1, y_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) du_2 dy_2. \quad (4.16)$$

Die wesentliche Idee für die folgenden Überlegungen kommt auch für den Spezialfall $h_1^{(r)} = h_1^{(s)} = h_1$, $h_2^{(r)} = h_2^{(s)} = h_2$ zum Ausdruck, wobei sich hierfür die Rechnungen erheblich vereinfachen. Aus $h_1^{(r)} = h_1^{(s)}$ folgt $x_{11}^{(s)} - x_{11}^{(r)} = x_{21}^{(s)} - x_{21}^{(r)}$, womit die Fallunterscheidung in (4.15) entfällt und der mittlere Term verschwindet. Ähnlich vereinfacht sich die Berechnung für (4.16) mit $h_2^{(r)} = h_2^{(s)}$. Mit der zusätzlichen Transformation

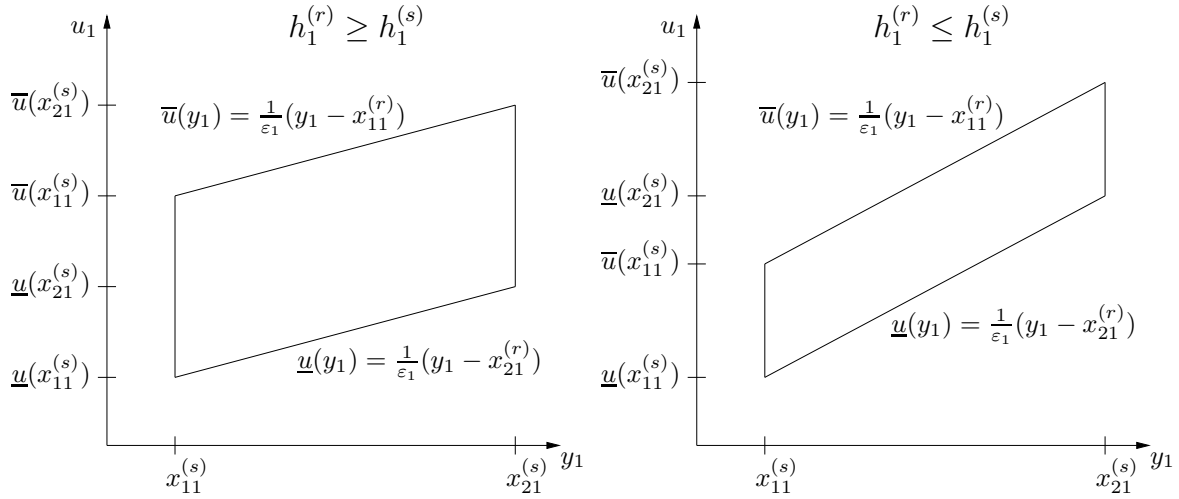


Abbildung 4.3: Zur Vertauschung der Integration im Fall $h_1^{(r)} \geq h_1^{(s)}$ bzw. $h_1^{(r)} \leq h_1^{(s)}$

$(u_1, u_2) \rightarrow (u'_1, u'_2)$, $u'_1 = -u_1$, $u'_2 = -u_2$ und der Eigenschaft der Korrelationsfunktion $R(u_1, u_2) = R(-u_1, -u_2)$, welche sich aus der Homogenität (Annahme 1.3) ergibt, besitzt die Korrelationsmatrix (4.14) im Fall $h_1^{(r)} = h_1^{(s)}$, $h_2^{(r)} = h_2^{(s)}$ die Form

$$\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 G_h(t_1) \sum_{r,s=1}^{R_h} \left((C^{(r)})^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(s)}) & x_{21}^{(r)} - \varepsilon_1 u_1 & \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{21}^{(s)}) & x_{21}^{(s)} \\ \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)})}^{\int_{x_{11}^{(s)}}} du_1 & \int_{x_{11}^{(s)}} dy_1 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{21}^{(s)})} du_1 & \int_{x_{11}^{(r)} - \varepsilon_1 u_1} dy_1 \end{bmatrix} \right. \\ \left. \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(s)}) & x_{42}^{(r)} - \varepsilon_2 u_2 & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{42}^{(s)}) & x_{42}^{(s)} \\ \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(s)})} du_2 & \int_{x_{12}^{(s)}} dy_2 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{42}^{(s)})} du_2 & \int_{x_{12}^{(r)} - \varepsilon_2 u_2} dy_2 \end{bmatrix} \right. \\ \left. R(u_1, u_2) \underline{p}^{(r)}(y_1 + \varepsilon_1 u_1, y_2 + \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) C^{(s)} \right) G_h^T(t_2).$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass der Integrand in ein Produkt zerfällt, in dem die Korrelationsfunktion nur von (u_1, u_2) abhängt. Nutzt man diese Trennung der Integrationsvariablen und führt folgende vier Funktionen

$$\phi_1^{(r,s)}(z) := \phi_{[x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)}; x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \quad (4.17)$$

$$\phi_2^{(r,s)}(z) := -\phi_{[x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)}; x_{42}^{(s)}, x_{12}^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \quad (4.18)$$

$$\phi_3^{(r,s)}(z) := -\phi_{[x_{21}^{(s)}, x_{11}^{(r)}; x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \quad (4.19)$$

$$\phi_4^{(r,s)}(z) := \phi_{[x_{21}^{(s)}, x_{11}^{(r)}; x_{42}^{(s)}, x_{12}^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \quad (4.20)$$

mit $z = (z_1, z_2)$ und

$$\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z_1, z_2) = \int_m^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2), \quad (4.21)$$

$$Q_1^{(r)}(y_1, y_2) := \underline{p}^{(r)}(y_1, y_2), \quad Q_2^{(s)}(y_1, y_2) := (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2)$$

ein, so ergibt sich für die zu berechnende Korrelationsmatrix

$$\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 G_h(t_1) \sum_{r,s=1}^{R_h} \left((C^{(r)})^T \right. \quad (4.22)$$

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(s)}) & \int \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(s)}) & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{42}^{(s)}) \\ \int du_1 & \int du_2 \phi_1^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) + \int du_2 \phi_2^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) \\ \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)}) & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(s)}) & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{42}^{(s)}) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{21}^{(s)}) & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(s)}) & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{42}^{(s)}) \\ \int du_1 & \int du_2 \phi_3^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) + \int du_2 \phi_4^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) \\ \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{21}^{(s)}) & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(s)}) & \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{42}^{(s)}) \end{bmatrix} \end{aligned} \right) R(u_1, u_2) C^{(s)} \Big) G_h^T(t_2).$$

Da die zufällige Anfangsbedingung $\varepsilon \bar{u}_0$ nach Annahme 1.3 als ε -korreliert vorausgesetzt ist, soll im Folgenden untersucht werden, über welche s bei festem r in Gleichung (4.22) summiert werden muss, d.h. für welche finiten Elemente $T^{(s)}$ die Summanden i.a. ungleich null sind.

Es sei $\varepsilon_1 = (l_1 - \vartheta_1)h_1$, $\varepsilon_2 = (l_2 - \vartheta_2)h_2$ mit $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 1)$. Die Integration bezüglich u_1 erstreckt sich in Gleichung (4.22) über

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)}) \leq u_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(s)}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{21}^{(s)}) \leq u_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{21}^{(s)}).$$

Aus

$$k_1^{(r,s)} h_1 := x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)} \quad \text{und} \quad x_{21}^{(r)} = x_{11}^{(r)} + h_1 \quad (4.23)$$

folgt

$$\frac{k_1^{(r,s)}}{l_1 - \vartheta_1} \leq u_1 \leq \frac{k_1^{(r,s)} + 1}{l_1 - \vartheta_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{k_1^{(r,s)} - 1}{l_1 - \vartheta_1} \leq u_1 \leq \frac{k_1^{(r,s)}}{l_1 - \vartheta_1}.$$

Da $R(u_1, u_2) = 0$ für $(u_1, u_2) \notin (-1, 1)^2$, sind die Summanden null für solche s , für die

$$\begin{aligned} l_1 - \vartheta_1 &\leq k_1^{(r,s)} & \text{oder} & & k_1^{(r,s)} + 1 &\leq -l_1 + \vartheta_1 & \text{bzw.} \\ l_1 - \vartheta_1 &\leq k_1^{(r,s)} - 1 & \text{oder} & & k_1^{(r,s)} &\leq -l_1 + \vartheta_1 \end{aligned}$$

gilt. Folglich sind die Summanden für alle finiten Elemente $T^{(s)}$ null, für die

$$k_1^{(r,s)} \geq l_1 - \vartheta_1 + 1 \quad \text{oder} \quad k_1^{(r,s)} \leq -l_1 + \vartheta_1 - 1.$$

Mit $k_2^{(r,s)} h_2 := x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(s)}$ folgt aus analogen Überlegungen das Verschwinden der Summanden über alle s , für die

$$k_2^{(r,s)} \geq l_2 - \vartheta_2 + 1 \quad \text{oder} \quad k_2^{(r,s)} \leq -l_2 + \vartheta_2 - 1.$$

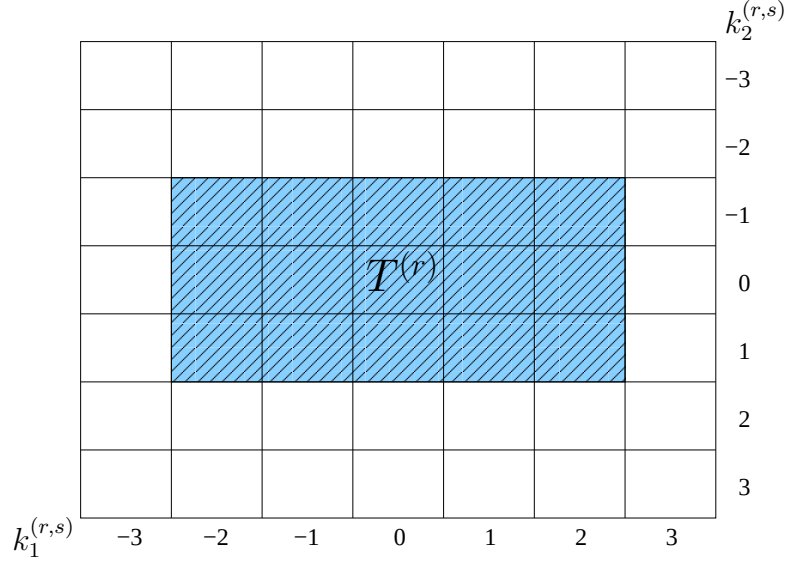


Abbildung 4.4: Summation bzgl. s in (4.22) bei festem r über alle Indizes zu den Rechtecken des schraffierten Gebietes im Falle $l_1 = 2$, $l_2 = 1$

Abb. 4.4 zeigt im Fall $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}h_1$, $\varepsilon_2 = h_2$, also für $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ und $\vartheta_1 = \frac{1}{2}$, $\vartheta_2 = 0$, dass über alle Indizes zu Rechtecken aus dem schraffierten Gebiet zu summieren ist. Die Summanden sind für solche Rechtecke $T^{(s)}$ mit

$$k_1^{(r,s)} \geq \frac{5}{2} \quad \text{oder} \quad k_1^{(r,s)} \leq -\frac{5}{2} \quad \text{bzw.} \quad k_2^{(r,s)} \geq 2 \quad \text{oder} \quad k_2^{(r,s)} \leq -2.$$

Ausgehend von den Darstellungen (4.13) bzw. (4.22) werden im Folgenden drei Verfahren zur Berechnung der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ vorgestellt.

4.1.1 Asymptotische Entwicklung höherer Ordnung

Die Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit zufälliger Anfangsbedingung ist nach Gleichung (4.10) ein Integralfunktional der Gestalt

$$\underline{u}_h(t, \omega) = G_h(t) \int_{\mathbf{D}}^{\varepsilon} \bar{u}_0(x, \omega) \underline{p}(x) dx.$$

Voraussetzung für die in [39] angegebene asymptotische Entwicklung der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ nach der Korrelationslänge ε bis zur Ordnung m über dem Gebiet $\mathbf{D}$ ist, dass die deterministische Kernfunktion $\underline{p}$ der obigen Lösung die in folgender Annahme formulierte Bedingungen erfüllt.

Annahme 4.3 Die deterministische Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ erfülle folgende Bedingungen

- Die Ableitungen $D^{(n_1, n_2)} f(x) := \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} f(x_1, x_2)$ seien für $n = n_1 + n_2 \leq m$ stetig,
- $D^{(n_1, n_2)} f$, $m = n_1 + n_2$ seien absolut stetig und
- $D^{(n_1, n_2)} f$ für $n = n_1 + n_2 \leq m + 1$ gehören zu $L_1(\mathbb{D}) \cap L_2(\mathbb{D})$.

Die Ansatzfunktionen $\{p_i\}_{i \in \chi_h}$ sind i.a. als Funktionen mit lokalem Träger definiert. Wird beispielsweise von linearen oder bilinearen Funktionen ausgegangen, so sind diese nur stetig über dem Gebiet $\mathbb{D}$. Die in Annahme 4.3 formulierten Bedingungen wären dann nur für $m = 0$ erfüllt. Werden die Ansatzfunktionen allerdings nur über den finiten Elementen $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ betrachtet, so genügen sie den Bedingungen aus Annahme 4.3 für beliebige Ordnungen m . Deshalb kann ausgehend von Gleichung (4.22) eine Entwicklung der Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ nach der Korrelationslänge ε auch höherer Ordnung angegeben werden.

Um nach der in [39] vorgeschlagenen Vorgehensweise eine Entwicklung der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}(t_1)\underline{u}^T(t_2)\}$ bezüglich ε_1 und ε_2 zu bestimmen, werden die Funktionen $\phi_i^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2)$, $i = 1, \dots, 4$ für $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$ in der Form

$$\phi_i^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2)|_{z_1=z_2=0} u^\alpha + \varrho_{i,m+1}^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) \quad (4.24)$$

dargestellt, wobei

$$u = (u_1, u_2), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2!, \quad \varepsilon^\alpha = \varepsilon_1^{\alpha_1} \varepsilon_2^{\alpha_2}, \quad u^\alpha = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

und

$$D^\alpha \phi(z_1, z_2) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} \phi(z_1, z_2)$$

vereinbart werden. Für die weiteren Betrachtungen werden die in Abb. 4.5 angegebenen Bezeichnungen für die benachbarten Elemente von $T^{(r)}$ verwendet.

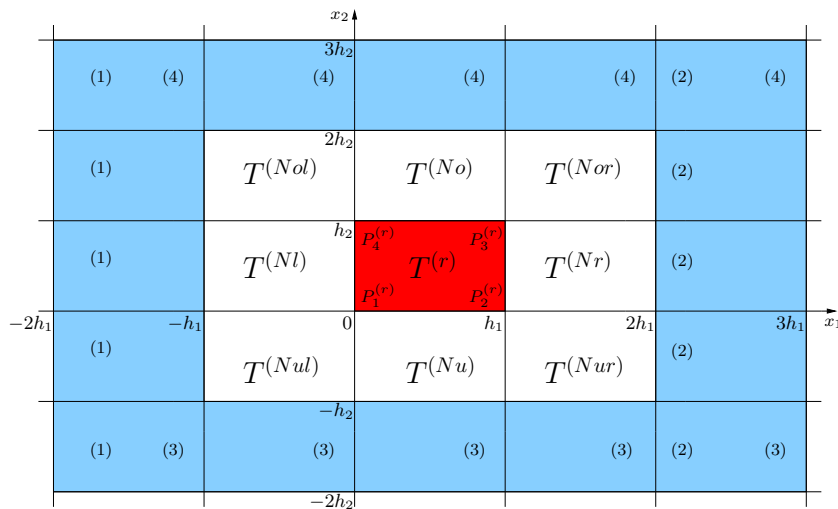


Abbildung 4.5: Bezeichnung benachbarter Finiter Elemente von $T^{(r)}$

Dabei steht etwa $T^{(Nr)}$ für das rechte Nachbarelement und $T^{(Nul)}$ für das untere linke. In Gleichung (4.22) erfolgt die Integration der Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 4$ bezüglich u_1 über

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)}) \leq u_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(s)}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{21}^{(s)}) \leq u_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{21}^{(s)})$$

und bezüglich u_2 über

$$\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(s)}) \leq u_2 \leq \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(s)}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{42}^{(s)}) \leq u_2 \leq \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{42}^{(s)}).$$

Damit der Entwicklungspunkt $(0,0)$ im Integrationsgebiet der Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$ liegt, müssen die Beziehungen

$$\varepsilon_1 \leq h_1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 \leq h_2$$

vorausgesetzt werden. Zum Beweis wird

$$\varepsilon_1 = (l_1 - \vartheta_1)h_1, \quad \varepsilon_2 = (l_2 - \vartheta_2)h_2, \quad \vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1), \quad l_1, l_2 = 1, 2, \dots$$

gesetzt. Für das Integrationsgebiet über welches $\phi_1^{(r,Nul)}$ bezüglich u_1 integriert wird, ergibt sich (vgl. Abb. 4.5)

$$\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(Nul)}) = \frac{h_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{l_1 - \vartheta_1} \leq u_1 \leq \frac{2}{l_1 - \vartheta_1} = \frac{2h_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(Nul)}),$$

d.h. $u_1 \in J_{l_1} := \left[\frac{1}{l_1 - \vartheta_1}, \frac{2}{l_1 - \vartheta_1} \right]$. Für $l_1 > 1$ folgt $J_{l_1} \cap (-1,1) \neq \emptyset$. Demnach ist in diesem Fall über $T^{(Nul)}$ zu integrieren, aber der Entwicklungspunkt $u_1 = 0$ liegt nicht im Integrationsgebiet. Für $l_1 = 1$ ist $J_{l_1} \cap (-1,1) = \emptyset$, so dass das entsprechende Integral über $\phi_1^{(r,Nul)}$ verschwindet. Gleiches ergibt sich für das Integrationsgebiet über welches $\phi_1^{(r,Nul)}$ bezüglich u_2 integriert wird. Es gilt

$$\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(Nul)}) = \frac{h_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{l_2 - \vartheta_2} \leq u_2 \leq \frac{2}{l_2 - \vartheta_2} = \frac{2h_2}{\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(Nul)}),$$

d.h. $u_2 \in J_{l_2} := \left[\frac{1}{l_2 - \vartheta_2}, \frac{2}{l_2 - \vartheta_2} \right]$. Für $l_2 > 1$ folgt analog $J_{l_2} \cap (-1,1) \neq \emptyset$, womit über $T^{(Nul)}$ zu integrieren ist, aber der Entwicklungspunkt $u_2 = 0$ sich nicht im Integrationsgebiet befindet. Für $l_2 = 1$ ist $J_{l_2} \cap (-1,1) = \emptyset$, so dass auch hier das entsprechende Integral über $\phi_1^{(r,Nul)}$ verschwindet.

Weiter muss in Gleichung (4.22) aufgrund der Eigenschaft der Korrelationsfunktion R eines 1-korrelierten Feldes

$$R(u_1, u_2) = 0 \quad \text{für} \quad (u_1, u_2) \notin (-1,1)^2$$

bei festem finiten Element $T^{(r)}$ nicht über alle Elemente $T^{(s)}$, $s \in \psi_h$ summiert werden. Als Integrationsgebiete für die ersten Summanden in (4.22) bei festem $T^{(r)}$ ergeben sich in dem gewählten Koordinatensystem (vgl. Abb. 4.5)

$$-\frac{1}{\varepsilon_1}x_{11}^{(s)} \leq u_1 \leq \frac{1}{\varepsilon_1}(h_1 - x_{11}^{(s)}) \quad \text{und} \quad -\frac{1}{\varepsilon_2}x_{12}^{(s)} \leq u_2 \leq \frac{1}{\varepsilon_2}(h_2 - x_{12}^{(s)}). \quad (4.25)$$

Die Korrelationsfunktion $R(u_1, u_2)$ ist Null für $(u_1, u_2) \notin (-1, 1)$, d.h. für

$$\begin{aligned} 1 &\leq -\frac{1}{\varepsilon_1} x_{11}^{(s)} && \text{oder } x_{11}^{(s)} \leq -h_1, && \text{d.h. für } s = (1), \text{ } Nol, \text{ } Nl, \text{ } Nul, \\ \frac{1}{\varepsilon_1} (h_1 - x_{11}^{(s)}) &\leq -1 && \text{oder } 2h_1 \leq x_{11}^{(s)}, && \text{d.h. für } s = (2), \\ 1 &\leq -\frac{1}{\varepsilon_2} x_{12}^{(s)} && \text{oder } x_{12}^{(s)} \leq -h_2, && \text{d.h. für } s = (3), \text{ } Nul, \text{ } Nu, \text{ } Nur, \\ \frac{1}{\varepsilon_2} (h_2 - x_{12}^{(s)}) &\leq -1 && \text{oder } 2h_2 \leq x_{12}^{(s)}, && \text{d.h. für } s = (4). \end{aligned}$$

Wird $s \in \{r, Nr, Nor, No\}$ betrachtet, so ist i.a. $R(u_1, u_2) \neq 0$ und der Entwicklungspunkt $(0, 0)$ liegt im Definitionsgebiet von $\phi_1^{(r,s)}$, da aus Gleichung (4.25) mit $\bar{h}_1 = \frac{h_1}{\varepsilon_1}$, $\bar{h}_2 = \frac{h_2}{\varepsilon_2}$ folgt

$$\begin{aligned} s = r & : & 0 \leq u_1 \leq \bar{h}_1, & 0 \leq u_2 \leq \bar{h}_2, \\ s = Nr & : & -\bar{h}_1 \leq u_1 \leq 0, & 0 \leq u_2 \leq \bar{h}_2, \\ s = Nor & : & -\bar{h}_1 \leq u_1 \leq 0, & -\bar{h}_2 \leq u_2 \leq 0, \\ s = No & : & 0 \leq u_1 \leq \bar{h}_1, & -\bar{h}_2 \leq u_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe analoger Überlegungen lassen sich die in Tabelle 4.1 angegebenen zu berücksichtigenden Terme $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 4$ bei festem r in Abhängigkeit von i und s zu bestimmen. Dabei ist $R(u_1, u_2) = 0$ für $s \in \{(1), (2), (3), (4)\}$ und $i = 1, 2, 3, 4$.

i	$s : R(u_1, u_2) = 0$	s : zu berücksichtigende Glieder
1	Nol, Nl, Nul, Nu, Nur	$\{r, Nr, Nor, No\} =: M_1$
2	Nol, Nl, Nul, No, Nor	$\{r, Nr, Nur, Nu\} =: M_2$
3	Nor, Nr, Nur, Nu, Nul	$\{r, Nl, Nol, No\} =: M_3$
4	Nor, Nr, Nur, No, Nol	$\{r, Nl, Nul, Nu\} =: M_4$

Tabelle 4.1: Übersicht der finiten Elemente $T^{(s)}$ bezüglich $T^{(r)}$ mit $R(u_1, u_2) \neq 0$

Zusammenfassend ergibt sich aus Gleichung (4.22) mit Hilfe der Entwicklung (4.24) im Fall $\varepsilon_1 \leq h_1$ und $\varepsilon_2 \leq h_2$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\} &= G_h(t_1) \sum_{r=1}^{R_h} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha!} \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{s \in M_i} (C^{(r)})^T q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} C^{(s)} \right) \right] G_h^T(t_2) \quad (4.26) \\ &\quad + \mathcal{Q}_{m+1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen $\mathbf{1} = (1, 1)$,

$$q_{\alpha,i}^{(r,s)} := D^\alpha \phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2)|_{z_1=z_2=0}, \quad i = 1, \dots, 4$$

und

$$\begin{aligned} a_{\alpha,1}^{(r,s)} &:= \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(s)})} \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{12}^{(s)})} u^\alpha R(u_1, u_2) du_2 du_1, \\ a_{\alpha,2}^{(r,s)} &:= \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)} - x_{11}^{(s)})} \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)} - x_{42}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)} - x_{42}^{(s)})} u^\alpha R(u_1, u_2) du_2 du_1, \end{aligned}$$

$$a_{\alpha,3}^{(r,s)} := \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)}-x_{21}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)}-x_{21}^{(s)})} \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)}-x_{12}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)}-x_{12}^{(s)})} u^\alpha R(u_1, u_2) du_2 du_1,$$

$$a_{\alpha,4}^{(r,s)} := \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{11}^{(r)}-x_{21}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(x_{21}^{(r)}-x_{21}^{(s)})} \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{12}^{(r)}-x_{42}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(x_{42}^{(r)}-x_{42}^{(s)})} u^\alpha R(u_1, u_2) du_2 du_1.$$

Mit

$$a_{[v,w]}^\alpha := \int_v^{v+\bar{h}_1} \int_w^{w+\bar{h}_2} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} R(u_1, u_2) du_2 du_1$$

lassen sich die Ausdrücke $a_{\alpha,i}^{(r,s)}$ durch $a_{[v,w]}^\alpha$ angeben, wobei die Werte für (v, w) aus nachfolgender Tabelle 4.2 in Abhängigkeit von s und i entnommen werden können. Diese Ergebnisse folgen aus den Definitionsbeziehungen der $a_{\alpha,i}^{(r,s)}$ und der Tabelle 4.1, welche die Indizes i und s mit $R(u_1, u_2) \neq 0$ angibt.

$s \setminus i$	1	2	3	4
r	$(0, 0)$	$(0, -\bar{h}_2)$	$(-\bar{h}_1, 0)$	$(-\bar{h}_1, -\bar{h}_2)$
Nr	$(-\bar{h}_1, 0)$	$(-\bar{h}_1, -\bar{h}_2)$		
Nl			$(0, 0)$	$(0, -\bar{h}_2)$
No	$(0, -\bar{h}_2)$		$(-\bar{h}_1, -\bar{h}_2)$	
Nu		$(0, 0)$		$(-\bar{h}_1, 0)$
Nor	$(-\bar{h}_1, -\bar{h}_2)$			
Nol			$(0, -\bar{h}_2)$	
Nur		$(-\bar{h}_1, 0)$		
Nul				$(0, 0)$

Tabelle 4.2: Werte für (v, w) aus $a_{\alpha,i}^{(r,s)} = a_{[v,w]}^\alpha$; kein Eintrag: $a_{\alpha,i}^{(r,s)} = 0$

Zur Berechnung der Terme $q_{\alpha,i}^{(r,s)}$ wird die Beziehung

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z) &= \int_m^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^{i+1} \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(n, y_2 + z_2) D^{(i,0)} Q_2^{(s)}(n - z_1, y_2) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+1} \int_m^{n-z_1} dy_1 D^{(\alpha_1, \alpha_2-1-i)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, q) D^{(0,i)} Q_2^{(s)}(y_1, q - z_2) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} \sum_{j=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+j} D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2-1-j)} Q_1^{(r)}(n, q) D^{(i,j)} Q_2^{(s)}(n - z_1, q - z_2)
\end{aligned}$$

mit $\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z)$ aus (4.21) verwendet (Beweis erfolgt über vollständige Induktion, vgl. auch [39]) und die Bezeichnungen

$$A_{\alpha}^{(r,s)}(z; m, n, p, q) := \int_m^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2) \quad (4.27)$$

$$B_{\alpha}^{(r,s)}(z; n, p, q) := \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^{i+1} \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(n, y_2 + z_2) D^{(i,0)} Q_2^{(s)}(n - z_1, y_2)$$

$$C_{\alpha}^{(r,s)}(z; m, n, q) := \sum_{i=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+1} \int_m^{n-z_1} dy_1 D^{(\alpha_1, \alpha_2-1-i)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, q) D^{(0,i)} Q_2^{(s)}(y_1, q - z_2)$$

$$H_{\alpha}^{(r,s)}(z; n, q) := \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} \sum_{j=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+j} D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2-1-j)} Q_1^{(r)}(n, q) D^{(i,j)} Q_2^{(s)}(n - z_1, q - z_2)$$

eingeführt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z) &= A_{\alpha}^{(r,s)}(z; m, n, p, q) + B_{\alpha}^{(r,s)}(z; n, p, q) \\ &\quad + C_{\alpha}^{(r,s)}(z; m, n, q) + H_{\alpha}^{(r,s)}(z; n, q) \end{aligned}$$

und daraus

$$D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \phi_i^{(r,s)}(z) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4.$$

Für die $q_{\alpha,i}^{(r,s)}$ bestimmenden Ausdrücke $A_{\alpha}^{(r,s)}$, $B_{\alpha}^{(r,s)}$, $C_{\alpha}^{(r,s)}$ und $H_{\alpha}^{(r,s)}$ für $(z_1, z_2) = (0, 0)$ ergeben sich die nachfolgenden Überlegungen.

Der Integrand $D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \underline{p}^{(r)}(y_1, y_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2)$ des Terms $A_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; m, n, p, q)$ verschwindet für $r \neq s$ aufgrund der Eigenschaften der Elementansatzfunktionen $\underline{p}^{(r)}$ und $\underline{p}^{(s)}$. Es gilt $\underline{p}^{(r)}(y_1, y_2) = 0$ auf $D \setminus T^{(r)}$, $\underline{p}^{(s)}(y_1, y_2) = 0$ auf $D \setminus T^{(s)}$ und $\text{vol}(T^{(r)} \cap T^{(s)}) = 0$. Somit ergibt sich A1 in folgender Behauptung

$$A_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; m, n, p, q) = 0 : \begin{cases} A1 : \text{für } s \notin \{r\} \\ A2 : \text{für } \max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 1 \text{ bei bilinearen} \\ \text{Ansatzfunktionen.} \end{cases} \quad (4.28)$$

Die Bedingung A2 ergibt sich aus der linearen Struktur von $\underline{p}^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2)$ bezüglich z_1 und z_2 bei bilinearen Ansatzfunktionen.

Der Term $B_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; n, p, q)$ geht in die Berechnung von $q_{\alpha,i}^{(r,s)}$ mit den Werten $n \in \{x_{11}^{(r)}, x_{21}^{(r)}\}$ ein und das Integral erstreckt sich über $(p, q) \in \{(x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}), (x_{42}^{(s)}, x_{12}^{(r)})\}$. Aus der Form des Integranden als Produkt der Faktoren

$$D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2)} \underline{p}^{(r)}(n, y_2) \quad \text{und} \quad D^{(i,0)} (\underline{p}^{(s)})^T(n, y_2)$$

ergibt sich

$$B_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; n, p, q) = 0 : \begin{cases} B1 : \begin{cases} n = x_{11}^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, Nl\} \\ n = x_{21}^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, Nr\} \end{cases} \\ B2 : \text{ für } \alpha_1 = 0 \\ B3 : \text{ für } \alpha_1 > 3 \vee \alpha_2 > 1 \text{ bei bilinearen} \\ \hspace{15em} \text{Ansatzfunktionen.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Ein ähnliches Resultat folgt für $C_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; m, n, q)$ mit $q \in \{x_{12}^{(r)}, x_{42}^{(r)}\}$ und $(m, n) \in \{(x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)}), (x_{21}^{(s)}, x_{11}^{(r)})\}$

$$C_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; m, n, q) = 0 : \begin{cases} C1 : \begin{cases} q = x_{12}^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, Nu\} \\ q = x_{42}^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, No\} \end{cases} \\ C2 : \text{ für } \alpha_2 = 0 \\ C3 : \text{ für } \alpha_1 > 1 \vee \alpha_2 > 3 \text{ bei bilinearen} \\ \hspace{15em} \text{Ansatzfunktionen.} \end{cases} \quad (4.30)$$

Der Ausdruck $H_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; n, q)$ ist für $(n, q) \in \{P_1^{(r)}, P_2^{(r)}, P_3^{(r)}, P_4^{(r)}\}$ (vgl. Abb. 4.5) zu betrachten. Das Produkt $D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2-1-j)} \underline{p}^{(r)}(n, q) D^{(i,j)} (\underline{p}^{(s)})^T(n, q)$ führt auf das Ergebnis

$$H_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; n, q) = 0 : \begin{cases} H1 : \begin{cases} (n, q) = P_1^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, Nl, Nul, Nu\} \\ (n, q) = P_2^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, Nr, Nur, Nu\} \\ (n, q) = P_3^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, Nr, Nor, No\} \\ (n, q) = P_4^{(r)} \text{ für } s \notin \{r, Nl, Nol, No\} \end{cases} \\ H2 : \text{ für } \min\{\alpha_1, \alpha_2\} = 0 \\ H3 : \text{ für } \max\{\alpha_1, \alpha_2\} > 3 \text{ bei bilinearen} \\ \hspace{15em} \text{Ansatzfunktionen.} \end{cases} \quad (4.31)$$

Die Glieder nullter Ordnung in der Entwicklung von $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ nach Gleichung (4.26) ergeben sich für $\alpha = (0, 0)$. Aus (4.28) bis (4.31) folgt

$$q_{(0,0),i}^{(r,s)} = \phi_i^{(r,s)}(0, 0) = A_{(0,0)}^{(r,s)}(0, 0; m_i, n_i, p_i, q_i) = 0 \quad \text{für } s \neq r, i = 1, \dots, 4$$

und aufgrund der Beziehung

$$A_{(0,0)}^{(r,s)}(0, 0; m, n, p, q) = -A_{(0,0)}^{(r,s)}(0, 0; n, m, p, q) = -A_{(0,0)}^{(r,s)}(0, 0; m, n, q, p)$$

ergibt sich

$$q_{(0,0),i}^{(r,r)} = A_{(0,0)}^{(r,r)}(0, 0; x_{11}^{(r)}, x_{21}^{(r)}, x_{12}^{(r)}, x_{42}^{(r)}) =: q_{(0,0)}^{(r,r)}.$$

Für $\alpha = (0, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,r)} a_{\alpha,i}^{(r,r)} &= q_{\alpha}^{(r,r)} \sum_{i=1}^4 a_{\alpha,i}^{(r,r)} \\
&= q_{\alpha}^{(r,r)} (a_{[0,0]}^{\alpha} + a_{[0,-\bar{h}_2]}^{\alpha} + a_{[-\bar{h}_1,0]}^{\alpha} + a_{[-\bar{h}_1,-\bar{h}_2]}^{\alpha}) \\
&= q_{\alpha}^{(r,r)} \left(\int_0^{\bar{h}_1} \int_0^{\bar{h}_2} R(u_1, u_2) du_2 du_1 + \int_0^{\bar{h}_1} \int_{-\bar{h}_2}^0 R(u_1, u_2) du_2 du_1 \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\bar{h}_1}^0 \int_0^{\bar{h}_2} R(u_1, u_2) du_2 du_1 + \int_{-\bar{h}_1}^0 \int_{-\bar{h}_2}^0 R(u_1, u_2) du_2 du_1 \right) \\
&= q_{\alpha}^{(r,r)} \int_{-\frac{h_1}{\varepsilon_1} - \frac{h_2}{\varepsilon_2}}^{\frac{h_1}{\varepsilon_1}} \int_{-\frac{h_2}{\varepsilon_2}}^{\frac{h_2}{\varepsilon_2}} R(u_1, u_2) du_2 du_1 = \frac{q_{\alpha}^{(r,r)}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \int_{-h_1}^{h_1} \int_{-h_2}^{h_2} R\left(\frac{u_1}{\varepsilon_1}, \frac{u_2}{\varepsilon_2}\right) du_2 du_1.
\end{aligned}$$

Damit lässt sich der nullte Entwicklungsterm der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ in der Form

$$\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 G_h(t_1) \sum_{r=1}^{R_h} \left[(C^{(r)})^T q_{(0,0)}^{(r,r)} \sum_{i=1}^4 a_{(0,0),i}^{(r,r)} C^{(s)} \right] G_h^T(t_2)$$

mit

$$q_{(0,0)}^{(r,r)} = \int_{T^{(r)}} \underline{p}^{(r)}(y_1, y_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^4 a_{(0,0),i}^{(r,r)} = \int_{-\frac{h_1}{\varepsilon_1} - \frac{h_2}{\varepsilon_2}}^{\frac{h_1}{\varepsilon_1}} \int_{-\frac{h_2}{\varepsilon_2}}^{\frac{h_2}{\varepsilon_2}} R(u_1, u_2) du_2 du_1$$

darstellen.

Der Entwicklungsterm erster Ordnung $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}_1$ von $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ wird bestimmt durch

$$\sum_{|\alpha|=1} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha!} \left(\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} \right),$$

wobei sich die Summe über $\alpha = (1, 0)$ und $\alpha = (0, 1)$ erstreckt. Für $\alpha = (1, 0)$ und $i = 1$ folgt mit Hilfe von (4.28)-(4.31)

$$q_{(1,0),1}^{(r,s)} = A_{(1,0)}(0, 0; x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)}, x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}) + B_{(1,0)}(0, 0; x_{21}^{(r)}, x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)})$$

und weiterhin

$$q_{(1,0),1}^{(r,s)} = 0 \text{ für } s \notin \{r, Nr\}.$$

Aus diesen und ähnlichen Überlegungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
q_{(1,0),1}^{(r,s)} &= q_{(1,0),2}^{(r,s)} = 0 \text{ für } s \notin \{r, Nr\}, \\
q_{(1,0),3}^{(r,s)} &= q_{(1,0),4}^{(r,s)} = 0 \text{ für } s \notin \{r, Nl\}, \\
q_{(0,1),1}^{(r,s)} &= q_{(0,1),3}^{(r,s)} = 0 \text{ für } s \notin \{r, No\}, \\
q_{(0,1),2}^{(r,s)} &= q_{(0,1),4}^{(r,s)} = 0 \text{ für } s \notin \{r, Nu\}.
\end{aligned}$$

Im Fall $\alpha = (1, 0)$ und $s = Nr$ ist $q_{\alpha,i}^{(r,s)} = 0$ für $i = 3, 4$ und mit

$$\begin{aligned} q_{\alpha,1}^{(r,s)} &= A_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)}, x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}) + B_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; x_{21}^{(r)}, x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}) \\ &= B_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; x_{21}^{(r)}, x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}), \\ q_{\alpha,2}^{(r,s)} &= -A_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)}, x_{42}^{(s)}, x_{12}^{(r)}) - B_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; x_{21}^{(r)}, x_{42}^{(s)}, x_{12}^{(r)}) \\ &= -B_{\alpha}^{(r,s)}(0, 0; x_{21}^{(r)}, x_{42}^{(s)}, x_{12}^{(r)}) \end{aligned}$$

folgt wegen

$$\int_{x_{12}^{(s)}}^{x_{42}^{(r)}} \underline{p}^{(r)}(x_{21}^{(r)}, y_2) (\underline{p}^{(s)})^T(x_{21}^{(r)}, y_2) dy_2 = - \int_{x_{42}^{(s)}}^{x_{12}^{(r)}} \underline{p}^{(r)}(x_{21}^{(r)}, y_2) (\underline{p}^{(s)})^T(x_{21}^{(r)}, y_2) dy_2$$

die Gleichheit $q_{\alpha,1}^{(r,s)} = q_{\alpha,2}^{(r,s)}$. Durch Anwendung dieser Überlegungen auf den Fall $s = Nr$ ergibt sich zusammenfassend für $\alpha = (1, 0)$, $s \neq r$

$$\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} = \begin{cases} q_{\alpha,1}^{(r,Nr)} (a_{[-\bar{h}_1,0]}^{\alpha} + a_{[-\bar{h}_1,-\bar{h}_2]}^{\alpha}) & s = Nr \\ q_{\alpha,3}^{(r,Nl)} (a_{[0,0]}^{\alpha} + a_{[0,-\bar{h}_2]}^{\alpha}) & s = Nl \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ähnliche Berechnungen führen für $\alpha = (0, 1)$, $s \neq r$ auf

$$\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} = \begin{cases} q_{\alpha,1}^{(r,No)} (a_{[0,-\bar{h}_2]}^{\alpha} + a_{[-\bar{h}_1,-\bar{h}_2]}^{\alpha}) & s = No \\ q_{\alpha,2}^{(r,Nu)} (a_{[0,0]}^{\alpha} + a_{[-\bar{h}_1,0]}^{\alpha}) & s = Nu \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Entwicklungsterm erster Ordnung kann somit unter Hinzunahme des Falls $s = r$ berechnet werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h(t_2)\}_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 G_h(t_1) \left[\sum_{r=1}^{R_h} (C^{(r)})^T \left(\sum_{|\alpha|=1} \varepsilon^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,r)} a_{\alpha,i}^{(r,r)} \right) C^{(r)} \right. \right. \\ &\quad + \varepsilon_1 q_{(1,0),1}^{(r,Nr)} \left(a_{[-\bar{h}_1,0]}^{(1,0)} + a_{[-\bar{h}_1,-\bar{h}_2]}^{(1,0)} \right) C^{(Nr)} \\ &\quad + \varepsilon_1 q_{(1,0),3}^{(r,Nl)} \left(a_{[0,0]}^{(1,0)} + a_{[0,-\bar{h}_2]}^{(1,0)} \right) C^{(Nl)} \\ &\quad + \varepsilon_2 q_{(0,1),1}^{(r,No)} \left(a_{[0,-\bar{h}_2]}^{(0,1)} + a_{[-\bar{h}_1,-\bar{h}_2]}^{(0,1)} \right) C^{(No)} \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon_2 q_{(0,1),2}^{(r,Nu)} \left(a_{[0,0]}^{(0,1)} + a_{[-\bar{h}_1,0]}^{(0,1)} \right) C^{(Nu)} \right) \right] G_h^T(t_2). \end{aligned}$$

Entsprechende Ergebnisse lassen sich für Entwicklungsterme höherer Ordnung angeben, wobei zu beachten ist, dass aufgrund der Bedingungen A_2 , B_3 , C_3 und H_3 in den Gleichungen (4.28)-(4.31) die Terme $q_{\alpha,i}^{(r,s)} := D^{\alpha} \phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2)|_{z_1=z_2=0}$, $i = 1, \dots, 4$ für $|\alpha| > 6$ verschwinden. Damit ist die in (4.26) gegebene asymptotische Entwicklung für $|\alpha| = 6$ exakt.

4.1.2 Direkte Berechnung für bilineare Ansatzfunktionen

Ausgehend von der Darstellung der Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ in der Form (4.22), was eine gleichmäßige Diskretisierung des Gebietes D erfordert, sollen in diesem Abschnitt die auf

$$\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z_1, z_2) = \int_m^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 \underline{p}^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2)$$

basierenden matrixwertigen Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$ (vgl. (4.17) bis (4.20)) für den Fall bilinearer Ansatzfunktionen explizit berechnet werden. Die finiten Elemente $T^{(r)}$, $r \in \psi_h$ werden wieder als Rechtecke vorausgesetzt. Nach Kapitel 2 sind die Ansatzfunktionen $\{p_i\}_{i \in \chi_h}$ durch Elementansatzfunktionen $\{p_\alpha^{(r)}\}_{\alpha=1,\dots,4}$, welche über den finiten Elementen $T^{(r)}$ definiert sind und diese wiederum durch Formfunktionen $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,4}$, welche über dem Referenzviereck

$$\hat{T} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : 0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1\}$$

definiert sind, gegeben. Im Falle bilinearer Ansatzfunktionen besitzen die Formfunktionen die Gestalt (vgl. [21])

$$(\varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2))_{\alpha=1,\dots,4} := \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1(\xi_1)\hat{\varphi}_1(\xi_2) \\ \hat{\varphi}_2(\xi_1)\hat{\varphi}_1(\xi_2) \\ \hat{\varphi}_2(\xi_1)\hat{\varphi}_2(\xi_2) \\ \hat{\varphi}_1(\xi_1)\hat{\varphi}_2(\xi_2) \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_1(z) = 1 - z, \quad \hat{\varphi}_2(z) = z. \quad (4.32)$$

Aufgrund der gleichmäßigen Diskretisierung des Gebietes D mit Rechtecken ergibt sich die Transformationsvorschrift (2.9) für die Abbildung des Referenzvierecks auf das finite Element $T^{(s)}$ zu (vgl. Abb. 4.6)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11}^{(s)} \\ x_{12}^{(s)} \end{bmatrix}.$$

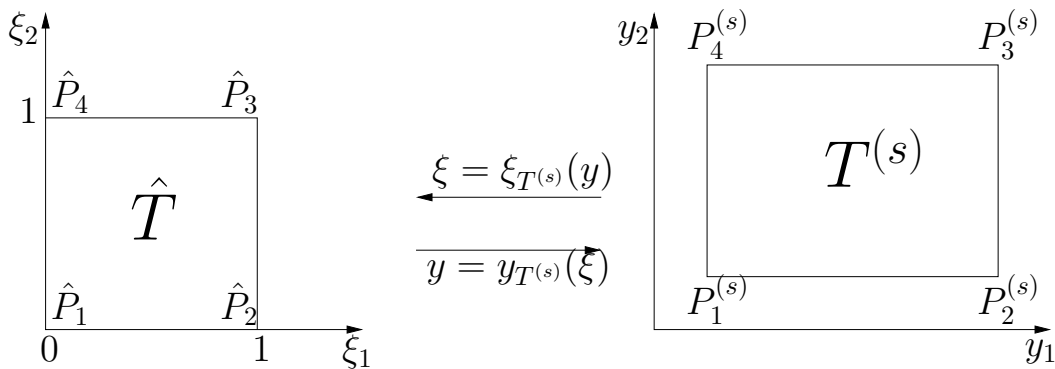


Abbildung 4.6: Abbildungen zwischen dem Referenzviereck $\hat{T}$ und einem beliebigen Rechteck $T^{(s)}$ der Vernetzung mit $P_i^{(s)} = (x_{i1}^{(s)}, x_{i2}^{(s)})$

Damit gilt

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1 \xi_1 + x_{11}^{(s)}, & y_2 &= h_2 \xi_2 + x_{12}^{(s)} & \text{bzw.} \\ \xi_1 &= {}^s\xi_1(y_1) = \frac{1}{h_1}(y_1 - x_{11}^{(s)}), & \xi_2 &= {}^s\xi_2(y_2) = \frac{1}{h_2}(y_2 - x_{12}^{(s)}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

also $p_\alpha^{(s)}(y_1, y_2) = \varphi_\alpha({}^s\xi_1(y_1), {}^s\xi_2(y_2))$. Ebenso folgt

$$p_\alpha^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) = \varphi_\alpha({}^r\xi_1(y_1 + z_1), {}^r\xi_2(y_2 + z_2)). \quad (4.34)$$

Zur vereinfachten Schreibweise wird

$$\xi_1 = {}^s\xi_1(y_1), \quad \xi_2 = {}^s\xi_2(y_2) \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_1 = {}^r\xi_1(y_1 + z_1), \quad \bar{\xi}_2 = {}^r\xi_2(y_2 + z_2)$$

vereinbart. Für den Integranden $I := \underline{p}^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2)(\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2)$ des Doppelintegrals $\phi_{[m,n,p,q]}^{(r,s)}$ ergibt sich damit

$$I = \begin{bmatrix} (1 - \bar{\xi}_1)(1 - \bar{\xi}_2) \\ \bar{\xi}_1(1 - \bar{\xi}_2) \\ \bar{\xi}_1\bar{\xi}_2 \\ (1 - \bar{\xi}_1)\bar{\xi}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \xi_1(1 - \xi_2) \\ \xi_1\xi_2 \\ (1 - \xi_1)\xi_2 \end{bmatrix}^T.$$

Mit Hilfe der von (y_k, z_k) , $k = 1, 2$ abhängigen Funktionen

$$a_k := (1 - \bar{\xi}_k)(1 - \xi_k), \quad b_k := (1 - \bar{\xi}_k)\xi_k, \quad c_k := \bar{\xi}_k(1 - \xi_k), \quad d_k := \bar{\xi}_k\xi_k$$

und

$$A_k := \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix} \quad \text{für } k = 1, 2$$

lässt sich der Integrand darstellen als

$$I = \begin{bmatrix} a_2a_1 & a_2b_1 & b_2b_1 & b_2a_1 \\ a_2c_1 & a_2d_1 & b_2d_1 & b_2c_1 \\ c_2c_1 & c_2d_1 & d_2d_1 & d_2c_1 \\ c_2a_1 & c_2b_1 & d_2b_1 & d_2a_1 \end{bmatrix} = P(A_1(y_1, z_1) \otimes A_2(y_2, z_2))P. \quad (4.35)$$

Dabei wurde $A_1 \otimes A_2$ als $[4 \times 4]$ Matrix der Form $A_1 \otimes A_2 = \begin{bmatrix} a_2A_1 & b_2A_1 \\ c_2A_1 & d_2A_1 \end{bmatrix}$ vereinbart.

Die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist für die Vertauschung der dritten und vierten Zeile bzw. Spalte verantwortlich. Damit lässt sich das zu berechnende Doppelintegral $\phi_{[m,n,p,q]}^{(r,s)}$ darstellen als

$$\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z_1, z_2) = P \left(\int_m^{n-z_1} A_1(y_1, z_1) dy_1 \otimes \int_p^{q-z_2} A_2(y_2, z_2) dy_2 \right) P. \quad (4.36)$$

Die Funktionen $\phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2)$, $i = 1, \dots, 4$ ergeben sich dann aus

$$\int_m^{n-z_1} A_1(y_1, z_1) dy_1 \quad \text{für } (m, n) \in \{(x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)}), (x_{21}^{(s)}, x_{11}^{(r)})\} \quad \text{und} \\ \int_p^{q-z_2} A_2(y_2, z_2) dy_2 \quad \text{für } (p, q) \in \{(x_{12}^{(s)}, x_{42}^{(r)}), (x_{42}^{(s)}, x_{12}^{(r)})\}.$$

Aus den Gleichungen (4.33) und (4.34) folgt

$$h_1 \xi_1 = y_1 - x_{11}^{(s)} \quad \text{und} \quad h_1 \bar{\xi}_1 = y_1 + z_1 - x_{11}^{(r)}.$$

Mit Hilfe der Terme (vgl. (4.23))

$$\eta_1^{(r,s)}(z_1) := \frac{1}{h_1}(z_1 - k_1^{(r,s)} h_1), \quad k_1^{(r,s)} h_1 := x_{11}^{(r)} - x_{11}^{(s)}$$

lässt sich $h_1 \bar{\xi}_1$ darstellen als

$$h_1 \bar{\xi}_1 = y_1 - x_{11}^{(s)} + z_1 - x_{11}^{(r)} + x_{11}^{(s)} = h_1 \xi_1 + h_1 \eta_1^{(r,s)}(z_1) \quad \text{und damit} \quad \bar{\xi}_1 = \xi_1 + \eta_1^{(r,s)}(z_1).$$

Mit der Variablensubstitution $h_1 \xi_1 = y_1 - x_{11}^{(s)}$ ergibt sich

$$\int_m^{n-z_1} A_1(y_1, z_1) dy_1 = h_1 \int_{\frac{1}{h_1}(m-x_{11}^{(s)})}^{\frac{1}{h_1}(n-z_1-x_{11}^{(s)})} \begin{bmatrix} (1-\xi_1-\eta)(1-\xi_1) & (1-\xi_1-\eta)\xi_1 \\ (\xi_1+\eta)(1-\xi_1) & (\xi_1+\eta)\xi_1 \end{bmatrix} d\xi_1$$

schreibt man abkürzend $\eta = \eta(z_1)$ für $\eta_1^{(r,s)}(z_1)$. Einfache Berechnungen führen für $(m, n) = (x_{11}^{(s)}, x_{21}^{(r)})$ auf

$$\begin{aligned} B_1(z_1, h_1, k_1^{(r,s)}) &:= h_1 \int_0^{1-\eta} \begin{bmatrix} (1-\xi_1-\eta)(1-\xi_1) & (1-\xi_1-\eta)\xi_1 \\ (\xi_1+\eta)(1-\xi_1) & (\xi_1+\eta)\xi_1 \end{bmatrix} d\xi_1 \\ &= \frac{h_1}{6}(1-\eta) \begin{bmatrix} (1-\eta)(2+\eta) & (1-\eta)^2 \\ \eta^2 + 4\eta + 1 & (1-\eta)(2+\eta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Der Fall $(m, n) = (x_{21}^{(s)}, x_{11}^{(r)})$ liefert

$$\begin{aligned} B_2(z_1, h_1, k_1^{(r,s)}) &:= h_1 \int_1^{-\eta} \begin{bmatrix} (1-\xi_1-\eta)(1-\xi_1) & (1-\xi_1-\eta)\xi_1 \\ (\xi_1+\eta)(1-\xi_1) & (\xi_1+\eta)\xi_1 \end{bmatrix} d\xi_1 \\ &= \frac{h_1}{6}(1+\eta) \begin{bmatrix} -(1+\eta)(2-\eta) & -\eta^2 + 4\eta - 1 \\ -(1+\eta)^2 & -(1+\eta)(2-\eta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit $\eta = \eta_1^{(r,s)}(z_1)$. Die Substitution $h_2 \xi_2 = y_2 - x_{12}^{(s)}$ in Verbindung mit

$$\bar{\xi}_2 = \xi_2 + \eta_2^{(r,s)}(z_2), \quad \eta_2^{(r,s)}(z_2) := \frac{1}{h_2}(z_2 - k_2^{(r,s)} h_2), \quad k_2^{(r,s)} h_2 := x_{12}^{(r)} - x_{12}^{(s)}$$

ergibt

$$\int_p^{q-z_2} A_2(y_2, z_2) dy_2 = \begin{cases} B_1(z_2, h_2, k_2^{(r,s)}) & \text{für } p = x_{12}^{(s)}, q = x_{42}^{(r)} \\ B_2(z_2, h_2, k_2^{(r,s)}) & \text{für } p = x_{42}^{(s)}, q = x_{12}^{(r)}. \end{cases}$$

Schließlich lassen sich die matrixwertigen Funktionen $\phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2)$ mit Hilfe der Darstellung (4.36) schreiben als

$$\begin{aligned} \phi_1^{(r,s)}(z_1, z_2) &= P[B_1(z_1, h_1, k_1^{(r,s)}) \otimes B_1(z_2, h_2, k_2^{(r,s)})]P, \\ \phi_2^{(r,s)}(z_1, z_2) &= -P[B_1(z_1, h_1, k_1^{(r,s)}) \otimes B_2(z_2, h_2, k_2^{(r,s)})]P, \\ \phi_3^{(r,s)}(z_1, z_2) &= -P[B_2(z_1, h_1, k_1^{(r,s)}) \otimes B_1(z_2, h_2, k_2^{(r,s)})]P, \\ \phi_4^{(r,s)}(z_1, z_2) &= P[B_2(z_1, h_1, k_1^{(r,s)}) \otimes B_2(z_2, h_2, k_2^{(r,s)})]P. \end{aligned}$$

Die Elemente dieser 4×4 Matrizen besitzen die Form

$$\alpha(z_1, z_2) = (a_1 z_1^3 + b_1 z_1^2 + c_1 z_1 + d_1)(a_2 z_2^3 + b_2 z_2^2 + c_2 z_2 + d_2)$$

und die Summanden der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$, gegeben durch die Gleichung (4.22), lassen sich nunmehr nur noch als Doppelintegrale der Gestalt

$$\int_{m^{(r,s)}}^{n^{(r,s)}} \int_{p^{(r,s)}}^{q^{(r,s)}} \alpha(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) R(u_1, u_2) du_2 du_1$$

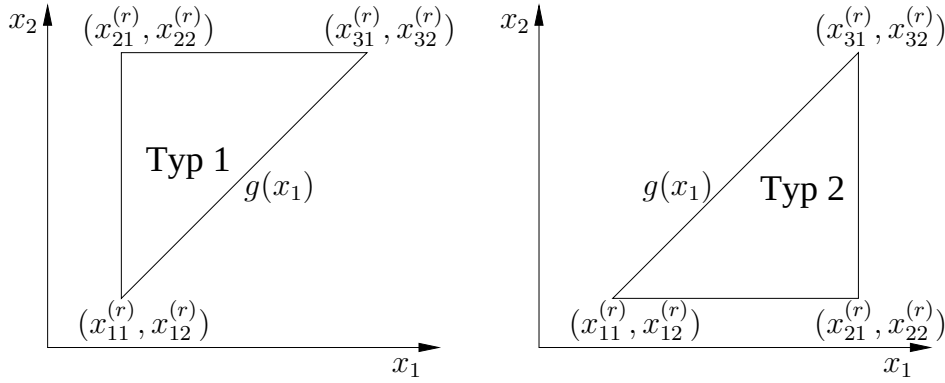
angeben.

4.1.3 Explizite Berechnung

In diesem Abschnitt wird die Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ ausgehend von der Darstellung (4.14) als Summe von Integralen über den finiten Elementen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= G_h(t_1) \sum_{r,s=1}^{R_h} \int_{T^{(r)}} \int_{T^{(s)}} (C^{(r)})^T \underline{p}^{(r)}(x_1, x_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) C^{(s)} \\ &\quad R_{\varepsilon \overline{u}_0 \varepsilon \overline{u}_0}(y_1 - x_1, y_2 - x_2) dy_2 dy_1 dx_2 dx_1 G_h^T(t_2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

für spezielle Arten der Vernetzung explizit bestimmt. Im Gegensatz zu den in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 betrachteten Verfahren der asymptotischen Entwicklung und der direkten Berechnung werden die Vierfachintegrale nicht in Doppelintegrale transformiert, sondern unter Ausnutzung der ε -Korreliertheit der Anfangsbedingung explizit berechnet. Die finiten Elemente $T^{(r)}$ sind dabei als Rechtecke oder Dreiecke gewählt. Allerdings wird bei einer Zerlegung des Gebietes D mit Hilfe von Dreiecken vorausgesetzt, dass diese zwei achsenparallele Seiten besitzen, so dass nur die in Abb. 4.7 dargestellten Grundtypen von finiten Elementen auftreten. Weiterhin kann die Annahme der gleichmäßigen Diskretisierung fallen gelassen werden.

Abbildung 4.7: Lokale Nummerierung der Dreieck-Elemente $T^{(r)}$

Aufgrund der angenommenen ε -Korreliertheit der zufälligen Anfangstemperatur ${}^\varepsilon\bar{u}_0$ besitzt deren Korrelationsfunktion für $x = (x_1, x_2) \in T^{(r)}$ die Eigenschaft

$$R_{{}^\varepsilon\bar{u}_0}({}^\varepsilon\bar{u}_0)(y - x) = 0 \text{ für } |y_1 - x_1| \geq \varepsilon_1 \vee |y_2 - x_2| \geq \varepsilon_2.$$

Somit sind die Integrale über den finiten Elementen $T^{(s)}$ für festes $x \in T^{(r)}$ höchstens dann von null verschieden, wenn $T^{(s)} \cap D_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ mit

$$D_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{D} \cap (x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1) \times (x_2 - \varepsilon_2, x_2 + \varepsilon_2)\}.$$

Zuerst sei die Zerlegung des Gebietes $\mathbf{D}$ mittels Rechtecken betrachtet. Die lokale Nummerierung und die Bezeichnung der Knotenpunkte der finiten Elemente wird gemäß Abb. 4.1 gewählt.

Bei festem $r \in \psi_h$ ist die Summe über s in Gleichung (4.37) aufgrund der ε -Korreliertheit der Anfangstemperatur nur über solche finiten Elemente $T^{(s)}$ zu erstrecken, für welche $s \in M_{R,\varepsilon}^{(r)}$ erfüllt ist. Dabei ist die Menge $M_{R,\varepsilon}^{(r)}$ definiert durch

$$M_{R,\varepsilon}^{(r)} := \{s \in \psi_h : (x_{11}^{(s)} \vee x_{21}^{(s)} \in (x_{11}^{(r)} - \varepsilon_1, x_{11}^{(r)} + \varepsilon_1)) \wedge (x_{12}^{(s)} \vee x_{22}^{(s)} \in (x_{12}^{(r)} - \varepsilon_2, x_{12}^{(r)} + \varepsilon_2))\}.$$

Somit ergibt sich aus Gleichung (4.37) für die numerische Berechnung die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= G_h(t_1) \sum_{r=1}^{R_h} \sum_{s \in M_{R,\varepsilon}^{(r)}} \int_{T^{(r)}} \int_{T^{(s)}} (C^{(r)})^T \underline{p}^{(r)}(x_1, x_2) (\underline{p}^{(s)})^T(y_1, y_2) C^{(s)} \\ &\quad R_{{}^\varepsilon\bar{u}_0}({}^\varepsilon\bar{u}_0)(y_1 - x_1, y_2 - x_2) dy_2 dy_1 dx_2 dx_1 G_h^T(t_2). \end{aligned}$$

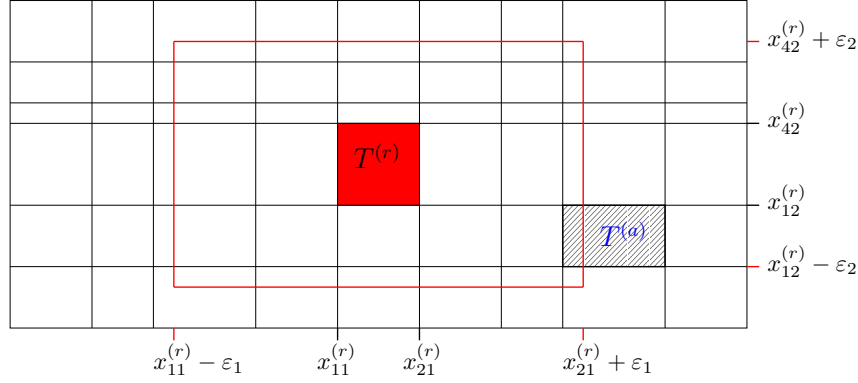


Abbildung 4.8: Integrationsgebiet für festes $r \in \psi_h$ bezüglich $s \in M_{R,\varepsilon}^{(r)}$

Betrachtet man Abb. 4.8, so ist $a \in M_{R,\varepsilon}^{(r)}$ und für $y \in T^{(a)} \setminus \{y : y_1 < x_{21}^{(r)} + \varepsilon_1\}$ gilt

$$|x_1 - y_1| > \varepsilon_1 \text{ für alle } x \in T^{(r)}, \text{ woraus } R_{\varepsilon \bar{u}_0 \varepsilon \bar{u}_0}(y - x) = 0$$

folgt.

Bei einer Zerlegung des Gebietes D mit Dreiecken erfolgt die lokale Nummerierung und die Bezeichnung der Knotenpunkte gemäß Abb. 4.7. Ähnlich dem Fall von Rechteck-Elementen ist bei festem $r \in \psi_h$ die Summe über s in Gleichung (4.37) aufgrund der ε -Korreliertheit der Anfangstemperatur nur über alle $s \in M_{D,\varepsilon}^{(r)}$ mit

$$M_{D,\varepsilon}^{(r)} := \{s \in \psi_h : (x_{11}^{(s)} \vee x_{31}^{(s)} \in J_1^{(r)}) \wedge (x_{12}^{(s)} \vee x_{32}^{(s)} \in J_2^{(r)})\} \quad \text{wobei}$$

$$J_1^{(r)} = (x_{11}^{(r)} - \varepsilon_1, x_{31}^{(r)} + \varepsilon_1), \quad J_2^{(r)} = (x_{12}^{(r)} - \varepsilon_2, x_{32}^{(r)} + \varepsilon_2)$$

zu erstrecken (vgl. Abb 4.9).

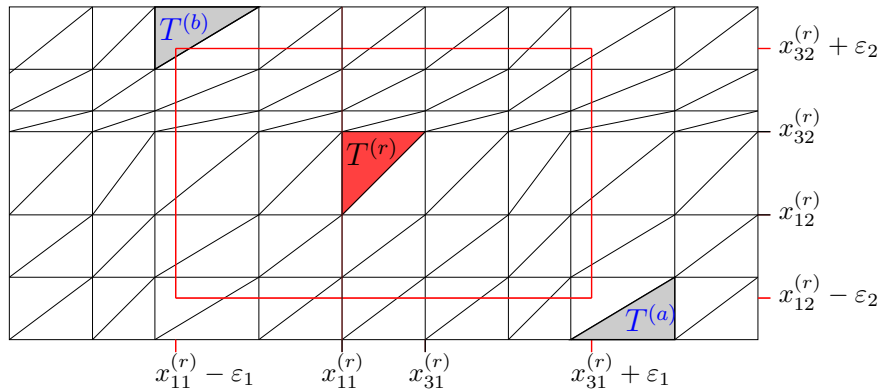


Abbildung 4.9: Integrationsgebiet für festes $r \in \hat{\chi}_h$ bezüglich $s \in M_{D,\varepsilon}^{(r)}$

Für $T^{(a)}$ gilt $a \in M_{D,\varepsilon}^{(r)}$, da $x_{11}^{(a)} \in J_1^{(r)}$, $x_{32}^{(a)} \in J_2^{(r)}$, aber $R_{\varepsilon \bar{u}_0 \varepsilon \bar{u}_0}(y - x) = 0$ für $x \in T^{(r)}$, $y \in T^{(a)}$. Die finiten Elemente $T^{(a)}$ und $T^{(b)}$ bedürfen also einer genaueren Betrachtung. Über $s = a$ muss nicht summiert werden, wohingegen $s = b \in M_{D,\varepsilon}^{(r)}$ in die Summation

aufzunehmen ist. Eine einfache Überlegung zeigt (vgl. Abb. 4.10), dass im Falle eines solchen finiten Elementes $T^{(a)}$ dieses nur betrachtet werden muss, wenn

$$g(x_{31}^{(r)} + \varepsilon_1) > x_{12}^{(r)} - \varepsilon_2 \quad \text{mit} \quad g(x_1) = \frac{x_{32}^{(a)} - x_{12}^{(a)}}{x_{31}^{(a)} - x_{11}^{(a)}}(x_1 - x_{11}^{(a)}) + x_{12}^{(a)}.$$

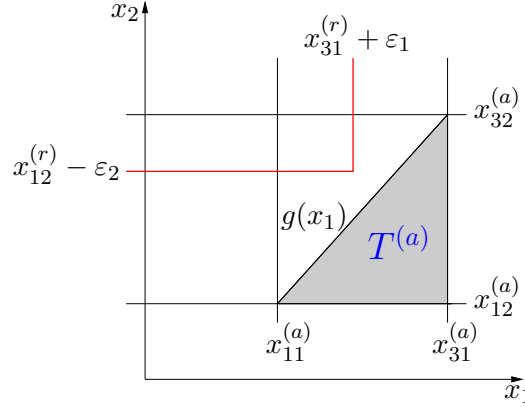


Abbildung 4.10: Beispiel eines finiten Elementes am Rand des Korrelationsgebietes

4.2 Berechnung der Korrelationsfunktion über die Fourier-Methode

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt das RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung durch die Finite-Elemente-Methode gelöst und darauf aufbauend die ersten und zweiten Momente berechnet wurden, soll nun die Fourier-Methode im Vordergrund stehen. Deren Anwendung wird in dieser Arbeit am Beispiel eines Rechteckgebietes (vgl. Abb. 3.1) dargestellt. Für die Betrachtung anderer Geometrien sei beispielsweise auf [34] verwiesen. Mit dem gewählten Gebiet $D = [-R, R] \times [0, H]$ wird das RAWP (1.17) wie folgt konkretisiert

$$\bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} = 0, \quad x \in D, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \quad (4.38)$$

$$\text{AB: } \bar{u}(0, x, \omega) = {}^\varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) \quad x \in \bar{D} \quad (4.39)$$

$$\text{RB: } \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \right|_{(\partial D)_2} = 0 \quad (4.40)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha_i \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,i}} = 0, \quad i = 2, 3, 4. \quad (4.41)$$

Die homogene Neumann-Bedingung (4.40) am Rand $(\partial D)_2$ beschreibt wieder den Fall der Wärmeisolation und an den Rändern $(\partial D)_{3,i}$ liegen Robin-Bedingungen mit den Wärmeübergangszahlen α_i , $i = 2, 3, 4$ an.

Wie in Kapitel 3.1 beschrieben sucht nun die Fourier-Methode eine Lösung des RAWP (4.38)-(4.41) in Form einer unendliche Reihe

$$\bar{u}(t, x, \omega) = \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}(t, \omega) f_{kl}(x). \quad (4.42)$$

Die Funktionen f_{kl} stellen dabei die Eigenfunktionen des negativen Laplace-Operators $-\Delta$ und der gegebenen homogenen Randbedingungen (4.40) und (4.41) dar und ergeben sich als Lösung des Eigenwertproblems

$$RB : \quad \begin{aligned} -\Delta f &= \mu f \\ \frac{\partial f}{\partial N} \Big|_{(\partial D)_2} &= 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial N} + \alpha_i f \right) \Big|_{(\partial D)_{3,i}} = 0, \quad i = 2, 3, 4 \end{aligned}$$

mit dem dazugehörigen Eigenwert μ . Die Doppelindizierung in (4.42) ist durch die Wahl des Gebietes D als zweidimensionales Rechteckgebiet begründet. Nach Satz 3.2 bildet das System der Eigenfunktionen $\{f_{kl}\}_{k,l=1}^\infty$ mit geeignet gewählter Normierung ein Orthornormalsystem im Raum $L_2(D)$. Die zeitabhängigen Koeffizienten c_{kl} , $k, l = 1, 2, \dots$ der Lösungsdarstellung (4.42) werden als Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} c'_{kl}(t, \omega) + \lambda \mu_{kl} c_{kl}(t, \omega) &= 0 \\ AB : \quad c_{kl}(0, \omega) &= (\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega), f_{kl}) =: d_{kl}(\omega) \end{aligned} \quad (4.43)$$

bestimmt. Die Terme $(\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega), f_{kl})$, $k, l = 1, \dots$ stehen für die Koeffizienten der Reihenentwicklung der Anfangsbedingung nach den Eigenfunktionen f_{kl}

$$\varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) = \sum_{k,l=1}^{\infty} (\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega), f_{kl}) f_{kl}(x). \quad (4.44)$$

Aufgrund der am Anfang des Kapitels gestellten Voraussetzungen an das zufällige Feld $\varepsilon \bar{u}_0$ konvergiert die Reihe (4.44) f.s. im $L_2(D)$. Weiter erfüllen die Eigenfunktionen f_{kl} per Definition die gestellten Randbedingungen. Da aber das zufällige Feld $\varepsilon \bar{u}_0$ als homogenes ε -korreliertes Feld vorausgesetzt ist, erfüllt es die Randbedingungen i.a. nicht. In die weiteren Betrachtungen geht allerdings nicht $\varepsilon \bar{u}_0$ direkt ein, sondern dessen Entwicklung nach den Eigenfunktionen $\sum_{k,l=1}^{\infty} (\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega), f_{kl}) f_{kl}(x)$, welche die Randbedingungen wiederum erfüllt. Durch diesen Ansatz werden also die Rand- und Anfangsbedingungen verträglich gemacht, wobei aber die stochastischen Eigenschaften der Entwicklung (4.44) in einer kleinen Umgebung des Randes ∂D sich von denen des zufälligen Feldes $\varepsilon \bar{u}_0$ der Anfangstemperatur unterscheiden. So kann in dieser kleinen Umgebung die Homogenität oder ε -Korreliertheit der Entwicklung nicht gewährleistet werden.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe (4.43) besitzt dann die Gestalt

$$c_{kl}(t, \omega) = e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) = e^{-\lambda \mu_{kl} t} \int_D \varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) f_{kl}(x) dx \quad (4.45)$$

und ist somit in Abhängigkeit der Eigenfunktionen f_{kl} , $k, l = 1, \dots$ und den dazugehörigen Eigenwerten μ_{kl} , $k, l = 1, \dots$ gegeben. Für das Rechteckgebiet D können die Eigenfunktionen über einen Separationsansatz berechnet werden. Es gilt

$$f(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2),$$

was auf folgende zwei eindimensionale Eigenwertaufgaben

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + \mu_1 \varphi_1 &= 0 \\ RB : \quad \lambda \varphi_1'(R) + \alpha_2 \varphi_1(R) &= 0 \\ -\lambda \varphi_1'(-R) + \alpha_4 \varphi_1(-R) &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_2'' + \mu_2 \varphi_2 = 0 \\
RB: & \quad \varphi_2'(0) = 0 \\
& \quad \lambda \varphi_2'(H) + \alpha_3 \varphi_2(H) = 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

für die Eigenfunktionen φ_1 und φ_2 mit den dazugehörigen Eigenwerten μ_1 bzw. μ_2 führt. Damit ergibt sich

$$\mu_{kl} = \mu_{1k} + \mu_{2l} \quad \text{und} \quad f_{kl}(x_1, x_2) = \varphi_{1k}(x_1) \varphi_{2l}(x_2),$$

wobei die Eigenwerte μ_{1k} und μ_{2l} Lösungen der Gleichungen

$$(\lambda^2 \mu_{1k} - \alpha_2 \alpha_4) \sin(2R\sqrt{\mu_{1k}}) = \lambda \sqrt{\mu_{1k}} (\alpha_2 + \alpha_4) \cos(2R\sqrt{\mu_{1k}}), \tag{4.48}$$

$$\lambda \mu_{2l} \sin(\sqrt{\mu_{2l}} H) = \alpha_3 \sqrt{\mu_{2l}} \cos(\sqrt{\mu_{2l}} H) \tag{4.49}$$

für $k, l = 1, \dots$ darstellen (vgl. [44]). Nach Satz 3.2 sind die Eigenwerte μ_{1k} und μ_{2l} nicht negativ. Die Eigenwerte $\mu_{1k} = 0$ und $\mu_{2l} = 0$ führen allerdings nur für $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, was dem adiabatischen Fall entspricht, auf nicht triviale Lösungen der Probleme (4.46) und (4.47), d.h. auf Eigenfunktionen, welche nicht identisch null sind. (vgl. [43], [44]).

Das Verhalten der Eigenwerte μ_{1k} und μ_{2l} für $k, l \rightarrow \infty$ kann wie folgt abgeschätzt werden. Die Bestimmungsgleichung (4.49) der diskreten Werte μ_{2l} ist äquivalent zur Bestimmung der Schnittpunkte der Funktionen $\tan(\sqrt{\mu_2} H)$ und $\frac{\alpha_3}{\lambda \sqrt{\mu_2}}$ mit $\mu_2 \in \mathbb{R}_+$ (vgl. Abb. 4.11). Dabei zeigt sich, dass aufgrund der Monotonieeigenschaften der beiden betrachteten Funktionen die Schnittpunkte stets größer als die Nullstellen $\frac{(l\pi)^2}{H^2}$, $l = 1, 2, \dots$ der Funktion $\tan(\sqrt{\mu_2} H)$ sind, d.h.

$$\mu_{2l} \geq \frac{(l\pi)^2}{H^2} = l^2 \frac{\pi^2}{H^2} = O(l^2) \quad \text{für} \quad l \rightarrow \infty. \tag{4.50}$$

Analoge Überlegungen führen auf die Ordnungsbeziehung

$$\mu_{1k} \geq \frac{(k\pi)^2}{4R^2} = k^2 \frac{\pi^2}{4R^2} = O(k^2) \quad \text{für} \quad k \rightarrow \infty. \tag{4.51}$$

Die Eigenfunktionen $\varphi_{1,k}$ und $\varphi_{2,l}$ $k, l = 1, \dots$ ergeben sich als allgemeine Lösungen der Eigenwertprobleme (4.46) und (4.47) und besitzen die Form

$$\varphi_{1k}(x_1) = g_1 \sin(\sqrt{\mu_{1k}} x_1) + g_2 \cos(\sqrt{\mu_{1k}} x_1), \tag{4.52}$$

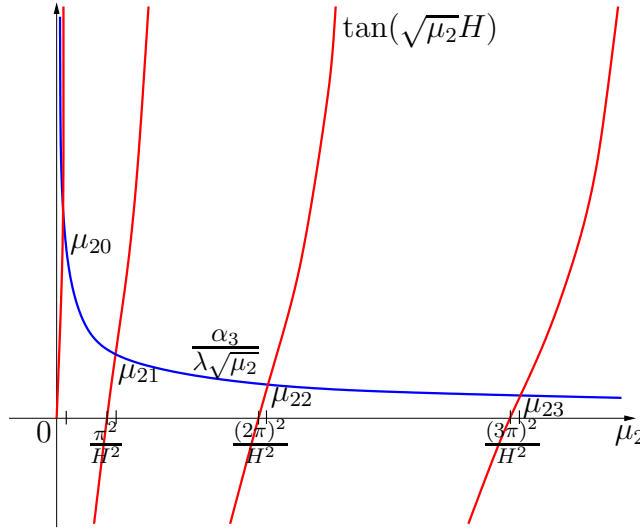
$$\varphi_{2l}(x_2) = h_1 \sin(\sqrt{\mu_{2l}} x_2) + h_2 \cos(\sqrt{\mu_{2l}} x_2). \tag{4.53}$$

Dabei bezeichnen die Koeffizienten g_1 , g_2 und h_1 , h_2 die nichttrivialen Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$A_1 \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

und

$$A_2 \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

Abbildung 4.11: Schnittpunkte der Funktionen $\tan(\sqrt{\mu_2}H)$ und $\frac{\alpha_3}{\lambda\sqrt{\mu_2}}$

mit den Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} -(\lambda\sqrt{\mu_{1k}} \cos(\sqrt{\mu_{1k}}R) + \alpha_4 \sin(\sqrt{\mu_{1k}}R)) & (\alpha_4 \cos(\sqrt{\mu_{1k}}R) - \lambda\sqrt{\mu_{1k}} \sin(\sqrt{\mu_{1k}}R)) \\ (\lambda\sqrt{\mu_{1k}} \cos(\sqrt{\mu_{1k}}R) + \alpha_2 \sin(\sqrt{\mu_{1k}}R)) & (\alpha_2 \cos(\sqrt{\mu_{1k}}R) - \lambda\sqrt{\mu_{1k}} \sin(\sqrt{\mu_{1k}}R)) \end{bmatrix}$$

und

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu_{2l}} & 0 \\ (\lambda\sqrt{\mu_{2l}} \cos(\sqrt{\mu_{2l}}H) + \alpha_3 \sin(\sqrt{\mu_{2l}}H)) & (-\lambda\sqrt{\mu_{2l}} \sin(\sqrt{\mu_{2l}}H) + \alpha_3 \cos(\sqrt{\mu_{2l}}H)) \end{bmatrix}$$

(vgl. [44]). Die Eigenfunktionen $\varphi_{1k}(x_1)$ und $\varphi_{2l}(x_2)$ ergeben sich als orthonormierte Lösungen von (4.54) und (4.55).

Zusammenfassend liefert die Fourier-Methode folgende Lösung für das betrachtete RAWP (4.38)-(4.41)

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x, \omega) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}(t, \omega) f_{kl}(x) = \sum_{k,l=1}^{\infty} e^{-\lambda\mu_{kl}t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(x) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} e^{-\lambda\mu_{kl}t} d_{kl}(\omega) \varphi_{1k}(x_1) \varphi_{2l}(x_2), \end{aligned} \quad (4.56)$$

wobei die Reihe f.s. im L_2 -Sinn konvergiert. Mit der zusätzlichen Forderungen

$$\mathbf{E} \|\bar{u}(t, \cdot)\|^2 < \infty, \quad \text{d.h.} \quad \int_{\Omega} \|\bar{u}(t, \cdot, \omega)\|^2 P(d\omega) < \infty \quad (4.57)$$

$$\text{mit } \|\bar{u}(t, \cdot, \omega)\|^2 = \int_D \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} e^{-\lambda\mu_{kl}t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(x) \right)^2 dx,$$

$$\mathbf{E} \|\bar{u}_0(x, \cdot)\|^2 < \infty \quad (4.58)$$

ergibt sich auch die L_2 -Konvergenz der Reihe

$$\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)\} = \sum_{k,l=1}^{\infty} e^{-\lambda\mu_{kl}t} \mathbf{E}\{d_{kl}\} f_{kl}(x).$$

Zum Beweis sei

$$\begin{aligned}\xi_n(t, \omega) &:= \int_D \left[\sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(x) - \bar{u}(t, x, \omega) \right]^2 dx \\ &= \left\| \sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(\cdot) - \bar{u}(t, \cdot, \omega) \right\|^2\end{aligned}$$

gesetzt. Es gilt $\xi_n \rightarrow \xi = 0$ für $n \rightarrow \infty$ aufgrund der f.s. Konvergenz der Fourier-Lösung (4.56) im Raum $L_2(D)$. Weiter ergibt sich durch die Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(\cdot) - \bar{u}(t, \cdot, \omega) \right\| \leq \left\| \sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl} \right\| + \|\bar{u}(t, \cdot, \omega)\|.$$

Unter Beachtung, dass $\{f_{kl}\}_{k,l=1}^\infty$ ein Orthonormalsystem im Raum $L_2(D)$ darstellt und der Besselschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl} \right\|^2 &= \sum_{k,l=1}^n (e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega))^2 \leq \sum_{k,l=1}^n d_{kl}(\omega)^2 = \sum_{k,l=1}^n (\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega), f_{kl})^2 \\ &\leq \sum_{k,l=1}^\infty (\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega), f_{kl})^2 \leq \|\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega)\|^2 \quad \text{f.s. .}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\xi_n(t, \omega) \leq (\|\bar{u}(t, \cdot, \omega)\| + \|\varepsilon \bar{u}_0(\cdot, \omega)\|)^2 =: \eta$$

mit $\mathbf{E}\{\eta\} < \infty$ aufgrund der Voraussetzungen (4.57) und (4.58). Damit ist der Satz von Lebesgue über die majorisierende Konvergenz (vgl. [38]) anwendbar. Es gilt

$$\mathbf{E}\{\xi_n(t)\} = \int_\Omega \int_D \left[\sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(x) - \bar{u}(t, x, \omega) \right]^2 dx P(d\omega) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}\int_D \left[\sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} \mathbf{E}\{d_{kl}\} f_{kl}(x) - \mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)\} \right]^2 dx \\ = \int_D \left[\int_\Omega \left[\sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(x) - \bar{u}(t, x, \omega) \right] P(d\omega) \right]^2 dx \\ \leq \int_D \int_\Omega \left[\sum_{k,l=1}^n e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl}(\omega) f_{kl}(x) - \bar{u}(t, x, \omega) \right]^2 P(d\omega) dx \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Damit gilt aufgrund der Zentriertheit des zufälligen Feldes $\varepsilon \bar{u}_0$ für den Erwartungswert der Fourier-Lösung $\bar{u}(t, x, \omega)$

$$\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)\} = \mathbf{E} \left\{ \sum_{k,l=1}^\infty e^{-\lambda \mu_{kl} t} d_{kl} f_{kl}(x) \right\} = \sum_{k,l=1}^\infty e^{-\lambda \mu_{kl} t} \mathbf{E}\{d_{kl}\} f_{kl}(x) = 0.$$

Für die Bestimmung der Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x)\bar{u}(t_2, y)\}$ der Fourier-Lösung (4.56) wird die Reihe

$$\bar{u}(t_1, x, \omega)\bar{u}(t_2, y, \omega) = \sum_{k_1, l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2, l_2=1}^{\infty} e^{-\lambda(\mu_{k_1 l_1} t_1 + \mu_{k_2 l_2} t_2)} d_{k_1 l_1}(\omega) d_{k_2 l_2}(\omega) f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(y)$$

betrachtet. Diese konvergiert f.s. im L_2 -Sinn. Da $\{f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(y)\}_{k_1, l_1, k_2, l_2=1}^{\infty}$ ein Orthornormalsystem im Raum $L_2(D \times D)$ darstellt, lässt sich durch analoge Überlegungen wie im Fall des Erwartungswertes die L_2 -Konvergenz der Reihe

$$\mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x)\bar{u}(t_2, y)\} = \sum_{k_1, l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2, l_2=1}^{\infty} e^{-\lambda(\mu_{k_1 l_1} t_1 + \mu_{k_2 l_2} t_2)} \mathbf{E}\{d_{k_1 l_1} d_{k_2 l_2}\} f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(y)$$

ableiten. Damit ergibt sich die Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x)\bar{u}(t_2, y)\}$ der Fourier-Lösung (4.56) wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x)\bar{u}(t_2, y)\} &= \mathbf{E}\left\{ \sum_{k_1, l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2, l_2=1}^{\infty} e^{-\lambda(\mu_{k_1 l_1} t_1 + \mu_{k_2 l_2} t_2)} f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(y) \right. \\ &\quad \left. \int_D \int_D \varepsilon \bar{u}_0(z) \varepsilon \bar{u}_0(\bar{z}) f_{k_1 l_1}(z) f_{k_2 l_2}(\bar{z}) d\bar{z} dz \right\} \\ &= \sum_{k_1, l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2, l_2=1}^{\infty} e^{-\lambda(\mu_{k_1 l_1} t_1 + \mu_{k_2 l_2} t_2)} f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(y) \\ &\quad \int_D \int_D \mathbf{E}\{\varepsilon \bar{u}_0(z) \varepsilon \bar{u}_0(\bar{z})\} f_{k_1 l_1}(z) f_{k_2 l_2}(\bar{z}) d\bar{z} dz. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Für die Berechnung dieser Vierfachintegrale können die in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.3 betrachteten Methoden Anwendung finden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Funktionen f_{kl} im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen p_i der Finite Elemente Methode hinreichend glatte Funktionen über dem Gebiet D sind.

Kapitel 5

Randanfangswertproblem mit zufälliger Randbedingung

Gegenstand dieses Kapitels ist die Lösung des RAWP (1.18) mit zufälliger Neumann-Bedingung der Art

$$\bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \quad (5.1)$$

$$\text{AB: } \bar{u}(0, x, \omega) = 0, \quad x \in \bar{D} \quad (5.2)$$

$$\text{RB: } \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \right|_{(\partial D)_2} = \bar{\varepsilon} P(t, x, \omega) \quad (5.3)$$

$$\left(\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha \bar{u}(t, x, \omega) \right) \right|_{(\partial D)_3} = 0, \quad (5.4)$$

sowie die Bestimmung deren stochastischer Kenngrößen, wie Korrelations- bzw. Varianzfunktion. Das zufällige Feld $\bar{\varepsilon} P$ beschreibt dabei den Wärmefluss über dem Rand $(\partial D)_2$ in Abhängigkeit von Zeit und Ort und wird als Element einer Familie reellwertiger ε -korrelierter Zufallsfelder $(\bar{\varepsilon} P, \varepsilon > 0)$ mit der Korrelationsfunktion

$$R_{\varepsilon \bar{\varepsilon} P}((t_1, x), (t_2, y)) = \mathbf{E}\{\bar{\varepsilon} P(t_1, x) \bar{\varepsilon} P(t_2, y)\}, \quad t_1, t_2 \in (0, T], \quad x, y \in (\partial D)_2$$

modelliert. Damit ist vorausgesetzt, dass $\bar{\varepsilon} P, \varepsilon > 0$ die Bedingungen aus Annahme 1.3 erfüllt. Die Komponenten ε_1 bzw. ε_2 der Korrelationslänge ε beschreiben in Folgendem die Länge der Korrelationen in der Zeit bzw. im Ort.

Zur sinnvollen Definition der Korrelationslänge ε_2 für Punkte auf dem Rand $(\partial D)_2$ wird eine Parametrisierung

$$(\partial D)_2 : \nu \rightarrow x(\nu) = (x_1(\nu), x_2(\nu))$$

mit der Bogenlänge ν vorausgesetzt. Mit $\nu(x)$ wird die Bogenlänge des Randes $(\partial D)_2$ vom Anfangspunkt bis zu $x \in (\partial D)_2$ bezeichnet. Für die homogene Korrelationsfunktion der Randbedingung $\bar{\varepsilon} P(t, x, \omega)$ wird

$$R_{\varepsilon \bar{\varepsilon} P}((t_1, x), (t_2, y)) = R_{\varepsilon \bar{\varepsilon} P}(t_2 - t_1, \nu(y) - \nu(x)) = R\left(\frac{t_2 - t_1}{\varepsilon_1}, \frac{\nu(y) - \nu(x)}{\varepsilon_2}\right)$$

angenommen, wobei davon ausgegangen wird, dass sich die Prozesswerte $\bar{\varepsilon} P(t, x, \omega)$ bezüglich x nur entlang des Randes $(\partial D)_2$ beeinflussen können (vgl. Abb. 5.1).

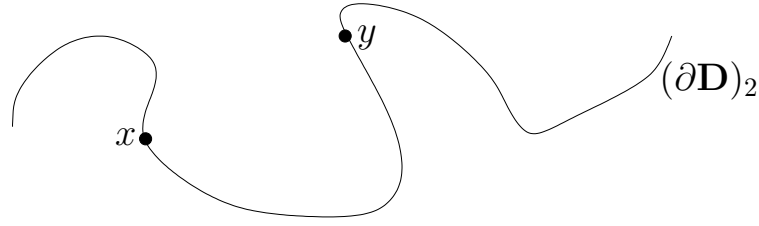


Abbildung 5.1: Korrelationsabhängigkeit bezüglich des Ortes

$$R_{\varepsilon\overline{P}\varepsilon\overline{P}}((\cdot, x), (\cdot, y)) = R_{\varepsilon\overline{P}\varepsilon\overline{P}}(\cdot, \nu(y) - \nu(x))$$

Für den Zusammenhang der geforderten Bedingungen an $\varepsilon\overline{P}(t, x, \omega)$ und den Verträglichkeitsbedingungen (1.13) und (1.15) wird auf die Bemerkungen 1.7 und 4.1 verwiesen.

Zur Lösung des RAWP (5.1)-(5.4) finden wieder die Finite-Elemente-Methode und die Fourier-Methode Anwendung. Auch im Falle der zufälligen Randbedingung $\varepsilon\overline{P}$ zeigt sich eine gute Übereinstimmung der berechneten stochastischen Kenngrößen der FE- bzw. Fourier-Lösung, worauf in Kapitel 7 detailliert eingegangen wird.

5.1 Berechnung der Korrelationsfunktion über die Finite-Elemente-Methode

In diesem Abschnitt wird das zufällige RAWP (5.1)-(5.4) mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode gelöst. Die Vorgehensweise entspricht dabei der in Kapitel 2 beschriebenen, wobei zu beachten ist, dass keine Dirichlet-Bedingungen vorliegen, d.h. $\gamma_h = \emptyset$ und die Differentialgleichung (5.1) sowie die Anfangsbedingung (5.2) homogen sind.

Die aus dem RAWP (5.1)-(5.4) abgeleitete Variationsformulierung (vgl. (2.7)) hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \text{AB:} \quad & (\overline{u}_t, v) + a(t; \overline{u}, v) = \langle F(t), v \rangle, \quad \forall v \in H^1(D), \quad \forall t \in (0, T] \\ & (\overline{u}(0, \cdot, \omega), v) = 0, \quad \forall v \in H^1(D), \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei der Raum der Testfunktionen dem Sobolevraum $H^1(D)$ entspricht und folgende Beziehungen gelten

$$\begin{aligned} (\overline{u}_t, v) &= \int_D \overline{u}_t(t, x, \omega) v(x) dx, \\ a(t; \overline{u}, v) &= \lambda \int_D \left[\sum_{k=1}^2 \overline{u}_{x_k}(t, x, \omega) v_{x_k}(x) \right] dx + \alpha \int_{(\partial D)_3} \overline{u}(t, x, \omega) v(x) ds, \\ \langle F(t), v \rangle &= \int_{(\partial D)_2} \varepsilon\overline{P}(t, x, \omega) v(x) ds, \\ (\overline{u}(0, \cdot, \omega), v) &= \int_D \overline{u}(0, x, \omega) v(x) dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der Diskretisierung im Ort wird der Sobolevraum $H^1(D)$ durch den endlichdimensionalen Raum

$$V_h = \left\{ v_h : v_h(x) = \sum_{i \in \chi_h} v_i p_i(x) \right\}$$

ersetzt und die approximative Lösung $\bar{u}_h$ der Variationsformulierung (5.5) besitzt dann die Gestalt

$$\bar{u}_h(t, x, \omega) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}(t, \omega) p_j(x). \quad (5.6)$$

Damit ergibt sich für die zeitabhängigen Koeffizienten $\underline{u}_h(t, \omega) = [u_{h,i}(t, \omega)]_{i \in \chi_h}$ folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen (vgl. (2.13))

$$\begin{aligned} M_h \dot{\underline{u}}_h(t, \omega) + K_h \underline{u}_h(t, \omega) &= \underline{f}_h(t, \omega) \\ \text{AB: } \underline{u}_h(0, \omega) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Werden die Beziehungen (2.14), (2.15) und (2.16) benutzt, so ergeben sich die Massematrix M_h , die Steifigkeitsmatrix K_h und der Lastvektor $\underline{f}_h$ als

$$M_h = [(p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h}, \quad (5.8)$$

$$K_h = [a(p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h} = \left[\lambda \int_D \sum_{k=1}^2 \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} dx + \alpha \int_{(\partial D)_3} p_j p_i ds \right]_{i,j \in \chi_h}, \quad (5.9)$$

$$\underline{f}_h(t, \omega) = [\langle F(t, \omega), p_i \rangle]_{i \in \chi_h}^T = \left[\int_{(\partial D)_2} \varepsilon \bar{P}(t, x, \omega) p_i(x) ds \right]_{i \in \chi_h}^T.$$

Die Lösung der zufälligen Anfangswertaufgabe (5.7) ist durch das Integralfunktional

$$\underline{u}_h(t, \omega) = \int_0^t G_h(t - \tau) \underline{f}_h(\tau, \omega) d\tau = \int_0^t \int_{(\partial D)_2} G_h(t - \tau) \underline{p}(x) \varepsilon \bar{P}(\tau, x, \omega) ds d\tau \quad (5.10)$$

gegeben. Die Matrixfunktion G_h ist dabei wie in (4.12) gegeben durch

$$G_h(t) = \exp(-M_h^{-1} K_h t) M_h^{-1} = V_h e^{-\Lambda_h t} V_h^T.$$

Die Ansatzfunktionen $\underline{p} = [p_i]_{i \in \chi_h}$ werden nur über dem Rand $(\partial D)_2$ betrachtet, womit i.a. nur die zu den Knoten P_i , welche auf $(\partial D)_2$ liegen, gehörigen Ansatzfunktionen ungleich null sind. Die approximative Lösung $\bar{u}_h$ der Variationsformulierung (5.5) besitzt damit die Gestalt

$$\bar{u}_h(t, x, \omega) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}(t, \omega) p_j(x) = \sum_{j \in \chi_h} \int_0^t \int_{(\partial D)_2} [G_h(t - \tau)]_j \underline{p}(z) \varepsilon \bar{P}(\tau, z, \omega) ds d\tau p_j(x),$$

wobei $[G_h(t - \tau)]_j$ die j -te Zeile der Matrix $G_h(t - \tau)$ bezeichnet.

Mit Hilfe der gegebenen Diskretisierung des Gebietes D ergibt sich die Diskretisierung des Randes $(\partial D)_2$ als

$$(\partial D)_2 = \bigcup_{r \in \tilde{\psi}_h} [P_1^{(r)}, P_2^{(r)}].$$

Die Indexmenge $\tilde{\psi}_h = \{1, \dots, \tilde{R}_h\}$ enthält dabei die Nummern aller finiten Elemente, welche auf $(\partial D)_2$ liegen und die Punkte $P_1^{(r)}$ und $P_2^{(r)}$ bezeichnen die Knoten des finiten Elements $T^{(r)}$ mit $P_1^{(r)}, P_2^{(r)} \in (\partial D)_2$, wie aus Abb. 5.2 ersichtlich ist. Diese Abbildung zeigt auch, dass es für die numerische Berechnung der Lösung des RAWP im hier betrachteten Fall unerheblich ist, ob eine Diskretisierung des Gebietes mit Dreiecken oder Vierecken vorliegt.

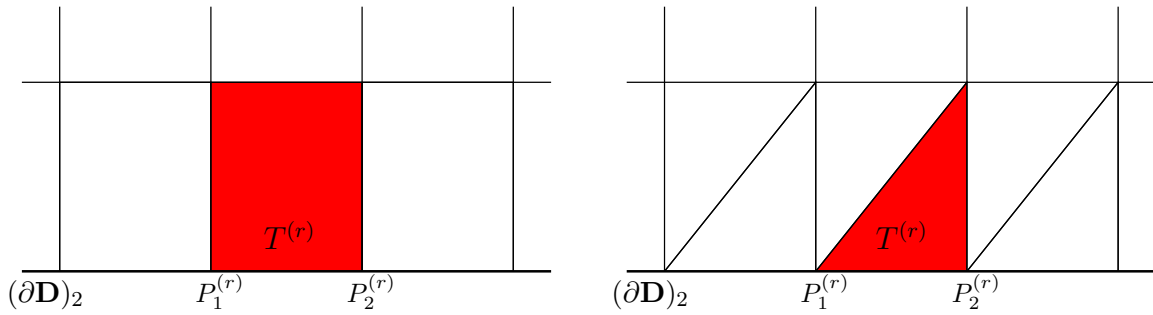


Abbildung 5.2: Diskretisierung des Randes $(\partial D)_2$ mit Rechtecks- bzw. Dreieckselementen

Die Vernetzung impliziert, dass der Rand $(\partial D)_2$ durch einen Polygonzug approximiert wird. Die Parametrisierung durch die Bogenlänge des Gesamtandes $(\partial D)_2$ legt eine Zuordnung zwischen den Randstücken $[P_1^{(r)}, P_2^{(r)}]$, $r \in \tilde{\psi}_h$ und den Parameterintervallen $I^{(r)}$ fest. Es gilt

$$I^{(r)} = [\nu^{(r)}, \mathbf{z}^{(r)}] \quad \text{mit} \quad \nu^{(r)} = \nu(P_i^{(r)}), \quad i = 1, 2 \quad \text{und} \quad I = \bigcup_{k \in \tilde{\psi}_h} I^{(k)}.$$

Es sei erinnert, dass die in Annahme 2.2 vorausgesetzte Regularität der Diskretisierung des Gebietes D eine ausreichende Approximation des Randes auch im Falle krummlinig berandeter Gebiete sichert.

Ziel der weiteren Überlegungen ist es, Momentenfunktionen der erhaltenen approximativen Lösung $\bar{u}_h$ zu berechnen. Aufgrund der Zentriertheit des zufälligen Feldes $\varepsilon \bar{P}$ gilt für das erste Moment

$$\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)\} = \sum_{j \in \chi_h} \int_0^t \int_{(\partial D)_2} [G_h(t - \tau)]_j p_j(z) \mathbf{E}\{\varepsilon \bar{P}(\tau, z)\} ds d\tau p_j(x) = 0.$$

Analog zu Abschnitt (4.1) lässt sich die Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x) \bar{u}(t_2, y)\}$ der Lösung $\bar{u}$ der Variationsformulierung (5.5) durch die Beziehung

$$\mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x) \bar{u}(t_2, y)\} \approx \mathbf{E}\{\bar{u}_h(t_1, x) \bar{u}_h(t_2, y)\} = \sum_{i, j \in \chi_h} \mathbf{E}\{u_{h,i}(t_1) u_{h,j}(t_2)\} p_i(x) p_j(y)$$

annähern. Die Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ der Lösung $\underline{u}_h$ des Problems (5.7) ergibt sich dann mit (5.10) als

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= \mathbf{E}\left\{ \left(\int_0^{t_1} d\tau \int_{(\partial D)_2} ds G_h(t_1 - \tau) \underline{p}(x) \bar{P}(\tau, x, \omega) \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\int_0^{t_2} d\tau \int_{(\partial D)_2} ds G_h(t_2 - \tau) \underline{p}(x) \bar{P}(\tau, x, \omega) \right)^T \right\} \\ &= \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 \int_{(\partial D)_2} ds_1 \int_{(\partial D)_2} ds_2 \\ &\quad G_h(t_1 - \tau_1) \underline{p}(x) \underline{p}^T(y) G_h^T(t_2 - \tau_2) \mathbf{E}\{\bar{P}(\tau_1, x) \bar{P}(\tau_2, y)\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mit Hilfe der Parametrisierung des Randpolygonzuges und Beziehung (2.10) gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 G_h(t_1 - \tau_1) \sum_{r,s=1}^{\tilde{R}_h} (C^{(r)})^T \\ &\quad \cdot \left[\int_{I^{(r)}} d\nu_1 \int_{I^{(s)}} d\nu_2 \underline{p}^{(r)}(\nu_1) (\underline{p}^{(s)})^T(\nu_2) R\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\varepsilon_1}, \frac{\nu_2 - \nu_1}{\varepsilon_2}\right) \right] C^{(s)} G_h(t_2 - \tau_2), \end{aligned} \quad (5.12)$$

wenn

$$\underline{p}^{(r)}(\nu) := \underline{p}^{(r)}(x(\nu)) \quad (5.13)$$

vereinbart wird. D.h. die Funktion $\underline{p}^{(r)}(\nu)$ wird mit der Funktion $\underline{p}^{(r)}(x(\nu))$ auf $x(\nu) \in [P_1^{(r)}, P_2^{(r)}]$ identifiziert. Die Variablentransformationen

$$\tau_1 \rightarrow u_1 : u_1 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\varepsilon_1} \quad \text{und} \quad \nu_1 \rightarrow u_2 : u_2 = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\varepsilon_2}$$

überführen die Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ in die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^{t_2} d\tau_2 \int_{\frac{\tau_2 - t_1}{\varepsilon_1}}^{\frac{\tau_2}{\varepsilon_1}} du_1 G_h(t_1 - (\tau_2 - \varepsilon_1 u_1)) \sum_{r,s=1}^{\tilde{R}_h} (C^{(r)})^T \\ &\quad \cdot \left[\int_{\nu^{(s)}}^{\nu^{(s)}} d\nu_2 \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(\nu_2 - \nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(\nu_2 - \nu^{(r)})} du_2 \underline{p}^{(r)}(\nu_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(\nu_2) R(u_1, u_2) \right] C^{(s)} G_h^T(t_2 - \tau_2). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Mittels der Definition $h^{(r)} := \text{dist}_{\text{Rand}}(P_1^{(r)}, P_2^{(r)}) = \nu^{(r)} - \nu^{(r)}$ und der Vertauschung der Integrationsreihenfolge (vgl. Abb. 5.3) ergibt sich analog zu (4.15) für das innere Doppelintegral mit

$$H(\nu_2; u_1, u_2) := \underline{p}^{(r)}(\nu_2 - \varepsilon_2 u_2) (\underline{p}^{(s)})^T(\nu_2) R(u_1, u_2)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
 & \int_{1\nu^{(s)}}^{2\nu^{(s)}} d\nu_2 \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(\nu_2 - 2\nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(\nu_2 - 1\nu^{(r)})} du_2 H(\nu_2; u_1, u_2) \\
 &= \begin{cases} \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(s)} - 2\nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(s)} - 2\nu^{(r)})} du_2 \int_{1\nu^{(s)}}^{2\nu^{(r)} + \varepsilon_2 u_2} d\nu_2 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(s)} - 2\nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)})} du_2 \int_{1\nu^{(s)}}^{2\nu^{(s)}} d\nu_2 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)})} du_2 \int_{1\nu^{(r)} + \varepsilon_2 u_2}^{2\nu^{(s)}} d\nu_2 \right] \\ H(\nu_2; u_1, u_2) \quad \text{für } h^{(r)} \geq h^{(s)} \\ \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(s)} - 2\nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)})} du_2 \int_{1\nu^{(s)}}^{2\nu^{(r)} + \varepsilon_2 u_2} d\nu_2 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)})} du_2 \int_{1\nu^{(r)} + \varepsilon_2 u_2}^{2\nu^{(s)}} d\nu_2 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(s)} - 2\nu^{(r)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)})} du_2 \int_{1\nu^{(r)} + \varepsilon_2 u_2}^{2\nu^{(s)}} d\nu_2 \right] \\ H(\nu_2; u_1, u_2) \quad \text{für } h^{(r)} \leq h^{(s)}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

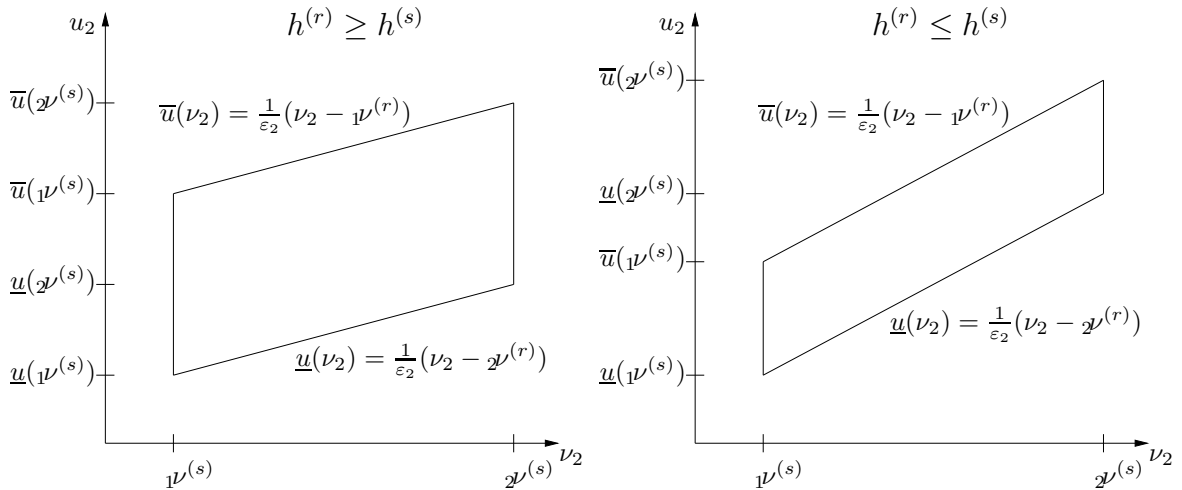


Abbildung 5.3: Zur Vertauschung der Integration im Fall $h^{(r)} \geq h^{(s)}$ bzw. $h^{(r)} \leq h^{(s)}$

Für die folgenden Überlegungen wird die Annahme

$$h^{(r)} = h^{(s)} = h, \quad r, s \in \tilde{\psi}_h$$

getroffen, wodurch sich die Berechnungen erheblich vereinfachen. Es ergibt sich damit

$$2\nu^{(r)} - 1\nu^{(r)} = h^{(r)} = h^{(s)} = 2\nu^{(s)} - 1\nu^{(s)}$$

und folglich entfällt die Fallunterscheidung in (5.15). Des Weiteren verschwindet der mittlere Summand wegen $2\nu^{(s)} - 2\nu^{(r)} = 1\nu^{(s)} - 1\nu^{(r)}$.

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge auch auf das äußere Doppelintegral bezüglich τ_2 und u_1 angewendet, wobei o.B.d.A. $0 < t_1 \leq t_2$ angenommen wird und die zusätzlichen Transformationen $(u_1, u_2) \rightarrow (u'_1, u'_2)$, $u'_1 = -u_1$, $u'_2 = -u_2$ führen ausgehend

von (5.14) bei Beachtung der vorausgesetzten Homogenität der Korrelationsfunktion, d.h. $R(u_1, u_2) = R(-u_1, -u_2)$ schließlich auf

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{r,s=1}^{\tilde{R}_h} \left[\int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon_1}} du_1 \int_0^{t_1 - \varepsilon_1 u_1} d\tau_2 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(t_1 - t_2)}^0 du_1 \int_{-\varepsilon_1 u_1}^{t_1 - \varepsilon_1 u_1} d\tau_2 + \int_{-\frac{t_2}{\varepsilon_1}}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(t_1 - t_2)} du_1 \int_{-\varepsilon_1 u_1}^{t_2} d\tau_2 \right] \\ &\cdot \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(\underline{\nu}^{(r)} - \underline{\nu}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(\underline{\nu}^{(r)} - \underline{\nu}^{(s)})} du_2 \int_{\underline{\nu}^{(s)}}^{\underline{\nu}^{(r)} - \varepsilon_2 u_2} d\nu_2 + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(\underline{\nu}^{(r)} - \underline{\nu}^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(\underline{\nu}^{(r)} - \underline{\nu}^{(s)})} du_2 \int_{\underline{\nu}^{(r)} - \varepsilon_2 u_2}^{\underline{\nu}^{(s)}} d\nu_2 \right] \\ &\cdot G_h(t_1 - (\tau_2 + \varepsilon_1 u_1))(C^{(r)})^T \underline{p}^{(r)}(\nu_2 + \varepsilon_2 u_2)(\underline{p}^{(s)})^T(\nu_2)C^{(s)} \\ &\cdot G_h^T(t_2 - \tau_2)R(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Da $R(u_1, u_2)$ die Korrelationsfunktion einer 1-korrelierten Zufallsfunktion ist, gilt

$$R(u_1, u_2) = 0 \quad \text{für} \quad |u_1| \geq 1 \quad \text{oder} \quad |u_2| \geq 1.$$

Damit kann das Integrationsgebiet $\left[0, \frac{t_1}{\varepsilon_1}\right]$ im Fall $t_1 \geq \varepsilon_1$ auf $[0, 1]$ reduziert werden. Weiterhin folgt im Fall $t_1 + \varepsilon_1 \leq t_2$ die Beziehung $\frac{1}{\varepsilon_1}(t_1 - t_2) \leq -1$, womit sich das Integrationsgebiet $\left[\frac{t_1 - t_2}{\varepsilon_1}, 0\right]$ auf $[-1, 0]$ beschränkt und das Integrationsgebiet $\left[-\frac{t_2}{\varepsilon_1}, \frac{t_1 - t_2}{\varepsilon_1}\right]$ vollständig verschwindet. Für Zeitpunkte $t := t_1 = t_2$ vereinfacht sich die Beziehung (5.16), da in diesem Fall das Integrationsgebiet $\left[\frac{1}{\varepsilon_1}(t_1 - t_2), 0\right]$ verschwindet.

Der Vorteil der Darstellung (5.16) besteht in der Unabhängigkeit der Korrelationsfunktion R von den Integrationsvariablen τ_2 und ν_2 . Um diese Eigenschaft auszunutzen, werden folgende Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$ in Abhängigkeit von $z = (z_1, z_2)$ eingeführt

$$\begin{aligned} \phi_1^{(r,s)}(z) &:= \phi_{[0, t_1; \underline{\nu}^{(s)}, \underline{\nu}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \\ \phi_2^{(r,s)}(z) &:= -\phi_{[0, t_1; \underline{\nu}^{(s)}, \underline{\nu}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \\ \phi_3^{(r,s)}(z) &:= -\phi_{[t_2, 0; \underline{\nu}^{(s)}, \underline{\nu}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \\ \phi_4^{(r,s)}(z) &:= \phi_{[t_2, 0; \underline{\nu}^{(s)}, \underline{\nu}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \\ \phi_5^{(r,s)}(z) &:= \psi_{[t_1; \underline{\nu}^{(s)}, \underline{\nu}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \\ \phi_6^{(r,s)}(z) &:= -\psi_{[t_1; \underline{\nu}^{(s)}, \underline{\nu}^{(r)}]}^{(r,s)}(z), \end{aligned} \quad (5.17)$$

wenn mit

$$\begin{aligned} Q_1^{(r)}(y) &:= G_h(t_1 - y_1)(C^{(r)})^T \underline{p}^{(r)}(y_2), \quad y = (\tau_2, \nu_2) = (y_1, y_2) \\ Q_2^{(s)}(y) &:= (\underline{p}^{(s)})^T(y_2)C^{(s)}G_h(t_2 - y_1) \end{aligned} \quad (5.18)$$

die Funktion $\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}$ wie in (4.21) definiert wird durch

$$\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z_1, z_2) := \int_m^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2) \quad (5.19)$$

und $\psi_{[n;p,q]}^{(r,s)}$ durch

$$\psi_{[n;p,q]}^{(r,s)}(z_1, z_2) := \int_{-z_1}^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2). \quad (5.20)$$

Damit ergibt sich aus (5.16) die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{r,s=1}^{\tilde{R}_h} \\ &\left[\int_0^{\frac{t_1}{\varepsilon_1}} du_1 \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(r)}-1\nu^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(r)}-1\nu^{(s)})} du_2 \phi_1^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(r)}-2\nu^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(r)}-2\nu^{(s)})} du_2 \phi_2^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) \right] \right. \\ &+ \int_{\frac{1}{\varepsilon_1}(t_1-t_2)}^0 du_1 \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(r)}-1\nu^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(r)}-1\nu^{(s)})} du_2 \phi_5^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(r)}-2\nu^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(r)}-2\nu^{(s)})} du_2 \phi_6^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) \right] \\ &\left. + \int_{-\frac{t_2}{\varepsilon_1}}^{\frac{1}{\varepsilon_1}(t_1-t_2)} du_1 \left[\int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(r)}-1\nu^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(r)}-1\nu^{(s)})} du_2 \phi_3^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) + \int_{\frac{1}{\varepsilon_2}(1\nu^{(r)}-2\nu^{(s)})}^{\frac{1}{\varepsilon_2}(2\nu^{(r)}-2\nu^{(s)})} du_2 \phi_4^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) \right] \right] R(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Aufgrund der vorausgesetzten ε -Korreliertheit der zufälligen Randbedingung $\bar{\varepsilon}\bar{P}$ muss in obiger Beziehung die Summe bezüglich der Variablen s nicht über alle Intervalle $I^{(s)}$, $s \in \tilde{\psi}_h$ gebildet werden. Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= (l - \vartheta)h \quad \text{mit} \quad l \in \mathbb{N}, \quad \vartheta \in [0, 1), \\ k^{(r,s)}h &:= 1\nu^{(r)} - 1\nu^{(s)}, \quad 2\nu^{(r)} = 1\nu^{(r)} + h \end{aligned}$$

und analogen Überlegungen wie in Abschnitt 4.1 ergibt sich, dass die Summanden in Gleichung (5.21) für alle Intervalle $I^{(s)}$ mit

$$k^{(r,s)} \geq l - \vartheta + 1 \quad \text{oder} \quad k^{(r,s)} \leq -l + \vartheta - 1$$

gleich null sind.

Ausgehend von den Darstellungen (5.12) bzw. (5.21) werden im Folgenden drei Verfahren zur Berechnung der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1) \underline{u}_h^T(t_2)\}$ vorgestellt.

5.1.1 Asymptotische Entwicklung höherer Ordnung

Der Einfluss des zufälligen Wärmeflusses $\bar{\varepsilon}\bar{P}$ über den Rand $(\partial\mathcal{D})_2$ auf die Lösung $\underline{u}_h$ des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (5.7) wird durch das Integralfunktional (vgl. (5.10))

$$\underline{u}_h(t, \omega) = \int_0^t \int_{(\partial\mathcal{D})_2} G_h(t - \tau) \underline{p}(x) \bar{\varepsilon}\bar{P}(\tau, x, \omega) ds d\tau$$

beschrieben. Analog zum Fall der zufälligen Anfangsbedingung (vgl. Kapitel 4.1.1) muss die deterministische Kernfunktion

$$G_h(t - \tau)\underline{p}(x) = \exp(-M_h^{-1}K_h(t - \tau))M_h^{-1}\underline{p}(x)$$

für die in [39] angegebene asymptotische Entwicklung höherer Ordnung der Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ nach der Korrelationslänge ε die in Annahme 4.3 formulierten Bedingungen erfüllen. Falls die Funktionen $[p_i]_{i \in \chi_h}$ als lineare oder bilineare Ansatzfunktionen gewählt werden, so sind diese lediglich stetig über dem Rand $(\partial\mathbf{D})_2$. Die angesprochenen Bedingungen wären damit nur für $m = 0$ erfüllt. Werden die Funktionen $[p_i]_{i \in \chi_h}$ allerdings über den Intervallen $[P_1^{(r)}, P_2^{(r)}]$, $r \in \tilde{\psi}_h$ betrachtet, so sind die Bedingungen der Annahme 4.3 für beliebige Ordnungen m erfüllt. Somit kann ausgehend von Gleichung (5.21) eine Entwicklung der Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ auch höherer Ordnung angegeben werden.

Analog zu (4.24) ergibt sich eine Entwicklung für $\phi_i^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2)$, $i = 1, \dots, 6$ an der Stelle $(0, 0)$

$$\phi_i^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha!} D^{(\alpha)} \phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2) \Big|_{z_1=z_2=0} u^\alpha + \rho_{\phi_i, m+1}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2). \quad (5.22)$$

Für die weiteren Betrachtungen werden die in Abb. 5.4 angegebenen Bezeichnungen für die benachbarten Elemente von $T^{(r)}$ genutzt. Dabei stellt $T^{(Nr)}$ das rechte Nachbarelement und $T^{(Nl)}$ das linke dar.

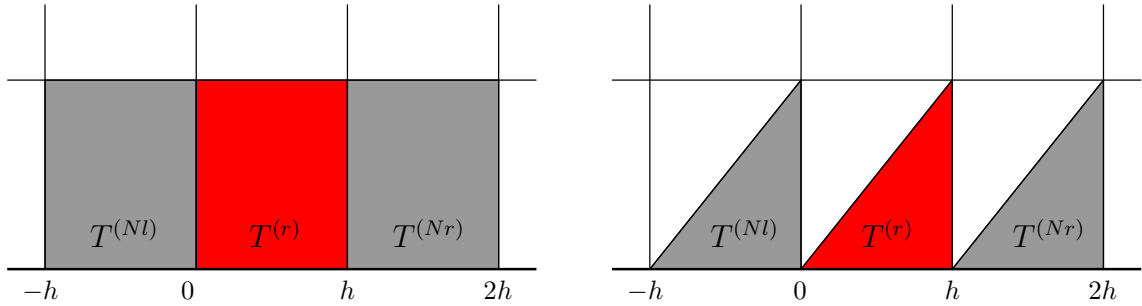


Abbildung 5.4: Bezeichnung benachbarter Finiter Elemente von $T^{(r)}$ bei einer Diskretisierung mit Rechtecken bzw. Dreiecken

In Gleichung (5.21) erfolgt die Integration von $\phi_1^{(r,s)}$, $\phi_3^{(r,s)}$, $\phi_5^{(r,s)}$ bezüglich u_2 über

$$\frac{1}{\varepsilon_2}(\mathbf{1}^{(r)} - \mathbf{1}^{(s)}) \leq u_2 \leq \frac{1}{\varepsilon_2}(\mathbf{2}^{(r)} - \mathbf{1}^{(s)})$$

und von $\phi_2^{(r,s)}$, $\phi_4^{(r,s)}$, $\phi_6^{(r,s)}$ über

$$\frac{1}{\varepsilon_2}(\mathbf{1}^{(r)} - \mathbf{2}^{(s)}) \leq u_2 \leq \frac{1}{\varepsilon_2}(\mathbf{2}^{(r)} - \mathbf{2}^{(s)}).$$

Damit der Entwicklungspunkt $(0, 0)$ im Integrationsgebiet der Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$ liegt, muss die Beziehung

$$\varepsilon_2 \leq h$$

vorausgesetzt werden. Der Beweis wird analog zu Kapitel 4.1.1 geführt.

Es ist von Interesse, welche Summanden in Gleichung (5.21) sich bei festem $I^{(r)}$ in Abhängigkeit der Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$ zu null ergeben. Das Integrationsgebiet bezüglich u_2 für $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, 3, 5$ erstreckt sich im Fall $\mathbf{1}\nu^{(r)} = 0$, $\mathbf{2}\nu^{(r)} = h$ (vgl. Abb. 5.4) über

$$\frac{1}{\varepsilon_2}(\mathbf{1}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)}) = -\frac{1}{\varepsilon_2}\mathbf{1}\nu^{(s)} \leq u_2 \leq \frac{1}{\varepsilon_2}(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)}) = \frac{1}{\varepsilon_2}(h - \mathbf{1}\nu^{(s)}). \quad (5.23)$$

Die Korrelationsfunktion $R(u_1, u_2)$ ist null für $u_2 \notin (-1, 1)$ und folglich in Verbindung mit (5.23) für

$$1 \leq -\frac{1}{\varepsilon_2}\mathbf{1}\nu^{(s)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\varepsilon_2}(h - \mathbf{1}\nu^{(s)}) \leq -1$$

also insbesondere für

$$\mathbf{1}\nu^{(s)} \leq -h \quad \text{bzw.} \quad 2h \leq \mathbf{1}\nu^{(s)}.$$

Unter der Annahme $u_1 \in (-1, 1)$ sind die Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, 3, 5$ bei festem r also nur für $s \in \{r, Nr\}$ zu berücksichtigen, da nur in diesen Fällen $R(u_1, u_2) \neq 0$ gilt. Analoge Überlegungen liefern, dass die Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 2, 4, 6$ nur für $s \in \{r, Nl\}$ betrachtet werden müssen.

Zusammenfassend ergibt sich aus (5.21) mit Hilfe der Entwicklung (5.22) für $\varepsilon_2 \leq h$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= \sum_{r=1}^{\tilde{R}_h} \sum_{s=r, Nr} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha!} \left(\sum_{i=1,3,5} q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} \right) \\ &+ \sum_{r=1}^{\tilde{R}_h} \sum_{s=r, Nl} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha!} \left(\sum_{i=2,4,6} q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} \right) + \tilde{\rho}_{m+1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (5.24)$$

mit den Bezeichnungen $\mathbf{1} = (1, 1)$, $q_{\alpha,i}^{(r,s)} := D^{(\alpha)}\phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2) \Big|_{z_1=z_2=0}$, $i = 1, \dots, 6$ und

$$a_{[m,n;p,q]}^{\alpha} := \int_m^n du_1 \int_p^q du_2 u^{\alpha} R(u_1, u_2), \quad \tilde{\varepsilon}_1 := \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\varepsilon_2},$$

$$\begin{aligned} a_{\alpha,1}^{(r,s)} &:= a_{[0, \tilde{\varepsilon}_1 t_1; \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{1}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)}), \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)})]}^{\alpha}, \quad a_{\alpha,2}^{(r,s)} := a_{[0, \tilde{\varepsilon}_1 t_1; \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{1}\nu^{(r)} - \mathbf{2}\nu^{(s)}), \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{2}\nu^{(s)})]}^{\alpha}, \\ a_{\alpha,3}^{(r,s)} &:= a_{[-\tilde{\varepsilon}_1 t_2, \tilde{\varepsilon}_1(t_1 - t_2); \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{1}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)}), \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)})]}^{\alpha}, \\ a_{\alpha,4}^{(r,s)} &:= a_{[-\tilde{\varepsilon}_1 t_2, \tilde{\varepsilon}_1(t_1 - t_2); \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{1}\nu^{(r)} - \mathbf{2}\nu^{(s)}), \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{2}\nu^{(s)})]}^{\alpha}, \\ a_{\alpha,5}^{(r,s)} &:= a_{[\tilde{\varepsilon}_1(t_1 - t_2), 0; \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{1}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)}), \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(s)})]}^{\alpha}, \quad a_{\alpha,6}^{(r,s)} := a_{[\tilde{\varepsilon}_1(t_1 - t_2), 0; \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{1}\nu^{(r)} - \mathbf{2}\nu^{(s)}), \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{2}\nu^{(s)})]}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Es ergibt sich analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 4.1.1

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \phi_{[m, n; p, q]}^{(r, s)}(z) &= \int_m^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2) \quad (5.26) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^{i+1} \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(n, y_2 + z_2) D^{(i, 0)} Q_2^{(s)}(n - z_1, y_2) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+1} \int_m^{n-z_1} dy_1 D^{(\alpha_1, \alpha_2-1-i)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, q) D^{(0, i)} Q_2^{(s)}(y_1, q - z_2) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} \sum_{j=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+j} D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2-1-j)} Q_1^{(r)}(n, q) D^{(i, j)} Q_2^{(s)}(n - z_1, q - z_2),
\end{aligned}$$

wobei

$$D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2}} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2)$$

und eine analoge Beziehung für $Q_2^{(s)}$ vereinbart wird. Mittels Induktion lässt sich weiterhin beweisen

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \psi_{[n; p, q]}^{(r, s)}(z) &= \int_{-z_1}^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2) \quad (5.27) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^{i+1} \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(n, y_2 + z_2) D^{(i, 0)} Q_2^{(s)}(n - z_1, y_2) \\
&- \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^{i+1} \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(0, y_2 + z_2) D^{(i, 0)} Q_2^{(s)}(-z_1, y_2) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+1} \int_{-z_1}^{n-z_1} dy_1 D^{(\alpha_1, \alpha_2-1-i)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, q) D^{(0, i)} Q_2^{(s)}(y_1, q - z_2) \\
&+ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} \sum_{j=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+j} D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2-1-j)} Q_1^{(r)}(n, q) D^{(i, j)} Q_2^{(s)}(n - z_1, q - z_2) \\
&- \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} \sum_{j=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+j} D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2-1-j)} Q_1^{(r)}(0, q) D^{(i, j)} Q_2^{(s)}(-z_1, q - z_2).
\end{aligned}$$

Neben

$$A_\alpha^{(r, s)}(z; m, n, p, q) := \int_m^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2), \quad (\text{vgl. (4.27)}),$$

werden

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\alpha^{(r,s)}(z; n, p, q) &:= \int_{-z_1}^{n-z_1} dy_1 \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2), \\
\overline{B}_\alpha^{(r,s)}(z; n, p, q) &:= \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} (-1)^{i+1} \int_p^{q-z_2} dy_2 D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(n, y_2 + z_2) D^{(i,0)} Q_2^{(s)}(n - z_1, y_2), \\
\overline{C}_\alpha^{(r,s)}(z; m, n, q) &:= \sum_{i=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+1} \int_m^{n-z_1} dy_1 D^{(\alpha_1, \alpha_2-1-i)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, q) D^{(0,i)} Q_2^{(s)}(y_1, q - z_2), \\
\hat{C}_\alpha^{(r,s)}(z; n, q) &:= \sum_{i=0}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+1} \int_{-z_1}^{n-z_1} dy_1 D^{(\alpha_1, \alpha_2-1-i)} Q_1^{(r)}(y_1 + z_1, q) D^{(0,i)} Q_2^{(s)}(y_1, q - z_2), \\
\overline{H}_\alpha^{(r,s)}(z; n, q) &:= \sum_{i=1}^{\alpha_1-1} \sum_{j=1}^{\alpha_2-1} (-1)^{i+j} D^{(\alpha_1-1-i, \alpha_2-1-j)} Q_1^{(r)}(n, q) D^{(i,j)} Q_2^{(s)}(n - z_1, q - z_2)
\end{aligned}$$

eingeführt und es ergibt sich aus den Gleichungen (5.26) und (5.27)

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \phi_{[m, n; p, q]}^{(r,s)}(z) &= A_\alpha^{(r,s)}(z; m, n, p, q) + \overline{B}_\alpha^{(r,s)}(z; n, p, q) \\
&\quad + \overline{C}_\alpha^{(r,s)}(z; m, n, q) + \overline{H}_\alpha^{(r,s)}(z; n, q),
\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \psi_{[n; p, q]}^{(r,s)}(z) &= \hat{A}_\alpha^{(r,s)}(z; n, p, q) + \overline{B}_\alpha^{(r,s)}(z; n, p, q) - \overline{B}_\alpha^{(r,s)}(z; 0, p, q) \\
&\quad + \hat{C}_\alpha^{(r,s)}(z; n, q) + \overline{H}_\alpha^{(r,s)}(z; n, q) - \overline{H}_\alpha^{(r,s)}(z; 0, q).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich die Ableitungen

$$D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \phi_i^{(r,s)}(z) \text{ für } i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{und} \quad D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \phi_i^{(r,s)}(z) \text{ für } i = 5, 6 \tag{5.30}$$

der Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$ (vgl. (5.17)) berechnen.

Zur Bestimmung der Terme $q_{\alpha, i}^{(r,s)}$ in Gleichung (5.24) sind wegen (5.28) und (5.29) die Ausdrücke $A_\alpha^{(r,s)}$, $\hat{A}_\alpha^{(r,s)}$, $\overline{B}_\alpha^{(r,s)}$, $\overline{C}_\alpha^{(r,s)}$, $\hat{C}_\alpha^{(r,s)}$ und $\overline{H}_\alpha^{(r,s)}$ für $z = (0, 0)$ zu betrachten (vgl. auch die entsprechenden Betrachtungen in Abschnitt 4.1.1). Es ist

$$\underline{p}^{(r)}(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in (\partial D)_2 \setminus [P_1^{(r)}, P_2^{(r)}]$$

und folglich gilt auch für die in (5.18) definierten Funktionen $Q_i^{(r)}$

$$Q_i^{(r)}(y) = 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{für} \quad y_2 \in I \setminus [\nu^{(r)}, \mathcal{V}^{(r)}].$$

Der Ausdruck

$$A_\alpha^{(r,s)}(0; m, n, p, q) = \int_m^n dy_1 \int_p^q dy_2 D^{(\alpha_1, \alpha_2)} Q_1^{(r)}(y_1, y_2) Q_2^{(s)}(y_1, y_2)$$

verschwindet folglich für $r \neq s$. Die gleiche Aussage lässt sich für $\hat{A}_\alpha^{(r,s)}(0; n, p, q)$ und $\overline{B}_\alpha^{(r,s)}(0; n, p, q)$ ableiten.

Werden lineare oder bilineare Ansatzfunktionen $\underline{p}^{(r)}(x_1, x_2)$ vorausgesetzt, so ergeben sich aufgrund der Berandung der finiten Elemente $T^{(r)}$ durch Geradenstücke wiederum lineare Funktionen $\underline{p}^{(r)}(\nu)$ in ν . Folglich verschwinden die Ableitungen von $\underline{p}^{(r)}(\nu)$, welche höher als Ordnung eins sind. Es gilt

$$\begin{aligned} A_\alpha^{(r,s)}(0; m, n, p, q) &= 0 \\ \hat{A}_\alpha^{(r,s)}(0; m, n, p, q) &= 0 \end{aligned} \quad \text{für} \quad \begin{cases} A1 : s \notin \{r\} \\ A2 : \alpha_2 > 1 \text{ bei linearen bzw. bilinearen} \\ \text{Ansatzfunktionen,} \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\overline{B}_\alpha^{(r,s)}(0; n, p, q) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} B1 : s \notin \{r\} \\ B2 : \alpha_1 = 0 \\ B3 : \alpha_2 > 1 \text{ bei linearen bzw. bilinearen} \\ \text{Ansatzfunktionen.} \end{cases} \quad (5.32)$$

Die Terme $\overline{C}_\alpha^{(r,s)}(0; m, n, q)$, $\hat{C}_\alpha^{(r,s)}(0; n, q)$ gehen in die Berechnung von $q_{\alpha,i}^{(r,s)}$ mit den Werten $q \in \{\nu^{(r)}, \mathfrak{z}^{(r)}\}$ ein. Aus der Form der Integranden, welche Produkte der Faktoren $D^{(\alpha_2-1-i)}\underline{p}^{(r)}(q)$ und $D^{(i)}(\underline{p}^{(s)})^T(q)$ enthalten, ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{C}_\alpha^{(r,s)}(0; m, n, q) &= 0 \\ \hat{C}_\alpha^{(r,s)}(0; n, q) &= 0 \end{aligned} \quad \text{für} \quad \begin{cases} C1 : \begin{aligned} q &= \nu^{(r)}, s \notin \{r, Nl\} \\ q &= \mathfrak{z}^{(r)}, s \notin \{r, Nr\} \end{aligned} \\ C2 : \alpha_2 = 0 \\ C3 : \alpha_2 > 3 \text{ bei linearen bzw. bilinearen} \\ \text{Ansatzfunktionen.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Ein ähnliches Resultat folgt für $\overline{H}_\alpha^{(r,s)}(z; n, q)$ mit $q \in \{\nu^{(r)}, \mathfrak{z}^{(r)}\}$

$$\overline{H}_\alpha^{(r,s)}(0; n, q) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} H1 : \begin{aligned} q &= \nu^{(r)}, s \notin \{r, Nl\} \\ q &= \mathfrak{z}^{(r)}, s \notin \{r, Nr\} \end{aligned} \\ H2 : \min\{\alpha_1, \alpha_2\} = 0 \\ H3 : \alpha_2 > 3 \text{ bei linearen bzw. bilinearen} \\ \text{Ansatzfunktionen.} \end{cases} \quad (5.34)$$

Im Folgenden werden die ersten Entwicklungsterme der Varianzmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t)\underline{u}_h^T(t)\}$ entsprechend der Gleichung (5.24) berechnet. Für $t = t_1 = t_2$ ergibt sich aus (5.25)

$$a_{\alpha,5}^{(r,s)} = 0, \quad a_{\alpha,6}^{(r,s)} = 0.$$

Die Glieder nullter Ordnung der Entwicklung (5.24) für $t = t_1 = t_2$ ergeben sich für $\alpha = (0, 0)$. Aus (5.30) und (5.26), (5.27) folgt für $i = 1, 2, 3, 4$ und $r \neq s$

$$q_{(0,0),i}^{(r,s)} = \phi_i^{(r,s)}(0, 0) = A_{(0,0)}^{(r,s)}(0, 0; m_i, n_i, p_i, q_i) = 0.$$

Im Falle $r = s$ zeigen die Beziehungen (5.17)

$$\phi_1^{(r,s)}(0) = \phi_2^{(r,s)}(0) = \phi_3^{(r,s)}(0) = \phi_4^{(r,s)}(0)$$

und damit

$$q_{(0,0),i}^{(r,r)} = A_{(0,0)}^{(r,r)}(0, 0; 0, t, \mathbf{1}\nu^{(r)}, \mathbf{2}\nu^{(r)}) =: q_{(0,0)}^{(r,r)}.$$

Es ist mit $\alpha = (0, 0)$ und $\tilde{\varepsilon}_2 h = \tilde{\varepsilon}_2(\mathbf{2}\nu^{(r)} - \mathbf{1}\nu^{(r)})$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,r)} a_{\alpha,i}^{(r,r)} &= q_{\alpha}^{(r,r)} \sum_{i=1}^4 a_{\alpha,i}^{(r,r)} \\ &= q_{\alpha}^{(r,r)} \left[a_{[0,\tilde{\varepsilon}_1 t; 0, \tilde{\varepsilon}_2 h]}^{\alpha} + a_{[0,\tilde{\varepsilon}_1 t; -\tilde{\varepsilon}_2 h, 0]}^{\alpha} + a_{[-\tilde{\varepsilon}_1 t, 0; \tilde{\varepsilon}_2 h]}^{\alpha} + a_{[-\tilde{\varepsilon}_1 t, 0; -\tilde{\varepsilon}_2 h, 0]}^{\alpha} \right] \\ &= q_{\alpha}^{(r,r)} \int_{-\tilde{\varepsilon}_1 t}^{\tilde{\varepsilon}_1 t} du_1 \int_{-\tilde{\varepsilon}_2 h}^{\tilde{\varepsilon}_2 h} du_2 R(u_1, u_2) \end{aligned}$$

(vgl. (5.25)). Damit ergibt sich der nullte Entwicklungsterm $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t)\underline{u}_h^T(t)\}_0$ als

$$\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t)\underline{u}_h^T(t)\}_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{r=1}^{\tilde{R}_h} q_{(0,0)}^{(r,r)} \sum_{i=1}^4 a_{(0,0),i}^{(r,r)}$$

mit

$$\sum_{i=1}^4 a_{(0,0),i}^{(r,r)} = \int_{-\frac{t}{\varepsilon_1}}^{\frac{t}{\varepsilon_1}} du_1 \int_{-\frac{h}{\varepsilon_2}}^{\frac{h}{\varepsilon_2}} du_2 R(u_1, u_2)$$

und

$$\begin{aligned} q_{(0,0)}^{(r,r)} &= A_{(0,0)}^{(r,r)}(0, 0; 0, t, \mathbf{1}\nu^{(r)}, \mathbf{2}\nu^{(r)}) = \int_0^t dy_1 \int_{\mathbf{1}\nu^{(r)}}^{\mathbf{2}\nu^{(r)}} dy_2 Q_1^{(r)}(y_1, y_2) Q_2^{(r)}(y_1, y_2) \\ &= \int_0^t dy_1 \int_{\mathbf{1}\nu^{(r)}}^{\mathbf{2}\nu^{(r)}} dy_2 G_h(t - y_1) (C^{(r)})^T \underline{p}^{(r)}(y_2) (\underline{p}^{(r)})^T(y_2) C^{(r)} G_h(t - y_1). \end{aligned}$$

Der Entwicklungsterm erster Ordnung $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t)\underline{u}_h^T(t)\}_1$ der Varianzmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t)\underline{u}_h^T(t)\}$ wird bestimmt durch

$$\sum_{|\alpha|=1} \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha!} \left(\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} \right),$$

wobei sich die Summe über $\alpha = (1, 0)$ und $\alpha = (0, 1)$ erstreckt. Unter Beachtung der Beziehungen (5.31)-(5.34) folgt im Fall $\alpha = (1, 0)$ und $i = 1$

$$\begin{aligned} q_{(1,0),1}^{(r,s)} &= D^{(1,0)} \phi_1^{(r,s)}(0, 0) = D^{(1,0)} \phi_{[0,t;\mathbf{1}\nu^{(s)}, \mathbf{2}\nu^{(r)}]}(0, 0) \\ &= A_{(1,0)}^{(r,s)}(0, 0; 0, t, \mathbf{1}\nu^{(s)}, \mathbf{2}\nu^{(r)}) + \overline{B}_{(1,0)}^{(r,s)}(0, 0; t, \mathbf{1}\nu^{(s)}, \mathbf{2}\nu^{(r)}) \end{aligned}$$

und damit $q_{(1,0),1}^{(r,s)} = 0$ für $r \neq s$. Offensichtlich ergibt sich auch

$$q_{(1,0),i}^{(r,s)} = 0 \quad \text{für} \quad r \neq s \quad \text{und} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Für $\alpha = (0, 1)$ und $i = 1$ lässt sich

$$\begin{aligned} q_{(0,1),1}^{(r,s)} &= D^{(0,1)} \phi_1^{(r,s)}(0, 0) = D^{(0,1)} \phi_{[0,t;1\nu^{(s)},\mathfrak{z}^{(r)}]}(0, 0) \\ &= A_{(0,1)}^{(r,s)}(0, 0; 0, t, 1\nu^{(s)}, \mathfrak{z}^{(r)}) + \overline{C}_{(0,1)}^{(r,s)}(0, 0; 0, t, \mathfrak{z}^{(r)}) \end{aligned}$$

und

$$q_{(0,1),1}^{(r,s)} = \begin{cases} 0 & \text{für } s \notin \{r, Nr\} \\ \overline{C}_{(0,1)}^{(r,s)}(0, 0; 0, t, \mathfrak{z}^{(r)}) & \text{für } s = Nr \end{cases}$$

ableiten. Für $i = 2$ gilt

$$\begin{aligned} q_{(0,1),2}^{(r,s)} &= D^{(0,1)} \phi_2^{(r,s)}(0, 0) = -D^{(0,1)} \phi_{[0,t;\mathfrak{z}^{(s)},1\nu^{(r)}]}(0, 0) \\ &= -[A_{(0,1)}^{(r,s)}(0, 0; 0, t, \mathfrak{z}^{(s)}, 1\nu^{(r)}) + \overline{C}_{(0,1)}^{(r,s)}(0, 0; 0, t, 1\nu^{(r)})] \end{aligned}$$

und

$$q_{(0,1),2}^{(r,s)} = \begin{cases} 0 & \text{für } s \notin \{r, Nl\} \\ -\overline{C}_{(0,1)}^{(r,s)}(0, 0; 0, t, 1\nu^{(r)}) & \text{für } s = Nl. \end{cases}$$

Für den Fall $i = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} q_{(0,1),3}^{(r,s)} &= D^{(0,1)} \phi_3^{(r,s)}(0, 0) = -D^{(0,1)} \phi_{[t,0;1\nu^{(s)},\mathfrak{z}^{(r)}]}(0, 0) = D^{(0,1)} \phi_{[0,t;1\nu^{(s)},\mathfrak{z}^{(r)}]}(0, 0) \\ &= q_{(0,1),1}^{(r,s)} \end{aligned}$$

und für $i = 4$ dann

$$q_{(0,1),4}^{(r,s)} = q_{(0,1),2}^{(r,s)}.$$

Zusammenfassend gilt für $r \neq s$ im Fall $\alpha = (1, 0)$

$$\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} = 0 \quad \text{für } r \neq s$$

und für $\alpha = (0, 1)$

$$\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} = \begin{cases} q_{\alpha,1}^{(r,s)} \left(a_{[0,\frac{t}{\varepsilon_1};-\frac{h}{\varepsilon_2},0]}^{\alpha} + a_{[-\frac{t}{\varepsilon_1},0;-\frac{h}{\varepsilon_2},0]}^{\alpha} \right) & \text{für } s = Nr \\ q_{\alpha,2}^{(r,s)} \left(a_{[0,\frac{t}{\varepsilon_1};0,\frac{h}{\varepsilon_2}]}^{\alpha} + a_{[-\frac{t}{\varepsilon_1},0;0,\frac{h}{\varepsilon_2}]}^{\alpha} \right) & \text{für } s = Nl \\ 0 & \text{sonst für } s \neq r. \end{cases}$$

Der Entwicklungsterm erste Ordnung der Varianzmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t)\underline{u}_h^T(t)\}$ kann berechnet werden als

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t)\underline{u}_h^T(t)\}_1 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{r=1}^{\tilde{R}_h} \sum_{|\alpha|=1} \varepsilon^{\alpha} \sum_{s=1}^{\tilde{R}_h} \left(\sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,s)} a_{\alpha,i}^{(r,s)} \right) \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{r=1}^{\tilde{R}_h} \left[\sum_{|\alpha|=1} \varepsilon^{\alpha} \sum_{i=1}^4 q_{\alpha,i}^{(r,r)} a_{\alpha,i}^{(r,r)} + \varepsilon_2 q_{(0,1),1}^{(r,Nr)} \int_{-\frac{t}{\varepsilon_1}}^{\frac{t}{\varepsilon_1}} du_1 \int_{-\frac{h}{\varepsilon_2}}^0 du_2 u_2 R(u_1, u_2) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_2 q_{(0,1),2}^{(r,Nl)} \int_{-\frac{t}{\varepsilon_1}}^{\frac{t}{\varepsilon_1}} du_1 \int_0^{\frac{h}{\varepsilon_2}} du_2 u_2 R(u_1, u_2) \right]. \end{aligned}$$

Entsprechende Ergebnisse lassen sich für $|\alpha| \geq 2$ angeben.

5.1.2 Direkte Berechnung bei linearen oder bilinearen Ansatzfunktionen

Ausgehend von der Darstellung (5.21) der Korrelationsfunktion $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$, für die eine uniforme Vernetzung des Randes $(\partial\mathcal{D})_2$ vorausgesetzt wurde, sollen nun unter Annahme linearer oder bilinearer Ansatzfunktionen $\{p_i\}_{i \in \chi_h}$ für die matrixwertigen Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 6$ (vgl. (5.17)) keine Entwicklung (vgl. (5.24)) verwendet werden, sondern diese explizit berechnet werden.

Die Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 6$ sind durch $\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z)$ bzw. $\psi_{[n;p,q]}^{(r,s)}(z)$ aus (5.19) bzw. (5.20) definiert. Beispielsweise ergibt sich für $\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z)$

$$\phi_{[m,n;p,q]}^{(r,s)}(z) = \int_m^{n-z_1} d\tau G_h(t_1 - (\tau + z_1))(C^{(r)})^T \int_p^{q-z_2} d\nu \underline{p}^{(r)}(\nu + z_2)(\underline{p}^{(s)})^T(\nu) C^{(s)} G_h(t_2 - \tau)$$

und das Integral

$$I(z_2; p, q) := \int_p^{q-z_2} d\nu \underline{p}^{(r)}(\nu + z_2)(\underline{p}^{(s)})^T(\nu) \quad \text{mit} \quad (p, q) \in \{(\nu^{(s)}, \nu^{(r)}), (\nu^{(s)}, \nu^{(r)})\} \quad (5.35)$$

lässt sich mit Hilfe der Finite-Elemente-Techniken explizit berechnen. Obiges Integral $I(z_2; p, q)$ ist auch in $\psi_{[n;p,q]}^{(r,s)}$ mit den in (5.35) angegebenen Parametern (p, q) enthalten.

Mit Hilfe der Überlegungen aus Abschnitt 4.1.2 lassen sich die Ansatzfunktionen im Falle einer Vernetzung mit Vierecken als

$$\underline{p}^{(s)}(x_1, x_2) = (p_\alpha^{(s)}(x_1, x_2))_{\alpha=1,\dots,4}, \quad p_\alpha^{(s)}(x_1, x_2) = \varphi_\alpha(\xi_{T^{(s)}}(x_1, x_2))$$

mit den Formfunktionen $\varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ aus (4.32) darstellen. Den Ansatzfunktionen über den Randstücken von $(\partial\mathcal{D})_2$ auf $T^{(s)}$ entsprechen die Formfunktionen auf $(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, 0)$ des Referenzvierecks, d.h.

$$(\varphi_\alpha(\xi_1, 0))_{\alpha=1,\dots,4} = \begin{bmatrix} 1 - \xi_1 \\ \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 5.1 Bei einer Vernetzung mit Dreieckselementen ergibt sich

$$(\varphi_\alpha(\xi_1, 0))_{\alpha=1,2,3} = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aus der Abbildung des Referenzvierecks auf $T^{(s)}$

$$x_1 = h_1 \xi_1 + x_{11}^{(s)}, \quad x_2 = h_2 \xi_2 + x_{12}^{(s)}, \quad (\text{vgl. (2.9)})$$

folgt in den hier gewählten Bezeichnungen mit $x_1 = \nu$, $x_{11}^{(s)} = \nu^{(s)}$ und $h_1 = h = \nu^{(s)} - \nu^{(s)} = \text{const}$

$$\nu = h\xi_1 + \nu^{(s)} \quad \text{bzw.} \quad \xi_1 = \xi_1(\nu) = \frac{1}{h}(\nu - \nu^{(s)}).$$

Mit $p_\alpha^{(s)}(\nu) = p_\alpha^{(s)}(x(\nu))$ aus (5.13) folgt

$$(p_\alpha^{(s)}(\nu))_{\alpha=1,\dots,4} = (p_\alpha^{(s)}(x_1(\nu), x_2(\nu)))_{\alpha=1,\dots,4} = (\varphi_\alpha(\xi_1(\nu), 0))_{\alpha=1,\dots,4} = \begin{bmatrix} 1 - \xi_1(\nu) \\ \xi_1(\nu) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird

$$\xi := \xi_1(\nu) \quad \text{und} \quad \bar{\xi} := \xi_1(\nu + z_2)$$

gesetzt. Mit Hilfe der Terme

$$\eta^{(r,s)}(z_2) := \frac{1}{h}(z_2 - k^{(r,s)}h) \quad \text{mit} \quad k^{(r,s)}h := \nu^{(r)} - \nu^{(s)}$$

folgt

$$h\bar{\xi} = \nu - \nu^{(s)} + z_2 + \nu^{(s)} - \nu^{(r)} = h\xi + h\eta^{(r,s)}(z_2) \quad \text{und} \quad \bar{\xi} = \xi + \eta^{(r,s)}(z_2).$$

Mittels der Variablensubstitution $h\xi = \nu - \nu^{(s)}$ und der Abkürzung η für $\eta^{(r,s)}(z_2)$ lässt sich das Integral $I(z_2; p, q)$ in (5.35) darstellen als

$$I(z_2; p, q) = h \int_{\frac{1}{h}(p - \nu^{(s)})}^{\frac{1}{h}(q - z_2 - \nu^{(s)})} J(\xi, \eta) d\xi \quad \text{mit} \quad J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} (1 - \xi - \eta)(1 - \xi) & (1 - \xi - \eta)\xi & 0 & 0 \\ (\xi + \eta)(1 - \xi) & (\xi + \eta)\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das Einsetzen der möglichen Parameterkonstellationen (p, q) aus (5.35) ergibt

$$I(z_2; \nu^{(s)}, \nu^{(r)}) = h \int_0^{1-\eta} J(\xi, \eta) d\xi \quad \text{und} \quad I(z_2; \nu^{(s)}, \nu^{(r)}) = h \int_1^{-\eta} J(\xi, \eta) d\xi.$$

Einfache Rechnungen führen auf

$$I_1 := I(z_2; \nu^{(s)}, \nu^{(r)}) = \frac{h}{6}(1 - \eta) \begin{bmatrix} (1 - \eta)(2 + \eta) & (1 - \eta)^2 & 0 & 0 \\ \eta^2 + 4\eta + 1 & (1 - \eta)(2 + \eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$I_2 := I(z_2; \nu^{(s)}, \nu^{(r)}) = \frac{h}{6}(1 + \eta) \begin{bmatrix} -(1 + \eta)(2 - \eta) & -\eta^2 + 4\eta - 1 & 0 & 0 \\ -(1 + \eta)^2 & -(1 + \eta)(2 - \eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Beziehung (4.12)

$$G_h(t) = V_h e^{-\Lambda_h t} V_h^T$$

und

$$W_k := W_k^{(r,s)}(z_2) := V_h^T (C^{(r)})^T I_k C^{(s)} V_h, \quad k = 1, 2$$

ergibt sich

$$\phi_{[m,n; \mathbf{1}\nu^{(s)}, \mathbf{2}\nu^{(r)}]}(z) = V_h e^{-\Lambda_h(t_1-z_1)} \int_m^{n-z_1} e^{\Lambda_h \tau} W_1 e^{\Lambda_h \tau} d\tau e^{-\Lambda_h t_2} V_h^T$$

und

$$\phi_{[m,n; \mathbf{2}\nu^{(s)}, \mathbf{1}\nu^{(r)}]}(z) = V_h e^{-\Lambda_h(t_1-z_1)} \int_m^{n-z_1} e^{\Lambda_h \tau} W_2 e^{\Lambda_h \tau} d\tau e^{-\Lambda_h t_2} V_h^T.$$

Aufgrund der Diagonalgestalt von Λ_h , lässt sich die Matrixexponentialfunktion $e^{\Lambda_h \tau}$ darstellen als

$$e^{\Lambda_h \tau} = (\delta_{ij} e^{\lambda_{h,i} \tau})_{i,j=1,\dots,N_h},$$

womit mit $W_k = (W_{k,ij})_{i,j=1,\dots,N_h}$, $k = 1, 2$ folgt

$$e^{\Lambda_h \tau} W_k e^{\Lambda_h \tau} = (W_{k,ij} e^{(\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}) \tau})_{i,j=1,\dots,N_h}$$

und

$$\int_m^{n-z_1} W_{k,ij} e^{(\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}) \tau} d\tau = \frac{W_{k,ij}}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{(\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j})(n-z_1)} - e^{(\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j})m}).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & e^{-\Lambda_h(t_1-z_1)} \int_m^{n-z_1} e^{\Lambda_h \tau} W_k e^{\Lambda_h \tau} d\tau e^{-\Lambda_h t_2} \\ &= \left(\frac{W_{k,ij}}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,i}(t_1-n)-\lambda_{h,j}(t_2-n+z_1)} - e^{-\lambda_{h,i}(t_1-m-z_1)-\lambda_{h,j}(t_2-m)}) \right)_{i,j=1,\dots,N_h}, \end{aligned}$$

was auf folgende Darstellungen der Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 4$ (vgl. (5.17)) führt

$$\begin{aligned} \phi_1^{(r,s)}(z) &= \phi_{[0,t_1; \mathbf{1}\nu^{(s)}, \mathbf{2}\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \\ &= V_h \left[\frac{W_{1,ij}^{(r,s)}(z_2)}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,j}(t_2-t_1+z_1)} - e^{-\lambda_{h,i}(t_1-z_1)-\lambda_{h,j}t_2}) \right]_{i,j=1,\dots,N_h} V_h^T, \quad (5.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2^{(r,s)}(z) &= -\phi_{[0,t_1; \mathbf{2}\nu^{(s)}, \mathbf{1}\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \\ &= V_h \left[\frac{W_{2,ij}^{(r,s)}(z_2)}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,i}(t_1-z_1)-\lambda_{h,j}t_2} - e^{-\lambda_{h,j}(t_2-t_1+z_1)}) \right]_{i,j=1,\dots,N_h} V_h^T, \quad (5.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3^{(r,s)}(z) &= -\phi_{[t_2,0;1\nu^{(s)},2\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \\
&= V_h \left[\frac{W_{1,ij}^{(r,s)}(z_2)}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,i}(t_1-t_2-z_1)} - e^{-\lambda_{h,i}t_1-\lambda_{h,j}(t_2+z_1)}) \right]_{i,j=1,\dots,N_h} V_h^T, \quad (5.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_4^{(r,s)}(z) &= \phi_{[t_2,0;2\nu^{(s)},1\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \\
&= V_h \left[\frac{W_{2,ij}^{(r,s)}(z_2)}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,i}t_1-\lambda_{h,j}(t_2+z_1)} - e^{-\lambda_{h,i}(t_1-t_2-z_1)}) \right]_{i,j=1,\dots,N_h} V_h^T. \quad (5.39)
\end{aligned}$$

Mit der Definition von $\psi_{[n;p,q]}^{(r,s)}$ in (5.20) und den bisherigen Überlegungen gilt

$$\psi_{[n;1\nu^{(s)},2\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) = V_h e^{-\Lambda_h(t_1-z_1)} \int_{-z_1}^{n-z_1} e^{\Lambda_h \tau} W_1 e^{\Lambda_h \tau} d\tau e^{-\Lambda_h t_2} V_h^T$$

und

$$\psi_{[n;2\nu^{(s)},1\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) = V_h e^{-\Lambda_h(t_1-z_1)} \int_{-z_1}^{n-z_1} e^{\Lambda_h \tau} W_2 e^{\Lambda_h \tau} d\tau e^{-\Lambda_h t_2} V_h^T.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&e^{-\Lambda_h(t_1-z_1)} \int_{-z_1}^{n-z_1} e^{\Lambda_h \tau} W_k e^{\Lambda_h \tau} d\tau e^{-\Lambda_h t_2} \\
&= \left(\frac{W_{k,ij}}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,i}(t_1-n)-\lambda_{h,j}(t_2-n+z_1)} - e^{-\lambda_{h,i}t_1-\lambda_{h,j}(t_2+z_1)}) \right)_{i,j=1,\dots,N_h},
\end{aligned}$$

womit aus (5.17) folgt

$$\begin{aligned}
\phi_5^{(r,s)}(z) &= \psi_{[t_1;1\nu^{(s)},2\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \\
&= V_h \left[\frac{W_{1,ij}^{(r,s)}(z_2)}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,i}(t_2-t_1+z_1)} - e^{-\lambda_{h,i}t_1-\lambda_{h,j}(t_2+z_1)}) \right]_{i,j=1,\dots,N_h} V_h^T, \quad (5.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_6^{(r,s)}(z) &= -\psi_{[t_1;2\nu^{(s)},1\nu^{(r)}]}^{(r,s)}(z) \\
&= V_h \left[\frac{W_{2,ij}^{(r,s)}(z_2)}{\lambda_{h,i} + \lambda_{h,j}} (e^{-\lambda_{h,i}t_1-\lambda_{h,j}(t_2+z_1)} - e^{-\lambda_{h,i}(t_2-t_1+z_1)}) \right]_{i,j=1,\dots,N_h} V_h^T. \quad (5.41)
\end{aligned}$$

Die matrixwertigen Funktionen $\phi_i^{(r,s)}$, $i = 1, \dots, 6$ sind somit im Falle einer gleichmäßigen Vernetzung des Randes $(\partial D)_2$ durch die Gleichungen (5.36)-(5.41) bestimmt. Die Summanden aus Gleichung (5.21) zur Berechnung der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ ergeben sich durch Integration über $\phi_i^{(r,s)}(\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2) R(u_1, u_2)$.

5.1.3 Explizite Berechnung

Durch das Ausnutzen der ε -Korreliertheit der zufälligen Randbedingung ${}^\varepsilon\overline{P}$ kann eine explizite Berechnungsvorschrift der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\}$ angegeben werden. Diese ist besonders effektiv, wenn die Ansatzfunktionen $\{p_i\}_{i \in \chi_h}$ als „einfache“ Funktionen, beispielsweise als linear oder bilinear, vorausgesetzt sind.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist wieder die Zerlegung des örtlichen Integrationsgebietes in Gleichung (5.12) (vgl. auch Abschnitt 4.1.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} &= \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} d\tau_2 G_h(t_1 - \tau_1) \sum_{r,s=1}^{\tilde{R}_h} (C^{(r)})^T \\ &\quad \cdot \left[\int_{I^{(r)}} d\nu_1 \int_{I^{(s)}} d\nu_2 \underline{p}^{(r)}(\nu_1) (\underline{p}^{(s)})^T(\nu_2) R\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\varepsilon_1}, \frac{\nu_2 - \nu_1}{\varepsilon_2}\right) \right] C^{(s)} G_h(t_2 - \tau_2). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Aufgrund der angenommenen ε -Korreliertheit der zufälligen Randbedingung ${}^\varepsilon\overline{P}$ besitzt deren Korrelationsfunktion die Eigenschaft

$$R_{{}^\varepsilon\overline{P}{}^\varepsilon\overline{P}}(\tau_2 - \tau_1, \nu_2 - \nu_1) = R\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\varepsilon_1}, \frac{\nu_2 - \nu_1}{\varepsilon_2}\right) = 0 \quad \text{falls } |\tau_2 - \tau_1| \geq \varepsilon_1 \text{ oder } |\nu_2 - \nu_1| \geq \varepsilon_2.$$

Demzufolge sind in Gleichung (5.42) bei festem $\nu_1 \in I^{(r)}$ die Integrale über den Intervallen $I^{(s)}$ höchstens dann von null verschieden, wenn die Bedingung $I^{(s)} \cap D_{\varepsilon_2}(\nu_1) \neq \emptyset$ mit

$$D_{\varepsilon_2}(\nu_1) := \{\nu_2 \in I \cap (\nu_1 - \varepsilon_2, \nu_1 + \varepsilon_2)\}, \quad I = \bigcup_{k \in \tilde{\chi}_h} I^{(k)}$$

erfüllt ist. Ebenso ist für festes τ_1 das Integral über $[0, t_2]$ höchstens dann von null verschieden, wenn $\tau_2 \in D_{\varepsilon_1}(\tau_1)$ mit

$$D_{\varepsilon_1}(\tau_1) := \{\tau_2 \in [0, t_2] \cap (\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)\}$$

gilt. Damit beschränkt sich das Integrationsgebiet in (5.42) bei festem Punkt (τ_1, ν_1) auf die Menge

$$D_\varepsilon(\tau_1, \nu_1) := \{(\tau_2, \nu_2) \in ([0, t_2] \cap (\tau_1 - \varepsilon_1, \tau_1 + \varepsilon_1)) \times (I \cap (\nu_1 - \varepsilon_2, \nu_1 + \varepsilon_2))\},$$

da sich für alle $(\tau_2, \nu_2) \notin D_\varepsilon(\tau_1, \nu_1)$ die Korrelationsfunktion $R_{{}^\varepsilon\overline{P}{}^\varepsilon\overline{P}}(\tau_2 - \tau_1, \nu_2 - \nu_1)$ als null erweist.

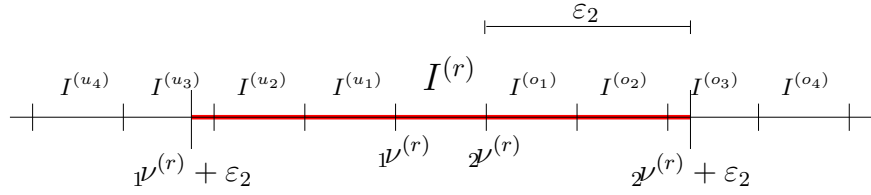
Somit ist für einen festen Index $r \in \tilde{\psi}_h$ die Summe über s in Gleichung (5.42) nur über solche Intervalle $I^{(s)}$ zu erstrecken, für welche $s \in M_{\varepsilon_2}^{(r)}$ erfüllt ist. Die Menge $M_{\varepsilon_2}^{(r)}$ ist dabei definiert durch

$$M_{\varepsilon_2}^{(r)} := \{s \in \tilde{\psi}_h : \mathbf{1}^{\nu^{(s)}} \vee \mathbf{2}^{\nu^{(s)}} \in (\mathbf{1}^{\nu^{(r)}} - \varepsilon_2, \mathbf{2}^{\nu^{(r)}} + \varepsilon_2)\}.$$

Illustrierend sei dazu die Abb. 5.5 angegeben, wobei sich in diesem Beispiel

$$u_3, u_2, u_1, r, o_1, o_2, o_3 \in M_{\varepsilon_2}^{(r)}, \quad \text{aber } u_4, o_4 \notin M_{\varepsilon_2}^{(r)}$$

ergibt.

Abbildung 5.5: Integrationsgebiet für festes $r \in \tilde{\psi}_h$ bezüglich $s \in M_{\varepsilon_2}^{(r)}$

Aus diesen Überlegungen lässt sich aus Gleichung (5.42) mit Hilfe von (4.12) folgende Beziehung für die numerische Berechnung der Korrelationsfunktion ableiten

$$\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t_1)\underline{u}_h^T(t_2)\} = V_h \int_0^{t_1} d\tau_1 \int_{\max\{0, \tau_1 - \varepsilon_1\}}^{\min\{t_2, \tau_1 + \varepsilon_2\}} d\tau_2 e^{-\Lambda_h(t_1 - \tau_1)} V_h^T \cdot \sum_{r=1}^{\tilde{R}_h} \sum_{s \in M_{\varepsilon_2}^{(r)}} (C^{(r)})^T \left[\int_{I^{(r)}} d\nu_1 \int_{I^{(s)}} d\nu_2 \underline{p}^{(r)}(\nu_1) (\underline{p}^{(s)})^T(\nu_2) R\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\varepsilon_1}, \frac{\nu_2 - \nu_1}{\varepsilon_2}\right) \right] C^{(s)} V_h e^{-\Lambda_h(t_2 - \tau_2)} V_h^T.$$

Als Anmerkung werde nochmals das in Abb. 5.5 betrachtete Beispiel herangezogen. Es ist $o_3 \in M_{\varepsilon_2}^{(r)}$ und folglich wird das Integral über $I^{(o_3)}$ betrachtet. Aufgrund der Beziehung

$$|\nu_2 - \nu_1| \geq \varepsilon_2 \quad \text{für alle } \nu_1 \in I^{(r)} \text{ und } \nu_2 \in I^{(o_3)} \setminus \{\nu_2 : \nu_2 > 2\nu^{(r)} + \varepsilon_2\}$$

erweist sich für diese (ν_1, ν_2) die Korrelationsfunktion R als null und das Integrationsgebiet betrifft nur das Teilgebiet $[1\nu^{(o_3)}, 2\nu^{(r)} + \varepsilon_2]$ von $I^{(o_3)}$.

5.2 Berechnung der Korrelationsfunktion über die Fourier-Methode

In diesem Abschnitt soll das RAWP mit zufälliger Randbedingung $\bar{\varepsilon}P$ mittels der Fourier-Methode gelöst werden. Dazu wird das Gebiet D wie schon in Abschnitt 4.2 auf ein Rechteck (vgl. Abb 3.1) beschränkt. Das betrachtete RAWP hat dann folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\ \text{AB: } \bar{u}(0, x, \omega) &= 0, \quad x \in \bar{D} \\ \text{RB: } \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \Big|_{(\partial D)_2} &= \bar{\varepsilon}P(t, x_1, \omega) \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha_i \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,i}} &= 0, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Über den Rand $(\partial D)_2 = [-R, R] \times \{0\}$ erfolgt der zufällige Wärmefluss $\bar{\varepsilon}P$ und an den Rändern $(\partial D)_{3,2} = \{R\} \times [0, H]$, $(\partial D)_{3,3} = [-R, R] \times \{H\}$ und $(\partial D)_{3,4} = \{-R\} \times [0, H]$ liegen Robin-Bedingungen mit den Wärmeübergangszahlen α_i , $i = 2, 3, 4$ an.

Um die in Kapitel 3.2 beschriebene Vorgehensweise anwenden zu können, ist es zweckmäßig die inhomogene Neumann-Bedingung in (5.43) in eine homogene umzuwandeln. Dazu wird

die Transformation

$$\tilde{u}(t, x, \omega) := 2H\bar{u}(t, x, \omega) - \frac{1}{\lambda}(H - x_2)^2 \bar{\varepsilon}P(t, x_1, \omega)$$

vorgenommen, womit sich folgendes RAWP für $\tilde{u}$ ergibt

$$\tilde{u}_t - \lambda \Delta \tilde{u} = 2 \bar{\varepsilon}P + (H - x_2)^2 (\bar{\varepsilon}P_{x_1 x_1} - \frac{1}{\lambda} \bar{\varepsilon}P_t), \quad (5.44)$$

$$\text{AB: } \tilde{u}(0, x, \omega) = 0, \quad x \in \bar{D}$$

$$\text{RB: } \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \right|_{(\partial D)_2} = 0 \quad (5.45)$$

$$\left(\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha_i \tilde{u}(t, x, \omega) \right) \right|_{(\partial D)_{3,i}} = 0, \quad i = 2, 3, 4, \quad (5.46)$$

wobei die Verträglichkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}P(0, x_1, \omega) &= 0, \\ \lambda \bar{\varepsilon}P_{x_1}(t, R, \omega) + \alpha_2 \bar{\varepsilon}P(t, R, \omega) &= 0, \\ -\lambda \bar{\varepsilon}P_{x_1}(t, -R, \omega) + \alpha_4 \bar{\varepsilon}P(t, -R, \omega) &= 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

berücksichtigt werden müssen. Diese stellen die Kompatibilität zwischen der zufälligen Neumann-Bedingung $\bar{\varepsilon}P$ und der Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$ und zwischen $\bar{\varepsilon}P$ und den Robin-Bedingungen in den den Eckpunkten $(-R, 0)$ bzw. $(R, 0)$ sicher. Es gilt etwa

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial N}(t, R, x_2, \omega) + \alpha_2 \tilde{u}(t, R, x_2, \omega) = \lambda \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}(t, R, x_2, \omega) + \alpha_2 \tilde{u}(t, R, x_2, \omega) = 0.$$

Differentiation nach x_2 und Betrachtung der entstehenden Gleichung an $x_2 = 0$ führt mit $-\lambda \bar{u}_{x_2}(t, x_1, 0, \omega) = \bar{\varepsilon}P(t, x_1, \omega)$ auf

$$\lambda \bar{\varepsilon}P_{x_1}(t, R, \omega) + \alpha_2 \bar{\varepsilon}P(t, R, \omega) = 0.$$

Auf analoge Weise ergibt sich

$$-\lambda \bar{\varepsilon}P_{x_1}(t, -R, \omega) + \alpha_4 \bar{\varepsilon}P(t, -R, \omega) = 0.$$

Der Lösungsansatz der Fourier-Methode besitzt wie in Abschnitt 3.2 beschrieben die Form einer unendlich Reihe

$$\tilde{u}(t, x, \omega) = \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}(t, \omega) f_{kl}(x). \quad (5.48)$$

Dabei stellen die Funktionen f_{kl} die Eigenfunktionen des negativen Laplace-Operators $-\Delta$ und der gegebenen homogenen Randbedingungen (5.45) und (5.46) dar und ergeben sich als Lösung des Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \mu f \\ \text{RB: } \left. \frac{\partial f}{\partial N} \right|_{(\partial D)_2} &= 0, \quad \left(\left. \frac{\partial f}{\partial N} + \alpha_i f \right) \right|_{(\partial D)_{3,i}} = 0, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Eigenfunktionen erfolgt über den in Abschnitt 4.2 bereits vorgestellten Separationsansatz. Die Doppelindizierung in (5.48) ist wieder dem zweidimensionalen Rechteckgebiet D geschuldet.

Die zeitabhängigen Koeffizienten c_{kl} , $k, l = 1, 2, \dots$ des Lösungsansatzes (5.48) werden als Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} c'_{kl}(t, \omega) + \lambda \mu_{kl} c_{kl}(t, \omega) &= (g(t, \cdot, \omega), f_{kl}) \\ AB : c_{kl}(0, \omega) &= 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

bestimmt (vgl. (3.17), (3.18)). Dabei bezeichnet die Funktion

$$g(t, x, \omega) := 2 \bar{\varepsilon} P(t, x_1, \omega) + (H - x_2)^2 \left(\bar{\varepsilon} P_{x_1 x_1}(t, x_1, \omega) - \frac{1}{\lambda} \bar{\varepsilon} P_t(t, x_1, \omega) \right)$$

die Inhomogenität der Differentialgleichung (5.44). Die Terme $(g(t, \cdot, \omega), f_{kl})$, $k, l = 1, 2, \dots$ sind als Skalarprodukte im Raum $L_2(D)$

$$(g(t, \cdot, \omega), f_{kl}) = \int_D g(t, x, \omega) f_{kl}(x) dx$$

definiert. Die Lösungen der zufälligen Anfangswertprobleme (5.49) besitzen dann die Gestalt

$$c_{kl}(t, \omega) = \int_0^t (g(s, \cdot, \omega), f_{kl}) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} ds, \quad k, l = 1, 2, \dots,$$

womit sich die Fourier-Lösung des RAWP (5.44)-(5.46) wie folgt darstellen lässt

$$\tilde{u}(t, x, \omega) = \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}(t, \omega) f_{kl}(x) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \int_0^t (g(s, \cdot, \omega), f_{kl}) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} ds f_{kl}(x).$$

Für die Berechnung der Integrale c_{kl} wird der Separationsansatz

$$f_{kl}(x) = \varphi_{1k}(x_1) \varphi_{2l}(x_2), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2$$

zur Bestimmung der Eigenfunktionen genutzt, wobei sich die Funktionen $\varphi_{1k}, \varphi_{2l}$ aus (4.46) bzw. (4.47) ergeben. Damit lassen sich die Ausdrücke $(g(t, \cdot, \omega), f_{kl})$ darstellen als

$$\begin{aligned} (g(t, \cdot, \omega), f_{kl}) &= \int_0^H (H-y)^2 \varphi_{2l}(y) dy \int_{-R}^R \left(\bar{\varepsilon} P_{zz}(t, z, \omega) - \frac{1}{\lambda} \bar{\varepsilon} P_t(t, z, \omega) \right) \varphi_{1k}(z) dz \\ &\quad + 2 \int_0^H \varphi_{2l}(y) dy \int_{-R}^R \bar{\varepsilon} P(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) dz. \end{aligned}$$

Zum Zwecke einer übersichtlicheren Schreibweise werden die Terme

$$p_l := \int_0^H (H-y)^2 \varphi_{2l}(y) dy \quad \text{und} \quad q_l := \int_0^H \varphi_{2l}(y) dy$$

gesetzt.

Lemma 5.2 *Es gilt*

$$\begin{aligned}
1. \quad p_l &:= \int_0^H (H-z)^2 \varphi_{2l}(z) dz = \begin{cases} \frac{1}{3} \sqrt{H}^5 & \text{falls } \mu_{2l} = 0 \text{ Eigenwert} \\ \frac{2Hh_2}{\mu_{2l}} \left(1 - \frac{\sin(\sqrt{\mu_{2l}}H)}{\sqrt{\mu_{2l}}H} \right) & \text{sonst,} \end{cases} \\
2. \quad q_l &:= \int_0^H \varphi_{2l}(z) dz = \begin{cases} \sqrt{H} & \text{falls } \mu_{2l} = 0 \text{ Eigenwert} \\ h_2 \frac{\sin(\sqrt{\mu_{2l}}H)}{\sqrt{\mu_{2l}}} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \\
3. \quad \int_{-R}^R \varepsilon \overline{P}_{zz}(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) dz &= -\mu_{1k} \int_{-R}^R \varepsilon \overline{P}(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) dz.
\end{aligned}$$

Beweis. Es sei zuerst angenommen, dass $\mu_{2l} = 0$ ein Eigenwert ist. Dann folgt aus dem Gleichungssystem (4.55) die Beziehung

$$\alpha_3 h_2 = 0.$$

Der Fall $\alpha_3 \neq 0$ führt auf $h_2 = 0$ und folglich kann $\mu_{2l} = 0$ kein Eigenwert sein. Im adiabatische Fall $\alpha_3 = 0$ ergibt sich die konstante Eigenfunktion

$$\varphi_{2l}(z) = \sqrt{\frac{1}{H}}$$

und die Integrale p_l und q_l haben die Gestalt

$$p_l = \sqrt{\frac{1}{H}} \int_0^H (H-z)^2 dz = \frac{1}{3} \sqrt{H}^5, \quad q_l = \sqrt{H}.$$

Sei nun $\mu_{2l} \neq 0$ vorausgesetzt. Dann folgt aus dem Gleichungssystem (4.55) die Beziehung $h_1 = 0$, welche auf die Eigenfunktion

$$\varphi_{2l}(z) = h_2 \cos(\sqrt{\mu_{2l}}z)$$

führt. Das Integral p_l berechnet sich in diesem Fall als

$$p_l = h_2 \int_0^H (H-z)^2 \cos(\sqrt{\mu_{2l}}z) dz = \frac{2Hh_2}{\mu_{2l}} \left(1 - \frac{\sin(\sqrt{\mu_{2l}}H)}{\sqrt{\mu_{2l}}H} \right),$$

und der Ausdruck q_l ist offensichtlich, woraus die Behauptungen aus 1. und 2. folgen.

Die zweimalige Anwendung der partiellen Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^R \varepsilon \overline{P}_{zz}(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) dz &= \left[\varepsilon \overline{P}_z(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) - \varepsilon \overline{P}(t, z, \omega) \varphi'_{1k}(z) \right]_{-R}^R \\
&+ \int_{-R}^R \varepsilon \overline{P}(t, z, \omega) \varphi''_{1k}(z) dz.
\end{aligned}$$

Die Funktionen φ_{1k} erfüllen die Randbedingungen

$$\varphi'_{1k}(R) = -\frac{\alpha_2}{\lambda}\varphi_{1k}(R) \quad \text{und} \quad \varphi'_{1k}(-R) = \frac{\alpha_4}{\lambda}\varphi_{1k}(-R),$$

woraus

$$\begin{aligned} & \left[\bar{\varepsilon}P_z(t, z, \omega)\varphi_{1k}(z) - \bar{\varepsilon}P(t, z, \omega)\varphi'_{1k}(z) \right]_{-R}^R \\ &= \left[\bar{\varepsilon}P_z(t, R, \omega)\varphi_{1k}(R) - \bar{\varepsilon}P(t, R, \omega)\varphi'_{1k}(R) \right] \\ & \quad - \left[\bar{\varepsilon}P_z(t, -R, \omega)\varphi_{1k}(-R) - \bar{\varepsilon}P(t, -R, \omega)\varphi'_{1k}(-R) \right] \\ &= \left(\bar{\varepsilon}P_z(t, R, \omega) + \frac{\alpha_2}{\lambda}\bar{\varepsilon}P(t, R, \omega) \right) \varphi_{1k}(R) - \left(\bar{\varepsilon}P_z(t, -R, \omega) - \frac{\alpha_4}{\lambda}\bar{\varepsilon}P(t, -R, \omega) \right) \varphi_{1k}(-R) \end{aligned}$$

folgt. Aufgrund der Verträglichkeitsbedingungen (5.47) ergibt sich

$$\left[\bar{\varepsilon}P_z(t, z, \omega)\varphi_{1k}(z) - \bar{\varepsilon}P(t, z, \omega)\varphi'_{1k}(z) \right]_{-R}^R = 0.$$

Damit gilt

$$\int_{-R}^R \bar{\varepsilon}P_{zz}(t, z, \omega)\varphi_{1k}(z)dz = \int_{-R}^R \bar{\varepsilon}P(t, z, \omega)\varphi''_{1k}(z)dz$$

und mit der Differentialgleichung in (4.46) für φ_{1k} folgt die Behauptung in 3. $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas lassen sich die Koeffizienten $(g(t, \cdot, \omega), f_{kl})$, $k, l = 1, 2, \dots$ darstellen als

$$(g(t, \cdot, \omega), f_{kl}) = (2q_l - \mu_{1k}p_l) \int_{-R}^R \bar{\varepsilon}P(t, z, \omega)\varphi_{1k}(z)dz - \frac{1}{\lambda}p_l \int_{-R}^R \bar{\varepsilon}P_t(t, z, \omega)\varphi_{1k}(z)dz \quad (5.50)$$

und im folgenden Lemma sind die Lösungen des Anfangswertproblems (5.49) angegeben.

Lemma 5.3 *Die Lösung $c_{kl}(t, \omega)$, $k, l = 1, 2, \dots$ des zufälligen Anfangswertproblems (5.49) besitzt die Gestalt*

$$\begin{aligned} c_{kl}(t, \omega) &= \int_0^t (g(s, \cdot, \omega), f_{kl}) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} ds \\ &= (2q_l + \mu_{2l}p_l) \int_0^t \int_{-R}^R \bar{\varepsilon}P(s, z, \omega)\varphi_{1k}(z) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} dz ds - \frac{1}{\lambda}p_l \int_{-R}^R \bar{\varepsilon}P(t, z, \omega)\varphi_{1k}(z) dz. \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst ist

$$c_{kl}(t, \omega) = \int_0^t (g(s, \cdot, \omega), f_{kl}) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} ds$$

die Lösung des Anfangswertproblems (5.49). Mit Hilfe der Darstellung (5.50) ergibt sich

$$\begin{aligned} c_{kl}(t, \omega) &= (2q_l - \mu_{1k}p_l) \int_0^t \int_{-R}^R \bar{\varepsilon}P(s, z, \omega) \varphi_{1k}(z) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} dz ds \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} p_l \int_{-R}^R \varphi_{1k}(z) \int_0^t \bar{\varepsilon}P_s(s, z, \omega) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} ds dz. \end{aligned}$$

Das Integral $\int_0^t \bar{\varepsilon}P_s(s, z, \omega) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} ds$ lässt sich mittels partieller Integration und unter Beachtung der Verträglichkeitsbedingung $\bar{\varepsilon}P(0, z, \omega) = 0$ (vgl. (5.47)) wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} \int_0^t \bar{\varepsilon}P_s(s, z, \omega) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} ds &= \bar{\varepsilon}P(s, z, \omega) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} \Big|_{s=0}^t - \lambda\mu_{kl} \int_0^t \bar{\varepsilon}P(s, z, \omega) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} ds \\ &= \bar{\varepsilon}P(t, z, \omega) - \lambda\mu_{kl} \int_0^t \bar{\varepsilon}P(s, z, \omega) e^{-\lambda\mu_{kl}(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit Hilfe der Beziehung $\mu_{kl} = \mu_{1k} + \mu_{2l}$ die Behauptung. $\square$

Die Beweise der Lemma 5.2 Eigenschaft 3 und 5.3 nutzen das Erfülltsein der Verträglichkeitsbedingungen (5.47). Um dies zu gewährleisten und die zu Beginn von Kapitel 5 getroffenen Annahmen an $\bar{\varepsilon}P$ zu erfüllen, wird die zufällige Randbedingung $\bar{\varepsilon}P$ in der Umgebung von $t = 0$ und in den Umgebungen der Eckpunkte $(-R, 0)$ und $(R, 0)$ abgeändert. Dazu wird $\bar{\varepsilon}P$ wie folgt dargestellt

$$\bar{\varepsilon}P(t, x_1, \omega) = \psi(t, x_1) \bar{\varepsilon}P_1(t, x_1, \omega).$$

Die Funktion $\psi(t, x_1)$ besitzt dabei die Eigenschaften

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(t, x_1) \leq 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \delta_t \quad \text{und} \quad |x_1| \geq R - \delta_{x_1}, \\ \psi(0, -R) = \psi(0, R) = 0, \quad \psi(t, x_1) = 1 \quad \text{für} \quad t \geq \delta_t, \quad |x_1| \leq R - \delta_{x_1} \end{aligned}$$

mit $\delta_t, \delta_{x_1} > 0$ und $\bar{\varepsilon}P_1$ bezeichnet eine gegebene ε -korrelierte, schwach homogene zufällige Funktion, so wie die Voraussetzungen in diesem Kapitel an $\bar{\varepsilon}P$ gestellt wurden. Damit sind allerdings die geforderten stochastischen Eigenschaften wie Homogenität oder ε -Korreliertheit des zufälligen Feldes $\bar{\varepsilon}P$ in den jeweiligen δ -Umgebungen nicht gewährleistet. Numerische Untersuchungen zeigen jedoch, dass dies für $|x_1| \leq R$ und $t \geq 0$ einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Lösung sowie deren Korrelationsfunktion besitzt.

Die Lösung $\tilde{u}(t, x, \omega)$ des transformierten RAWP (5.44)-(5.46) ist dann in der Form

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, x, \omega) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}(t, \omega) f_{kl}(x) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[(2q_l + \mu_{2l}p_l) \int_0^t \int_{-R}^R \tilde{P}(s, z, \omega) \varphi_{1k}(z) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} dz ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\lambda} p_l \int_{-R}^R \tilde{P}(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) dz \right] f_{kl}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

bestimmt. Durch die Rücktransformation

$$\bar{u}(t, x, \omega) = \frac{1}{2H} \tilde{u}(t, x, \omega) + \frac{(H - x_2)^2}{2\lambda H} \tilde{P}(t, x_1, \omega)$$

ergibt sich daraus die Lösung $\bar{u}$ des ursprünglichen RAWP (5.43). Die Reihenentwicklung des Terms $(H - x_2)^2 \tilde{P}(t, x_1, \omega)$ liefert

$$\begin{aligned}(H - x_2)^2 \tilde{P}(t, x_1, \omega) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} ((H - \cdot)^2 \tilde{P}(t, \cdot, \omega), f_{kl}) f_{kl}(x_1, x_2) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \int_0^H (H - y)^2 \varphi_{2l}(y) dy \int_{-R}^R \tilde{P}(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) dz f_{kl}(x_1, x_2) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} p_l \int_{-R}^R \tilde{P}(t, z, \omega) \varphi_{1k}(z) dz f_{kl}(x_1, x_2),\end{aligned}$$

womit sich $\bar{u}$ als

$$\bar{u}(t, x, \omega) = \frac{1}{2H} \sum_{k,l=1}^{\infty} (2q_l + \mu_{2l}p_l) \int_0^t \int_{-R}^R \tilde{P}(s, z, \omega) \varphi_{1k}(z) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} dz ds f_{kl}(x_1, x_2) \quad (5.51)$$

darstellen lässt. Diese Reihe konvergiert f.s. im Raum $L_2(\mathbb{D})$. Zum Nachweis wird die Norm $\|\bar{u}(t, \cdot, \omega)\|^2 = \int_{\mathbb{D}} \bar{u}(t, x, \omega)^2 dx$ betrachtet. Da $\{f_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem im Raum $L_2(\mathbb{D})$ darstellt, gilt

$$\|\bar{u}(t, \cdot, \omega)\|^2 = \frac{1}{4H^2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[(2q_l + \mu_{2l}p_l) \int_0^t \int_{-R}^R \tilde{P}(s, z, \omega) \varphi_{1k}(z) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} dz ds \right]^2.$$

Aus den Bestimmungsgleichungen der Terme p_l und q_l in Lemma 5.2 folgt die Beschränktheit des Terms $|2q_l + \mu_{2l}p_l|$. Mit Hilfe der Beziehungen $|2q_l + \mu_{2l}p_l| \leq s_{p,q}$, $s_{p,q} < \infty$ und

$\mu_{kl} = \mu_{1k} + \mu_{2l}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot, \omega)\|^2 &\leq \frac{s_{p,q}^2}{4H^2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\int_0^t \int_{-R}^R \bar{\varepsilon} P(s, z, \omega) \varphi_{1k}(z) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} dz ds \right]^2 \\ &\leq \frac{s_{p,q}^2}{4H^2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\int_{-R}^R \int_0^t \bar{\varepsilon} P(s, z, \omega) e^{-\lambda \mu_{2l}(t-s)} ds \varphi_{1k}(z) dz \right]^2. \end{aligned}$$

Da die Folge $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem im Raum $L_2([-R, R])$ darstellt, ist die Besselsche Ungleichung anwendbar und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{-R}^R \int_0^t \bar{\varepsilon} P(s, z, \omega) e^{-\lambda \mu_{2l}(t-s)} ds \varphi_{1k}(z) dz \right]^2 &\leq \int_{-R}^R \int_0^t (\bar{\varepsilon} P(s, z, \omega) e^{-\lambda \mu_{2l}(t-s)})^2 ds dz \\ &< \infty \quad \forall l, \quad f.s.. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|u(t, \cdot, \omega)\|^2 \leq \frac{s_{p,q}^2}{4H^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-R}^R \int_0^t (\bar{\varepsilon} P(s, z, \omega) e^{-\lambda \mu_{2l}(t-s)})^2 ds dz,$$

woraus sich mit Hilfe der Ordnungsbeziehung (4.50) $\mu_{2l} = O(l^2)$ für $l \rightarrow \infty$

$$\|u(t, \cdot, \omega)\|^2 < \infty$$

ableiten lässt.

Mit Hilfe ähnlicher Überlegungen wie in Kapitel 4.2 ergibt sich die L_2 -Konvergenz der Reihe für den Erwartungswert der Fourier-Lösung (5.51)

$$\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)\} = \frac{1}{2H} \sum_{k,l=1}^{\infty} (2q_l + \mu_{2l} p_l) \int_0^t \int_{-R}^R \mathbf{E}\{\bar{\varepsilon} P(s, z)\} \varphi_{1k}(z) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} dz ds f_{kl}(x),$$

wobei aufgrund der Zentriertheit von $\bar{\varepsilon} P$ gilt

$$\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)\} = 0$$

und der Reihe für die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\bar{u}(t_1, x) \bar{u}(t_2, y)\} &= \frac{1}{4H^2} \sum_{k_1, l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2, l_2=1}^{\infty} (2q_{l_1} + \mu_{2l_1} p_{l_1})(2q_{l_2} + \mu_{2l_2} p_{l_2}) f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(y) \quad (5.52) \\ &\quad \int_0^{t_1} \int_{-R}^R \int_0^{t_2} \int_{-R}^R \mathbf{E}\{\bar{\varepsilon} P(s, z) \bar{\varepsilon} P(\bar{s}, \bar{z})\} \varphi_{1k_1}(z) \varphi_{1k_2}(\bar{z}) e^{-\lambda(\mu_{k_1 l_1}(t_1-s) + \mu_{k_2 l_2}(t_2-\bar{s}))} d\bar{z} d\bar{s} dz ds. \end{aligned}$$

Dabei kann die Berechnungen des Vierfachintegrals über die in den Abschnitten 5.1.1, und 5.1.3 vorgestellte Methoden erfolgen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Funktionen f_{kl} im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen p_i der Finite Elemente Methode im Allgemeinen auf dem gesamten Gebiet D von Null verschieden sein können.

Kapitel 6

Simulation

Eine weitere Möglichkeit RAWP mit zufälligen Parametern zu lösen, bietet die Monte-Carlo-Simulation. Diese Lösungstechnik ist eine statistische Simulationstechnik, welche auf Folgen von Zufallsgrößen basiert. Das Ziel der Monte-Carlo-Methode ist die Simulation eines physikalischen oder mathematischen Systems durch die Erhebung einer Stichprobe für die zufälligen Einflussgrößen und den sich noch anschließenden Berechnungen zur Beschreibung der Systementwicklung. Wie der Name erahnen lässt, besitzt die Idee zu dieser Methode ihren Ursprung in der Beschreibung des Glücksspiels, heute werden Monte-Carlo-Methoden allerdings in den vielfältigsten Gebieten erfolgreich angewandt. Der Vorteil der Monte-Carlo-Simulation besteht darin, dass selbst solche stochastische Probleme gelöst werden können, für die keine anderen Lösungen existieren oder diese zu komplex erscheinen.

Die Ausgangspunkte der Simulation für die in den Kapiteln 4 bzw. 5 betrachteten RAWP mit zufälliger Anfangs- bzw. Randbedingung sind nicht die klassischen Formulierungen (4.1)-(4.4) bzw. (5.1)-(5.4), sondern die mit Hilfe der FE-Diskretisierung erhaltenen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (4.7) bzw. (5.7). Der Zufall steckt dabei im Vektor $\underline{d}_h$ in Form der zufälligen Anfangsbedingung ${}^\varepsilon\overline{u}_0$

$$\underline{d}_h(\omega) = [({}^\varepsilon\overline{u}_0, p_i)]_{i \in \chi_h}^T$$

bzw. im Lastvektor $\underline{f}_h$ in Form der zufälligen Randbedingung ${}^\varepsilon\overline{P}$

$$\underline{f}_h(t, \omega) = \left[\int_{(\partial D)_2} {}^\varepsilon\overline{P}(t, x, \omega) p_i(x) ds \right]_{i \in \chi_h}^T.$$

Das Ziel besteht nun darin, Simulationsmodelle für die zufälligen Einflussgrößen ${}^\varepsilon\overline{u}_0$ und ${}^\varepsilon\overline{P}$ zu finden, so dass die Bedingungen aus Annahme 1.3 so gut wie möglich erfüllt sind. In dieser Arbeit werden zeitdiskrete Moving-Average-Felder zur Modellierung der zufälligen ε -korrelierten Funktionen ${}^\varepsilon\overline{u}_0$ und ${}^\varepsilon\overline{P}$ genutzt. Dieser Zugang erweist sich als geeignet, da die Gestalt der Korrelationsfunktion von Moving-Average-Feldern gut mit der definierenden Eigenschaft ε -korrelierter Funktionen übereinstimmt. Mittels zweckmäßiger Interpolation können so zufällige Funktionen erzeugt werden, deren Korrelationsfunktionen an die eines vorgegebenen homogenen und ε -korrelierten Feldes angepasst werden.

Anhand dieser Modelle können Realisierungen der zufälligen Anfangs- bzw. Randbedingung gewonnen werden und damit die Anfangswertaufgaben (4.7) bzw. (5.7) als deterministische Probleme mit Hilfe numerischer Methoden gelöst werden. Aus diesen Lösungen $\underline{u}_h^i(t)$ können über den Lösungsansatz

$$\bar{u}_h^i(t, x) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}^i(t) p_j(x)$$

mögliche Temperaturverteilungen über dem Gebiet D zu bestimmten Zeitpunkten t bestimmt werden. Nach dem Gesetz der großen Zahlen stellt die Beziehung

$$E^N(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{u}_h^i(t, x)$$

für hinreichend viele Simulationswiederholungen N die Approximation des Erwartungswertes $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)\}$ dar. Für die Approximation der Korrelationsfunktion kann folgende Schätzfunktion verwendet werden (vgl. [19])

$$R^N(t_1, t_2, x, y) = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N \bar{u}_h^i(t_1, x) \bar{u}_h^i(t_2, y) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{u}_h^i(t_1, x) \sum_{i=1}^N \bar{u}_h^i(t_2, y) \right)$$

und insbesondere gilt dann für die Varianzfunktion

$$V^N(t, x) = R^N(t, t, x, x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\bar{u}_h^i(t, x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{u}_h^i(t, x) \right)^2. \quad (6.1)$$

In den folgenden Abschnitten wird ein auf Moving-Average-Feldern basierendes Simulationsverfahren für die Generierung homogener ε -korrelierter Zufallsfelder vorgestellt.

6.1 Definition und Eigenschaften von Moving-Average-Felder

Definition 6.1 Ein zufälliges diskretes Feld $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$, welches sich in der Form

$$\eta_{s,t} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_i b_j \xi_{s-i,t-j}, \quad s, t \in \mathbb{Z}, \quad p, q \in \mathbb{N}_0 \quad (6.2)$$

darstellen lässt, heißt Moving-Average-Feld der Ordnung p und q ($MA[p, q]$ -Feld). Dabei bezeichnet $(\xi_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ ein White-Noise-Feld, d.h. eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen mit den Parametern $\mathbf{E}\{\xi_{s,t}\} = 0$ und $\mathbf{Var}\{\xi_{s,t}\} = \sigma_\xi^2$. Weiter stellen $(a_0, a_1, \dots, a_p)$ und $(b_0, b_1, \dots, b_q)$ reellwertige Koeffizientenfolgen dar.

Das Feld $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ kann auch als sogenanntes „zweiseitiges“ Moving-Average-Feld

$$\eta_{s,t} = \sum_{i=-p}^p \sum_{j=-q}^q a_i b_j \xi_{s-i,t-j}, \quad s, t \in \mathbb{Z}, \quad p, q \in \mathbb{N}_0$$

mit den Koeffizienten $(a_{-p}, a_{-p+1}, \dots, a_p)$ und $(b_{-q}, b_{-q+1}, \dots, b_q)$ definiert werden, welches aber mit Hilfe der Transformation $\xi_{s,t} = \xi_{s+p,t+q}$ in ein „einseitiges“ Feld der Ordnung $2p$ und $2q$ gemäß obiger Definition transformiert werden kann. Es gilt

$$\eta_{s,t} = \sum_{i=-p}^p \sum_{j=-q}^q a_i b_j \xi_{s-i,t-j} = \sum_{i'=0}^{2p} \sum_{j'=0}^{2q} a_{i'-p} b_{j'-q} \tilde{\xi}_{s-i',t-j'} = \sum_{i'=0}^{2p} \sum_{j'=0}^{2q} \tilde{a}_{i'} \tilde{b}_{j'} \tilde{\xi}_{s-i',t-j'}$$

mit $\tilde{a}_{i'} = a_{i'-p}$, $\tilde{b}_{j'} = a_{j'-q}$. Es ist auch möglich MA-Felder mit $p = \infty$ oder $q = \infty$ zu betrachten, diese Arbeit beschränkt sich allerdings auf MA-Felder endlicher Ordnung.

O.B.d.A. wird $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$ gesetzt. Dieser Fall kann durch die Transformationen

$$\bar{a}_i = \frac{a_i}{a_0}, \quad i = 0, \dots, p, \quad \bar{b}_i = \frac{b_i}{b_0}, \quad i = 0, \dots, q, \quad \text{und} \quad \tilde{\xi}_{s,t} = a_0 b_0 \xi_{s,t}$$

erreicht werden. Für den Spezialfall $p = 0$ und $q = 0$ stimmt damit das $\text{MA}[p, q]$ -Feld mit dem White-Noise-Feld überein.

Satz 6.2 *Sei $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ ein durch Definition 6.1 gegebenes Moving-Average-Feld. Dann gilt*

1. *das Feld ist streng homogen,*
2. $\mathbf{E}\{\eta_{s,t}\} = 0, \quad s, t \in \mathbb{Z},$
3. *die Korrelationsfunktion hat die Gestalt*

$$\mathbf{E}\{\eta_{s,t} \eta_{s+\tau_1, t+\tau_2}\} = \gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \sigma_\xi^2 \gamma_1(\tau_1) \gamma_2(\tau_2), & |\tau_1| \leq p \wedge |\tau_2| \leq q \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\text{mit } \gamma_1(\tau) = \sum_{i=0}^{p-|\tau|} a_i a_{i+|\tau|} \text{ und } \gamma_2(\tau) = \sum_{i=0}^{q-|\tau|} b_i b_{i+|\tau|},$$

4. *das Feld ist orthotrop.*

Beweis.

zu 1.) Um die strenge Homogenität zu zeigen, muss die Beziehung (1.6) in der Form

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\eta_{i_1, j_1} \in B_{i_1, j_1}, \eta_{i_1, j_2} \in B_{i_1, j_2}, \dots, \eta_{i_m, j_n} \in B_{i_m, j_n}) \\ &= \mathbf{P}(\eta_{i_1+\tau_1, j_1+\tau_2} \in B_{i_1, j_1}, \eta_{i_1+\tau_1, j_2+\tau_2} \in B_{i_1, j_2}, \dots, \eta_{i_m+\tau_1, j_n+\tau_2} \in B_{i_m, j_n}) \end{aligned}$$

für $\forall m, n, \forall$ Indizes $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}, \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}, \forall B_{i_1, j_1}, \dots, B_{i_m, j_n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bewiesen werden. Es gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\eta_{i_1, j_1} \in B_{i_1, j_1}, \eta_{i_1, j_2} \in B_{i_1, j_2}, \dots, \eta_{i_m, j_n} \in B_{i_m, j_n}) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l \xi_{i_1-k, j_1-l} \in B_{i_1, j_1}, \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l \xi_{i_1-k, j_2-l} \in B_{i_1, j_2}, \dots, \right. \\ & \quad \left. \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l \xi_{i_m-k, j_n-l} \in B_{i_m, j_n}\right). \end{aligned}$$

Aufgrund der strengen Stationarität des White-Noise-Feldes $(\xi_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ gilt für beliebige $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\eta_{i_1,j_1} \in B_{i_1,j_1}, \eta_{i_1,j_2} \in B_{i_1,j_2}, \dots, \eta_{i_m,j_n} \in B_{i_m,j_n}) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l \xi_{i_1+\tau_1-k, j_1+\tau_2-l} \in B_{i_1,j_1}, \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l \xi_{i_1+\tau_1-k, j_2+\tau_2-l} \in B_{i_1,j_2}, \dots, \right. \\ & \quad \left. \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_k b_l \xi_{i_m+\tau_1-k, j_n+\tau_2-l} \in B_{i_m,j_n}\right) \\ &= \mathbf{P}(\eta_{i_1+\tau_1, j_1+\tau_2} \in B_{i_1,j_1}, \eta_{i_1+\tau_1, j_2+\tau_2} \in B_{i_1,j_2}, \dots, \eta_{i_m+\tau_1, j_n+\tau_2} \in B_{i_m,j_n}). \end{aligned}$$

zu 2.) $\mathbf{E}\{\eta_{s,t}\} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_i b_j \mathbf{E}\{\xi_{s-i, t-j}\} = 0.$

zu 3.) Für die Korrelationsfunktion gilt

$$\begin{aligned} \gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) &= \sum_{i,i'=0}^p \sum_{j,j'=0}^q a_i a_{i'} b_j b_{j'} \mathbf{E}\{\xi_{s-i, t-j} \xi_{s+\tau_1-i', t+\tau_2-j'}\} \\ &= \sigma_\xi^2 \left(\sum_{i,i'=0}^p a_i a_{i'} \delta_{0, \tau_1+i-i'} \sum_{j,j'=0}^q b_j b_{j'} \delta_{0, \tau_2+j-j'} \right) \\ &= \sigma_\xi^2 \left(\sum_{i=0}^{p-|\tau_1|} a_i a_{i+|\tau_1|} \sum_{j=0}^{q-|\tau_2|} b_j b_{j+|\tau_2|} \right) = \sigma_\xi^2 \gamma_1(\tau_1) \gamma_2(\tau_2), \end{aligned}$$

wobei δ das Kronecker-Symbol bezeichnet.

zu 4.) Aus der Darstellung (6.3) der Korrelationsfunktion folgt $\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \sigma_\xi^2 \gamma_1(\tau_1) \gamma_2(\tau_2)$, womit sich aus der Symmetrieeigenschaft der Korrelationsfunktionen γ_1 und γ_2 die Behauptung

$$\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \sigma_\xi^2 \gamma_1(|\tau_1|) \gamma_2(|\tau_2|) = \gamma_\eta(|\tau_1|, |\tau_2|) \quad (6.4)$$

ergibt. Nach Bemerkung 1.6 folgt aus Beziehung (6.4) die Orthotropie des MA $[p, q]$ -Feldes.

□

Nach Gleichung (6.3) verschwindet die Korrelationsfunktion eines MA $[p, q]$ -Feldes, wenn die absoluten Differenzen τ_1 oder τ_2 der Indizes größer als die Ordnungen p oder q des Feldes sind. Diese Eigenschaft korrespondiert mit der bestimmenden Eigenschaft der ε -korrelierten Funktionen. Auch hier verschwindet die Korrelationsfunktion, wenn der Abstand der Argumente außerhalb einer ε -Umgebung der Null liegt. Somit können zeitdiskrete MA $[p, q]$ -Felder als Grundlage für die Approximation kontinuierlicher ε -korrelierter Felder genutzt werden.

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist die Approximation eines MA $[p, q]$ -Feldes, dessen Korrelationsfunktion mit einer vorgegebenen übereinstimmt. Dazu müssen die Koeffizienten $(a_0, a_1, \dots, a_p)$, $(b_0, b_1, \dots, b_q)$ mit $a_0 = b_0 = 1$ und die Varianz des White-Noise-Feldes σ_ξ^2 geeignet gewählt werden. Aufgrund der Struktur der Korrelationsfunktion (6.3)

als Produkt zweier eindimensionaler Korrelationsfunktionen

$$\gamma_1(\tau_1) = \sigma_{1,\xi}^2 \sum_{i=0}^{p-|\tau_1|} a_i a_{i+|\tau_1|} \quad \text{mit} \quad 0 \leq |\tau_1| \leq p \quad \text{und} \quad (6.5)$$

$$\gamma_2(\tau_2) = \sigma_{2,\xi}^2 \sum_{i=0}^{q-|\tau_2|} b_i b_{i+|\tau_2|} \quad \text{mit} \quad 0 \leq |\tau_2| \leq q \quad (6.6)$$

mit $\sigma_\xi^2 = \sigma_{1,\xi}^2 \sigma_{2,\xi}^2$ bietet sich der Übergang zu eindimensionalen Moving-Average-Prozessen an.

Definition 6.3 Ein zufälliger Prozess $(\hat{\eta}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, welcher sich in der Form

$$\hat{\eta}_t = \sum_{i=0}^q a_i \hat{\xi}_{t-i} \quad t \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}_0 \quad (6.7)$$

darstellen lässt, heißt Moving-Average-Prozess der Ordnung q (MA[q]-Prozess). Dabei bezeichnet $(\hat{\xi}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ einen White-Noise-Prozess mit den Parametern $\mathbf{E}\{\hat{\xi}_t\} = 0$, $\mathbf{Var}\{\hat{\xi}_t\} = \sigma_\xi^2$ und $(a_0, \dots, a_q)$ eine reellwertige Koeffizientenfolge.

Bemerkung 6.4 Für die Korrelationsfunktion eines MA[q]-Prozesses gilt

$$\gamma_{\hat{\eta}}(\tau) = \begin{cases} \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^{q-|\tau|} a_i a_{i+|\tau|}, & 0 \leq |\tau| \leq q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.8)$$

$$\text{und insbesondere } \sigma_{\hat{\eta}}^2 = \gamma_{\hat{\eta}}(0) = \sigma_\xi^2 \sum_{i=0}^q a_i^2$$

(vgl. z.B. [4],[19]).

Existiert also für eine gegebene homogene Korrelationsfunktion γ eine Zerlegung der Art

$$\gamma(\tau_1, \tau_2) = \sigma_\xi^2 \gamma_1(\tau_1) \gamma_2(\tau_2) \quad \text{mit} \quad \sigma_\xi^2 = \sigma_{1,\xi}^2 \sigma_{2,\xi}^2,$$

so lässt sich das Problem der Approximation der gegebenen Korrelationsfunktion auf den eindimensionalen Fall zurückführen, womit die beiden nichtlinearen Gleichungssysteme (6.5) und (6.6) zu lösen sind. Zu diesem Zweck werden für die eindimensionalen MA-Prozesse das charakteristische Polynom und die kovarianzerzeugende Funktion eingeführt.

Definition 6.5 Das charakteristische Polynom eines MA[q]-Prozesses mit der Koeffizientenfolge $(a_0, \dots, a_q)$ besitzt die Gestalt

$$a(z) = \sum_{i=0}^q a_i z^i, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Definition 6.6 Die kovarianzerzeugende Funktion eines $MA[q]$ -Prozesses mit der Korrelationsfunktion $(\gamma_{\hat{\eta}}(\tau))_{|\tau| \leq q}$ besitzt die Gestalt

$$\Gamma_{\hat{\eta}}(z) = \sum_{\tau=-q}^q \gamma_{\hat{\eta}}(\tau) z^{\tau}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Aufgrund der Korrelationsfunktion (6.8) eines $MA[q]$ -Prozesses ergibt sich die dazugehörige kovarianzerzeugende Funktion als

$$\begin{aligned} \Gamma_{\hat{\eta}}(z) &= \sum_{\tau=-q}^q \gamma_{\hat{\eta}}(\tau) z^{\tau} = \sigma_{\xi}^2 \sum_{\tau=-q}^q \sum_{i=0}^{q-|\tau|} a_i a_{i+|\tau|} z^{\tau} = \sigma_{\xi}^2 \left(\sum_{k=0}^q a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^q a_k z^{-k} \right) \\ &= \sigma_{\xi}^2 a(z) a(z^{-1}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Als nächste Kenngröße eines $MA[q]$ -Prozesses wird dessen Spektraldichte, welche sich als Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion (6.8), d.h. $f_{\hat{\eta}}(\lambda) = \sum_{\tau=-q}^q \gamma_{\hat{\eta}}(\tau) e^{i2\pi\lambda\tau}$ ergibt, betrachtet.

Satz 6.7 Ein $MA[q]$ -Prozess $(\hat{\eta}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ besitzt die Spektraldichte

$$f_{\hat{\eta}}(\lambda) = \sigma_{\xi}^2 \left| \sum_{k=0}^q a_k e^{i2\pi k\lambda} \right|^2. \quad (6.10)$$

Beweis. Nach Gleichung (6.9) gilt

$$\begin{aligned} f_{\hat{\eta}}(\lambda) &= \sum_{\tau=-q}^q \gamma_{\hat{\eta}}(\tau) e^{i2\pi\lambda\tau} = \Gamma_{\hat{\eta}}(e^{i2\pi\lambda}) = \sigma_{\xi}^2 a(e^{i2\pi\lambda}) a(e^{-i2\pi\lambda}) \\ &= \sigma_{\xi}^2 |a(e^{i2\pi\lambda})|^2 = \sigma_{\xi}^2 \left| \sum_{k=0}^q a_k e^{i2\pi k\lambda} \right|^2, \end{aligned}$$

da für $z \in \mathbb{C}$ gilt $a(\bar{z}) = \overline{a(z)}$ und $z\bar{z} = |z|^2$. □

Der folgende Satz zeigt, dass zu jeder gegebenen homogenen Korrelationsfunktion $(\gamma(\tau))_{\tau \in \mathbb{Z}}$ mit endlichem Träger und $\gamma(0) > 0$ ein $MA[q]$ -Prozess gefunden werden kann, dessen Korrelationsfunktion mit γ übereinstimmt.

Satz 6.8 Gegeben sei eine homogene Korrelationsfunktion $(\gamma(\tau))_{\tau \in \mathbb{Z}}$ mit endlichem Träger und einer streng positiven Varianz $\gamma(0)$. Dann existiert ein $q \in \mathbb{N}_0$ und ein $MA[q]$ -Prozess

$$\hat{\eta}_t = \sum_{i=0}^q a_i \xi_{t-i} \text{ mit der Eigenschaft } \gamma(\tau) = \gamma_{\hat{\eta}}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Sei $q = \max \text{supp } \gamma$, wobei supp die Trägermenge einer Funktion bezeichnet. Aufgrund der Symmetrie der Korrelationsfunktion γ gilt $-q = \min \text{supp } \gamma$, womit für die kovarianzerzeugende Funktion folgt

$$\Gamma(z) = \sum_{\tau \in \mathbb{Z}} \gamma(\tau) z^{\tau} = \sum_{\tau=-q}^q \gamma(\tau) z^{\tau}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (6.11)$$

und damit

$$\Gamma(z) = z^{-q} \sum_{k=0}^{2q} \gamma(k-q) z^k.$$

Da $\gamma(q) \neq 0$ wegen $q = \max \text{supp } \gamma$ kann die Funktion Γ mit Hilfe der Nullstellen $z_1, \dots, z_{2q}$ des Polynoms $\tilde{\Gamma}(z) = \sum_{k=0}^{2q} \gamma(k-q) z^k$ geschrieben werden als

$$\Gamma(z) = z^{-q} \gamma(q) \prod_{j=1}^{2q} (z - z_j). \quad (6.12)$$

Ein Vergleich der Koeffizienten des Terms z^{-q} in (6.11) und (6.12) führt auf

$$\gamma(-q) = \gamma(q) \prod_{j=1}^{2q} z_j.$$

Aus $\gamma(-q) = \gamma(q) \neq 0$ folgt damit $\prod_{j=1}^{2q} z_j = 1$, woraus sich $z_j \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, 2q$ ergibt. Die Symmetrie von γ impliziert $\Gamma(z) = \Gamma(z^{-1})$ für $z \neq 0$. D.h. wenn z_j , $j = 1, \dots, 2q$ eine Nullstelle von $\Gamma(z)$ ist, dann ist auch z_j^{-1} eine Nullstelle. Somit können die Nullstellen in der Art $z_1, \dots, z_q, z_1^{-1}, \dots, z_q^{-1}$ angeordnet werden. Damit gilt

$$\Gamma(z) = z^{-q} \gamma(q) \prod_{j=1}^q (z - z_j) \prod_{j=1}^q (z - z_j^{-1}).$$

Die Beziehung $z - z_j^{-1} = -z z_j^{-1} (z^{-1} - z_j)$, $z \neq 0$, führt auf

$$\Gamma(z) = z^{-q} \gamma(q) (-1)^q z^q \left(\prod_{j=1}^q z_j^{-1} \right) \left(\prod_{j=1}^q (z - z_j) \right) \left(\prod_{j=1}^q (z^{-1} - z_j) \right), \quad z \neq 0.$$

Mit Hilfe der Definitionen

$$c = (-1)^q \gamma(q) \prod_{j=1}^q z_j^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{a}(z) = \prod_{j=1}^q (z - z_j) \quad (6.13)$$

kann die kovarianzerzeugende Funktion $\Gamma(z)$ geschrieben werden als

$$\Gamma(z) = c \tilde{a}(z) \tilde{a}(z^{-1}), \quad z \neq 0.$$

Nun wird die Funktion

$$a(z) = \frac{(-1)^q}{\prod_{j=1}^q z_j} \tilde{a}(z) \quad (6.14)$$

gesetzt, woraus sich ein Polynom $a(z) = \sum_{i=0}^q a_i z^i$ mit $a_0 = \frac{(-1)^q}{\prod_{j=1}^q z_j} \prod_{j=1}^q (-z_j) = 1$ ergibt und Γ

die Darstellung

$$\Gamma(z) = c \left(\prod_{j=1}^q z_j \right)^2 a(z) a(z^{-1}) = (-1)^q \gamma(q) \left(\prod_{j=1}^q z_j \right) a(z) a(z^{-1}), \quad z \neq 0.$$

besitzt. Mit

$$\sigma_\xi^2 = (-1)^q \gamma(q) \prod_{j=1}^q z_j \quad (6.15)$$

folgt

$$\Gamma(z) = \sigma_\xi^2 a(z) a(z^{-1}).$$

Der Term $(-1)^q \gamma(q) \prod_{j=1}^q z_j$, welcher die Varianz σ_ξ^2 des White-Noise-Prozesses darstellt, ist positiv, was durch einen Vergleich der Koeffizienten von z^0 in folgender Gleichung

$$\Gamma(z) = \sum_{\tau=-q}^q \gamma(\tau) z^\tau = \sigma_\xi^2 \sum_{k=0}^q a_k z^k \sum_{k=0}^q a_k z^{-k} \quad (6.16)$$

belegt werden kann. Damit gilt $\gamma(0) = \sigma_\xi^2 \sum_{k=0}^q a_k^2$. Aufgrund der Voraussetzung des Satzes ist $\gamma(0) > 0$. Damit ergibt sich $\sigma_\xi^2 > 0$. Aus Gleichung (6.9) kann nun abgeleitet werden, dass der MA[q]-Prozess $\hat{\eta}_t = \sum_{i=0}^q a_i \hat{\xi}_{t-i}$ die vorgegebene Korrelationsfunktion besitzt. $\square$

Da die Anordnung der Nullstellen $(z_i)_{i=1,\dots,2q}$ zur Definition des charakteristischen Polynoms (vgl. Beziehung (6.14)) beliebig ist, können die Parameter $(\sigma_\xi^2, a_0, \dots, a_q)$ nur dann eindeutig aus einer gegebenen Korrelationsfunktion bestimmt werden, wenn die Menge der zulässigen Parameterwerte $(\sigma_\xi^2, a_0, a_1, \dots, a_q)$ eingeschränkt wird. Box und Jenkins führten dazu in [4] das Kriterium der Invertierbarkeit ein. Dieses besagt, dass ein White-Noise-Prozess $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ aus einem MA[q]-Prozess $(\hat{\eta}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ rekonstruiert werden kann.

Definition 6.9 Ein MA[q]-Prozess heißt invertierbar, falls die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $a(z) = \sum_{i=0}^q a_i z^i$ außerhalb des Einheitskreises liegen.

Es zeigt sich, dass für einen invertierbaren MA[q]-Prozess eine eindeutige Abbildung zwischen der gegebenen Korrelationsfunktion γ und den zu bestimmenden Parametern $(\sigma_\xi^2, a_0, \dots, a_q)$ existiert.

Satz 6.10 Gegeben sei eine Korrelationsfunktion $(\gamma(\tau))_{\tau \in \mathbb{Z}}$ mit endlichem Träger, so dass für die kovarianzerzeugende Funktion gilt $\Gamma(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Dann existiert ein $q \in \mathbb{N}_0$ und ein eindeutiger, invertierbarer MA[q]-Prozess $\hat{\eta}_t = \sum_{i=0}^q a_i \xi_{t-i}$ mit der Eigenschaft $\gamma(\tau) = \gamma_{\hat{\eta}}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung $\Gamma(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ kann $\gamma(0) > 0$ angenommen werden. In Satz 6.8 wurde die Existenz eines MA[q]-Prozesses unter Verwendung der Nullstellen $(z_1, \dots, z_q, z_1^{-1}, \dots, z_q^{-1})$ des Polynoms $\tilde{\Gamma}(z)$ gezeigt. Da $\Gamma(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt, können diese Nullstellen wie folgt angeordnet werden

$$(z_1, \dots, z_q, z_1^{-1}, \dots, z_q^{-1}) \quad \text{mit} \quad |z_i| > 1, \quad i = 1, \dots, q.$$

Mit Hilfe der q Nullstellen, für die gilt $|z_i| > 1$, wird das charakteristische Polynom $a(z) = a_q \prod_{i=1}^q (z - z_i)$ gebildet. Dieses ist eindeutig bestimmt und die Nullstellen von $a(z)$ liegen außerhalb des Einheitskreises, d.h. der zugehörige MA[q]-Prozess $\hat{\eta} = \sum_{i=0}^q a_i \hat{\xi}_{t-i}$ ist invertierbar und eindeutig bestimmt. $\square$

Im nächsten Abschnitt werden mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung der Koeffizienten eines invertierbaren MA[q]-Prozesses aus einer gegebenen Korrelationsfunktion vorgestellt.

6.2 Bestimmung der Koeffizienten

Eine Möglichkeit die Koeffizienten eines invertierbaren Moving-Average-Prozesses zu bestimmen, bietet die Faktorisierung der kovarianzerzeugenden Funktion. Des Weiteren wird in diesem Abschnitt der iterative Algorithmus von Wilson betrachtet. Auch die Zerlegung der Spektraldichte kann zur Koeffizientenbestimmung genutzt werden, wobei zu beachten ist, dass auf diese Weise nur die Koeffizienten eines unendlichen Moving-Average-Prozesses erhalten werden. An dieser Stelle sei noch der in [11] beschriebene Algorithmus von Ehlgén erwähnt.

6.2.1 Faktorisierung der kovarianzerzeugenden Funktion

Sei γ die Korrelationsfunktion an welche ein MA[q]-Prozess angepasst werden soll. Die Idee dieser Methode ist die Faktorisierung der kovarianzerzeugenden Funktion Γ zum Einen über die Nullstellen des Polynoms $\tilde{\Gamma}(z) = \sum_{k=0}^{2q} \gamma(k-q)z^k$ und zum Anderen über die dazugehörige Korrelationsfunktion γ . Aus dem anschließenden Koeffizientenvergleich können die Parameter $a_0, \dots, a_q$ bestimmt werden. Nach Beziehung (6.16) gilt

$$\Gamma(z) = \sigma_{\xi}^2 a(z) a(z^{-1}) = \sigma_{\xi}^2 \left(\sum_{i=0}^q a_i z^i \right) \left(\sum_{i=0}^q a_i z^{-i} \right). \quad (6.17)$$

Für die Berechnung der Koeffizienten $(a_0, \dots, a_q)$ müssen die $2q$ Nullstellen des Polynoms $\tilde{\Gamma}$ bestimmt werden. Im zweiten Schritt wird das dann Polynom $\tilde{a}(z) = \prod_{i=1}^q (z - z_i) = \sum_{i=0}^q \tilde{a}_i z^i$ (vgl. (6.13)) gebildet. Dabei werden die q Nullstellen gewählt, welche der Bedingung $|z_i| > 1$ genügen, damit ein invertierbarer MA[q]-Prozess entsteht. Nach Gleichung (6.14) führt der Koeffizientenvergleich

$$a_i = \frac{(-1)^q}{\prod_{j=1}^q z_j} \tilde{a}_i, \quad i = 0, \dots, q$$

auf die gesuchten Parameter $(1, a_1, \dots, a_q)$. Die Varianz σ_{ξ}^2 des White Noise Prozesses $(\hat{\xi}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ergibt sich nach Gleichung (6.15) als $\sigma_{\xi}^2 = \gamma(q) (-1)^q \prod_{i=1}^q z_i$.

6.2.2 Algorithmus von Wilson

Der in [49] beschriebene Algorithmus von Wilson basiert auf der iterativen numerischen Berechnung der Koeffizienten a_i , $i = 0, \dots, q$ aus gegebenen Werten $\gamma(\tau)$, $\tau = 0, \dots, q$ der Korrelationsfunktion. Ausgehend von den Parametern $\theta_i = \sigma_\xi a_i$, $i = 0, \dots, q$ werden in jedem Iterationsschritt Korrekturterme δ_i^t , $i = 0, \dots, q$ für die gesuchten Koeffizienten θ_i berechnet, so dass $\theta_i^{t+1} = \theta_i^t + \delta_i^t$, $i = 0, \dots, q$, so genau wie möglich die Werte der gegebenen Korrelationsfunktion widerspiegelt. Das Ziel ist also Parameter zu finden, welche das Gleichungssystem

$$g(\tau) = \sum_{j=0}^{q-\tau} \theta_j \theta_{j+\tau} - \gamma(\tau) = 0, \quad \tau = 0, \dots, q \quad (6.18)$$

erfüllen (vgl. Beziehung (6.9)). Dieses Gleichungssystem wird mittels eines modifizierten Newton Verfahrens, der Newton-Raphson Methode, linearisiert.

Der Algorithmus von Wilson sucht nach Lösungen, für welche die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $a(z) = \sum_{i=0}^q a_i z^i$ außerhalb des Einheitskreises liegen. D.h. die auf diese Weise bestimmten Koeffizienten $(a_0, a_1, \dots, a_q)$ führen auf einen invertierbaren und nach Satz 6.10 auch eindeutigen MA[q]-Prozess.

Im Folgenden wird der Algorithmus von Wilson kurz vorgestellt. Der Index t bezeichnet dabei den Iterationsschritt. Für $\tau = 0, \dots, q$ und $j = 0, \dots, q$ gilt

$$\frac{\partial g(\tau)}{\partial \theta_j} = \theta_{j+\tau} 1_{\{j+\tau \in \{0, \dots, q\}\}} + \theta_{j-\tau} 1_{\{j-\tau \in \{0, \dots, q\}\}}. \quad (6.19)$$

Die unteren Dreiecksmatrizen

$$T_1 = (\theta_{j+\tau} 1_{\{j+\tau \in \{0, \dots, q\}\}})_{\tau, j=0, \dots, q}, \quad T_1^t = (\theta_{j+\tau}^t 1_{\{j+\tau \in \{0, \dots, q\}\}})_{\tau, j=0, \dots, q},$$

und die oberen Dreiecksmatrizen

$$T_2 = (\theta_{j-\tau} 1_{\{j-\tau \in \{0, \dots, q\}\}})_{\tau, j=0, \dots, q}, \quad T_2^t = (\theta_{j-\tau}^t 1_{\{j-\tau \in \{0, \dots, q\}\}})_{\tau, j=0, \dots, q},$$

werden so gewählt, dass Gleichung (6.19) durch $\left(\frac{\partial g(\tau)}{\partial \theta_j} \right)_{\tau, j=0, \dots, q} = T$ mit $T = T_1 + T_2$ dargestellt werden kann. Entsprechend dem Newton-Raphson Verfahren ist die Iterationsgleichung gegeben durch

$$\theta^{t+1} = \theta^t - (T^t)^{-1} g^t, \quad \text{mit} \quad \theta^t = \begin{bmatrix} \theta_0^t \\ \theta_1^t \\ \vdots \\ \theta_q^t \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad g^t = \begin{bmatrix} g(0)^t \\ g(1)^t \\ \vdots \\ g(q)^t \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Der Vektor $(T^t)^{-1} g^t$ entspricht dabei dem Korrekturterm δ^t . Aufgrund der Beziehung

$T^t \theta^t = 2\gamma_\eta^t = \sum_{\tau=0}^{q-\tau} \theta_i^t \theta_{i+\tau}^t$ kann die Gleichung (6.20) geschrieben werden als

$$T^t \theta^{t+1} = T^t \theta^t - g^t = T^t \theta^t - \begin{bmatrix} \gamma_\eta^t(0) \\ \gamma_\eta^t(1) \\ \vdots \\ \gamma_\eta^t(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_\eta(0) \\ \gamma_\eta(1) \\ \vdots \\ \gamma_\eta(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_\eta^t(0) \\ \gamma_\eta^t(1) \\ \vdots \\ \gamma_\eta^t(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_\eta(0) \\ \gamma_\eta(1) \\ \vdots \\ \gamma_\eta(q) \end{bmatrix} = \gamma_\eta^t + \gamma_\eta.$$

Damit ergibt sich die folgende Iterationsgleichung

$$\theta^{t+1} = (T^t)^{-1} (\gamma_\eta^t + \gamma_\eta). \quad (6.21)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Methode bei einer geeigneten Wahl der Startwerte $(\theta_0^0, \dots, \theta_q^0)$ selbstkorrigierend ist und immer gegen die geforderte Lösung konvergiert [49]. Die Startwerte erweisen sich als geeignet, wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\theta^0(z) = \sum_{i=0}^q \theta_i^0 z^i$, $z \in \mathbb{C}$, außerhalb des Einheitskreises liegen. Die Konvergenz ist zweiter Ordnung, was eine Konsequenz aus der Newton-Raphson-Methode ist.

6.2.3 Zerlegung der Spektraldichte

Dieser Ansatz versucht die Koeffizienten eines stationären MA-Prozesses aus der Spektraldichte und nicht wie in den beiden vorigen Abschnitten aus der Korrelationsfunktion zu bestimmen. Allerdings werden auf diese Weise nur die Koeffizienten eines unendlichen MA-Prozesses erhalten. Nach Gleichung (6.8) verschwindet die Korrelationsfunktion eines unendlichen MA-Prozesses nicht für alle $|\tau| > n$, $n \in \mathbb{N}$, $n < \infty$. Somit sind diese Prozesse nicht für die Approximation von ε -korrelierten Prozessen geeignet. Deshalb wird im Folgenden nur eine kurze Beschreibung der Idee gegeben.

Falls die Korrelationsfunktion in hinreichend vielen Punkten τ mit $-H \leq \tau \leq H$, $H \in \mathbb{N}$ gegeben ist, kann ihre Fourier-Transformierte, d.h. die Spektraldichte mit hoher Genauigkeit über die Gleichung $f(\lambda) = \sum_{\tau=-H}^H \gamma(\tau) e^{i2\pi\lambda\tau}$ bestimmt werden (vgl. [32]).

Die Koeffizienten der Fourierentwicklung der Funktion $f(\lambda)^{\frac{1}{2}}$ definieren dann die Koeffizienten eines unendlichen MA-Prozesses. Die Funktion $f(\lambda)^{\frac{1}{2}}$ existiert, da $f(\lambda) \geq 0$ gilt.

6.3 Interpolation von Moving-Average-Feldern

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Approximation kontinuierlicher ε -korrelierter zufälliger Felder

$$\varepsilon f : \mathbb{R}^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0$$

auf Grundlage diskreter Moving-Average-Felder der Form (6.2). Die zufälligen Felder $(\varepsilon f, \varepsilon > 0)$ sollen dabei den Bedingungen aus Annahme 1.3 genügen. Es ist hinreichend,

die folgenden Betrachtungen auf 1-korrelierte Funktionen 1f zu beschränken, da eine ε -korrelierte Funktion mit beliebiger Korrelationslänge mit Hilfe der einfachen Skalentransformation ${}^\varepsilon f(x_1, x_2, \omega) = {}^1f(\frac{x_1}{\varepsilon_1}, \frac{x_2}{\varepsilon_2}, \omega)$ aus einer 1-korrelierten Funktion erzeugt werden kann. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im weiteren f anstelle von 1f geschrieben.

Die Approximationsidee basiert auf den Eigenschaften der MA-Felder. Ein kontinuierliches Feld $f_{p,q} : \mathbb{R}^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich aus einem diskreten MA-Feld $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ durch

$$f_{p,q}(x_1^i, x_2^j, \omega) = \eta_{i,j} \quad \text{in den Gitterpunkte } x_1^i = ih_p, \quad x_2^j = jh_q, \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

und der Interpolation zwischen den Gitterpunkten wie nachfolgend erklärt. Dabei bezeichnen die Größen h_p und h_q geeignet gewählte Diskretisierungsparameter, welche die Gitterlängen in x_1 - bzw. x_2 -Richtung angeben. Die Koeffizienten $(a_0, \dots, a_p)$, $(b_0, \dots, b_q)$ sowie die Varianz σ_ξ^2 des MA $[p, q]$ -Feldes, die Gitterparameter h_p und h_q sowie die Interpolationsfunktion müssen so gewählt werden, dass das sich ergebende zufällige Feld $f_{p,q}$ die Bedingungen aus Annahme 1.3 so gut wie möglich erfüllt. Dabei soll insbesondere die Korrelationsfunktion $R_{f_{p,q}f_{p,q}}$ der Approximationsfunktion $f_{p,q}$ einer gegebenen Korrelationsfunktion ϱ eines 1-korrelierten schwach homogenen Feldes entsprechen. D.h. für die Korrelationsfunktion des zugrunde liegenden MA $[p, q]$ -Feldes $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ muss dann die Beziehung

$$\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \varrho(\tau_1 h_p, \tau_2 h_q), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}$$

gelten. Um die in den Abschnitten 6.2.1-6.2.3 angegebenen Methoden zur Bestimmung der Koeffizienten eines MA-Prozesses der Form (6.7) anwenden zu können, muss die Korrelationsfunktion ϱ die Zerfalleigenschaft $\varrho(x, y) = \varrho_1(x)\varrho_2(y)$ besitzen.

Für $i, j \in \mathbb{Z}$ seien die eindimensionalen Funktionen $p_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $p_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für die Interpolation in x_1 - sowie x_2 -Richtung durch

$$p_i(x_1) = p\left(\frac{x_1 - x_1^i}{h_p}\right), \quad x_1^i = ih_p \quad \text{und} \quad p_j(x_2) = p\left(\frac{x_2 - x_2^j}{h_q}\right), \quad x_2^j = jh_q \quad (6.22)$$

definiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften besitzt

- $p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
- $p(x) = 0$ für $|x| \geq 1$,
- $p(0) = 1$,
- $p(-x) = 1 - p(1 - x), x \in [0, 1]$.

Unter diesen Annahmen gilt für Interpolationsfunktionen p_i (und natürlich analog für p_j)

- $p_i(x_1^k) = \delta_{ik}, k \in \mathbb{Z}$
- $p_i(x_1) + p_{i+1}(x_1) = 1$ für $x_1 \in [x_1^i, x_1^{i+1})$,
- $p_i(x_1) = 0$ für $x_1 \in \mathbb{R} \setminus (x_1^{i-1}, x_1^{i+1})$,

$$\bullet \sum_i p_i(x_1) = 1, \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Definition 6.11 Gegeben sei ein $MA[p, q]$ -Feld $(\eta_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ und $p_i(x_1), p_j(x_2), i, j \in \mathbb{Z}$ bezeichnen die durch (6.22) definierten Interpolationsfunktionen. Dann wird das kontinuierliche Feld

$$f_{p,q}(x_1, x_2, \omega) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} p_i(x_1) p_j(x_2) \eta_{i,j}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (6.23)$$

$MA[p, q]$ -Approximationsfunktion genannt.

Aufgrund der Eigenschaften der Interpolationsfunktionen lässt sich die Approximationsfunktion $f_{p,q}$ im Intervall $[x_1^i, x_1^{i+1}) \times [x_2^j, x_2^{j+1})$ wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} f_{p,q}(x_1, x_2, \omega) &= p_i(x_1) p_j(x_2) \eta_{i,j} + p_{i+1}(x_1) p_j(x_2) \eta_{i+1,j} \\ &\quad + p_i(x_1) p_{j+1}(x_2) \eta_{i,j+1} + p_{i+1}(x_1) p_{j+1}(x_2) \eta_{i+1,j+1} \\ &= p_i(x_1) p_j(x_2) \eta_{i,j} + (1 - p_i(x_1)) p_j(x_2) \eta_{i+1,j} \\ &\quad + p_i(x_1) (1 - p_j(x_2)) \eta_{i,j+1} + (1 - p_i(x_1)) (1 - p_j(x_2)) \eta_{i+1,j+1}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Für $p(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist die Approximationsfunktion ${}^\varepsilon f_{p,q}$ eine Treppenfunktion

und damit nicht stetig. Die Interpolationsfunktion $p(x) = (1 - |x|)^+$ führt auf den Fall der linearen Interpolation, womit stetige Funktionen generiert werden können. Für höhere Glattheiten müssen weitere Bedingungen an das Interpolationspolynom p gestellt werden. So erzeugen die zusätzlichen Forderungen

$$p^{(\nu)}(0) = p^{(\nu)}(1) = 0 \quad \text{für } \nu = 1, 2$$

zweimal stetig differenzierbare Funktionen (vgl. [35]). Nachfolgend werden einige wichtige Eigenschaften des Approximationsfeldes $f_{p,q}$ angegeben.

Satz 6.12 Die Funktion $f_{p,q}$ sei eine Approximationsfunktion der Form (6.23) basierend auf dem $MA[p, q]$ -Feld $(\eta_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ mit der Korrelationsfunktion $(\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2))_{\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{Z}}$. Dann gilt

$$1. \mathbf{E}\{f_{p,q}(x)\} = 0,$$

2. die Korrelationsfunktion besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} R_{f_{p,q} f_{p,q}}(x, y) &= \mathbf{E}\{f_{p,q}(x) f_{p,q}(y)\} \\ &= \gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) [p_i(x_1) p_{i'}(y_1) p_j(x_2) p_{j'}(y_2) + p_{i+1}(x_1) p_{i'+1}(y_1) p_j(x_2) p_{j'}(y_2) \\ &\quad + p_i(x_1) p_{i'}(y_1) p_{j+1}(x_2) p_{j'+1}(y_2) + p_{i+1}(x_1) p_{i'+1}(y_1) p_{j+1}(x_2) p_{j'+1}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1 - 1, \tau_2) [p_{i+1}(x_1) p_{i'}(y_1) p_j(x_2) p_{j'}(y_2) + p_{i+1}(x_1) p_{i'}(y_1) p_{j+1}(x_2) p_{j'+1}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1 + 1, \tau_2) [p_i(x_1) p_{i'+1}(y_1) p_j(x_2) p_{j'}(y_2) + p_i(x_1) p_{i'+1}(y_1) p_{j+1}(x_2) p_{j'+1}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1, \tau_2 - 1) [p_i(x_1) p_{i'}(y_1) p_{j+1}(x_2) p_{j'}(y_2) + p_{i+1}(x_1) p_{i'+1}(y_1) p_{j+1}(x_2) p_{j'}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1, \tau_2 + 1) [p_i(x_1) p_{i'}(y_1) p_j(x_2) p_{j'+1}(y_2) + p_{i+1}(x_1) p_{i'+1}(y_1) p_j(x_2) p_{j'+1}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1 - 1, \tau_2 - 1) [p_{i+1}(x_1) p_{i'} p_{j+1}(x_2) p_{j'}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1 + 1, \tau_2 + 1) [p_i(x_1) p_{i'+1} p_j(x_2) p_{j'+1}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1 - 1, \tau_2 + 1) [p_{i+1}(x_1) p_{i'}(y_1) p_j(x_2) p_{j'+1}(y_2)] \\ &\quad + \gamma_\eta(\tau_1 + 1, \tau_2 - 1) [p_i(x_1) p_{i'+1}(y_1) p_{j+1}(x_2) p_{j'}(y_2)] \end{aligned} \quad (6.25)$$

mit $i = \left\lfloor \frac{x_1}{h_p} \right\rfloor$, $i' = \left\lfloor \frac{y_1}{h_p} \right\rfloor$, $j = \left\lfloor \frac{x_2}{h_q} \right\rfloor$, $j' = \left\lfloor \frac{y_2}{h_q} \right\rfloor$, $\tau_1 = i' - i$, $\tau_2 = j' - j$, wobei $[\cdot]$ den ganzzahligen Anteil beschreibt,

3. $f_{p,q}$ ist ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((p+2)h_p, (q+2)h_q)$, d.h. es gilt

$$R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad |y_1 - x_1| \geq (p+2)h_p \vee |y_2 - x_2| \geq (q+2)h_q,$$

4. $f_{p,q}$ ist ε -abhängig mit der Abhängigkeitslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((p+2)h_p, (q+2)h_q)$.

Beweis.

zu 1. Aufgrund der Zentriertheit des MA $[p, q]$ -Feldes (vgl. Satz 6.2) gilt

$$\mathbf{E}\{f_{p,q}(x_1, x_2)\} = \sum_{i,j} p_i(x_1)p_j(x_2)\mathbf{E}\{\eta_{i,j}\} = 0.$$

zu 2. Es gilt

$$R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, y) = \mathbf{E}\{f_{p,q}(x)f_{p,q}(y)\} = \sum_{m,m',n,n'} p_m(x_1)p_{m'}(y_1)p_n(x_2)p_{n'}(y_2)\mathbf{E}\{\eta_{m,n}\eta_{m',n'}\}.$$

Wenn

$$x_1 \in [ih_p, (i+1)h_p), y_1 \in [i'h_p, (i'+1)h_p), x_2 \in [jh_q, (j+1)h_q), y_2 \in [j'h_q, (j'+1)h_q),$$

dann verschwinden die Interpolationspolynome $p_m, p_{m'}, p_n$ und $p_{n'}$ für $m \neq i, i+1$, $m' \neq i', i'+1$, $n \neq j, j+1$ und $n' \neq j', j'+1$.

Weiter gilt $\mathbf{E}\{\eta_{m,n}\eta_{m',n'}\} = \gamma_\eta(m-m', n-n')$, womit die Behauptung folgt.

zu 3. Sei $y_1 = x_1 + z_1$ mit $|z_1| \geq (p+2)h_p$ dann folgt

$$\begin{aligned} i' - i &\geq \left\lfloor \frac{x_1}{h_p} + p + 2 \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x_1}{h_p} \right\rfloor = p + 2 \quad \text{für} \quad z_1 \geq (p+2)h_p, \\ i' - i &\leq \left\lfloor \frac{x_1}{h_p} - (p+2) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x_1}{h_p} \right\rfloor = -(p+2) \quad \text{für} \quad z_1 \leq -(p+2)h_p. \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaft der MA-Prozesse, dass $\gamma_1(\tau_1) = 0$ für $|\tau_1| \geq p+1$ (vgl. (6.8)) und analogen Überlegungen für $y_2 = x_2 + z_2$ mit $|z_2| \geq (q+2)h_q$ gilt mit Hilfe der Gleichung (6.25)

$$R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad |y_1 - x_1| \geq (p+2)h_p \quad \text{oder} \quad |y_2 - x_2| \geq (q+2)h_q.$$

zu 4. Sei $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1,\dots,s}$, $s \geq 2$ eine Familie nicht leerer Teilmengen mit $\mathcal{X}_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, s$ und $d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) > \varepsilon = ((p+2)h_p, (q+2)h_q)$ für $i \neq j$. Aufgrund der Konstruktion der MA $[p, q]$ -Approximationsfunktion können dann die Werte $f_{p,q}$ für beliebige $x \in \mathcal{X}_i$ als (linear) messbare Funktionen einer Teilfolge $(\xi_{s,t})_{(s,t) \in \mathcal{T}_i}$ des White-Noise-Feldes $(\xi_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ dargestellt werden. Für die Indexmenge $\mathcal{T}_i \in \mathbb{Z}^2$ impliziert die Bedingung

$$d(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) > \varepsilon = ((p+2)h_p, (q+2)h_q) \quad \text{für} \quad i \neq j$$

$\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Damit sind die zufälligen Funktionen $f_{p,q}^i; \mathcal{X}_i \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_{p,q}^i(x) = f_{p,q}(x)$ für $x \in \mathcal{X}_i$, $i = 1, \dots, s$ unabhängig, woraus auf die ε -Abhängigkeit

der Approximationsfunktion zu schließen ist.

□

Das durch Beziehung (6.23) definierte Approximationsfeld $f_{p,q}$ ist allerdings nicht homogen und erfüllt somit nicht die geforderten Eigenschaften aus Annahme 1.3. Dies soll am Beispiel der Varianzfunktion $R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, x)$ gezeigt werden. Nach Gleichung (6.25) und mit Hilfe der Orthotropieeigenschaft des MA-Feldes $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ (vgl. Satz 6.2 Eigenschaft 4) lässt sich diese schreiben als

$$\begin{aligned} R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, x) = & \gamma_\eta(0, 0) [p_i^2(x_1)p_j^2(x_2) + (1 - p_i(x_1))^2p_j^2(x_2) + p_i^2(x_1)(1 - p_j(x_2))^2 \\ & + (1 - p_i(x_1))^2(1 - p_j(x_2))^2] \\ & + 2\gamma_\eta(1, 0) [(1 - p_i(x_1))p_i(x_1)p_j^2(x_2) + (1 - p_i(x_1))p_i(x_1)(1 - p_j(x_2))^2] \\ & + 2\gamma_\eta(0, 1) [p_i^2(x_1)(1 - p_j(x_2))p_j(x_2) + (1 - p_i(x_1))^2(1 - p_j(x_2))p_j(x_2)] \\ & + 4\gamma_\eta(1, 1) [(1 - p_i(x_1))p_i(x_1)(1 - p_j(x_2))p_j(x_2)]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Mit Hilfe der Beziehungen $p_{i+1}(x_1) = 1 - p_i(x_1)$ sowie analog $p_{j+1}(x_2) = 1 - p_j(x_2)$ und $z_1 = p_i(x_1)$, $z_2 = p_j(x_2)$ besitzt die Varianzfunktion die Gestalt

$$\begin{aligned} R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, x) = & \gamma_\eta(0, 0) - 2(\gamma_\eta(0, 0) - \gamma_\eta(1, 0)) [(1 - z_1)z_1z_2^2 + (1 - z_1)z_1(1 - z_2)^2] \\ & - 2(\gamma_\eta(0, 0) - \gamma_\eta(0, 1)) [z_1^2(1 - z_2)z_2 + (1 - z_1)^2(1 - z_2)z_2] \\ & - 4(\gamma_\eta(0, 0) - \gamma_\eta(1, 1)) [(1 - z_1)z_1(1 - z_2)z_2]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Weiter gilt $z_1 \in [0, 1]$, $z_2 \in [0, 1]$ und

$$\begin{aligned} 0 & \leq (1 - z_1)z_1z_2^2 + (1 - z_1)(1 - z_2)^2z_1 \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \leq (1 - z_2)z_1^2z_2 + (1 - z_1)^2(1 - z_2)z_2 \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \leq (1 - z_1)z_1(1 - z_2)z_2 \leq \frac{1}{16}, \\ \gamma_\eta(0, 0) & \geq \gamma_\eta(\cdot, \cdot), \end{aligned}$$

was auf die Beziehung

$$-\frac{1}{4}\gamma_\eta(0, 0) + \frac{1}{2}\gamma_\eta(1, 0) + \frac{1}{2}\gamma_\eta(0, 1) + \frac{1}{4}\gamma_\eta(1, 1) < R_{\varepsilon f_{p,q}\varepsilon f_{p,q}}(x, x) \leq \gamma_\eta(0, 0)$$

führt. Nach Gleichung (6.26) gilt in den Gitterpunkten $(x_1^i, x_2^j) = (ih_p, jh_q)$, $i, j \in \mathbb{Z}$

$$R_{\varepsilon f_{p,q}\varepsilon f_{p,q}}((x_1^i, x_2^j), (x_1^i, x_2^j)) = \gamma_\eta(0, 0),$$

wohingegen die Varianz in den Mittelpunkten $x_m = \left(\frac{x_1^{i+1} - x_1^i}{2}, \frac{x_2^{j+1} - x_2^j}{2}\right)$, $i, j \in \mathbb{Z}$ der Diskretisierungsintervallen im Falle linearer Interpolation den Wert

$$R_{\varepsilon f_{p,q}\varepsilon f_{p,q}}(x_m, x_m) = \frac{1}{4}(\gamma_\eta(0, 0) + \gamma_\eta(1, 0) + \gamma_\eta(0, 1) + \gamma_\eta(1, 1))$$

besitzt, welcher i.a. nicht $\gamma_\eta(0, 0)$ entspricht. Damit ist gezeigt, dass die Varianzfunktion $R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, x)$ nicht konstant ist und demzufolge die Approximationsfunktion $f_{p,q}$ nicht

homogen sein kann. Allerdings folgt aus den nachfolgenden Überlegungen, dass in (6.27) für $p, q \rightarrow \infty$ die Differenzen $\gamma(0, 0) - \gamma(1, 0)$, $\gamma(0, 0) - \gamma(0, 1)$ und $\gamma(0, 0) - \gamma(1, 1)$, welche die Abweichungen der Varianz $R_{\varepsilon f_{p,q} \varepsilon f_{p,q}}$ von $\varrho(0)$ beschreiben, verschwinden.

Die Approximationsfunktion $f_{p,q}$ verfügt aber über die schwächere Eigenschaft der (h_p, h_q) -Periodizität.

Satz 6.13 *Sei $f_{p,q}$ eine $MA[p, q]$ -Approximationsfunktion basierend auf dem $MA[p, q]$ -Feld $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$. Dann ist $f_{p,q}$ periodisch verteilt mit der Periode $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (h_p, h_q)$.*

Beweis. Der Approximationsfunktion $f_{p,q}$ liegt ein streng homogenes $MA[p, q]$ -Feld zugrunde (vgl. Satz 6.2). Damit gilt für $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^2$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(f_{p,q}(x_1^1, x_2^1) \in B_1, \dots, f_{p,q}(x_1^n, x_2^n) \in B_n) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{i,j} p_i(x_1^1) p_j(x_2^1) \eta_{i,j} \in B_1, \dots, \sum_{i,j} p_i(x_1^n) p_j(x_2^n) \eta_{i,j} \in B_n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{i,j} p_{i+k_1}(x_1^1 + k_1 h_p) p_{j+k_2}(x_2^1 + k_2 h_q) \eta_{i+k_1, j+k_2} \in B_1, \dots, \right. \\ & \quad \left. \sum_{i,j} p_{i+k_1}(x_1^n + k_1 h_p) p_{j+k_2}(x_2^n + k_2 h_q) \eta_{i+k_1, j+k_2} \in B_n\right) \\ &= \mathbf{P}(f_{p,q}(x_1^1 + k_1 h_p, x_2^1 + k_2 h_q) \in B_1, \dots, f_{p,q}(x_1^n + k_1 h_p, x_2^n + k_2 h_q) \in B_n). \end{aligned}$$

□

Der nächste Satz zeigt die Konvergenz der Korrelationsfunktion (und damit auch der oben betrachteten Varianzfunktion) des Approximationsfeldes $f_{p,q}$ gegen die vorgegebene Korrelationsfunktion ϱ für $p, q \rightarrow \infty$.

Satz 6.14 *Sei ϱ die Korrelationsfunktion eines 1-korrelierten schwach homogenen Feldes. Weiter sei $(f_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie von $MA[p, q]$ -Approximationsfeldern, so dass für die Korrelationsfunktion des zugrunde liegenden $MA[p, q]$ -Feldes $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ gilt*

$$\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \varrho(\tau_1 h_p, \tau_2 h_q) \quad \text{für } |\tau_1| = 0, \dots, p, \quad |\tau_2| = 0, \dots, q.$$

Die Folgen der Diskretisierungsparameter $(h_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ und $(h_q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ erfülle die Bedingungen $\lim_{p \rightarrow \infty} p h_p = 1$ und $\lim_{q \rightarrow \infty} q h_q = 1$. Dann gilt für die Korrelationsfunktion $R_{f_{p,q} f_{p,q}}(x, y)$ der Approximationsfunktion $f_{p,q}$

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} R_{f_{p,q} f_{p,q}}(x, y) = \varrho(y_1 - x_1, y_2 - x_2).$$

Beweis. Siehe [40].

□

Nach Satz 6.14 ist die Approximation der gegebenen Korrelationsfunktion ϱ durch die Korrelationsfunktion $R_{f_{p,q} f_{p,q}}$ der Approximationsfunktion $f_{p,q}$ für $p, q \rightarrow \infty$ exakt. Für

endliche Ordnungen p und q dagegen ist die Approximation der gegebenen Korrelationsfunktion ϱ exakt, wenn die Korrelationsfunktion γ_η des zugrunde liegenden MA[p,q]-Feldes $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ die Beziehung

$$\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \varrho(\tau_1 h_p, \tau_2 h_q) \quad \text{für } |\tau_1| = 0, \dots, p, \quad |\tau_2| = 0, \dots, q$$

erfüllt und die Argumente x und y als Stützstellen $(x_1^i, x_2^j) = (ih_p, jh_q)$ und $(y_1^{i'}, y_2^{j'})$ mit $y_1^{i'} = i'h_p$, $y_2^{j'} = j'h_q$ gewählt werden. D.h. die Beziehung (6.25) ergibt sich dann als

$$R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, y) = \gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \varrho((i' - i)h_p, (j' - j)h_q) = \varrho(y_1 - x_1, y_2 - x_2) \quad (6.28)$$

für $x_1 = ih_p$, $x_2 = jh_q$, $y_1 = i'h_p$, $y_2 = j'h_q$.

Für die Wahl geeigneter Gitterlängen h_p und h_q ergeben sich folgende zwei Möglichkeiten $h_p = \frac{1}{p+1}$ und $h_q = \frac{1}{q+1}$ bzw. $h_p = \frac{1}{p+2}$ und $h_q = \frac{1}{q+2}$.

Mit $h_p = \frac{1}{p+1}$ und $h_q = \frac{1}{q+1}$ erfüllen die Koeffizienten des MA[p, q]-Feldes das Gleichungssystem

$$\gamma_\eta(\tau) = \varrho\left(\frac{k_1}{p+1}, \frac{k_2}{q+1}\right), \quad k_1 = 0, \dots, p, \quad k_2 = 0, \dots, q,$$

allerdings gilt dann für die Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ der Approximationsfunktion $f_{p,q}$

$$\varepsilon_1 = (p+2)h_p = 1 + \frac{1}{p+1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = (q+2)h_q = 1 + \frac{1}{q+1}.$$

D.h. die Gitterlängen $h_p = \frac{1}{p+1}$ und $h_q = \frac{1}{q+1}$ führen auf eine $\left(1 + \frac{1}{p+1}, 1 + \frac{1}{q+1}\right)$ korrelierte Approximationsfunktion. Die Approximation der gegebenen Korrelationsfunktion ϱ ist nach Beziehung (6.28) aber in allen Gitterpunkten exakt.

Mit $h_p = \frac{1}{p+2}$ und $h_q = \frac{1}{q+2}$ erfüllen die Koeffizienten des MA[p, q]-Feldes das Gleichungssystem

$$\gamma_\eta(\tau) = \varrho\left(\frac{k_1}{p+2}, \frac{k_2}{q+2}\right), \quad k_1 = 0, \dots, p, \quad k_2 = 0, \dots, q$$

und die Approximationsfunktion $f_{p,q}$ stellt eine 1 korrelierte Funktion dar. Aber in diesem Fall ist die Approximation der gegebenen Korrelationsfunktion ϱ nicht in allen Gitterpunkten exakt. Es gilt

$$R_{f_{p,q}f_{p,q}}((ih_p, jh_q), ((i+k_1)h_p, (j+k_2)h_q)) = \varrho\left(\frac{k_1}{p+2}, \frac{k_2}{q+2}\right), \quad k_1 = 0, \dots, p, \quad k_2 = 0, \dots, q$$

wogegen

$$\begin{aligned} R_{f_{p,q}f_{p,q}}((ih_p, jh_q), ((i+(p+1))h_p, (j+k_2)h_q)) &= \gamma_\eta(p+1, k_2) = 0 \\ &\neq \varrho\left(\frac{p+1}{p+2}, \frac{k_2}{q+2}\right), \quad k_2 = 0, \dots, q+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{f_{p,q}f_{p,q}}((ih_p, jh_q), ((i+k_1)h_p, (j+(q+1))h_q)) &= \gamma_\eta(k_1, q+1) = 0 \\ &\neq \varrho\left(\frac{k_1}{p+2}, \frac{q+1}{q+2}\right), \quad k_1 = 0, \dots, p+1. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird aufgrund der vorausgesetzten 1-Korreliertheit in Annahme 1.3 von

den Gitterlängen $h_p = \frac{1}{p+2}$ und $h_q = \frac{1}{q+2}$ ausgegangen.

Zusammenfassend liefert die $MA[p, q]$ -Approximationsfunktion $f_{p,q}$ der Form (6.23) eine ε -korrelierte und sogar ε -abhängige, (h_p, h_q) -periodische aber nicht homogene zufällige Funktion. Somit sind nicht alle in Annahme 1.3 gestellten Bedingungen erfüllt. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit zwei Verfahren, welche die betrachtete Approximationsfunktion $f_{p,q}$ in eine homogene transformieren.

6.4 Approximation von homogenen Zufallsfeldern

Auf Grundlage der (h_p, h_q) -Periodizität der $MA[p, q]$ -Approximationsfunktion $f_{p,q}$ nach Gleichung (6.23) werden in diesem Abschnitt zwei Verfahren betrachtet, welche das in Abschnitt 6.3 entwickelte Approximationsverfahren so modifizieren, dass streng homogene bzw. schwach homogene Zufallsfelder entstehen.

Die Idee des ersten Verfahren besteht in der zufälligen Verschiebung der Argumente $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ um die Größen α_1 und α_2 (vgl. z.B. [24],[40]). Dabei sind α_1 und α_2 auf den Intervallen $[0, h_p)$ bzw. $[0, h_q)$ gleichverteilt. Des Weiteren sind sie unabhängig vom zugrunde liegenden White-Noise-Feld $(\xi_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ sowie voneinander unabhängig. Damit ist folgende Approximationsfunktion definiert

$$\tilde{f}_{p,q}(x_1, x_2, \omega) = f_{p,q}(x_1 + \alpha_1(\omega), x_2 + \alpha_2(\omega), \omega).$$

Dieses Vorgehen kann auch als Verschiebung des zugrunde liegenden Diskretisierungsgitters interpretiert werden. Alle Gitterpunkte $(x_1^i, x_2^j) = (ih_p, jh_q)$, $i, j \in \mathbb{Z}$ werden um die zufälligen Variablen α_1 in x_1 -Richtung und α_2 in x_2 -Richtung verschoben. Das Gitter bleibt somit äquidistant.

Die Idee des zweiten Verfahrens besteht in der separaten Verschiebung jeder Interpolationsfunktion $p_i(x_1)$ und $p_j(x_2)$ mit Hilfe zufälliger Variablen α_1^i bzw. α_2^j .

6.4.1 Verschiebung der Stützstellen mit Hilfe einer Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der zufälligen Funktion

$$\tilde{f}_{p,q}(x_1, x_2, \omega) = f_{p,q}(x_1 + \alpha_1(\omega), x_2 + \alpha_2(\omega), \omega).$$

untersucht. Das nächste Lemma gibt dazu eine für die nachfolgenden Herleitungen wichtige Eigenschaft periodischer Funktionen an.

Lemma 6.15 *Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine (h_p, h_q) -periodische Funktion, d.h.*

$$g(x_1 + h_p, x_2 + h_q) = g(x_1, x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

und das Integral $\int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g(x_1, x_2) dx_2 dx_1$ existiere. Dann gilt

$$\int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g(x_1 + a_1, x_2 + a_2) dx_2 dx_1, \quad \text{für } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe [14], S.141. □

Der nächste Satz zeigt, dass die zufällige Verschiebung der Argumente $x = (x_1, x_2)$ durch die Zufallsvariablen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ die MA[p, q]-Approximationsfunktion $f_{p,q}$ in eine streng homogene Funktion $\tilde{f}_{p,q}$ überführt.

Satz 6.16 *Die Zufallsvariablen α_1 und α_2 seien auf den Intervallen $[0, h_p)$ und $[0, h_q)$ gleichverteilt, unabhängig vom zugrunde liegenden White-Noise-Feld $(\xi_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ der Approximationsfunktion $f_{p,q}$ und voneinander unabhängig. Dann besitzt die Funktion*

$$\tilde{f}_{p,q}(x_1, x_2, \omega) = f_{p,q}(x_1 + \alpha_1(\omega), x_2 + \alpha_2(\omega), \omega). \quad (6.29)$$

folgende Eigenschaften.

1. $\tilde{f}_{p,q}$ ist streng homogen,
2. die Korrelationsfunktion besitzt die Gestalt

$$R_{\tilde{f}_{p,q}\tilde{f}_{p,q}}(x, y) = \frac{1}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} R_{f_{p,q}f_{p,q}}(u, u+z) du_2 du_1$$

mit $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, $z = y - x$,

3. $\tilde{f}_{p,q}$ ist ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((p+2)h_p, (q+2)h_q)$.

Beweis.

zu 1. Zum Nachweis der strengen Homogenität ist für $\tilde{f}_{p,q}$ die Beziehung (1.6) für alle $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{R}^2$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nachzuweisen. Nach Gleichung (6.29) gilt

$$\begin{aligned} J &:= \mathbf{P}(\tilde{f}_{p,q}(x_1^1 + l_1, x_2^1 + l_2) \in B_1, \dots, \tilde{f}_{p,q}(x_1^n + l_1, x_2^n + l_2) \in B_n) \\ &= \mathbf{P}(f_{p,q}(x_1^1 + l_1 + \alpha_1, x_2^1 + l_2 + \alpha_2) \in B_1, \dots, f_{p,q}(x_1^n + l_1 + \alpha_1, x_2^n + l_2 + \alpha_2) \in B_n). \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird das zufällige Ereignis

$$C := \{f_{p,q}(x_1^1 + l_1 + \alpha_1, x_2^1 + l_2 + \alpha_2) \in B_1, \dots, f_{p,q}(x_1^n + l_1 + \alpha_1, x_2^n + l_2 + \alpha_2) \in B_n\}$$

eingeführt, woraus folgt

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{P}(C) = \mathbf{E}\mathbf{1}_C = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\mathbf{1}_C | (\alpha_1, \alpha_2)\}\} = \mathbf{E}\{\mathbf{P}(C | (\alpha_1, \alpha_2))\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{P}(C | (\alpha_1, \alpha_2) = (s_1, s_2)) dF_\alpha(s_1, s_2), \end{aligned}$$

wobei F_α die gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsgrößen (α_1, α_2) beschreibt. Da diese voneinander unabhängig und auf den Intervallen $(0, h_p]$ bzw. $(0, h_q]$ gleichverteilt sind, ergibt sich

$$J = \frac{1}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} \mathbf{P}(C | (\alpha_1, \alpha_2) = (s_1, s_2)) ds_2 ds_1.$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ und $f_{p,q}$ gilt weiter (vgl. [38], §7, S. 221)

$$J = \frac{1}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} \mathbf{P}(f_{p,q}(x^1 + l + s) \in B_1, \dots, f_{p,q}(x^n + l + s) \in B_n) ds$$

mit $s = (s_1, s_2)$. Im nächsten Schritt führen das Theorem 6.13 und Lemma 6.15 auf

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} \mathbf{P}(f_{p,q}(x^1 + s) \in B_1, \dots, f_{p,q}(x^n + s) \in B_n) ds \\ &= \mathbf{P}(\tilde{f}_{p,q}(x^1) \in B_1, \dots, \tilde{f}_{p,q}(x^n) \in B_n). \end{aligned}$$

zu 2. Durch ähnliche Überlegungen wie unter 1. ergibt sich mit $x, y, s \in \mathbb{R}^2$, $y = x + z$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned} R_{\tilde{f}_{p,q}\tilde{f}_{p,q}}(x, y) &= \mathbf{E}\{\tilde{f}_{p,q}(x)\tilde{f}_{p,q}(x+z)\} = \mathbf{E}\{f_{p,q}(x+\alpha)f_{p,q}(x+z+\alpha)\} \\ &= \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{f_{p,q}(x+\alpha)f_{p,q}(x+z+\alpha)|\alpha\}\} \\ &= \frac{1}{h_p} \frac{1}{h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} \mathbf{E}\{f_{p,q}(x+s)f_{p,q}(x+z+s)\} ds \\ &= \frac{1}{h_p} \frac{1}{h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x+s, x+z+s) ds. \end{aligned}$$

Aufgrund der (h_p, h_q) -Periodizität der MA $[p, q]$ -Approximationsfunktion $f_{p,q}$ folgt für deren Korrelationsfunktion $R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, y) = R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x+\theta, y+\theta)$ mit $\theta = (h_p, h_q)$. Dann gilt

$$R_{\tilde{f}_{p,q}\tilde{f}_{p,q}}(x, y) = \frac{1}{h_p} \frac{1}{h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} R_{f_{p,q}f_{p,q}}(s, z+s) ds.$$

zu 3. Nach Satz 6.12 Eigenschaft 3 gilt

$$R_{f_{p,q}f_{p,q}}(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad |y_1 - x_1| \geq (p+2)h_p \vee |y_2 - x_2| \geq (q+2)h_q,$$

woraus folgt

$$\int_0^{h_p} \int_0^{h_q} R_{f_{p,q}f_{p,q}}(u, u+(y-x)) du = 0 \quad \text{für} \quad |y_1 - x_1| \geq (p+2)h_p \vee |y_2 - x_2| \geq (q+2)h_q.$$

□

Die Approximationsfunktion $\tilde{f}_{p,q}$ erfüllt damit die Bedingungen aus Annahme 1.3. Der nächste Satz beschreibt das Verhalten der Korrelationsfunktion $R_{\tilde{f}_{p,q}\tilde{f}_{p,q}}$ für $p, q \rightarrow \infty$.

Satz 6.17 *Sei ϱ die Korrelationsfunktion eines 1-korrelierten schwach homogenen Feldes. Weiter sei $(\tilde{f}_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie von $MA[p, q]$ -Approximationsfeldern, so dass für die Korrelationsfunktion des zugrunde liegenden $MA[p, q]$ -Feldes $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ gilt*

$$\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \varrho(\tau_1 h_p, \tau_2 h_q), \quad \text{für } |\tau_1| = 0, \dots, p, \quad |\tau_2| = 0, \dots, q.$$

Die Folgen der Diskretisierungsparameter $(h_p)_{p \in \mathbb{N}_0}$ und $(h_q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ erfüllen die Bedingungen $\lim_{p \rightarrow \infty} p h_p = 1$ und $\lim_{q \rightarrow \infty} q h_q = 1$. Dann gilt für die Korrelationsfunktion $R_{\tilde{f}_{p,q} \tilde{f}_{p,q}}(x, y)$ der Approximationsfunktion $\tilde{f}_{p,q}$

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} R_{\tilde{f}_{p,q} \tilde{f}_{p,q}}(x, y) = \varrho(y_1 - x_1, y_2 - x_2).$$

Beweis. Siehe [40]. □

Die Funktion $\tilde{f}_{p,q}$ ist nicht ε -abhängig, da für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Zufallsvariablen $\tilde{f}_{p,q}(x, \omega) = f_{p,q}(x_1 + \alpha_1(\omega), x_2 + \alpha_2(\omega), \omega)$ von $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ abhängig sind.

6.4.2 Verschiebung der Stützstellen mit Hilfe verschiedener Zufallsvariablen

Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt werden nun Folgen $(\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $(\alpha_2^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von unabhängigen und auf den Intervallen $[0, h_p]$ und $[0, h_q]$ gleichverteilten Zufallsvariablen genutzt, um die Interpolationsfunktionen $p_i(x_1)$ und $p_j(x_2)$ separat zu verschieben.

Dazu wird die $MA[p, q]$ -Approximationsfunktion $f_{p,q}$ in der Form

$$\begin{aligned} f_{p,q}(x_1, x_2, \omega) &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} p_m(x_1) p_n(x_2) \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_i b_j \xi_{m-i, n-j} \\ &= \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m-k_1} b_{n-k_2} p_m(x_1) p_n(x_2) \right) \xi_{k_1, k_2} = \sum_{k_1, k_2} g_{k_1, k_2}(x_1, x_2) \xi_{k_1, k_2} \end{aligned}$$

geschrieben, wobei $g_{k_1, k_2}(x_1, x_2) := \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m-k_1} b_{n-k_2} p_m(x_1) p_n(x_2)$ gesetzt wurde. Mit Hilfe dieser Darstellung führt die zufällige Verschiebung der Interpolationsfunktion g_{k_1, k_2} auf folgende Funktion

$$\bar{f}_{p,q}(x_1, x_2, \omega) := \sum_{k_1, k_2} g_{k_1, k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}(\omega), x_2 + \alpha_2^{k_2}(\omega)) \xi_{k_1, k_2}. \quad (6.30)$$

Satz 6.18 *Es seien $(\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und $(\alpha_2^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ unabhängige Folgen unabhängiger und auf den Intervallen $[0, h_p]$ und $[0, h_q]$ gleichverteilter Zufallsgrößen, welche auch unabhängig vom zugrunde liegenden White-Noise-Feld $(\xi_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ der Approximationsfunktion $f_{p,q}$ sind. Dann besitzt die Funktion*

$$\bar{f}_{p,q}(x_1, x_2, \omega) = \sum_{k_1, k_2} g_{k_1, k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}(\omega), x_2 + \alpha_2^{k_2}(\omega)) \xi_{k_1, k_2}$$

folgende Eigenschaften.

1. Die Korrelationsfunktion von $\bar{f}_{p,q}$ hat die Gestalt

$$R_{\bar{f}_{p,q}\bar{f}_{p,q}}(x, y) = \frac{1}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} R_{f_{p,q}f_{p,q}}(u, u+z) du_2 du_1$$

mit $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, $z = y - x$,

2. $\bar{f}_{p,q}$ ist schwach homogen,

3. $\bar{f}_{p,q}$ ist ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((p+2)h_p, (q+2)h_q)$,

4. $\bar{f}_{p,q}$ ist ε -abhängig mit der Abhängigkeitslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ((p+2)h_p, (q+2)h_q)$.

Beweis.

zu 1. Für die Korrelationsfunktion $R_{\bar{f}_{p,q}\bar{f}_{p,q}}(x, y)$ gilt

$$\begin{aligned} & R_{\bar{f}_{p,q}\bar{f}_{p,q}}(x, y) \\ &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} g_{k_1 k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}, x_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} g_{l_1 l_2}(y_1 + \alpha_1^{l_1}, y_2 + \alpha_2^{l_2}) \xi_{l_1, l_2} \right\} \\ &= \sum_{k_1, k_2} \mathbf{E} \{ g_{k_1 k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}, x_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} g_{k_1 k_2}(y_1 + \alpha_1^{k_1}, y_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} \} \\ &\quad + \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2, l_1 \neq k_1, l_2 \neq k_2} \mathbf{E} \{ g_{k_1 k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}, x_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} g_{l_1 l_2}(y_1 + \alpha_1^{l_1}, y_2 + \alpha_2^{l_2}) \xi_{l_1, l_2} \} \end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Approximationsfunktion $f_{p,q}$ von den Zufallsgrößen $(\alpha_1^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(\alpha_2^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ und deren paarweiser Unabhängigkeit sowie deren Gleichverteilung auf Intervallen $[0, h_p)$ bzw. $[0, h_q)$ können die Summanden für $l_1 = k_1$, $l_2 = k_2$ wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \{ g_{k_1 k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}, x_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} g_{k_1 k_2}(y_1 + \alpha_1^{k_1}, y_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} \} \\ &= \mathbf{E} \{ \mathbf{E} \{ g_{k_1 k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}, x_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} g_{k_1 k_2}(y_1 + \alpha_1^{k_1}, y_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} \} | \alpha_1^{k_1}, \alpha_2^{k_2} \} \\ &= \frac{\mathbf{E} \{ \xi_{k_1, k_2}^2 \}}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g_{k_1 k_2}(x_1 + u_1, x_2 + u_2) g_{k_1 k_2}(y_1 + u_1, y_2 + u_2) du_2 du_1 \end{aligned}$$

und analog für $l_1 \neq k_1$, $l_2 \neq k_2$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \{ g_{k_1 k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}, x_2 + \alpha_2^{k_2}) \xi_{k_1, k_2} g_{l_1 l_2}(y_1 + \alpha_1^{l_1}, y_2 + \alpha_2^{l_2}) \xi_{l_1, l_2} \} \\ &= \frac{\mathbf{E} \{ \xi_{k_1, k_2} \xi_{l_1, l_2} \}}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} \int_0^{h_q} g_{k_1 k_2}(x_1 + u_1, x_2 + u_2) g_{l_1 l_2}(y_1 + v_1, y_2 + v_2) dv_2 du_2 dv_1 du_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $(\xi_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ ein White-Noise-Feld beschreibt. Daraus folgt

$$R_{\bar{f}_{p,q}\bar{f}_{p,q}}(x, y) = \sum_{k_1, k_2} \frac{\mathbf{E} \{ \xi_{k_1, k_2}^2 \}}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g_{k_1 k_2}(x_1 + u_1, x_2 + u_2) g_{k_1 k_2}(y_1 + u_1, y_2 + u_2) du_2 du_1. \quad (6.31)$$

Mit Hilfe des Lemmas 6.15 gilt weiter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} R_{f_{p,q} f_{p,q}}(u, u+z) du_2 du_1 &= \frac{1}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} R_{f_{p,q} f_{p,q}}(x+u, x+u+z) du_2 du_1 \\
&= \sum_{k_1, k_2} \sum_{l_1, l_2} \frac{\mathbf{E}\{\xi_{k_1 k_2} \xi_{l_1 l_2}\}}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g_{k_1 k_2}(x+u) g_{l_1 l_2}(x+u+z) du_2 du_1 \\
&= \sum_{k_1, k_2} \frac{\mathbf{E}\{\xi_{k_1 k_2}^2\}}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g_{k_1 k_2}(x+u) g_{k_1 k_2}(x+u+z) du_2 du_1 \\
&= \sum_{k_1, k_2} \frac{\mathbf{E}\{\xi_{k_1, k_2}^2\}}{h_p h_q} \int_0^{h_p} \int_0^{h_q} g_{k_1 k_2}(x_1 + u_1, x_2 + u_2) g_{k_1 k_2}(y_1 + u_1, y_2 + u_2) du_2 du_1 \quad (6.32)
\end{aligned}$$

mit $y_1 = x_1 + z_1$ und $y_2 = x_2 + z_2$. Aus (6.31) und (6.32) folgt die Behauptung.

zu 2. Die Bedingungen der schwachen Homogenität sind erfüllt, wenn die Erwartungswertfunktion $\mathbf{E}\{\bar{f}_{p,q}(x)\}$ konstant ist und die Korrelationsfunktion $R_{\bar{f}_{p,q} \bar{f}_{p,q}}(x, x+z)$ nur von der Differenz der Argumente abhängt. Die zweite Bedingung ist in Punkt 1 nachgewiesen worden. Für die Mittelwertfunktion gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{\bar{f}_{p,q}(x)\} &= \mathbf{E}\left\{ \sum_{k_1, k_2} g_{k_1, k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}(\omega), x_2 + \alpha_2^{k_2}(\omega)) \xi_{k_1, k_2} \right\} \\
&= \sum_{k_1, k_2} \mathbf{E}\{g_{k_1, k_2}(x_1 + \alpha_1^{k_1}(\omega), x_2 + \alpha_2^{k_2}(\omega))\} \mathbf{E}\{\xi_{k_1, k_2}\} = 0.
\end{aligned}$$

zu 3. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Satzes 6.16 Eigenschaft 3.

zu 4. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Satzes 6.12 Eigenschaft 4.

□

Aufgrund der separaten Verschiebung der Argumente der Funktion $g_{k_1 k_2}$ um die zufälligen Variablen $\alpha_1^{k_1}$ und $\alpha_2^{k_2}$ ist die Approximationsfunktion $\bar{f}_{p,q}$ nicht streng homogen. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit wird diese Eigenschaft im Folgenden für eindimensionale Approximationsfunktionen

$$\bar{f}_q(x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(x + \alpha_k) \hat{\xi}_k \quad \text{mit} \quad g_k(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{i-k} p_i(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.33)$$

gezeigt. Weiter wird der Spezialfall $q = 0$ betrachtet, womit der Moving-Average-Prozess $(\hat{\eta}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ dem White-Noise-Prozess $(\hat{\xi}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ entspricht und sich die Darstellung (6.33) zu

$$\bar{f}_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k(x + \alpha_k) \hat{\xi}_k$$

vereinfacht. Im nächsten Schritt wird $h_q = 1$ gesetzt und die Funktion $\bar{f}_0$ an der Stelle $\hat{x}$ mit $\hat{x} \in (0, 1)$ betrachtet. Damit ergibt sich

$$\bar{f}_0(\hat{x}) = \mathbf{1}_{\{\alpha_0 < 1-\hat{x}\}} p_0(\hat{x} + \alpha_0) \hat{\xi}_0 + p_1(\hat{x} + \alpha_1) \hat{\xi}_1 + \mathbf{1}_{\{\alpha_2 > 1-\hat{x}\}} p_2(\hat{x} + \alpha_2) \hat{\xi}_2.$$

Mit $C := \{[\mathbf{1}_{\{\alpha_0 < 1-\hat{x}\}} p_0(\hat{x} + \alpha_0) \hat{\xi}_0 + p_1(\hat{x} + \alpha_1) \hat{\xi}_1 + \mathbf{1}_{\{\alpha_2 > 1-\hat{x}\}} p_2(\hat{x} + \alpha_2) \hat{\xi}_2] \leq b\}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{f}_0(\hat{x}) \leq b) &= \mathbf{E} \mathbf{1}_C = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{\mathbf{1}_C | (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)\}\} \\ &= \mathbf{E}\{\mathbf{P}(C | (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2))\} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{P}(C | (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (s_1, s_2, s_3)) ds_3 ds_2 ds_1 \\ &= \int_0^{1-\hat{x}} \int_0^1 \int_{1-\hat{x}}^1 \mathbf{P}([p_0(\hat{x} + s_1) \hat{\xi}_0 + p_1(\hat{x} + s_2) \hat{\xi}_1 + p_2(\hat{x} + s_3) \hat{\xi}_2] \leq b) ds_3 ds_2 ds_1. \end{aligned}$$

Es seien nun die unabhängigen Zufallsgrößen $\hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ als normalverteilt mit Mittelwert null und Varianz eins gewählt und die Interpolationsfunktionen als stückweise linear vorausgesetzt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \eta(\hat{x}, s_1, s_2, s_3) &:= p_0(\hat{x} + s_1) \hat{\xi}_0 + p_1(\hat{x} + s_2) \hat{\xi}_1 + p_2(\hat{x} + s_3) \hat{\xi}_2 \quad \text{und} \\ \eta(\hat{x}, s_1, s_2, s_3) &\sim \mathcal{N}(0, p_0(\hat{x} + s_1)^2 + p_1(\hat{x} + s_2)^2 + p_2(\hat{x} + s_3)^2). \end{aligned}$$

Die Abbildung 6.1 zeigt den Verlauf der eindimensionalen Verteilung $\mathbf{P}(\bar{f}_0(\hat{x}) \leq b)$ in Abhängigkeit von $\hat{x}$ für $b = 0.5$.

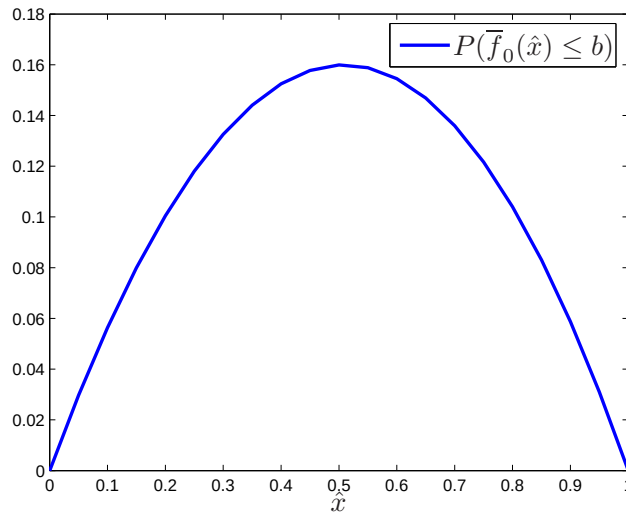


Abbildung 6.1: $\mathbf{P}(\bar{f}_0(\hat{x}) \leq b)$ für $b = 0.5$ in Abhängigkeit von $\hat{x}$

Da diese nicht konstant ist, gilt für $u \in (0, 1 - \hat{x})$

$$\mathbf{P}(\bar{f}(\hat{x} + u) \leq b) \neq \mathbf{P}(\bar{f}(\hat{x}) \leq b).$$

Damit ist gezeigt, dass die Beziehung (1.6) für $n = 1$, $\hat{x} \in (0, 1)$ und $u \in (0, 1 - \hat{x})$ nicht erfüllt ist. Durch analoge Überlegungen ergibt sich, dass auch die Approximationsfunktion (6.30) die Beziehung (1.6) nicht erfüllt und somit die Funktion $\bar{f}_{p,q}$ nicht streng homogen sein kann.

In Anlehnung an Satz 6.17 beschreibt der nächste Satz das Verhalten der Korrelationsfunktion $R_{\bar{f}_{p,q}\bar{f}_{p,q}}$ für $p, q \rightarrow \infty$.

Satz 6.19 *Sei $(\bar{f}_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie von $MA[p, q]$ -Approximationsfeldern, so dass für die Korrelationsfunktion des zugrunde liegenden $MA[p, q]$ -Feldes $(\eta_{s,t})_{s,t \in \mathbb{Z}}$ gilt*

$$\gamma_\eta(\tau_1, \tau_2) = \varrho(\tau_1 h_p, \tau_2 h_q), \quad \text{für } |\tau_1| = 0, \dots, p, \quad |\tau_2| = 0, \dots, q.$$

Dann gilt unter den weiteren Voraussetzungen des Satzes 6.17

$$\lim_{p,q \rightarrow \infty} R_{\bar{f}_{p,q}\bar{f}_{p,q}}(x, y) = \varrho(y_1 - x_1, y_2 - x_2).$$

Beweis. Siehe [40].

□

Kapitel 7

Numerische Beispiele

In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Lösungen der betrachteten RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung bzw. zufälliger Randbedingung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode und der Fourier-Methode bestimmt und deren erste und zweite Momente berechnet. Ziel dieses Kapitels ist der Vergleich der auf diesen verschiedenen Wegen erhaltenen stochastischen Kenngrößen untereinander und mit den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation am Beispiel der Varianzfunktion.

Aufgrund der in dieser Arbeit angenommenen Gebietsbeschränkung für die Fourier-Methode wird dazu das Gebiet D als Quadrat der Größe $[-0.5, 0.5] \times [0, 1]$ gewählt. Am Rand $(\partial D)_2 = [-0.5, 0.5] \times \{0\}$ liegt dabei eine Neumann-Bedingung und an den Rändern $(\partial D)_{3,2} = \{-0.5\} \times [0, 1]$, $(\partial D)_{3,3} = [-0.5, 0.5] \times \{1\}$ und $(\partial D)_{3,4} = \{0.5\} \times [0, 1]$ Robin-Bedingungen an. Falls nichts anderes angegeben ist, sind folgende Materialparameter gesetzt $\lambda = 38 \frac{m^2}{s}$ und $\alpha_i = 10 \frac{m}{s}$, $i = 2, 3, 4$.

7.1 RAWP mit zufälliger Anfangsbedingung

Der Vergleich der verschiedenen Methoden wird anhand des RAWP aus Abschnitt 4.2

$$\begin{aligned} \bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} &= 0, & x &= (x_1, x_2) \in D, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\ \text{AB: } \bar{u}(0, x, \omega) &= {}^\varepsilon \bar{u}_0(x, \omega), & x &\in \bar{D} \\ \text{RB: } \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \Big|_{(\partial D)_2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha_i \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,i}} &= 0, \quad i = 2, 3, 4, \end{aligned} \tag{7.1}$$

durchgeführt. Die Anfangsbedingung ${}^\varepsilon \bar{u}_0$ determiniert die zufällige Temperaturverteilung des betrachteten RAWP zum Zeitpunkt $t = 0$ im Gebiet D . Der Einfluss dieser Bedingung auf die Temperaturverteilungen im Gebiet D zu späteren Zeitpunkten wurde in dieser Arbeit durch die Finite-Elemente-Lösung (vgl. (4.6), (4.10))

$$\bar{u}_h(t, x, \omega) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}(t, \omega) p_j(x) \quad \text{mit} \quad \underline{u}_h(t, \omega) = G_h(t) \int_D {}^\varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) \underline{p}(x) dx, \tag{7.2}$$

durch die Fourier-Lösung (vgl. (4.42), (4.45))

$$\bar{u}(t, x, \omega) = \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{kl}(t, \omega) f_{kl}(x) \quad \text{mit} \quad c_{kl}(t, \omega) = e^{-\lambda_{\mu_{kl}} t} \int_D \varepsilon \bar{u}_0(x, \omega) f_{kl}(x) dx,$$

bzw. durch ein über Monte-Carlo-Simulationen erhaltenes Ensemble von möglichen Realisierungen $\bar{u}_N^i(t, x)$ der approximativen Lösung $\bar{u}_h(t, x)$ des RAWP (7.1) basierend auf dem Finite-Elemente-System (4.7) bestimmt. Dabei wurde die zufällige Anfangsbedingung $\varepsilon \bar{u}_0$ mit Hilfe des in Kapitel 6 vorgestellten Simulationsmodells generiert. Zur Berechnung der obigen Fourier-Lösung wurde die Reihe nach $N_F = 50$ Gliedern abgebrochen, d.h. es wurden die ersten 50, der Größe nach geordneten Eigenwerte μ_{kl} und die dazugehörigen Eigenwerte f_{kl} berechnet.

Die Abb. 7.1 bis 7.4 zeigen mögliche Realisierungen von Temperaturverteilungen über dem Gebiet D zu den Zeitpunkten $t = 0, 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}$. Zum Zeitpunkt null ist die Temperaturverteilung durch die zufällige Anfangsbedingung $\varepsilon \bar{u}_0$ bestimmt, welche mit der Zeit über D ausmittelt wird.

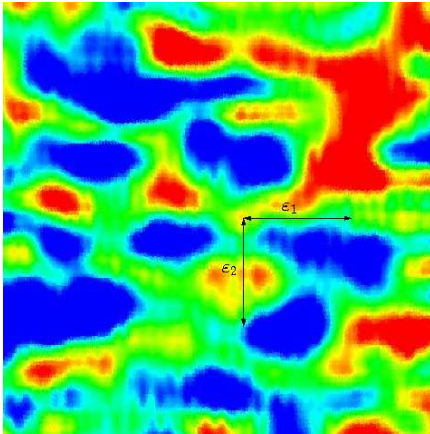


Abbildung 7.1: Realisierung einer Temperaturverteilung für $t = 0$

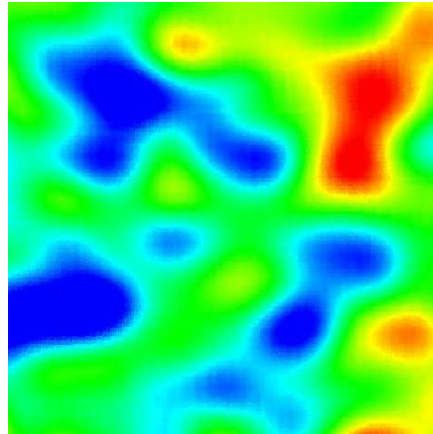


Abbildung 7.2: Realisierung einer Temperaturverteilung für $t = 5 \cdot 10^{-5}$

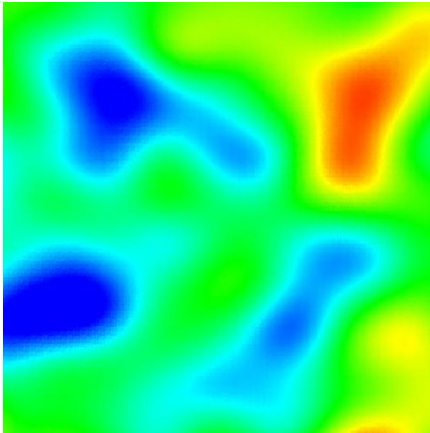


Abbildung 7.3: Realisierung einer Temperaturverteilung für $t = 10^{-4}$

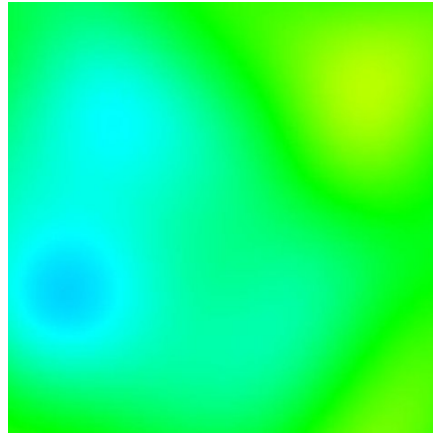


Abbildung 7.4: Realisierung einer Temperaturverteilung für $t = 5 \cdot 10^{-4}$

Nun sollen anhand eines numerischen Beispiels die auf den verschiedenen Wegen erhaltenen Varianzfunktionen

$$\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\} = \sum_{i,j \in \chi_h} \left[G_h(t) \int_D \int_D \mathbf{E}\{\varepsilon \bar{u}_0(x) \varepsilon \bar{u}_0(y)\} \underline{p}(x) \underline{p}^T(y) dy dx G_h^T(t) \right]_{i,j} p_i(x) p_j(x)$$

über die Finite-Elemente-Methode (vgl. (4.13)),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)^2\} &= \sum_{k_1, l_1=1}^{N_F} \sum_{k_2, l_2=1}^{N_F} e^{-\lambda t(\mu_{k_1 l_1} + \mu_{k_2 l_2})} f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(x) \\ &\quad \int_D \int_D \mathbf{E}\{\varepsilon \bar{u}_0(x) \varepsilon \bar{u}_0(y)\} f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(y) dy dx, \end{aligned}$$

über die Fourier-Methode (vgl. (4.59)) und als Schätzungen über die Monte-Carlo-Simulation (vgl. (6.1))

$$V^N(t, x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\bar{u}_h^i(t, x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{u}_h^i(t, x) \right)^2$$

miteinander verglichen werden. Dabei bezeichnet der Term

$$\left[G_h(t) \int_D \int_D \mathbf{E}\{\varepsilon \bar{u}_0(x) \varepsilon \bar{u}_0(y)\} \underline{p}(x) \underline{p}^T(y) dy dx G_h^T(t) \right]_{i,j}$$

die (i, j) -te Komponente der Korrelationsmatrix $\mathbf{E}\{\underline{u}_h(t) \underline{u}_h^T(t)\}$.

Die Korrelationsfunktion der zufälligen Anfangsbedingung $\varepsilon \bar{u}_0$ sei im Folgenden gegeben durch

$$\mathbf{E}\{\varepsilon \bar{u}_0(x_1, x_2) \varepsilon \bar{u}_0(y_1, y_2)\} = \sigma_0^2 \begin{cases} \left(1 - \frac{|y_1 - x_1|}{\varepsilon_1}\right)^2 \left(1 - \frac{|y_2 - x_2|}{\varepsilon_2}\right)^2 & |y_1 - x_1| < \varepsilon_1, \\ & |y_2 - x_2| < \varepsilon_2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.3)$$

mit $\sigma_0^2 = 250^2 = 62500$. Das Gebiet D wird fünfmal total mittels Quadraten verfeinert, womit sich die Diskretisierungsparameter zu $h_1 = h_2 = \frac{1}{32}$ ergeben. Die Ansatzfunktionen p_i , $i \in \chi_h$ sind als bilinear vorausgesetzt (vgl. dazu Beziehung (4.32)). Für die Korrelationslängen wird $\varepsilon_1 = h_1 = \frac{1}{32}$, $\varepsilon_2 = h_2 = \frac{1}{32}$ angenommen.

Zunächst werden die auf der Finite-Elemente-Diskretisierung basierenden Methoden zur Bestimmung der Varianzfunktion $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ miteinander verglichen. Die Abbildungen 7.5 bis 7.10 zeigen die mittels der asymptotischer Entwicklung (bis zur Ordnung sechs) (vgl. Abschnitt 4.1.1), der expliziten Berechnung (vgl. Abschnitt 4.1.3) und der Monte-Carlo-Simulation (vgl. Abschnitt 6) erhaltenen Varianzen zu den Zeitpunkten 10^{-5} und 10^{-4} . Die Monte-Carlo-Simulation wurde dabei auf Basis von 10^6 Realisierungen ermittelt. Es zeigt sich, dass die Werte gut übereinstimmen, was auch bei allen nachfolgenden Betrachtungen der Fall ist. Deshalb wird im Folgenden statt drei nur noch eine Abbildung angegeben.

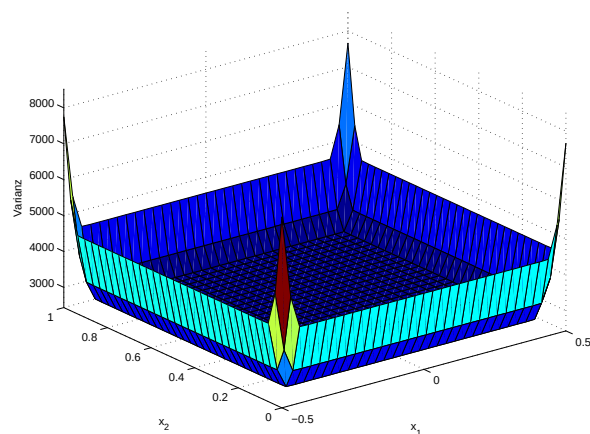


Abbildung 7.5: Entwickelte Varianz
 $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ zu $t = 10^{-5}$

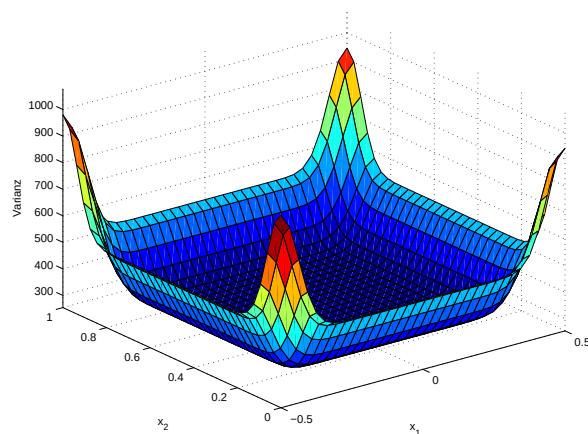


Abbildung 7.6: Entwickelte Varianz
 $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ zu $t = 10^{-4}$

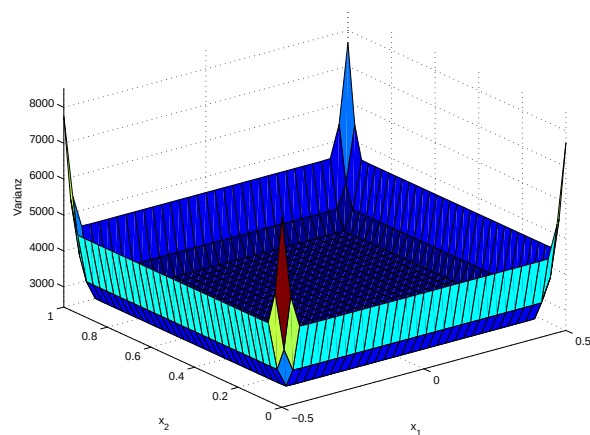


Abbildung 7.7: Explizit berechnete Varianz
 $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ zu $t = 10^{-5}$

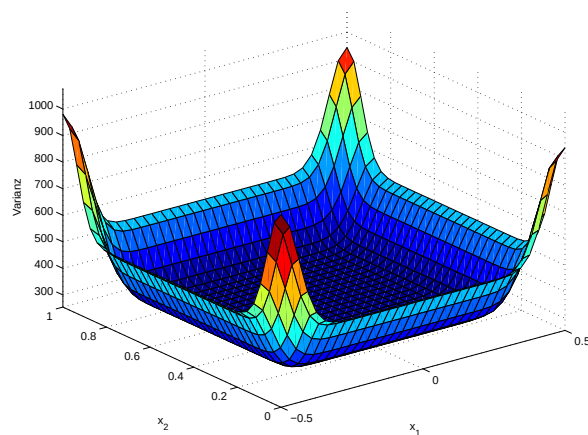


Abbildung 7.8: Explizit berechnete Varianz
 $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ zu $t = 10^{-4}$

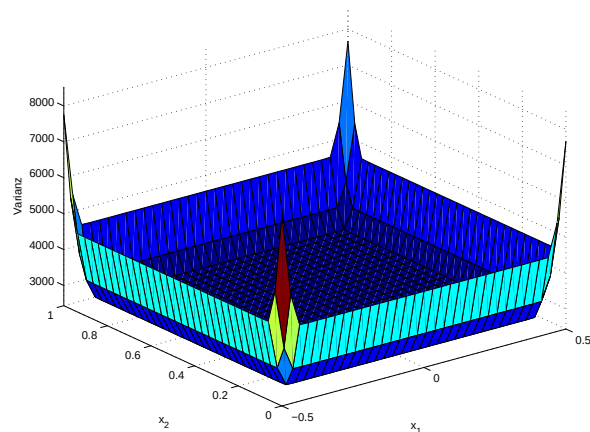


Abbildung 7.9: Simulierte Varianz
 $V^N(t, x)$ zu $t = 10^{-5}$

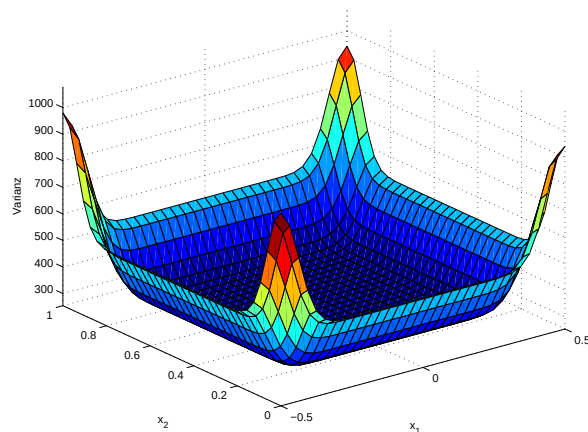


Abbildung 7.10: Simulierte Varianz
 $V^N(t, x)$ zu $t = 10^{-4}$

Durch die Wahl bilinearer Ansatzfunktionen p_i , $i \in \chi_h$ ist die Entwicklung bis zur sechsten

Ordnung exakt, da für Ordnungen größer als sechs die in den Beziehungen (4.28) bis (4.31) gegebenen Terme verschwinden. Die Approximationsgüte der asymptotischen Entwicklung ist in Abb. 7.11 angegeben. Dabei sind die Werte der entwickelten Varianzfunktionen $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ für die Ordnungen null, eins und zwei zum Zeitpunkt 10^{-5} als Schnitt in x_1 -Richtung durch das Gebiet D an der Stelle $x_2 = 0.5$ darstellt. Es zeigt sich, dass mit jeder weiteren Ordnung das Approximationsergebnis verbessert wird und bei Ordnung sechs die exakte Darstellung erreicht ist.

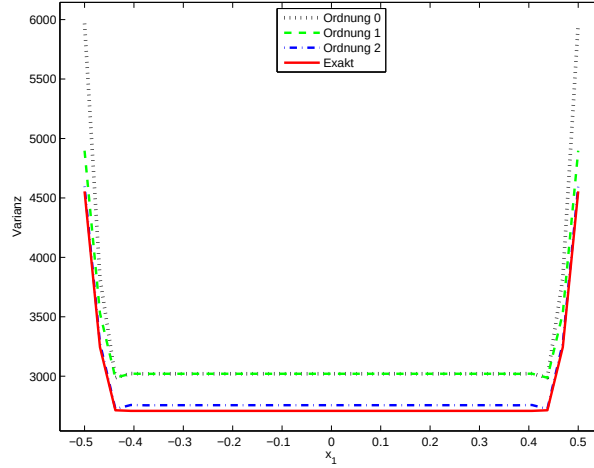


Abbildung 7.11: Vergleich der Entwicklungen von $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ für verschiedene Ordnungen, $x_2 = 0.5$, $t = 10^{-5}$

Im Weiteren soll auf einen Vergleich der auf der Finite-Elemente-Methode und der Fourier-Methode basierenden Berechnung der Varianzfunktionen eingegangen werden. Die Gegenüberstellungen der Abb. 7.7 und 7.12 zum Zeitpunkt $t = 10^{-5}$ sowie 7.8 und 7.13 für $t = 10^{-4}$ zeigen eine gute Übereinstimmung, die auch durch die Abb. 7.14 und 7.15 noch verdeutlicht wird. Hier sind die Varianzen in Abhängigkeit von x_2 an der Stelle $x_1 = 0$ dargestellt.

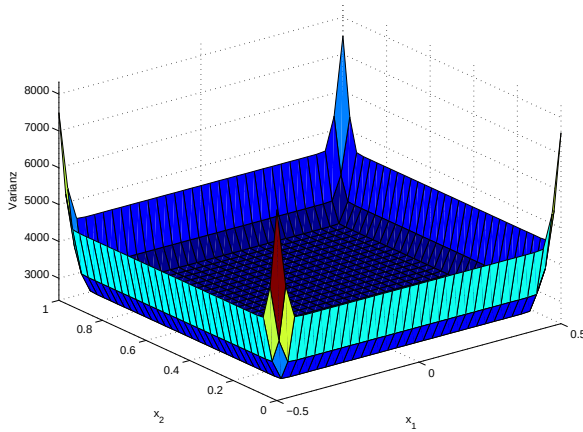


Abbildung 7.12: Varianz $\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)^2\}$ zu $t = 10^{-5}$ (Berechnung basierend auf Fourier-Methode)

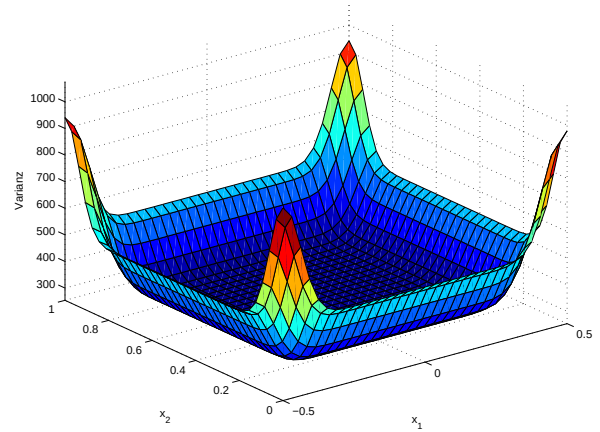


Abbildung 7.13: Varianz $\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)^2\}$ zu $t = 10^{-4}$ (Berechnung basierend auf Fourier-Methode)

Die Differenzen zum Zeitpunkt 10^{-5} zwischen der mittels FEM und Fourier-Methode ermittelten Varianzen sind zum Zeitpunkt 10^{-4} schon fast ausgeglichen. Weiterhin ist

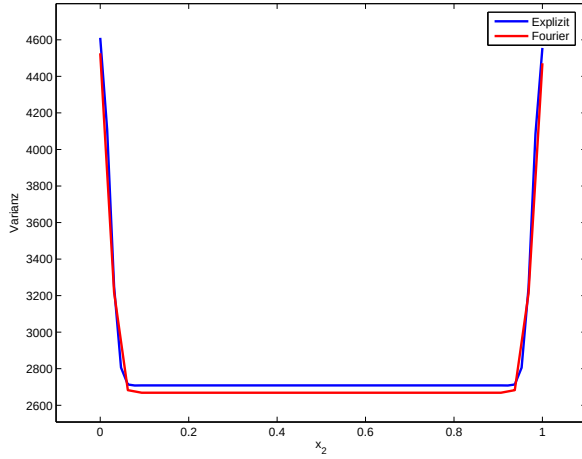


Abbildung 7.14: Vergleich der Varianzen zu $t = 10^{-5}$, $x_1 = 0$ und $\alpha = \alpha_i = 10$, $i = 2, 3, 4$

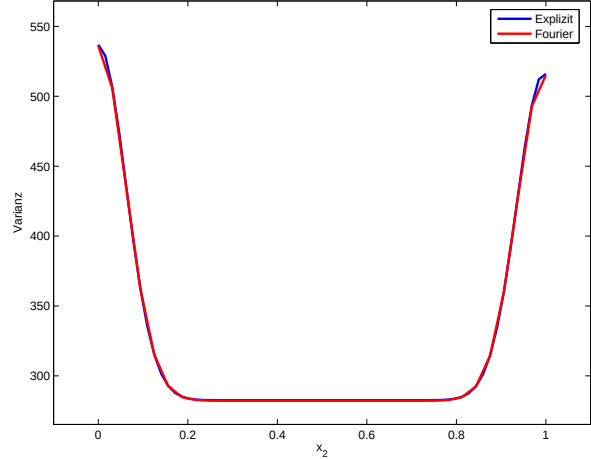


Abbildung 7.15: Vergleich der Varianzen zu $t = 10^{-4}$, $x_1 = 0$ und $\alpha = \alpha_i = 10$, $i = 2, 3, 4$

an diesen Abb. zu erkennen, dass die Varianz mit zunehmender Zeit rasch abnimmt. Da nur zum Zeitpunkt $t = 0$ Zufall in das RAWP (7.1) über den Anfangszustand ${}^\varepsilon \overline{u}_0$ eingebracht wird, mittelt sich dieser Einfluss mit zunehmender Zeit aus. Die Abb. 7.16 verdeutlicht diesen Zusammenhang nochmals. Hier wurde die Varianz im Punkt $(0, 0.5)$ in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

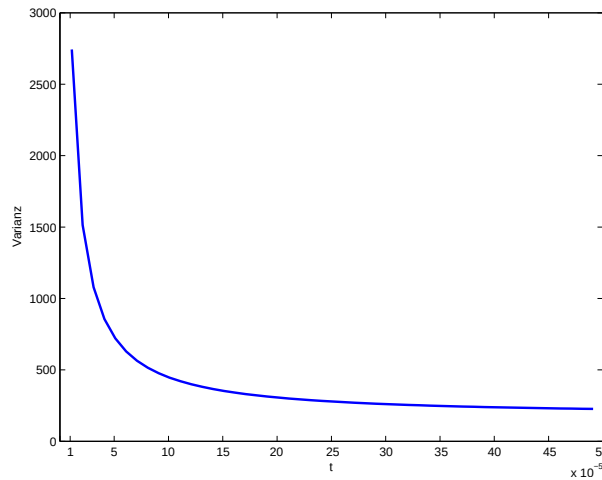


Abbildung 7.16: Varianz für $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $\alpha = \alpha_i = 10$, $i = 2, 3, 4$ in Abhängigkeit der Zeit

Die Abb. (7.5) bis (7.15) zeigen, dass die betrachteten Varianzfunktion im Inneren des Gebietes D kleiner sind als am Rand ∂D . Der Grund dafür ist, dass Temperaturunterschiede im Inneren aufgrund des Wärmeaustauschs mit der Umgebung schneller ausgemittelt werden als am Rand, da dort die homogene Neumann-Bedingung bzw. die Robin-Bedingungen mit $\alpha_i = \alpha = 10$ anliegen. Über den Rand $(\partial D)_2$ kann demnach keine Wärme abgegeben

oder aufgenommen werden und auch an den Rändern $(\partial D)_{3,i}$, $i = 2, 3, 4$ erweisen sich die Wärmeübergangszahlen $\alpha_i = \alpha = 10$ als relativ klein, so dass über diesen Rändern nur ein geringer Wärmeaustausch stattfinden kann.

Im Folgenden werden deshalb die Änderungen der Varianzen an $(\partial D)_2$, $(\partial D)_{3,i}$, $i = 2, 3, 4$ betrachtet. Aufgrund der Zentriertheit der Lösung $\bar{u}$ des RAWP (7.1) gilt für die Varianz

$$\sigma^2(t, x_1, x_2) := \mathbf{E}\{\bar{u}(t, x_1, x_2)^2\},$$

woraus sich folgende Beziehung für die Änderung in x_2 -Richtung ableiten lässt

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = 2\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x_1, x_2)\bar{u}_{x_2}(t, x_1, x_2)\}. \quad (7.4)$$

Am Rand $(\partial D)_2$ wurde die Neumann-Bedingung

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) = -\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}(t, x, \omega) = 0$$

gestellt, was dem Fall der Wärmeisolation entspricht. Gleichung (7.4) ergibt sich dann für $x \in (\partial D)_2$ als

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, 0) = 0. \quad (7.5)$$

D.h. am Rand $(\partial D)_2$ ändert sich die Varianz in x_2 -Richtung nicht, sie bleibt somit in der Zeit gegenüber „inneren“ Punkten größer. Am Rand $(\partial D)_{3,3}$ dagegen liegt die Robin-Bedingung

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha_3 \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,3}} = \left(\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}(t, x, \omega) + \alpha_3 \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,3}} = 0$$

an. Diese beschreibt den Wärmefluss über den Rand infolge von Temperaturdifferenzen zwischen Innen- und Außengebiet. Dabei gilt, je größer die Wärmeübergangszahl α_3 ist, desto größer ist der Wärmefluss über $(\partial D)_{3,3}$.

Für die Änderungen der Varianz ergibt sich nach Gleichung (7.4) bei $x \in (\partial D)_{3,3}$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, 1) = 2\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x_1, 1)\bar{u}_{x_2}(t, x_1, 1)\} = -2\frac{\alpha_3}{\lambda}\sigma^2(t, x_1, 1). \quad (7.6)$$

D.h. die Änderung der Varianz σ^2 bezüglich x_2 geschieht proportional zu σ^2 mit dem Faktor $-2\frac{\alpha_3}{\lambda}$. Für $\alpha_3 = 0$ geht die Robin-Bedingung in eine Neumann-Bedingung über. Aus Gleichung (7.6) ist ersichtlich, dass in diesem Fall die Änderung der Varianz wieder null beträgt. Für $\alpha_3 \rightarrow \infty$ dagegen geht die Robin-Bedingung in eine Dirichlet-Bedingung über. Es ist

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha_3 \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,3}} = \left(\frac{1}{\alpha_3} \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,3}} = 0,$$

woraus $\bar{u}(t, x, \omega) = 0$ für $x \in (\partial D)_{3,3}$ und $\alpha_3 \rightarrow \infty$ folgt, d.h. am Rand ist kein Wärmefluss sondern eine feste Temperatur vorgegeben. Für die Änderung der Varianz gilt dann nach (7.6)

$$\frac{1}{\alpha_3} \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, 1) = -\frac{2}{\lambda} \sigma^2(t, x_1, 1),$$

woraus sich für $\alpha_3 \rightarrow \infty$ folgende Beziehung ergibt

$$\sigma^2(t, x_1, 1) = 0.$$

Dieses Verhalten spiegelt sich auch in Abb. 7.17 wieder. Dort wird der Einfluss der Robin-Bedingungen mit $\alpha_3 = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ auf die Varianzfunktionen zum Zeitpunkt 10^{-5} veranschaulicht. Dabei wurde die Varianz an der Stelle $x_1 = 0$ in Abhängigkeit von x_2 abgetragen. Wie schon für den Fall $\alpha_3 = 10$ in den Abb. (7.14) und (7.15) gesehen, stimmen die mittels FEM und Fourier-Methode berechneten Varianzen auch für $\alpha_3 = 10^2, 10^3, 10^4$ gut überein.

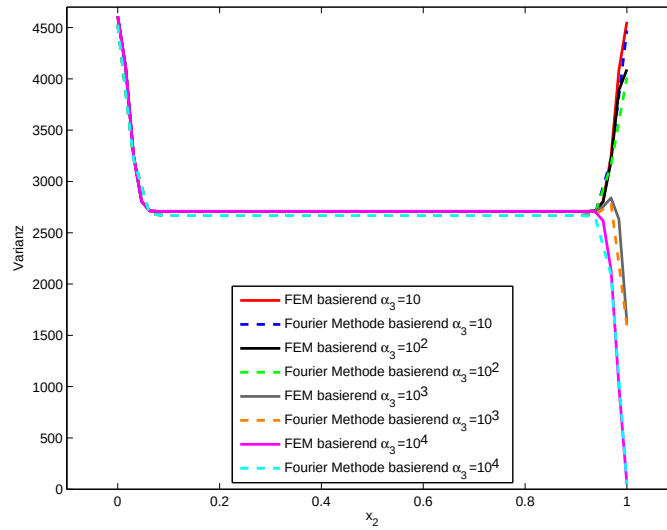


Abbildung 7.17: Vergleich der Varianzen für $\alpha_3 = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ in Abhängigkeit von x_2 und $x_1 = 0$

Für $\alpha_3 = 10$ ist der Wärmestrom über den Rändern $(\partial D)_{3,3}$ sehr schwach. Somit mitteln sich Temperaturunterschiede am Rand schlechter aus und die Varianz bleibt hoch (vgl. Abb. 7.17). Mit größer werdender Wärmeübergangszahl α_3 sinkt die Varianz am Rand $(\partial D)_{3,3}$. Für $\alpha_3 = 10^3$ beispielsweise ist der Wärmestrom über dem Rand $(\partial D)_{3,3}$ hoch und somit können Temperaturunterschiede am Rand schneller als im Inneren des Gebietes D ausgeglichen werden, die Varianz ist demnach gering. Für $\alpha_3 = 10^4$ geht die Robin-Bedingung näherungsweise in eine Dirichlet-Bedingung über, womit die Varianz am Rand nahezu null ist (vgl. Abb. 7.17).

Ein analoges Verhalten lässt sich für die Änderungen der Varianzen in x_1 -Richtung an den Rändern $(\partial D)_{3,2}$ und $(\partial D)_{3,4}$ ableiten. Zusammenfassend gilt also für $t \in (0, \delta_t)$, $\delta_t > 0$ und $x_1 \in [-0.5, 0.5]$

$$\begin{aligned} x_2 = 0 & : \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, 0) = 0 \\ x_2 = 1 & : \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, 1) = -2 \frac{\alpha_3}{\lambda} \sigma^2(t, x_1, 1). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann mit Hilfe der Taylorentwicklung auf das Verhalten der Varianzen in der Umgebung der Ränder $(\partial D)_2$ und $(\partial D)_{3,3}$ geschlossen werden. Für

$1 - \delta_{(\partial D)_{3,3}} \leq x_2 \leq 1$, $\delta_{(\partial D)_{3,3}} > 0$ und t, x_1 fest ergibt sich

$$\sigma^2(t, x_1, x_2) \approx \sigma^2(t, x_1, 1) + (x_2 - 1) \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, 1) = (1 - 2 \frac{\alpha_3}{\lambda} (x_2 - 1)) \sigma^2(t, x_1, 1),$$

wobei $(1 - 2 \frac{\alpha_3}{\lambda} (x_2 - 1)) \geq 1$. D.h. es existiert eine $\delta_{(\partial D)_{3,3}}$ -Umgebung des Randes $(\partial D)_{3,3}$ wo gilt

$$\sigma^2(t, x_1, 1) \leq \sigma^2(t, x_1, x_2), \quad 1 - \delta_{(\partial D)_{3,3}} \leq x_2 \leq 1.$$

Die Abb. (7.18) verdeutlicht dieses Verhalten. Hier sind die die Varianzen aus Abb. 7.17 in Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl $\alpha_3 = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ im Intervall $[0.95, 1]$ abgetragen.

Für $0 \leq x_2 \leq \delta_{(\partial D)_2}$ und t, x_1 fest gilt dagegen

$$\sigma^2(t, x_1, x_2) \approx \sigma^2(t, x_1, 0) + (x_2 - 0) \frac{\partial \sigma^2}{\partial x_2}(t, x_1, 0) = \sigma^2(t, x_1, 0).$$

Demnach existiert eine $\delta_{(\partial D)_2}$ -Umgebung des Randes $(\partial D)_2$, in welcher die Varianzen konstant sind. Dies zeigt auch Abb. 7.19, wo die Varianz im Intervall $[0, 0.06]$ abgetragen ist.

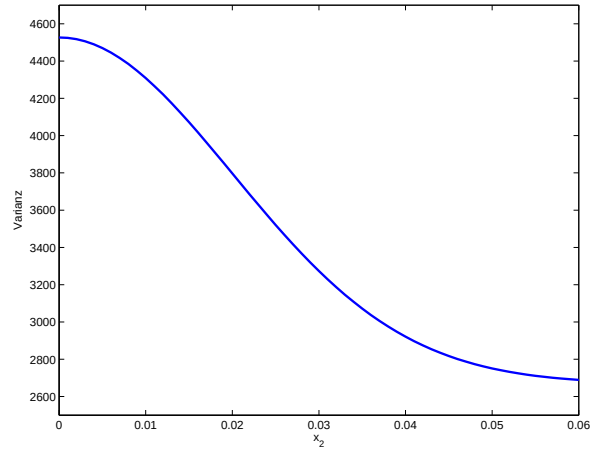
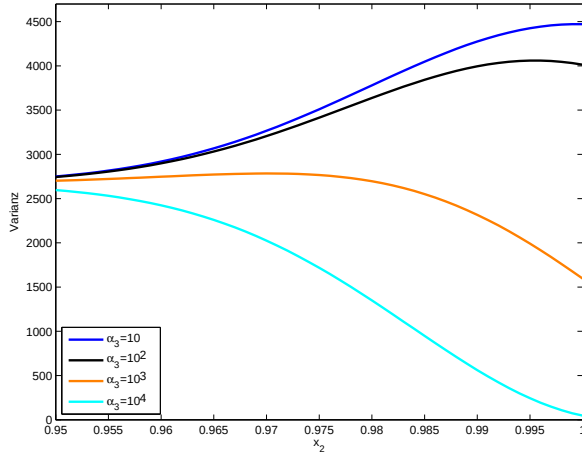


Abbildung 7.18: Vergleich der Varianzen zu $t = 10^{-5}$, $\alpha_3 = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ und $x_1 = 0$ (gezoomt)

Abbildung 7.19: Varianz zu $t = 10^{-5}$ und $x_1 = 0$ (gezoomt)

Im Rahmen der Fourier-Methode werden die Eigenfunktionen f_n und die dazugehörigen Eigenwerte μ_n als Lösungen des Eigenwertproblems

$$-\Delta f = \mu f \tag{7.7}$$

$$RB : \left. \frac{\partial f}{\partial N} \right|_{(\partial D)_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial N} + \alpha_i f \right) \Big|_{(\partial D)_{3,i}} = 0, \quad i = 2, 3, 4$$

bestimmt. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Eigenwerte der Systemmatrix $M_h^{-1} K_h$ des FE- Gleichungssystems (4.7) gegen diese Eigenwerte μ_n konvergieren.

Dazu wird die schwache Formulierung des Problems (7.7) in der Form

$$a(f, v) = \mu \lambda(f, v), \quad \forall v \in H^1(D)$$

mit

$$a(f, v) := \lambda \int_D \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right] dx + \sum_{k=2}^4 \alpha_k \int_{(\partial D)_{3,k}} f(x) v(x) ds, \quad (\text{vgl. (4.5)})$$

betrachtet. Mit Hilfe des Übergangs von $f(x)$ zu $f_h(x) := \sum_{j \in \chi_h} f_j p_j(x)$ erfolgt die Diskretisierung bezüglich des Ortes, wobei die Ansatzfunktionen analog zu Kapitel 4.1 eine Basis des Approximationsraumes $V_{0h} = \left\{ v_h : v_h(x) = \sum_{i \in \chi_h} v_i p_i(x) \right\}$ darstellen. Damit ergibt sich für alle $i \in \chi_h$ folgende Aufgabe

$$\sum_{j \in \chi_h} f_j a(p_j, p_i) = \mu_h \lambda \sum_{j \in \chi_h} f_j (p_j, p_i),$$

woraus sich mit Hilfe der Definitionen (4.8) und (4.9) von Masse- und Steifigkeitsmatrix das System

$$K_h \underline{f} = \mu_h \lambda M_h \underline{f} \quad (7.8)$$

mit $K_h = [a(p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h}$, $M_h = [(p_j, p_i)]_{i,j \in \chi_h}$ und $\underline{f} = [f_i]_{i \in \chi_h}^T$ ableiten lässt.

Unter Voraussetzung einer zulässigen Diskretisierung (vgl. Bemerkung 2.3) folgt aus diesen Überlegungen nach [52] die Beziehung

$$\mu_n = \lim_{N_h \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \mu_{h,n},$$

d.h. für feiner werdende Diskretisierungen konvergieren die Eigenwerte der Matrix $\frac{1}{\lambda} M_h^{-1} K_h$ gegen die Eigenwerte des Problems (7.7).

n	μ_n	$\frac{1}{\lambda} \mu_{h,n}$
1	$0.0028 \cdot 10^4$	$0.0028 \cdot 10^4$
2	$0.0414 \cdot 10^4$	$0.0413 \cdot 10^4$
3	$0.0423 \cdot 10^4$	$0.0423 \cdot 10^4$
4	$0.0809 \cdot 10^4$	$0.0808 \cdot 10^4$
5	$0.1544 \cdot 10^4$	$0.1539 \cdot 10^4$
6	$0.1554 \cdot 10^4$	$0.1549 \cdot 10^4$
7	$0.1939 \cdot 10^4$	$0.1934 \cdot 10^4$
8	$0.1940 \cdot 10^4$	$0.1934 \cdot 10^4$
9	$0.3070 \cdot 10^4$	$0.3060 \cdot 10^4$

Tabelle 7.1: Vergleich der Eigenwerte

Für die Diskretisierung des Gebietes D mit 1089 Punkten, was einer fünfmaligen totalen Verfeinerung entspricht, ist in Tabelle 7.1 der numerische Vergleich der ersten neun Eigenwerte angegeben.

7.2 Analysis des RAWP mit zufälliger Randbedingung

Der Vergleich der verschiedenen Methoden wird anhand des RAWP (5.1)-(5.4), konkretisiert in Abschnitt 5.2

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \quad \lambda = \text{const} \\
 \text{AB: } & \bar{u}(0, x, \omega) = 0, \quad x \in \bar{D} \\
 \text{RB: } & \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \Big|_{(\partial D)_2} = \bar{\varepsilon} \bar{P}(t, x_1, \omega) \\
 & \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha_i \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_{3,i}} = 0, \quad i = 2, 3, 4
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

durchgeführt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Temperaturverteilung über dem Gebiet D null. Für Zeiten $t > 0$ wird über den Rand $(\partial D)_2$ ein zufälliger Wärmestrom $\bar{\varepsilon} \bar{P}$ eingeleitet. Der Einfluss dieser zufälligen Randbedingung auf die Temperaturverteilung wurde mit Hilfe der Finite-Elemente-Lösung (vgl. (5.6), (5.10))

$$\bar{u}_h(t, x, \omega) = \sum_{j \in \chi_h} u_{h,j}(t, \omega) p_j(x) \quad \text{mit} \quad \underline{u}_h(t, \omega) = \int_0^t \int_{-R}^R G_h(t-\tau) \underline{p}(x_1, 0) \bar{\varepsilon} \bar{P}(\tau, x_1, \omega) dx_1 d\tau,$$

der Fourier-Lösung (vgl. (5.51))

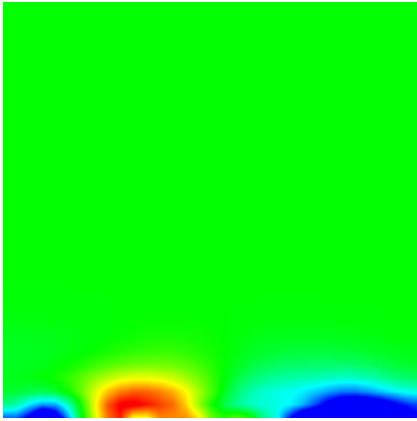
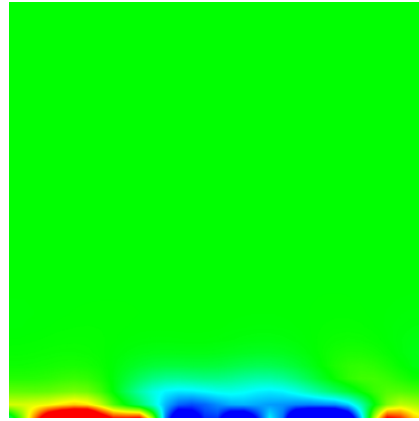
$$\bar{u}(t, x, \omega) = \frac{1}{2H} \sum_{k,l=1}^{\infty} (2q_l + \mu_{2l} p_l) \int_0^t \int_{-R}^R \bar{\varepsilon} \bar{P}(s, z, \omega) \varphi_{1k}(z) e^{-\lambda \mu_{kl}(t-s)} dz ds f_{kl}(x_1, x_2)$$

bzw. durch ein über Monte-Carlo-Simulationen (vgl. Kapitel 6) erhaltenes Ensemble von möglichen Realisierungen $\bar{u}_N^i(t, x)$ der approximativen Lösung $\bar{u}_h(t, x)$ des RAWP (7.9) bestimmt. Zur Bestimmung der obigen Fourier-Lösung wurde die Reihe nach $N_F = 50$ Gliedern abgebrochen, d.h. es wurden die ersten 50, der Größe nach geordneten Eigenwerte μ_{kl} und die dazugehörigen Eigenwerte f_{kl} in die Berechnung einbezogen.

Die Abb. 7.20 und 7.21 zeigen Realisierungen der Temperaturverteilung über dem Gebiet D zu den Zeitpunkten $t = 10^{-2}$ und $t = 2$. Dabei wird deutlich, dass sich die Temperaturen in der Umgebung des Randes $(\partial D)_2$ infolge des Wärmestromes $\bar{\varepsilon} \bar{P}$ stark ändern, im restlichen Gebiet aber relativ konstant bleiben.

Anhand numerischer Ergebnisse werden nun die Varianzfunktionen der FE-Lösung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\} &= \sum_{i,j \in \chi_h} \int_0^t \int_0^t \int_{-R}^R \int_{-R}^R \left[G_h(t-\tau) \underline{p}(z, 0) \underline{p}^T(\bar{z}, 0) G_h^T(t-\bar{\tau}) \right]_{i,j} \\
 &\quad \mathbf{E}\{\bar{\varepsilon} \bar{P}(\tau, z) \bar{\varepsilon} \bar{P}(\bar{\tau}, \bar{z})\} d\bar{z} dz d\bar{\tau} d\tau p_i(x) p_j(x)
 \end{aligned}$$

Abbildung 7.20: Realisierung einer Temperaturverteilung für $t = 10^{-2}$ Abbildung 7.21: Realisierung einer Temperaturverteilung für $t = 2$

(vgl. (5.11)), der Fourier-Lösung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)^2\} &= \frac{1}{4H^2} \sum_{k_1, l_1=1}^{N_f} \sum_{k_2, l_2=1}^{N_f} (2q_{l_1} + d_{l_1}p_{l_1})(2q_{l_2} + d_{l_2}p_{l_2}) f_{k_1 l_1}(x) f_{k_2 l_2}(x) \\ &\quad \int_0^t \int_{-R}^R \int_0^t \int_{-R}^R \mathbf{E}\{\bar{\varepsilon}P(s, z) \bar{\varepsilon}P(\bar{s}, \bar{z})\} \varphi_{1k_1}(z) \varphi_{1k_2}(\bar{z}) e^{-\lambda(\mu_{k_1 l_1}(t-s) + \mu_{k_2 l_2}(t-\bar{s}))} d\bar{z} d\bar{s} dz ds \end{aligned} \quad (7.10)$$

(vgl. (5.52)) sowie die Schätzung der Varianzfunktion über

$$V^N(t, x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(\bar{u}_h^i(t, x) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{u}_h^i(t, x) \right)^2$$

(vgl. (6.1)) miteinander verglichen. Der Term $\left[G_h(t-r) \underline{p}(z, 0) \underline{p}^T(\bar{z}, 0) G_h^T(t-\bar{r}) \right]_{i,j}$ bezeichnet dabei die (i, j) -te Komponente der Matrix.

Die Korrelationsfunktion der zufälligen Randbedingung $\bar{\varepsilon}P$ sei im Folgenden gegeben durch

$$\mathbf{E}\{\bar{\varepsilon}P(t_1, x_1) \bar{\varepsilon}P(t_2, y_1)\} = \sigma_0^2 \begin{cases} \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{\varepsilon_1}\right)^2 \left(1 - \frac{|y_1 - x_1|}{\varepsilon_2}\right)^2 & |t_2 - t_1| < \varepsilon_1, \\ & |y_1 - x_1| < \varepsilon_2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.11)$$

mit der Varianz $\sigma_0^2 = 25 \cdot 10^6$. Für die Korrelationslänge $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ wurde $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ und $\varepsilon_2 = h = \frac{1}{64}$ angenommen. Die Komponenten ε_1 und ε_2 stehen dabei für die Korrelationslänge in zeitliche bzw. örtliche, d.h. für den Spezialfall des betrachteten Rechteckgebietes in x_1 -Richtung. Die finiten Elemente wurden dabei wieder als Rechtecke gewählt und die Diskretisierung des Randes $(\partial D)_2$ wurde mit dem Parameter $h = \frac{1}{64}$ ausgeführt. Die Ansatzfunktionen p_i , $i \in \chi_h$ sind als bilinear vorausgesetzt (vgl. dazu Beziehung (4.32)).

Zuerst werden wieder die auf der Finite-Elemente-Methode basierenden Verfahren zur Berechnung der Varianzfunktion miteinander verglichen. Die Abb. 7.22 bis 7.24 stellen die

durch asymptotische Entwicklung (vgl. Abschnitt 5.1.1), durch explizite Berechnung (vgl. Abschnitt 5.1.3) und Monte Carlo-Simulation (vgl. Abschnitt 6) erhaltenen Varianzen zum Zeitpunkt $t = 10^{-2}$ dar. Das Simulationsergebnis wurde auf Grundlage von 10^5 Realisierungen bestimmt. Anders als im Fall der zufälligen Anfangsbedingung verschwinden die Terme $q_i^{(r,s)} = D^{(\alpha)}\phi_i^{(r,s)}(z_1, z_2)\Big|_{z_1=z_2=0}$, $i = 1, \dots, 6$ nicht ab einer bestimmten Entwicklungsordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = n_0$ mit $n_0 < \infty$, womit auch die asymptotische Entwicklung eine beliebig hohe Ordnung besitzen kann. Das dargestellte Ergebnis der asymptotischen Entwicklung (5.24) wurde auf Basis der ersten zehn Entwicklungsterme erhalten. Die Abb. 7.22 bis 7.24 zeigen, dass die Werte gut übereinstimmen, was durch den 2d-Schnitt in x_2 -Richtung an der Stelle $x_1 = 0$ verdeutlicht wird (vgl. Abb. 7.25). Dieses Verhalten ist auch bei allen anderen Parameterkonstellationen zu beobachten, weshalb im Folgenden nur noch eine Varianzfunktionen stellvertretend für diese drei Berechnungsmöglichkeiten angegeben wird.

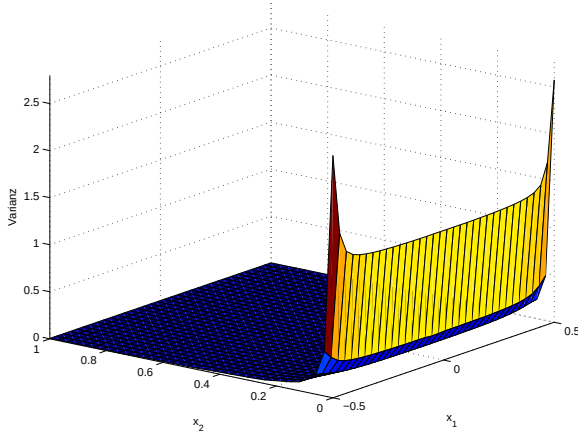


Abbildung 7.22: Entwickelte Varianz $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$

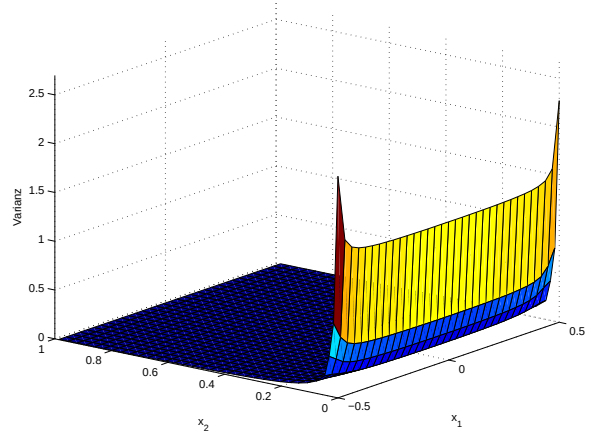


Abbildung 7.23: Explizit berechnete Varianz $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$

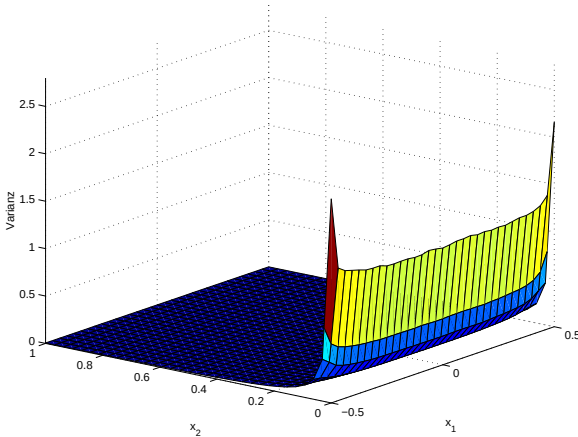


Abbildung 7.24: Simulierte Varianz $V^N(t, x)$ für $t = 10^{-2}$

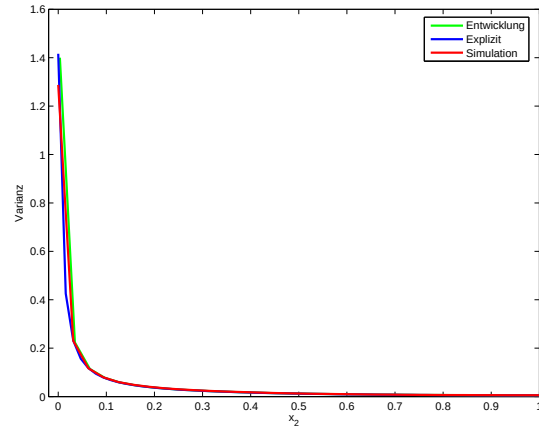


Abbildung 7.25: Vergleich der FEM basierenden Verfahren

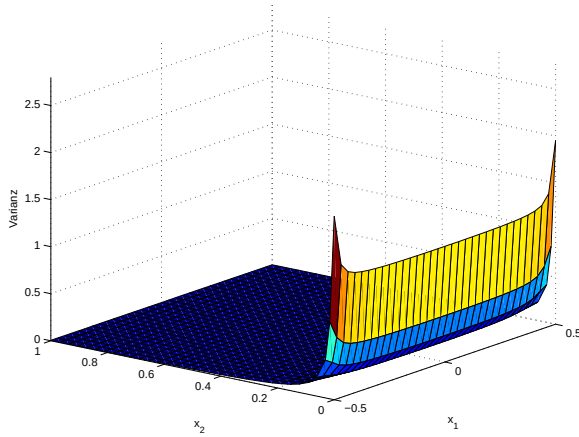


Abbildung 7.26: Varianz $\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$, berechnet über Fourier-Methode

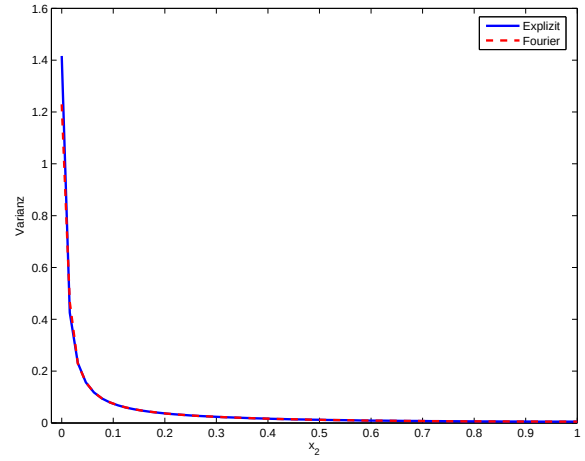


Abbildung 7.27: Vergleich der Varianzen für $x_1 = 0$ und $t = 10^{-2}$

Das Hauptaugenmerk wird in diesem Abschnitt auf den Vergleich der auf der FEM und der Fourier-Methode basierenden Varianzfunktionen gelegt. Wie sich aus den Abb. 7.22 bis 7.24 (berechnet über FE Methoden und Simulation) und 7.26 (berechnet über Fourier-Methode) ablesen lässt, stimmen auch diese Varianzfunktionen zum Zeitpunkt $t = 10^{-2}$ gut überein. Der 2d-Schnitt in Abb. 7.27 unterstreicht diese Aussage. Hier wurden die Varianzen in Abhängigkeit von x_2 an der Stelle $x_1 = 0$ dargestellt.

In den betrachteten Abb. wird deutlich, dass der zufällige Wärmeeinstrom $\bar{\varepsilon}P$ eine Varianz der Lösung zur Folge hat, welche in x_2 -Richtung stark auf null abfällt. Um diesen Einfluss der Randbedingung $\bar{\varepsilon}P$ besser analysieren zu können, werden die folgenden Betrachtungen auf das verkleinerte Rechteckgebiet $[-0.5, 0.5] \times [0, 0.1]$ bezogen. Die Abb. 7.28 und 7.29 zeigen die auf der FEM und der Fourier-Methode basierenden Varianzfunktionen über dem verkleinerten Gebiet.

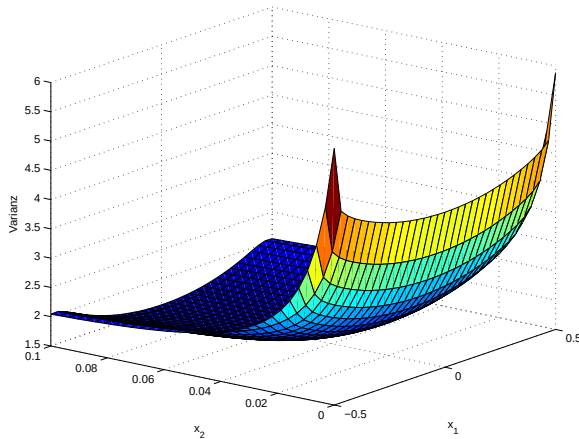


Abbildung 7.28: $\mathbf{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$ und $\alpha = 10$ (FE-Methode)

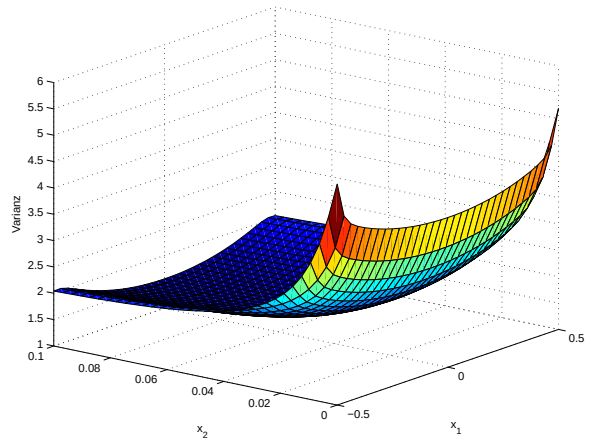


Abbildung 7.29: $\mathbf{E}\{\bar{u}(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$ und $\alpha = 10$ (Fourier-Methode)

Es ist deutlich zu erkennen, dass die zufällige Randbedingung $\varepsilon\overline{P}$ nun die Temperaturverteilung über dem gesamten Gebiet beeinflusst. Auch ist die Wirkung der deterministischen Robin-Bedingungen an den Rändern $(\partial D)_{3,i}, i = 2, 3, 4$ deutlicher sichtbar. Die Varianz ist in der Umgebung dieser Ränder höher als im Inneren des Gebietes, da aufgrund der relativ kleinen Wärmeübergangszahl $\alpha_i = \alpha = 10, i = 2, 3, 4$ nur ein schwacher Wärmefluss anliegt und somit Temperaturunterschiede langsamer ausgemittelt werden. Insgesamt zeigt sich, auch durch die in Abb. 7.34 und 7.35 gegebenen 2d-Schnitten in x_1 bzw. x_2 -Richtung, wieder eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Methoden.

Für eine Untersuchung des Einflusses der deterministischen Robin-Bedingungen werden nun die Wärmeübergangszahlen $\alpha_i = \alpha, i = 2, 3, 4$ schrittweise erhöht. Die Abb. 7.30 und 7.31 zeigen die auf der FEM basierenden und der Fourier-Methode basierenden Varianzfunktionen für $\alpha = \alpha_i = 10^3$, wogegen in den Abb. 7.32 und 7.33 $\alpha = \alpha_i = 10^4$ gewählt wurde. Die Differenzen für $x_1 = -0.5, 0.5$ sind deutlich erkennbar.

Aufgrund der größeren Wärmeübergangszahlen und der damit verbundenen stärkeren Wärmeflüsse über den Rändern $(\partial D)_{3,i}$ verringert sich die Varianz über dem gesamten Gebiet, da mehr Wärme über diese Ränder abgegeben werden kann. Diese Eigenschaft zeigt der Vergleich der Ergebnisse für $\alpha = \alpha_i = 10$ (Abb. 7.28, 7.29) und für $\alpha = \alpha_i = 10^4$ (Abb. 7.32, 7.33) für $t = 10^2$.

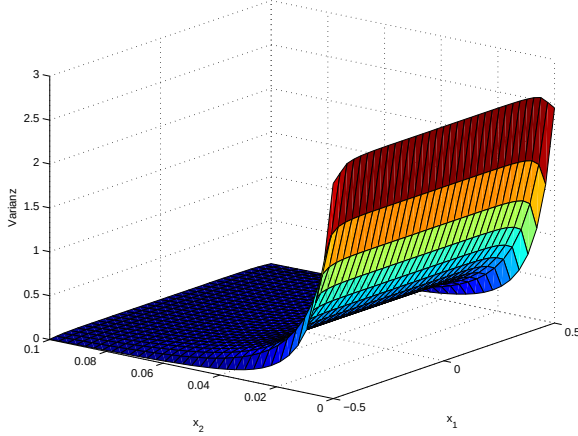


Abbildung 7.30: $\mathbf{E}\{\overline{u}_h(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$ und $\alpha = 10^3$ (FE-Methode)

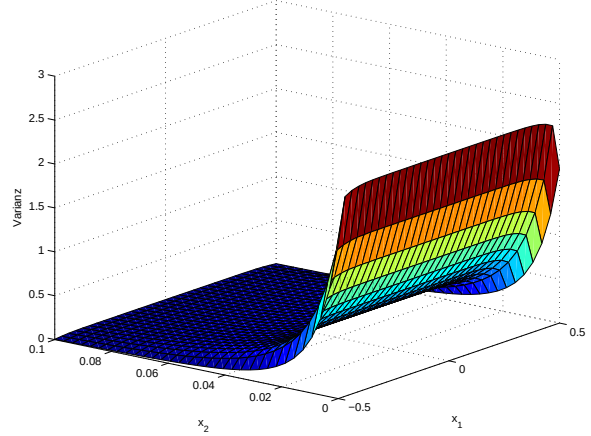


Abbildung 7.31: $\mathbf{E}\{\overline{u}(t, x)^2\}$ zu $t = 10^{-2}$ und $\alpha = 10^3$ (Fourier-Methode)

Für $\alpha \rightarrow \infty$ geht die Robin-Bedingung in eine Dirichlet-Bedingung über, d.h. an den Rändern $(\partial D)_{3,i}, i = 2, 3, 4$ wird kein Wärmefluss sondern eine feste Temperatur vorgegeben, welche im betrachteten Fall gleich null ist. In den Abb. 7.34 und 7.35 wird dieses Verhalten durch numerische Ergebnisse verdeutlicht.

Die nächste Abb. zeigt die zeitliche Entwicklung der Varianz in einigen ausgewählten Punkten $x = (0, 0.01), (0, 0.02), (0, 0.04), (0, 0.06), (0, 0.08)$. Die Kurven illustrieren, dass die Varianzen anfangs wachsen, dann aber einen konstanten Zustand erreicht haben.

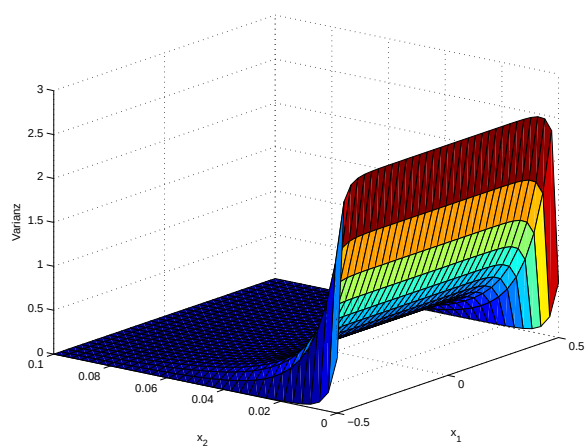


Abbildung 7.32: $\mathbb{E}\{\bar{u}_h(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$ und $\alpha = 10^4$ (FE-Methode)

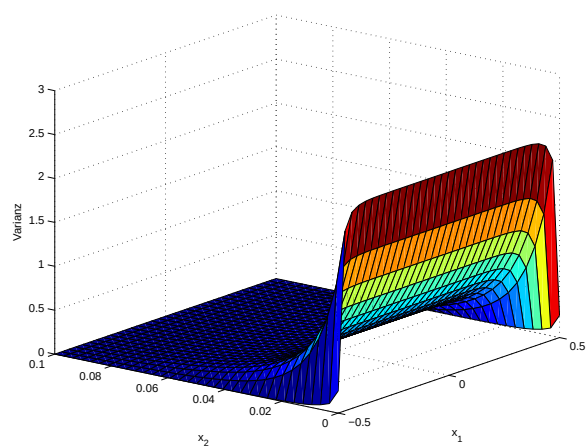


Abbildung 7.33: $\mathbb{E}\{\bar{u}(t, x)^2\}$ für $t = 10^{-2}$ und $\alpha = 10^4$ (Fourier-Methode)

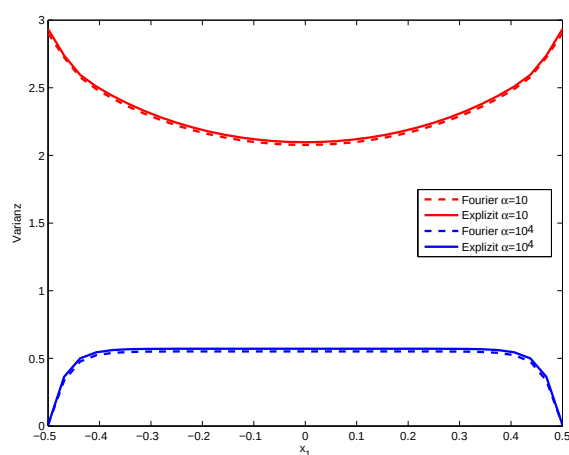


Abbildung 7.34: Vergleich der Varianzen für $x_2 = 0.5$ und $\alpha = 10; 10^4$

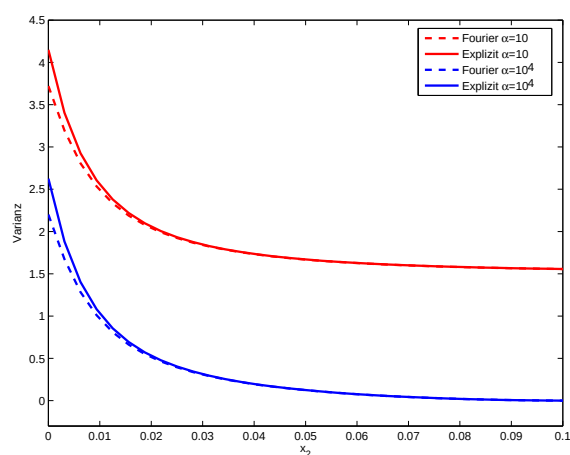


Abbildung 7.35: Vergleich der Varianzen für $x_1 = 0$ und $\alpha = 10; 10^4$

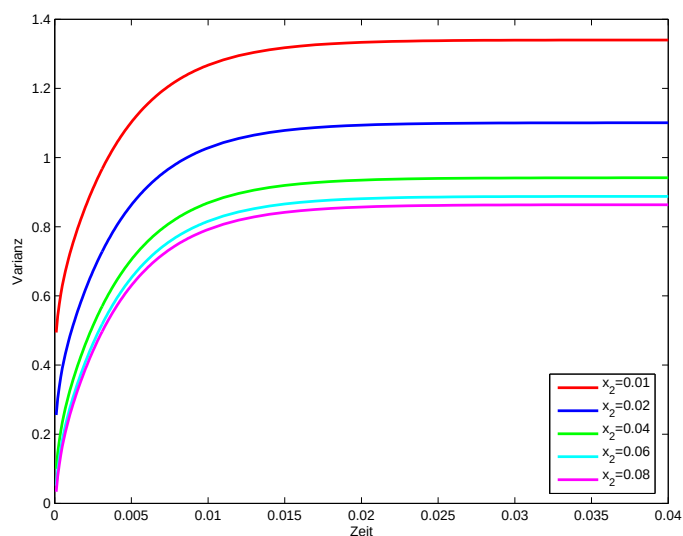


Abbildung 7.36: Zeitliche Entwicklung der Varianz in ausgewählten Punkten $(x_1, x_2) = (0, x_2)$

Auch für das RAWP mit zufälliger Randbedingung lässt sich zeigen, dass die Eigenwerte der Matrix $\frac{1}{\lambda}M_h^{-1}K_h$ für feiner werdende Diskretisierungen gegen die Eigenwerte des Eigenwertproblems (7.7) konvergieren, d.h. nach [52] gilt für zulässige Diskretisierungen

$$\mu_n = \lim_{N_h \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \mu_{h,n}.$$

i	μ_n	$\frac{1}{\lambda} \mu_{h,n}$
1	0.74563	0.74564
2	10.89213	10.89434
3	11.13630	11.13872
4	21.28281	21.28742
5	40.50672	40.53929
6	40.76523	40.79865
7	50.89739	50.93237
8	50.91174	50.94735
9	80.52632	80.59231

Tabelle 7.2: Vergleich der Eigenwerte

Für die Diskretisierung des Gebietes $D = [-0.5, 0.5] \times [0, 1]$ mit 4425 Punkten, was einer sechsmaligen totalen Verfeinerung entspricht, ist in Tabelle 7.2 der numerische Vergleich der ersten neun Eigenwerte angegeben.

Abschließend wird ein konkrete Anwendung betrachtet, welche auf Untersuchungen von Bremsvorgängen in Kraftfahrzeugen mit Hilfe elektroanaloger Methoden zurück geht. Auf dieses Problem wird auch in [44] eingegangen. Das Prinzip bestand in einer Intervallaufteilung der Reibfläche (vgl. Abb. 7.37), wobei in jedem Intervall unabhängig mit der Wahrscheinlichkeit p ein Wärmestrom simuliert wurde. Nach der Zeit $t = 34.1 \mu s$ wurden die Temperaturen in verschiedenen Tiefen des Materials gemessen und daraus die Varianzfunktionen geschätzt.

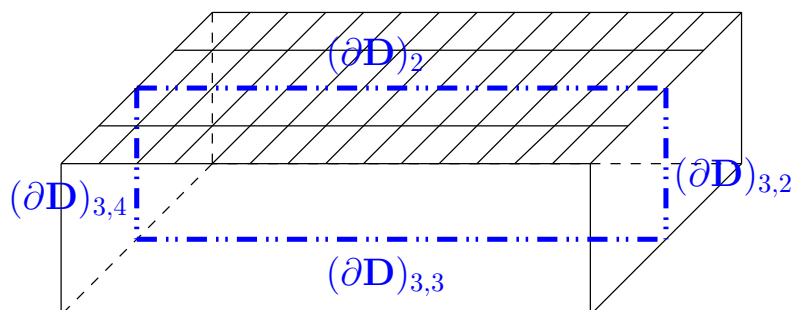


Abbildung 7.37: Darstellung des untersuchten Quaders

Im Weiteren wird nur ein zweidimensionaler Schnitt durch den Quader betrachtet. Damit ergibt sich wieder ein rechteckiges Gebiet D an dessen Rand $(\partial D)_2$ ein zufälliger, orts- und zeitabhängiger Wärmestrom ${}^{\varepsilon}P$ eingeleitet wird (vgl. Abb. 7.37 und 7.38).

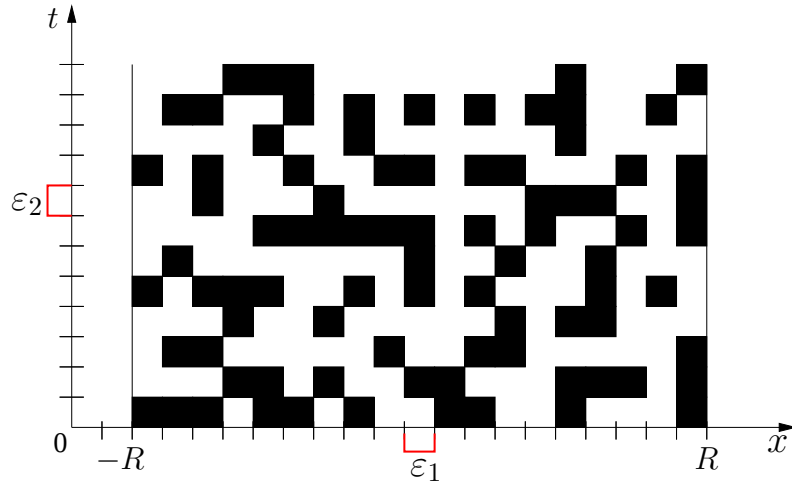


Abbildung 7.38: Realisierung der zufälligen Randbedingung $\bar{\varepsilon}P(t, x_1, \omega)$

Die zufällige Erregung wird dabei für $(t, x_1) \in [i\varepsilon_1, (i+1)\varepsilon_1] \times [j\varepsilon_2, (j+1)\varepsilon_2]$ mit $\varepsilon_1 = 5\mu s$ und $\varepsilon_s = 5\mu m$ modelliert durch

$$\varepsilon P(t, x_1, \omega) = \begin{cases} P_m & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases} \quad (7.12)$$

und besitzt die Eigenschaften

$$\mathbf{E}\{\varepsilon P(t, x_1)\} = P_m p \quad \text{und} \quad \mathbf{E}\{\varepsilon P(t, x_1)^2\} = P_m^2 p(1 - p).$$

Dabei ist zu beachten, dass das durch Beziehung (7.12) gegebene zufällige Feld εP nicht homogen ist. Für die weiteren Rechnungen werden die Materialparameter entsprechend der elektroanalogen Untersuchungen mit

$$\begin{aligned} R &= 48\mu m, & H &= 25.2\mu m, \\ P_m &= 1.525 \cdot 10^6 \frac{K}{m}, & \lambda &= 1.278 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}, \\ \alpha_2 &= \alpha_4 = 0, & \alpha_3 &= 2.821 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s} \end{aligned}$$

gewählt. Die Robin-Bedingungen an den Rändern $(\partial D)_{3,2}$ und $(\partial D)_{3,4}$ entsprechen damit homogenen Neumann-Bedingungen, was als Wärmeisolation interpretiert werden kann. Die Größe P_m beschreibt die maximale Oberflächenleistung.

Durch diese Parameterkonstellation vereinfacht sich die Berechnung der zur Anwendung der Fourier-Methode nötigen Eigenwerte und Eigenfunktionen (vgl. [44]). Nach den Gleichungen (4.48) und (4.49) ergeben sich die Eigenwerte μ_{1k} für $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ als

$$\mu_{1k} = \left(\frac{k\pi}{2R} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

und μ_{2l} als Lösungen der Gleichung

$$\lambda \mu_{2l} \sin(\sqrt{\mu_{2l}} H) = \alpha_3 \sqrt{\mu_{2l}} \cos(\sqrt{\mu_{2l}} H), \quad (7.13)$$

wobei $\mu_{2l} = 0$ kein Eigenwert ist. Die dazugehörigen Eigenfunktionen φ_{1k} und φ_{2l} lassen sich dann darstellen als

$$\varphi_{1k}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{R}} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0 \\ \sin\left(\frac{k\pi x_1}{2R}\right), & k \text{ ungerade} \\ \cos\left(\frac{k\pi x_1}{2R}\right), & k \text{ gerade} \end{cases}$$

und

$$\varphi_{2l}(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{H + \frac{1}{2\sqrt{\mu_{2l}}} \sin(2H\sqrt{\mu_{2l}})}} \cos(\sqrt{\mu_{2l}}x_2).$$

Die Abb. 7.39 vergleicht gemessene und die auf verschiedenen Wegen (asymptotische Entwicklung nullter Ordnung, explizite Berechnung, Fourier-Methode und Monte-Carlo-Simulation) berechnete Standardabweichungen. Für die Bestimmung der Standardabweichungen mittels asymptotischer Entwicklung, expliziter Berechnung bzw. Fourier-Methode wurde die Korrelationsfunktion der nicht homogenen Erregerfunktion eP durch die in Gleichung (7.11) gegebene Korrelationsfunktion ersetzt. Die Monte-Carlo-Simulation dagegen wurde mit der zufälligen Erregerfunktion (7.12) durchgeführt. Des Weiteren ist zu erwähnen, dass aufgrund der Größe des Gebietes bzw. der Materialparameter die Lösung der Gleichung (7.13) mit großem zeitlichen Aufwand verbunden ist. Deshalb wurden nur die ersten 17 Eigenwerte in die Berechnung einbezogen. Es zeigt sich, dass die gemessenen Werte recht gut mit den berechneten übereinstimmen.

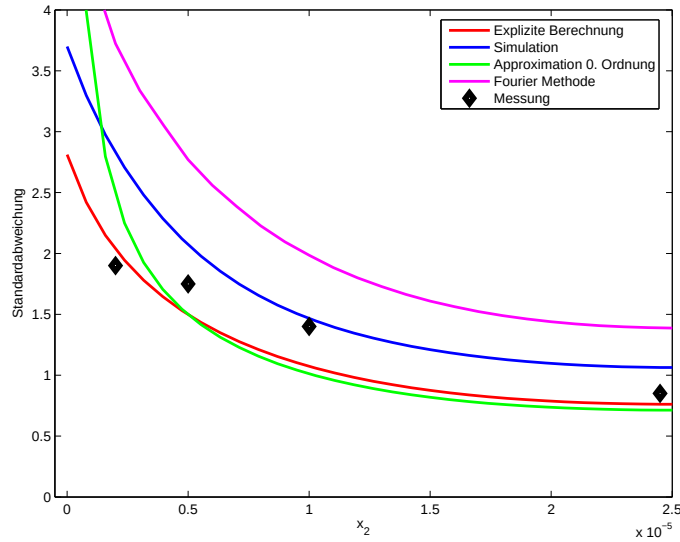


Abbildung 7.39: Vergleich der numerischen Resultate mit Messungen der Elektroanalogie

Literaturverzeichnis

- [1] A. Arnold. *Stochastische Differentialgleichungen. Theorie und Anwendungen.* R. Oldenbourg Verlag, Münschen, 2. Auflage, 1973.
- [2] I. Babuška, P. Chatzipantelidis. On solving linear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:4093–4122, 2002.
- [3] I. Babuška, R. Tempone, G. Zouraris. *Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations.* TICAM Report 02-38, Texas Institute of Computational and Applied Mathematics, University of Texas, Austin, TX, 2002.
- [4] G. Box, G. Jenkins. *Time Series Analysis, forecasting and control.* Holden Day, 2. Auflage, 1970.
- [5] J. B. Boyd, N. Flyer. Compatibility conditions for time dependent partial differential equations and the rate of convergence of chebyshev and fourier spectral methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 175:281–309, 1999.
- [6] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1992.
- [7] I. Bronstein, K. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik.* B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart · Leipzig, 25. Auflage, 1991.
- [8] H. Bunke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Koefizienten.* Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
- [9] L. Collatz. *Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1990.
- [10] R. Courant, D. Hilbert. *Methoden der Mathematischen Physik I.* Springer Verlag Berlin · Heidelberg · New York, 3. Auflage, 1968.
- [11] J. Ehlgen. A simple algorithm to factorize the autocovariance function of a moving average processe. *Computational Statistics*, 14:189–195, 1999.
- [12] L. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [13] B. Fellenberg, J. vom Scheidt. Random boundary-initial value problems for parabolic differential equations - analytical and simulation results. *Periodica Polytechnica, Transportation Engineering*, 18(1-2):23–32, 1988.

- [14] G. M. Fichtenholz. *Differential- und Integralrechnung II*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1966.
- [15] N. Flyer, B. Fornberg. Accurate numerical resolution of transients in initial-boundary value problems for the heat equation. *Journal of Computational Physics*, 184:526–539, 2002.
- [16] R. Ghanem, P. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [17] C. Großmann, H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. B.G. Teubner Stuttgart, 1992.
- [18] W. Hackbusch. *Integralgleichungen, Theorie und Numerik*. B.G. Teubner Stuttgart, 1989.
- [19] J. Hartung. *Statistik - Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. R. Oldenbourg Verlag GmbH, München, 8. Auflage, 1991.
- [20] H. Hähnel, J. vom Scheidt. Zufällige Wärmeleitung im Stab. *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 27.09.2004 – 29.9.2004*, Seiten 87–105, 2005.
- [21] M. Jung, U. Langer. *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*. B.G. Teubner, Stuttgart, 2001.
- [22] A. Kandler, M. Richter, J. vom Scheidt. Parabolische Randanfangsprobleme mit zufälliger Anfangsbedingung. *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 27.09.2004 – 29.09.2004*, Seiten 165–202, 2005.
- [23] A. Kandler, J. vom Scheidt, R. Unger. Lösung parabolischer Differentialgleichungen mit zufälliger Randbedingung mittels FEM. *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 29.09.2003 – 01.10.2003*, Seiten 161–182, 2004.
- [24] R. Khas'minskij. *Stochastic stability of differential equations*. Sijthoff Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
- [25] A. Kielbasinski, H. Schwetlick. *Numerische Lineare Algebra*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988.
- [26] M. Kleiber, T. Hien. *The Stochastic Finite Element Method. Basis Perturbation Technique and Computer Implementation*. John Wiley & Sons, Chichester, 1992.
- [27] M. Loeve. *Probability Theory*. Springer-Verlag, New York, 4. Auflage, 1997.
- [28] H. Matthies, A. Keese. *Galerkin Methods for Linear and Nonlinear Elliptic Stochastic Partial Differential Equations*. Informationsbericht 2003-6, TU Braunschweig, 2003.
- [29] S. Mehlhose. *Eigenwerte zufälliger Matrizen von linearen Integralfunktionalen schwach korrelierter Prozesse*. Dissertation, TU Chemnitz, 1998.
- [30] S. Mehlhose, J. vom Scheidt, R. Wunderlich. Random eigenvalue problems for bending vibrations of beams. *ZAMM, Z. Angew. Math. Mech.*, 79(10):693–702, 1999.

- [31] S. Michlin. *Lehrgang der mathematischen Physik*. Akademie-Verlag Berlin, 2. Auflage, 1975.
- [32] V. Ogorodnikov, S. Prigarin. *Numerical modelling of random processes and fields: algorithms and applications*. ICG Printing b.v., Dordecht, 1996.
- [33] B. Øksendal. *Stochastic differential equations*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 1991.
- [34] V. P. Pikulin, S. I. Pohozaev. *Equations in Mathematical Physics*. Birkhäuser Verlag, 2001.
- [35] M. Richter. *Wahrscheinlichkeitstheoretisches Verhalten der Lösungen stochastischer Randwertprobleme*. Dissertation, TU Chemnitz, 1999.
- [36] M. Richter, J. vom Scheidt, R. Wunderlich. Random boundary value problems containing weakly correlated functions. *Dynamic Systems and Applications*, 9:109–129, 2000.
- [37] A. A. Samarskij. *Theorie der Differenzenverfahren*. Teubner-Verlag Leipzig, 1984.
- [38] A. Shiryaev. *Probability*. Springer, New York, 2. Auflage, 1995.
- [39] H. Starkloff. *Higher order asymptotic expansions for weakly correlated random functions*. Habilitationsschrift TU Chemnitz, 2004.
- [40] H. J. Starkloff. On the convergence of random functions defined by interpolation. *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 29.09.2003 – 01.10.2003*, Seiten 197–216, 2004.
- [41] W. A. Strauss. *Partielle Differentialgleichungen*. Vieweg-Verlag, 1995.
- [42] B. Sudret, A. Kiureghian. *Stochastic finite elements and reliability. A state-of-the-art-report*. Technical Report UCB/SEMM-2000/08, University of California, Berkeley, CA, 2000.
- [43] A. Tychonoff, A. Samarski. *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1959.
- [44] J. vom Scheidt. *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Akademie - Verlag Berlin, 1990.
- [45] J. vom Scheidt, B. Fellenberg, U. Wöhlrl. *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 71*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [46] J. vom Scheidt, W. Purkert. *Random Eigenvalue Problems*. Akademie-Verlag Berlin, 1983.
- [47] J. vom Scheidt, H. Weiß. Asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion der Ableitung von Integralfunktionalen von schwach korrelierten Funktionen. *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“ 27.09.2004 – 29.09.2004*, Seiten 297–324, 2005.

- [48] J. vom Scheidt, R. Wunderlich. Nonlinear random vibrations of vehicles. *Z. Angew. Math. Mech.*, 76(S5):447–448, 1996.
- [49] G. Wilson. Factorisation of covariance generating function of a pure moving average process. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 6:127–154, 1969.
- [50] R. Wunderlich. *Systems of random differential equations and model reduction*. Habilitationsschrift TU Chemnitz, 1999.
- [51] U. Wöhrle. *Schwingungsdifferentialgleichungssysteme mit schwach korrelierter Fremderregung*. Habilitationsschrift TH Zwickau, 1988.
- [52] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis - Application to Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 1995.

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
e	Eulersche Zahl, $e = \exp(1)$
$\mathbf{0}$	Nullvektor
$\mathbf{1}_{\{\cdot\}}(\cdot)$	Indikatorfunktion
δ_{ij}	Kroneckersymbol
O	Landausymbol
$[x]$	ganzzahliger Anteil der Zahl x
$ x $	Betrag der Zahl x
$\mathbf{E}\{\cdot\}$	Erwartungswert
$(\cdot, \cdot)$	Skalarprodukt
f.s.	fast sicher, mit Wahrscheinlichkeit 1

Thesen

1. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des stochastischen Verhaltens der Lösung $\bar{u}$ des zufälligen Randanfangswertproblems (RAWP)

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}_t - \lambda \Delta \bar{u} = 0, & x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T] \\
 \text{AB: } & \bar{u}(0, x, \omega) = {}^\varepsilon \bar{u}_0(x, \omega), & x \in \bar{D} \\
 \text{RB: } & \frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) \Big|_{(\partial D)_2} = {}^\varepsilon \bar{P}(t, x, \omega) & (*) \\
 & \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial N}(t, x, \omega) + \alpha \bar{u}(t, x, \omega) \right) \Big|_{(\partial D)_3} = 0.
 \end{aligned}$$

Die zufälligen Einflussgrößen ${}^\varepsilon \bar{u}_0$ und ${}^\varepsilon \bar{P}$ sind dabei insbesondere als homogene ε -korrelierte Zufallsfunktionen vorausgesetzt. Dieses Modell ermöglicht eine realitätsnahe mathematische Beschreibung von zufallsabhängigen Wärmeleitproblemen, welche beispielsweise beim Brems- oder Kupplungsvorgang auftreten. Weiter können aufgrund des verwendeten Konzepts der ε -Korreliertheit der zufälligen Einflussgrößen umfangreiche Aussagen zu Charakteristiken von Funktionalen ε -korrelierter Prozesse genutzt werden, die vor allem auf [2], [3] und [4] zurückgehen.

2. Zur Lösung des RAWP (*) wird in dieser Arbeit die Finite-Elemente-Methode (FEM) genutzt. Dabei wird das kontinuierliche Problem (*) in ein endlichdimensionales Ersatzproblem transformiert, dessen Lösung sich als Summe von Integralfunktionalen der zufälligen Einflussgrößen ${}^\varepsilon \bar{u}_0$ und ${}^\varepsilon \bar{P}$ darstellt. Vergleichend wird die Fourier-Methode hinzugezogen, welche auch in [1] und [3] betrachtet wurde. Es zeigt sich, dass die Fourier-Lösung sich ebenfalls als Summe von Integralfunktionalen der zufälligen Einflussgrößen ${}^\varepsilon \bar{u}_0$ und ${}^\varepsilon \bar{P}$ ergibt und damit eine zur FE-Lösung ähnliche Darstellung besitzt.
3. Der Vorteil der Finite-Elemente-Methode besteht darin, dass RAWP auf beliebigen hinreichend glatt berandeten Gebieten gelöst werden können. Des Weiteren ist auch die Behandlung nichtlinearer Probleme möglich. Jedoch zeigt sich, dass zur Lösung des RAWP (*) mit Einflussgrößen ${}^\varepsilon \bar{u}_0$ und ${}^\varepsilon \bar{P}$, welche kleine Korrelationslängen ε besitzen, eine feine Diskretisierung des Gebietes nötig ist, wodurch der numerische Aufwand ansteigt. Bei der Fourier-Methode hingegen ist der numerische Aufwand zur Lösung des RAWP (*) unabhängig von den Korrelationslängen der Einflussgrößen, aber die dafür nötigen analytischen Vorbetrachtungen sind nur auf „einfachen“ Geometrien (z.B. Rechteckgebiete, Kreisgebiete) durchführbar.
4. Eine zentrale Stellung bei der Beschreibung von zufälligen Größen besitzt die Korrelationsfunktion. Es wird gezeigt, dass sich die Korrelationsfunktionen der über Finite-Elemente-Methode oder Fourier-Methode erhaltenen Lösungen des RAWP (*) als Summen von Vierfachintegralen ergeben. Die Integranden enthalten dabei die Korrelationsfunktionen der stochastischen Einflussgrößen ${}^\varepsilon \bar{u}_0$ bzw. ${}^\varepsilon \bar{P}$. Für die Berechnung dieser Vierfachintegrale werden drei Methoden angegeben.
5. Ausgehend von der FE-Lösung wird die in [2] und [3] angegebene Theorie der asymptotischen Entwicklungen nach der Korrelationslänge ε , welche auf einer Taylorentwicklung beruht, auf diese Vierfachintegrale angewendet. Dabei werden die Vierfachintegrale für hinreichend kleine Korrelationslängen in Doppelintegrale überführt.

Weiter führt die ε -Korreliertheit von ${}^\varepsilon\bar{u}_0$ und ${}^\varepsilon\bar{P}$ zu einer erheblichen Reduzierung des Rechenaufwandes. Für spezielle Vernetzungen wird gezeigt, dass mit Hilfe von Finite-Elemente-Techniken die Taylorentwicklung durch eine direkte Berechnungsvorschrift ersetzt werden kann.

6. Weiterhin lassen sich die Vierfachintegrale aufgrund der speziellen Struktur der Integranden und der ε -Korreliertheit der Einflussgrößen ${}^\varepsilon\bar{u}_0$ bzw. ${}^\varepsilon\bar{P}$ explizit berechnen. Damit ergibt sich für das betrachtete Problem die Möglichkeit, die auf verschiedenen Wegen erhaltenen Korrelationsfunktionen miteinander zu vergleichen und vor allem die Genauigkeit der asymptotischen Entwicklung abzuschätzen.
7. Die FEM bzw. die Fourier-Methode führen auf einen expliziten funktionalen Zusammenhang zwischen der Lösung $\bar{u}$ des RAWP (*) und den Einflussgrößen, so dass Momentenfunktionen davon abgeleitet werden können. Ein weitere Möglichkeit die Momentenfunktionen zu bestimmen, bietet die Monte-Carlo-Simulation. Die in dieser Arbeit genutzte Methode stützt sich auf das durch Finite-Elemente-Diskretisierung erhaltene System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Es wurde ein Simulationsmodell für die zufälligen Größen ${}^\varepsilon\bar{u}_0$ und ${}^\varepsilon\bar{P}$ entwickelt, so dass diese gewisse vorausgesetzte Eigenschaften, wie ε -Korreliertheit oder Homogenität, besitzen. Das Modell basiert auf zeitdiskreten Moving-Average-Feldern. Mittels geeigneter Interpolation werden so zufällige Funktionen erzeugt, deren Korrelationsfunktionen mit der einer vorgegebenen homogenen und ε -korrelierten Funktion übereinstimmen. Mit Hilfe dieses Modells werden Realisierungen der zufälligen Anfangs- bzw. Randbedingung erhalten, welche in das FE-System eingesetzt werden. Mit den so erhaltenen möglichen Temperaturverteilungen werden mittels statistischer Methoden Erwartungswert- und Korrelationsfunktionen der Lösung $\bar{u}$ des RAWP (*) geschätzt.
8. Anhand eines numerischen Beispiels wird die gute Übereinstimmung der erhaltenen Korrelationsfunktionen der FEM-Lösung und der Fourier-Lösung des RAWP (*) gezeigt. Auch wird deutlich, dass die betrachteten Verfahren zur Berechnung der Korrelationsfunktionen sehr ähnliche Ergebnisse liefern, insbesondere zeigt die mittels der asymptotischen Entwicklung nach der Korrelationslänge ε bestimmten Korrelationsfunktion schon für kleine Entwicklungsordnungen eine hinreichende Genauigkeit.

Literatur

- [1] B. Fellenberg, J. vom Scheidt. Random boundary-initial value problems for parabolic differential equations - analytical and simulation results. *Periodica Polytechnica, Transportation Engineering* 18(1-2):23-32, 1988.
- [2] H. J. Starkloff. *Higher order asymptotic expansions for weakly correlated random functions*. Habilitationsschrift, TU Chemnitz, 2004.
- [3] J. vom Scheidt. *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Akademie-Verlag Berlin, 1990.
- [4] J. vom Scheidt, W. Purkert. *Random Eigenvalue Problems.*, Akademie-Verlag Berlin, 1983.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Anne Kandler
Geburtsdatum:	15. März 1978
Geburtsort:	Görlitz
Familienstand:	ledig

Schulausbildung

Sept.1984-Aug.1990	19. Polytechnische Oberschule Görlitz
Sept.1990- Juni 1996	Gymnasium 4 Windmühlenweg Görlitz
	Abschluß: Abitur (Durchschnitt: 1.7)

Studium

Okt. 1996-Februar 2001	Studium der Wirtschaftsmathematik an der TU-Chemnitz; Abschluß als Diplom-Wirtschaftsmathematiker (Prädikat: „sehr gut“)
------------------------	--

Wissenschaftlicher Werdegang

seit März 2001	wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Fakultät für Mathematik der TU-Chemnitz
----------------	--

Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 8. Juni 2006