

4.5. Bedingungen der kinetischen Stabilität bei Parametererregung

4.5.1. Allgemeines zur Parametererregung

In der Praxis muß sich der Ingenieur häufig mit der Resonanz bei erzwungenen Schwingungen auseinandersetzen, die in linearen Systemen eintritt, wenn irgendeine Harmonische der Erregerkraft mit einer der Eigenfrequenzen zusammenfällt [11].

Die Parameterresonanz, die bei einer bestimmten Pulsation der Parameter des Systems in einem engen Frequenzbereich entsteht, tritt wesentlich seltener auf, weshalb sie oft als unwesentliche und unwahrscheinliche Nebenerscheinungen eingeschätzt wird.

Viele praktisch eingesetzte Maschinen zeigen jedoch, daß die Parameterresonanz nicht nur Störungen des normalen Betriebes der Mechanismen verursacht, sondern auch zu ernstesten Zerstörungen der Maschine führen kann. Äußerlich unterscheidet sich die Parameterresonanz von der „erzwungenen Resonanz“ scheinbar wenig, aber zwischen beiden Resonanzformen gibt es wesentliche prinzipielle Unterschiede.

Die erzwungene Resonanz stellt erstens erzwungene Schwingungen eines stabilen Systems dar, die auch auftreten, wenn das System sich anfangs in der stabilen Ruhelage befindet. Die Parameterresonanz ist dagegen eine Erscheinung des instabilen Gleichgewichts, infolgedessen das System durch unvermeidliche Anfangsstörungen angefacht wird. Die allgemeine Bewegung so eines Systems, das durch die Differentialgleichung (4.2.6./2) mit periodischen Koeffizienten beschrieben wird, hat bei Parameterresonanz ohne Berücksichtigung der Dissipation die Form

$$q = C_1 e^{\alpha t} \Phi_1(t) + C_2 e^{-\alpha t} \Phi_2(t), \quad (1)$$

wobei Φ_1 und Φ_2 irgendwelche periodischen Funktionen ($\alpha^2 > 0$) und C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind [4.6], [4.28], [4.29].

Offensichtlich wächst einer der Summanden in (1) bei $t \rightarrow \infty$ unbegrenzt, unab-

hängig vom Vorzeichen von α . Weil der Wert der Konstanten C_i völlig durch die zufälligen Störungen bestimmt wird, kann man aus (1) nur den Charakter des Anwachsens dieser Schwingungen erkennen. Die Funktion $q(t)$ gänzlich vorauszusagen ist praktisch unmöglich.

Zweitens wachsen die Schwingungsamplituden bei fehlender Dämpfung bei „erzwungener Erregung“ linear an ([11], S. 349), aber bei Parametererregung **exponentiell**, vgl. (1).

Drittens findet Parameterresonanz nicht nur bei irgendwelchen diskreten Frequenzen statt, sondern in einem ganzen Gebiet instabiler Zustände in der Umgebung gewisser Frequenzen.

Viertens schließlich hat die Dämpfung einen anderen Einfluß. Während bei der „erzwungenen Resonanz“ die Einführung einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft zur Begrenzung der Resonanzamplituden führt, kann sich die Parameterresonanz auch bei vorhandener Dämpfung entwickeln, und nur die Überschreitung eines bestimmten Dissipationsniveaus kann die Gefahr des Anfachsens beseitigen, vgl. Abschnitt 4.5.2.

Man kann aber sagen, daß in der Regel die meisten periodischen Getriebe in Drehzahlbereichen **arbeiten**, die weit von den Hauptzonen der Parameterresonanz entfernt liegen. In diesen Fällen, die in Abschnitt 4.4. näher betrachtet wurden, sind die dynamischen Bedingungen und die Verfälschungen der gegebenen kinematischen Funktionen aber schon in Gebieten unzulässig groß, die weit von den Zonen der Parameterresonanz entfernt liegen. Es gibt allerdings auch eine Klasse von schnelllaufenden Mechanismen, die die kritischen Zonen erreichen und manchmal sogar überschreiten. Dieser Klasse kann man Mechanismen zuordnen, bei denen die Lagefunktion besonders „glatt“ ist, d. h. keine wesentlichen Sprünge oder scharfe Änderungen in den höheren Ableitungen hat. Solche Eigenschaften haben z. B. Exzentergetriebe, eine Reihe von Koppelgetrieben, die keine angenäherten Rasten des Abtriebsgliedes besitzen und andere.

Bei Parameterresonanz führen kleine Erregungen zu wesentlichen Veränderungen der Bewegung eines Systems. In Verbindung mit dem Terminus „Stabilität der Bewegung“ seien noch einige Bemerkungen geäußert.

Wenn man als „erregt“ eine Bewegung mit veränderlichen Anfangsbedingungen bezeichnet, dann kann man die Stabilität als Eigenschaft der erregten Bewegung betrachten, solange sie sich gering unterscheidet von der nichterregten bei hinreichend kleinen Anfangsbedingungen. Wenn dabei bei $t \rightarrow \infty$ die Bewegung zu der „nichterregten“ konvergiert, dann wird sie **asymptotisch stabil** genannt. Sehr wichtige Ergebnisse für Ingenieurwendungen zu Fragen der kinetischen Stabilität mechanischer Systeme mit periodisch veränderlichen Parametern enthält die Monografie [4.6].

Die Bedingungen dafür zu gewährleisten, daß die kinetische Stabilität gesichert ist, gehört zu den verantwortungsvollsten Aufgaben bei der Konstruktion schnelllaufender Mechanismen. Die praktische Wichtigkeit dieser Stabilität folgt daraus, daß die instabile Bewegung im Grunde genommen unsteuerbar ist, d. h. eine beliebige zufällige Erregung während eines hinreichend langen Zeitabschnittes kann zu katastrophalen Folgen führen. Außerdem ist das Berechnungsmodell, wie schon erwähnt,

nicht völlig äquivalent seinem physischen Original, und das Realsystem kann nicht genau beschrieben werden. Die Abweichungen, die durch diese Ungenauigkeiten hervorgerufen werden, kann man als Erregungen ansehen, die im Falle der Instabilität zu wesentlichen Entstellungen der erwünschten Lösung führen.

Die Anfachung des fiktiven Oszillators ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die kinetische Instabilität des ursprünglichen Systems. Andererseits kann man bestätigen, daß die Bedingung für die Begrenztheit des Exponenten z im Ausdruck (4.4.1./12) eine hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung für die kinetische Stabilität des Systems und die Unterdrückung von Parameterresonanzen ist. Diese Bedingung wird in folgender Form ausgedrückt:

$$2\pi\vartheta = \int_0^{T_1} \delta(t) dt > 0,5 |\Delta z|, \quad (2)$$

wobei $T_1 = 2\pi/\bar{\omega}$ und Δz die Differenz zwischen den Minima der Funktion z darstellt, deren Abstand die Periode T ist. Wenn z. B. die Pulsation der Parametererregung mit irgendeiner Kreisfrequenz Ω erfolgt, so ist

$$\omega^2(t) = \bar{\omega}^2(1 - \varepsilon \cos \Omega t). \quad (3)$$

Der Koeffizient ε wird „Pulsationstiefe“ genannt. Unter Benutzung von (3) erhält (4.4.1./23) die Form

$$\ddot{z} + 4\bar{\omega}^2 z = -2\varepsilon\bar{\omega}^2 \cos \Omega t. \quad (4)$$

Offensichtlich kommt der fiktive Oszillator bei $\Omega = 2\bar{\omega}$ in Resonanz, was der bekannten Hauptresonanz der Parametererregung entspricht. Die Resonanzbewegung ergibt sich aus (4) und verläuft nach folgendem Gesetz:

$$z(t) = -0,5\bar{\omega}t\varepsilon \sin 2\bar{\omega}t. \quad (5)$$

Der zeitlich linearen Amplitudenänderung $z(t)$ des fiktiven Oszillators entspricht gemäß (4.4.1./12) ein zeitlich exponentieller Amplitudenzuwachs des realen Schwingers bei Parameterresonanz. Daraus folgt für die Amplitudenänderung während einer Periode T_1

$$|\Delta z| = |z(t_2) - z(t_1)| = \pi\varepsilon. \quad (6)$$

Dabei ist $t_1 = \pi/(4\bar{\omega})$ und $t_2 = t_1 + T_1$. Das Einsetzen von (6) in (2) liefert

$$\vartheta > \varepsilon/4, \quad (7)$$

wobei ϑ der Dämpfungsgrad ist. Diese Stabilitätsbedingung ist aus der Literatur zu parametererregten Schwingungen bekannt [4.6], [4.28], [5.20].

Die kinetische Stabilität geht bei dem betrachteten Modell nicht nur bei $\Omega = 2\bar{\omega}$ verloren, sondern auch bei

$$\Omega = \Omega_* = 2\bar{\omega}/i, \quad (8)$$

wobei i eine ganze Zahl ist. Außerdem muß man im Auge behalten, daß um diese kritischen Werte herum ein ganzes Gebiet instabiler Zustände des Systems liegt, wobei die Breite dieser Gebiete von der Pulsationstiefe abhängt (Bild 4.22).

Es sei z. B. $\varepsilon = \varepsilon_1$, was in Bild 4.22 einer Geraden parallel zur Abszisse entspricht. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Grenzlinien der schraffierten Gebiete begrenzen den Bereich der kritischen Kreisfrequenzen Ω , bei denen das System kinetisch instabil wird [4.6], [4.41], [4.45]. Entsprechend der Bedingung (7) ist das System im ganzen Frequenzbereich stabil, wenn $\varepsilon = \varepsilon_2 < \varepsilon^*$ gilt, wobei $\varepsilon^* = 4\theta$ ist, weil die Gerade nirgends ein Instabilitätsgebiet schneidet. Das Verhältnis $\varepsilon/\varepsilon^* < 1$ bestimmt die Sicherheit für die Stabilität des Systems.

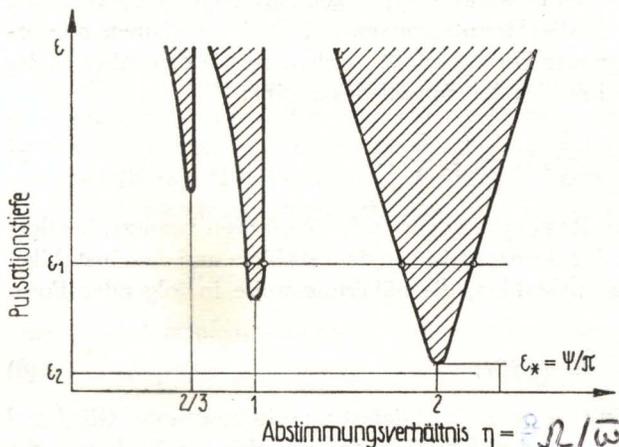


Bild 4.22 Schematische Stabilitätskarte des parametererregten Schwingers mit Dämpfung

4.5.2. Kinetische Stabilität bei periodischer Erregung

Zur Untersuchung der kinetischen Stabilitätsbedingungen wird die homogene Gleichung (4.2.6./1) untersucht:

$$m(\Omega t) \ddot{q} + b(\Omega t) \dot{q} + c(\Omega t) q = 0. \quad (1)$$

Die Funktionen m , b und c sind periodisch und werden in Fourierreihen entwickelt. Dazu kann angenommen werden, daß $m(\Omega t)$ eine gerade Funktion und $b(\Omega t)$ die Summe aus einer Konstanten und einer ungeraden Funktion von Ωt ist, so daß die Fourierreihen folgendermaßen lauten:

$$m(\Omega t) = m_0 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cos i\Omega t, \quad (2)$$

$$b(\Omega t) = b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin i\Omega t.$$

Die „zeitabhängige Federkonstante“ kann dagegen einen beliebigen Verlauf haben und wird so angesetzt:

$$c(\Omega t) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (c_i^c \cos i\Omega t + c_i^s \sin i\Omega t). \quad (3)$$

Betreffs der Fourierreihen kinematischer Funktionen ebener Mechanismen wird auf Abschnitt 1.4.3. verwiesen.

Die Parameterhauptresonanz tritt bekanntlich in der Nähe der Pulsationsfrequenz auf, die der doppelten gemittelten Eigenfrequenz des Schwingers entspricht, vgl. (4.5.1./8). In diesem Fall liegt sie wegen $\bar{\omega}^2 = c_0/m_0$ bei

$$i\Omega = 2\sqrt{c_0/m_0} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Es kann also auch eine Erregung bei Pulsationsfrequenzen auftreten, deren Wert um ganzzahlige Vielfache kleiner als die Hauptresonanz ist. Deshalb können alle erwähnten Fälle einheitlich in folgender Formel erfaßt werden, die die Zentralwerte der kritischen Winkelgeschwindigkeiten des Antriebsgliedes angibt:

$$\Omega = \frac{1}{j} \sqrt{c_0/m_0} \quad \text{mit } j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \quad (5)$$

Weiterhin wird das erstmals von RAYLEIGH angewandte Verfahren benutzt, bei dem angenommen wird, daß sich auf der Grenze zwischen dem stabilen und dem instabilen Gebiet stationäre Schwingungen ausbilden, die näherungsweise in folgender Form beschrieben werden können:

$$q = A_0 + A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t. \quad (6)$$

Das Einsetzen dieses Ansatzes in (1) (mit $F = 0$) liefert nur ein konstantes Glied und Terme, die die Harmonischen $j\Omega$ enthalten. Koeffizientenvergleich und Nullsetzen des Absolutgliedes und der Koeffizienten von $\cos j\Omega t$ und $\sin j\Omega t$ ergeben:

$$\begin{aligned} c_0 A_0 + k_j A_j + 0,5c_j^s B_j &= 0, \\ c_j^c A_0 + (c_0 - j^2 \Omega^2 m_0 + k_{2j}) A_j + (j\Omega b_0 + 0,5c_{2j}^s) B_j &= 0, \\ c_j^s A_0 - (j\Omega b_0 - 0,5c_{2j}^s) A_j + (c_0 - j^2 \Omega^2 m_0 - k_{2j}) B_j &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei folgende Abkürzungen benutzt wurden:

$$\begin{aligned} k_j &= 0,5(c_j^c - j\Omega b_j - j^2 \Omega^2 m_j), \\ k_{2j} &= 0,5(c_{2j}^c - j\Omega b_{2j} - j^2 \Omega^2 m_{2j}). \end{aligned} \quad (8)$$

Es existieren nichttriviale Lösungen dieses linearen Gleichungssystems, wenn seine Koeffizientendeterminante, die in diesem Fall ein Abschnitt aus der Hillschen Determinante ([4.6]) ist, 0 gesetzt wird:

$$\text{Det } (\Omega^2) = \begin{vmatrix} c_0 & & 0,5c_j^s \\ c_j^c & c_0 - j^2 \Omega^2 m_0 + k_{2j} & j\Omega b_0 + 0,5c_{2j}^s \\ c_j^s & -j\Omega b_0 + 0,5c_{2j}^s & c_0 - j^2 \Omega^2 m_0 - k_{2j} \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Für jeden Wert j erhält man in der Umgebung des Wertes, der durch (5) bestimmt wird, zwei Lösungen. Insbesondere kann (9) zwei reelle Wurzeln Ω_+ und Ω_- haben, zwischen denen das Gebiet der kinetischen Instabilität liegt. Dabei entspricht $\text{Det} > 0$ stabilen und $\text{Det} < 0$ instabilen Bereichen. Es gibt aber auch die andere Möglich-

keit, daß die Determinante $\text{Det}(\Omega^2)$ im ganzen Frequenzbereich positiv bleibt und infolgedessen die Wurzeln von (9) komplex werden. Das bedeutet, daß eine Parameterresonanz bei dem gegebenen j nicht entstehen kann. Eine physikalische Erklärung dieses sehr wichtigen Falles wurde, ausgehend von Energiebetrachtungen, in Abschnitt 4.5.1. gegeben.

Im weiteren werden zwei kritische Betriebszustände ausführlicher betrachtet.

1. *Betriebszustände* $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

Da die Ordnung der Harmonischen i in den Fourierreihen (2) und (3) nur eine ganze Zahl sein kann, verbleiben nur alle diejenigen Harmonischen, bei denen $i = 2j$ ist. Aus der ersten Gleichung von (7) folgt $A_0 = 0$, d. h., bei diesen Betriebszuständen entfällt der Mittelwert der periodischen Lösung (6). Die Frequenzen an den Bereichsgrenzen folgen dann aus folgender Frequenzgleichung, vgl. die Determinante (9):

$$(c_0 - j^2\Omega^2 m_0)^2 + j^2\Omega^2 b_0^2 - 0,25(c_{2j}^s)^2 - k_{2j}^2 = 0 \tag{10}$$

oder nach Überführung in die dimensionslose Form

$$D_2\eta^4 - D_1\eta^2 + D_0 = 0; \tag{11}$$

dabei ist

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 - 0,25[(r_{2j}^c)^2 + (r_{2j}^s)^2], \\ D_1 &= 2j^2(1 - 0,25r_{2j}^c m_{2j}/m_0 - 2\vartheta^2), \\ D_2 &= j^4(1 - 0,25m_{2j}^2/m_0^2), \end{aligned} \tag{12}$$

$$r_{2j}^c = (c_{2j}^c - j b_{2j})/c_0, \quad r_{2j}^s = c_{2j}^s/c_0, \quad \vartheta = \frac{b_0}{2\sqrt{c_0 m_0}}, \quad \eta^2 = \frac{m_0 \Omega^2}{c_0}.$$

Man kann zeigen, daß r_{2j}^c nicht von Ω abhängt [4.48]. Das bedeutet, daß man zur Bestimmung von r_{2j}^c und r_{2j}^s nur mit den nicht von Ω abhängigen Termen der Funktion $c(\Omega t)$ zu operieren braucht. Die kritischen Grenzfrequenzen findet man als Wurzeln von (11):

$$\eta = \sqrt{\frac{D_1 \pm \sqrt{D_1^2 - 4D_0 D_2}}{2D_2}}. \tag{13}$$

Demzufolge lautet die Bedingung dafür, daß keine instabilen Betriebszustände auftreten, $D_1^2 - 4D_0 D_2 < 0$, was äquivalent ist zu

$$\vartheta > 0,25 \sqrt{\left(\frac{m_{2j}}{m_0} - r_{2j}^c\right)^2 + (r_{2j}^s)^2}. \tag{14}$$

Mit der durch (6) bestimmten Genauigkeit beeinflussen in diesem Fall nur die Harmonischen $i = 2j$ das kritische Niveau der Parametererregung.

2. Betriebszustand $j = 1, 2, 3, \dots$

Zunächst wird der Sonderfall betrachtet, daß die Funktion $c(\Omega t)$ gerade ist, wobei $c_j^s = 0$ gilt. Die entsprechende Bedingung, die man nach umfangreichen Umformungen und einigen Vereinfachungen erhält, führt zur Abschätzung ([4.46])

$$\vartheta > \frac{1}{4} \left[\left| \frac{m_{2j}}{m_0} - r_{2j}^c \right| + 0,5 \left(0,5 \frac{m_j}{m_0} - r_j^c \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Im allgemeineren Fall, wenn $c_j^s \neq 0$ ist, erhält man folgende Näherungslösung aus (9):

$$\vartheta > \frac{1}{4} \sqrt{\left[\left| \frac{m_{2j}}{m_0} - r_{2j}^c \right| + 0,5 \left(0,5 \frac{m_j}{m_0} - r_j^c \right)^2 \right]^2 + [r_{2j}^s + 0,5(r_j^s)^2]^2}. \quad (16)$$

Dabei ist

$$r_j^c = (c_j^c - 0,5j\Omega b_j)/c_0, \quad r_j^s = c_j^s/c_0. \quad (17)$$

Daraus geht hervor, daß bei ganzzahligen j nicht nur die Harmonischen $i = 2j$, sondern auch die Harmonischen $i = j$ einen gewissen Einfluß auf die kinetische Stabilität haben. Allerdings haben von den Termen, die den Harmonischen $2j$ und j entsprechen, die letztgenannten bei gleicher Größenordnung nur einen unwesentlichen Einfluß, und die kinetische Stabilität wird im wesentlichen durch die Bedingung (14) bestimmt. Bei manchen Aufgaben kann es aber passieren, daß die Harmonischen mit dem Index j wesentlich größer sind als solche mit dem Index $2j$.

4.5.3. Beispiel: Parametererregung im Parallelkurbelgetriebe

Es wird der Antrieb einer Maschine betrachtet, bei dem die Motorwelle I mit dem Abtriebsglied durch ein Parallelkurbelgetriebe verbunden ist, vgl. Bild 4.23a. Gegeben seien die Torsionssteifigkeiten c_{T1} und c_{T2} der beiden Wellen und die Federkonstante c_{AB} , welche die Deformierbarkeit der Koppel und der Gelenke A und B erfaßt. Weil bei diesem Mechanismus $U' = 1$ ist, nimmt das Berechnungsmodell die Form an, die in Bild 4.23 b gezeigt ist. Dabei ist c_M die reduzierte Federkonstante, welche c_3 entspricht. Zur Bestimmung von c_M wird die Bedingung gleicher potentieller Energie gestellt:

$$0,5c_3(\Delta l)^2 = 0,5c_M(\Delta\varphi)^2; \quad (1)$$

dabei ist Δl die Deformation der Koppel und der Gelenke und $\Delta\varphi$ die Verdrehung der Welle 4 infolge der Längenänderung Δl . Aus der Projektion der Kontur des deformierten Mechanismus auf die x -Achse folgt

$$R \cos \varphi + l + \Delta l - R \cos (\varphi - \Delta\varphi) - l = 0. \quad (2)$$

Für kleine $\Delta\varphi$ findet man daraus

$$\Delta l = R \Delta\varphi \sin \varphi \quad (3)$$

Die gefährlichsten Parameterresonanzen treten entsprechend (4.5.2./4) bei $i = 2$, $i = 4$ und $i = 6$ auf, d. h. bei $\Omega \approx \omega_0$, $\Omega \approx \omega_0/2$, $\Omega \approx \omega_0/3$ ($j = 1, 2, 3$). Die Unterdrückung der Parameterresonanz im ganzen Frequenzbereich ist möglich, wenn (4.5.2./16) erfüllt wird, d. h. wenn

$$\vartheta > \vartheta_* = 0,25[|r_{2j}^c| + 0,5(r_j^c)^2] \quad (7)$$

gilt. In Bild 4.23 c ist der Verlauf $\vartheta(\sigma)$ dargestellt. Bei $j = 1$ und $j = 3$ verschwindet der zweite Summand in (7), weil gemäß (7) $r_1^c = r_3^c = 0$ ist, während bei $j = 2$ dabei $r_j^c = r_2^c = 0$ ist. Häufig wird die zweite Komponente vernachlässigt und irrtümlich als klein von zweiter Ordnung gehalten. Das wäre gleichbedeutend mit dem Ausschluß der Komponente A_0 in (4.5.2./6). Das kann zu einem großen Fehler führen, wovon in diesem Beispiel die Kurve 4 in Bild 4.23 c zeugt, welche für $j = 2$ bei $r_2^c = 0$ gilt.

Erfahrungsgemäß beträgt der Dämpfungsgrad $\vartheta = 0,03$ bis $0,05$ bei Mechanismen, so daß bei $\Omega \approx \omega_0/3$ praktisch keine Gefahr für die Entstehung der Parameterresonanz besteht. Bei $\Omega \approx \omega_0/2$ und $\Omega \approx \omega_0$ ist die Erregung so stark, daß die Parameterresonanz mit Hilfe der Dämpfung des Mechanismus praktisch nicht vermeidbar ist.

Eine wesentliche Verbesserung kann man dadurch erreichen, daß man ein zweites Parallelkurbelgetriebe anordnet, dessen Kurbel in einem Phasenwinkel von 90 Grad versetzt ist. Solche doppelten Antriebe verwendet man z. B. bei Elektroloks. Für den zweiten Mechanismus unterscheidet sich $c_T(\varphi)$ von (5) dann durch die Vorzeichen der 2. und 6. Harmonischen, so daß die summarische Steifigkeit beider Getriebe nur den konstanten Term und die 4. Harmonische enthält. Dabei erhöht sich ω_0 um das $\sqrt{2}$ -fache, während der kritische Wert ϑ_* ($j = 1$) in Bild 4.23 c mit Kurve 4 verglichen werden muß, weil jetzt $r_j^c = r_2^c = 0$ ist.

4.6. Verminderung der Schwingungsentstehung

4.6.1. Grundsätzliche Möglichkeiten

Die störenden Schwingungen in Mechanismen resultieren meist aus Resonanzzuständen, die infolge periodischer Erregung (Resonanz der k -ten Harmonischen), Stoßerregung oder Parametererregung zustandekommen. Um sie zu vermeiden, muß dem Konstrukteur in erster Linie empfohlen werden, sich über die physikalischen Ursachen der betreffenden Resonanz ein klares Bild zu verschaffen. Häufig sind dazu gezielte meßtechnische Untersuchungen erforderlich.

Wenn die physikalischen Ursachen qualitativ erkannt worden sind, reicht oft ein einfaches Berechnungsmodell mit wenigen Freiheitsgraden, um die wesentlichen Erscheinungen quantitativ zu erfassen. Einen Anhaltspunkt über die zu berücksichtigenden Freiheitsgrade findet man über die modale Analyse, insbesondere durch Ermittlung der wesentlichen Schwingformen am Realsystem. Der häufig

eingeschlagene Weg, mit einem komplizierten Berechnungsmodell alle denkbaren Einflußgrößen einzubeziehen und dann gewissermaßen den Computer suchen zu lassen, was sich physikalisch abspielt, wird nicht empfohlen. Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Berechnungsmodells ist nach Ansicht der Autoren leider manchmal umgekehrt proportional zur Kenntnis der Bearbeiter über die wesentlichen dynamischen Vorgänge.

Auf Grund der vielen Ursachen der Schwingungsentstehung in Mechanismen ist es schwierig, allgemeingültige Aussagen zur Vermeidung von Schwingungen zu treffen. Im allgemeinen ist es ratsam, sich zuerst der Elimination der Erregung zu widmen, bevor versucht wird, durch Dämpfung oder Tilgung die auftretenden Schwingungen zu mindern. Die Verschiebung des Eigenfrequenzspektrums durch Veränderung der Masse- und Federparameter ist bei unverändertem Berechnungsmodell eine weitere theoretische Möglichkeit. Besser hilft in der Ingenieurpraxis meist die geschickte Auswahl einer dynamisch günstigeren Getriebestruktur, wozu man die Methoden der Erfindungskunst nutzen muß, weil die Strukturauswahl noch nicht algorithmiert wurde.

In den folgenden Unterabschnitten werden neue Methoden dafür gezeigt, wie typische Mechanismenschwingungen durch Beeinflussung der Erregung vermindert werden können. Die Beispiele stehen stellvertretend für viele Maschinen, bei denen seit 1983 durch Zusammenarbeit mit der TU Karl-Marx-Stadt durch Anwendung neuartiger Kurvenprofile wesentliche Produktivitätserhöhungen erreicht wurden.

4.6.2. Schwingungsarme Kurvengetriebe mit elastischem Abtriebsglied

Kurvengetriebe werden für eine sogenannte technische Bewegungsaufgabe konstruiert [4.2], [4.39]. Die Bewegungsaufgabe enthält alle Forderungen, die die Bewegung des Abtriebsgliedes erfüllen soll, wobei meist der Verlauf einer Lagefunktion $U = \bar{x}(\varphi)$ oder von deren höheren Ableitungen in begrenzten Bereichen, z. B. mit Stillständen (Rasten) oder Geschwindigkeiten, vorgegeben wird. Die Bewegungsaufgabe ist beschreibbar durch bereichsweise gegebene Sollfunktionen der Lagefunktion nullter bis zweiter Ordnung:

$$\varphi_{an} \leq \varphi \leq \varphi_{en}: \quad x = \bar{x}(\varphi), \quad x' = \bar{x}'(\varphi), \quad x'' = \bar{x}''(\varphi). \quad (1)$$

Dabei sind φ_{an} und φ_{en} die Anfangs- bzw. Endwinkel der Bereiche des Antriebswinkels ($n = 1, 2, \dots, N$).

Zwischen diese Bereiche werden dann üblicherweise Übergangskurven gelegt, für die solche Randbedingungen erfüllt werden, daß an den Bereichsgrenzen der Anschluß „stoßfrei“ (Stoß $\Delta \dot{x} = 0$) und „ruckfrei“ (Ruck $\Delta \ddot{x} = 0$) ist. Diese üblichen Übergangskurven sind in der getriebetechnischen Fachliteratur in Form „normierter Übertragungsfunktionen“ zusammengestellt und werden in der Ingenieurpraxis breit angewendet ([2], [4.44]). Die entsprechenden Bewegungsgesetze, von denen Fourierkoeffizienten z. B. in [4.40] angegeben wurden, haben unendlich viele Harmonische ($K \rightarrow \infty$).

Die störenden Schwingungen am Abtrieb zyklischer Kurvengetriebe haben ihre

Ursache in den an den Bereichsgrenzen angeregten Eigenschwingungen (vgl. Abschnitt 4.3.) und in der Resonanz des Schwingers mit den k -ten Harmonischen der Lagefunktion $x(\varphi)$. Aus diesem Grund wurde empfohlen ([4.23], [4.24], [4.34], [4.52], [4.11], [4.10], [4.37]), Kurvenprofile für die gesamte Periode durch Lagefunktionen zu beschreiben, die aus einer **endlichen** Fourierreihe mit möglichst wenigen Harmonischen bestehen:

$$x(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^K (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (2)$$

Diese Lagefunktion ist im Gegensatz zu den üblichen Lagefunktionen von Profilverformen nicht nur in den niedrigen, sondern in allen höheren Ableitungen stetig, so daß keine Eigenschwingungen angestoßen werden. Sie verhindert, daß überhaupt Resonanzen mit höheren Harmonischen als $k > K$ auftreten, da $k \leq K$ gewählt wird. Mit der Lagefunktion (2) lassen sich mit einer gewissen Genauigkeit beliebige Bewegungsaufgaben erfüllen. Die entstehenden Profile werden „HS-Profile“ genannt, da sie durch Harmonische Synthese gefunden werden und „High-Speed“ zu erreichen erlauben.

Die Bewegung des Abtriebsgliedes (vgl. Bild 4.4) wird durch die Istfunktion beschrieben, welche sich im stationären Zustand unter Berücksichtigung möglicher Schwingungen zu (vgl. die Beziehungen in Abschn. 4.2.2)

$$y = x + q = A_0 + \sum_{k=1}^K (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \quad (3)$$

ergibt. Die darin enthaltenen Koeffizienten stehen mit denjenigen von (2) in folgendem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} A_k &= [(1 - k^2 \eta^2 + 4\delta^2 k^2 \eta^2) a_k - 2\delta k^3 \eta^3 b_k] / [(1 - k^2 \eta^2)^2 + 4\delta^2 k^2 \eta^2] \\ B_k &= [(1 - k^2 \eta^2 + 4\delta^2 k^2 \eta^2) b_k + 2\delta k^3 \eta^3 a_k] / [(1 - k^2 \eta^2)^2 + 4\delta^2 k^2 \eta^2] \end{aligned} \quad (4)$$

Bei Vernachlässigung der Dämpfung ergibt sich aus (4) für $\delta = 0$

$$a_k = (1 - k^2 \eta^2) A_k, \quad b_k = (1 - k^2 \eta^2) B_k. \quad (5)$$

Mit der Wahl von $\eta = \eta_{\text{opt}}$ können die a_k und b_k aus (5) berechnet werden. Damit wird festgelegt, bei welchem Abstimmungsverhältnis die optimale Abtriebsbewegung (3) auftritt, welche Lagefunktion (2) das Kurvenprofil erhält und wie sich die Abtriebsbewegung mit η ändert.

Die Dämpfung ist nur für die Berechnung der Resonanzausschläge von Bedeutung. Aus (2) bis (4) folgt im Resonanzfall ($k\eta = 1$) für die Zusatzbewegung, die sich näherungsweise aus dem k -ten Summanden der Reihe ergibt,

$$q \approx \frac{1}{2\delta} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (6)$$

Der Maximalwert des (unerwünschten) Schwingweges darf nicht größer als der zulässige Schwingweg q_{zul} sein:

$$q_{k \text{ max}} = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2\delta} < q_{\text{zul}}. \quad (7)$$

Es soll nun gezeigt werden, wie die Koeffizienten a_k und b_k für Lagefunktionen der HS-Profile zu bestimmen sind. Es wird gefordert, daß die Abweichung der Istfunktion von dem durch die Bewegungsaufgabe (1) geforderten Sollfunktion hinsichtlich aller N Bereiche minimal ist.

Am einfachsten läßt sich diese Forderung durch das Fehlerquadratminimum nach GAUSS ausdrücken:

$$S_1(\eta) = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} [y(\eta, \varphi) - \bar{x}(\varphi)]^2 d\varphi + w_1 \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} [y'(\eta, \varphi) - \bar{x}'(\varphi)]^2 d\varphi + w_2 \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} [y''(\eta, \varphi) - \bar{x}''(\varphi)]^2 d\varphi \right\} = \text{Minimum!} \quad (8)$$

Dabei sind w_1 und w_2 Gewichtungsfaktoren, die die Bedeutung der Teilforderungen der Summanden bewerten.

Erfolgt die Approximation der Sollfunktion nur in endlich vielen Stellungen φ_i an die Istfunktion, dann entsteht aus den Integralen in (8) die Summe

$$S_2(\eta) = \sum_i \{ [y(\eta, \varphi_i) - \bar{x}(\varphi_i)]^2 + w_1 [y'(\eta, \varphi_i) - \bar{x}'(\varphi_i)]^2 + w_2 [y''(\eta, \varphi_i) - \bar{x}''(\varphi_i)]^2 \} = \text{Minimum!} \quad (9)$$

Sowohl aus der Zielfunktion (8) als auch aus (9) folgt durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen nach den A_k und B_k ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung dieser Koeffizienten; im Fall (8) lautet es ($l = 0, 1, 2, \dots, K$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial A_l} = 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \left[a_0 + \sum_{k=1}^K (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) - \bar{x} \right] \cos l\varphi d\varphi + w_1 \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \sum_{k=1}^K [k(-A_k \sin k\varphi + B_k \cos k\varphi) - \bar{x}'] (-l \sin l\varphi) d\varphi + w_2 \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \sum_{k=1}^K [k^2(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) - \bar{x}''] l^2 \cos l\varphi d\varphi \right\} = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial B_l} = 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \left[a_0 + \sum_{k=1}^K (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) - \bar{x} \right] \sin l\varphi d\varphi + w_1 \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \sum_{k=1}^K [k(-A_k \sin k\varphi + B_k \cos k\varphi) - \bar{x}'] l \cos l\varphi d\varphi + w_2 \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \sum_{k=1}^K [k^2(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) - \bar{x}''] l^2 \sin l\varphi d\varphi \right\} = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Das aus (10) und (11) folgende lineare Gleichungssystem hat eine symmetrische Koeffizientenmatrix, die unabhängig von den Sollfunktionen ist. Nur in die rechte Seite geht die Sollfunktion ein. Einen analogen Aufbau hat das Gleichungssystem,

welches aus (9) folgt:

$$\begin{pmatrix} E_{lk} & F_{lk} \\ F_{lk} & G_{lk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$E_{kl} = E_{lk} = d_{kl} + w_1 k l f_{kl} + w_2 k^2 l^2 d_{kl},$$

$$F_{kl} = e_{kl} - w_1 k l e_{kl} + w_2 k^2 l^2 e_{kl}, \quad (13)$$

$$G_{kl} = G_{lk} = f_{kl} + w_1 k l d_{kl} + w_2 k^2 l^2 f_{kl}.$$

Die rechten Seiten sind bei einer kontinuierlichen Sollfunktion aus Integralen berechenbar:

$$C_l = \sum_{n=1}^N \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} [\bar{x}(\varphi) \cos l\varphi - w_1 \bar{x}'(\varphi) l \sin l\varphi + w_2 \bar{x}''(\varphi) l^2 \cos l\varphi] d\varphi, \quad (14)$$

$$D_l = \sum_{n=1}^N \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} [\bar{x}(\varphi) \sin l\varphi + w_1 \bar{x}'(\varphi) l \cos l\varphi + w_2 \bar{x}''(\varphi) l^2 \sin l\varphi] d\varphi.$$

Wenn die Sollfunktion in diskreten Winkelstellungen φ_i ($i = 1, 2, \dots$) vorgegeben wird, so treten an Stelle der Integrale Summen auf:

$$C_l = \sum_i (\bar{x}_i \cos l\varphi_i - w_1 \bar{x}'_i l \sin l\varphi_i + w_2 \bar{x}''_i l^2 \cos l\varphi_i), \quad (15)$$

$$D_l = \sum_i (\bar{x}_i \sin l\varphi_i + w_1 \bar{x}'_i l \cos l\varphi_i + w_2 \bar{x}''_i l^2 \sin l\varphi_i).$$

Die Summanden in (13) stellen Abkürzungen für die folgenden Formeln dar:

$$d_{kl} = c_{lk} = \sum_{n=1}^N \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \cos k\varphi \cos l\varphi d\varphi \triangleq \sum_i \cos k\varphi_i \cos l\varphi_i,$$

$$e_{kl} = \sum_{n=1}^N \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \sin k\varphi \cos l\varphi d\varphi \triangleq \sum_i \sin k\varphi_i \cos l\varphi_i, \quad (16)$$

$$f_{kl} = s_{lk} = \sum_{n=1}^N \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} \sin k\varphi \sin l\varphi d\varphi \triangleq \sum_i \sin k\varphi_i \sin l\varphi_i.$$

Die dabei auftretenden Integrale sind geschlossen lösbar und werden hier nicht ausführlich hingeschrieben.

Für den Sonderfall der mehrfachen Rast-in-Rast-Bewegung werden nur an die Lagefunktion nullter Ordnung Forderungen gestellt:

$$\bar{x}(\varphi) = \begin{cases} \bar{U}_1 & \text{für } \varphi_{a1} \leq \varphi \leq \varphi_{e1}, \\ \bar{U}_2 & \text{für } \varphi_{a2} \leq \varphi \leq \varphi_{e2}, \\ \dots & \dots \\ \bar{U}_N & \text{für } \varphi_{aN} \leq \varphi \leq \varphi_{eN}. \end{cases} \quad (17)$$

Damit sind die Formeln (14) geschlossen lösbar, und es ergibt sich

$$C_l = \sum_{n=1}^N \bar{U}_n \frac{1}{l} (\sin l\varphi_{en} - \sin l\varphi_{an}), \quad (18)$$

$$D_l = -\sum_{n=1}^N \bar{U}_n \frac{1}{l} (\cos l\varphi_{en} - \cos l\varphi_{an}).$$

Die Lösung des Gleichungssystems (12) ergibt die Koeffizienten der endlichen trigonometrischen Reihe (3), welche die Rast-in-Rast-Bewegung im Sinne des Fehlerquadrat-Minimums am besten approximieren. Daraus folgt die Lagefunktion (2) des Kurvenprofils mit a_k und b_k aus (5).

Als weiteres Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten der endlichen trigonometrischen Reihe (2) kommt die Čebyšev-Approximation in Betracht. Für dieselbe allgemeine Aufgabenstellung (17) ergibt sich als Gegenstück zu (8) als Forderung die Zielfunktion

$$S_3(\eta) = \text{Max} \{ \text{Max} |y(\eta, \varphi) - \bar{x}(\varphi)|; w_1 \text{Max} |y'(\eta, \varphi) - \bar{x}'(\varphi)|; \\ w_2 \text{Max} |y''(\eta, \varphi) - \bar{x}''(\varphi)| \} = \text{Minimum!} \quad (19)$$

Bei diskreten Winkeln als Stützstellen gilt analog zu (9)

$$S_4(\eta) = \text{Max} \{ \text{Max} |y(\eta, \varphi_i) - \bar{x}_i|; w_1 \text{Max} |y'(\eta, \varphi_i) - \bar{x}'_i|; \\ w_2 \text{Max} |y''(\eta, \varphi_i) - \bar{x}''_i| \} = \text{Minimum!} \quad (20)$$

Diese Forderung, bei welcher der Maximalwert des größten Maximums minimiert wird, ist „härter“ als nur die Forderung

$$S_5(\eta) = \text{Max} \{ |y(\eta, \varphi_i) - \bar{x}_i| + w_1 |y'(\eta, \varphi_i) - \bar{x}'_i| \\ + w_2 |y''(\eta, \varphi_i) - \bar{x}''_i| \} = \text{Minimum!} \quad (21)$$

Abschließend muß noch etwas zur Wahl desjenigen Abstimmungsverhältnisses η_{opt} gesagt werden, welches nach Berechnung der A_k und B_k (unabhängig davon, ob nach dem Kriterium (8), (9), (19), (20) oder (21) bestimmt) zur Berechnung der a_k und b_k gemäß (5) benutzt wird, was letztlich für das Kurvenprofil entscheidend ist. Wird $\eta_{\text{opt}} = 0$ gesetzt, so gilt $a_k = A_k$ und $b_k = B_k$, und bei den niedrigsten Drehzahlen wäre die optimale Approximation vorhanden. Mit höheren Drehzahlen werden aber die Abweichungen dabei immer größer.

Günstig ist es, im Bereich $0 < \eta_{\text{opt}} < \eta_{\text{max}}$ einen Wert η_{opt} zu wählen, der eine solche Abtriebsbewegung ergibt, daß sowohl im Kriechgang des Mechanismus ($\eta = 0$) als auch bei der Grenzdrehzahl (Maximaldrehzahl) (η_{max}) eine vom Anwendungsfall abhängige zulässige Abweichung von der Sollfunktion im relevanten Arbeitsbereich eingehalten wird. Damit treten die theoretisch ermittelten minimalen Abweichungen zwar nur bei der Drehzahl auf, die η_{opt} entspricht, aber man kann dabei einen sehr weiten Drehzahlbereich mit zulässigen Abweichungen erreichen. Auf diese Fragen wurde in [4.11] und [4.37] näher eingegangen.

4.6.3. Schwingungsarme Kurvengetriebe mit elastischer Antriebswelle

Die Bewegungsgleichung für ein Kurvengetriebe mit elastischer Antriebswelle (Bild 4.5 b) ist aus (4.2.3./26) bekannt:

$$\begin{aligned} (J_3 + mU'^2) \ddot{q} + (b_T + 2m\Omega U'U'') \dot{q} + [c_T + m\Omega^2(U''^2 + U'U''')] q \\ = -m\Omega^2 U'U'''. \end{aligned} \quad (1)$$

Mit der Transformation $w = qU'$ folgt (falls $b_T = 0$ und $J_3 = 0$) aus (1) die Form

$$mU'^2 \ddot{w} + (c_T + m\Omega^2 U''^2) w = -m\Omega^2 U'^2 U'''. \quad (2)$$

Bei der Synthese der Kurvengetriebe besteht z. B. die Frage, welcher Verlauf für die periodische Lagefunktion $U(\varphi)$ optimal im Sinne folgender Bedingungen ist:

1. Abschnittsweise ist in Bereichen $\varphi_{an} \leq \varphi \leq \varphi_{en}$ ein Sollwert U_n vorgegeben, von dem nur eine begrenzte Abweichung zugelassen wird, vgl. (4.6.2./17).

Nach ČEBYŠEV lautet diese Forderung

$$\text{Max } |U(\varphi) - \bar{U}_n| \leq \Delta U \quad (3)$$

oder nach GAUSS

$$\sum_n \int_{\varphi_{an}}^{\varphi_{en}} [U(\varphi) - \bar{U}_n]^2 d\varphi \leq \varepsilon. \quad (4)$$

2. Das Torsionsmoment in der Antriebswelle, das $M = c_T q$ beträgt, soll im gesamten Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ möglichst klein sein. Dies kann in der Form

$$\text{Max } |q(\varphi)| = \text{Min!} \quad (5)$$

oder

$$\int_0^{2\pi} q^2(\varphi) d\varphi = \text{Min!} \quad (6)$$

gefordert werden.

Die Frage läßt sich im gleichen Sinne wie in 4.6.2. verallgemeinern, indem auch Forderungen an U' und U'' gestellt werden. Eine „elegante“ Lösung dieser Aufgabe, die als ein nichtlineares Problem der optimalen Steuerung einzuordnen ist, fehlt. Die mathematischen Schwierigkeiten entstehen durch das Auftreten von U in der linken Seite der Gleichung (1) oder (2).

Man kann die Aufgabe näherungsweise lösen, indem man für die gesuchte Lagefunktion einen Ansatz $U(\varphi, a_k)$ mit mehreren Konstanten a_k macht, die z. B. Koeffizienten eines endlichen trigonometrischen Polynoms sind. Mit einer der in Abschnitt 4.4. genannten Methoden kann dann für gegebene a_k der Verlauf $q(t)$ aus (1) oder aus (2) mit $q = w/U'$ berechnet und die Erfüllung der Forderungen 1 und 2 geprüft werden. Variiert man die a_k in der Ansatzfunktion systematisch, z. B. mit einer Optimierungsstrategie, so kann man ihre optimalen Werte auf numerischem Wege finden und damit den Verlauf $U(\varphi)$.

Im Grenzfall der starren Antriebswelle ($c_T \rightarrow \infty$) ist das Antriebsmoment so groß wie der kinetostatische Wert $M = -m\Omega^2 U'U''$.

Wenn keine Schwingungsgefahr besteht, wie bei langsamlaufenden Antrieben, so reduziert sich die Aufgabe darauf, Verläufe für die Lagefunktion U mit minimalem Maximalwert des Produkts $U'U''$ zu finden. Diese Herangehensweise ist in der Getriebetechnik üblich, wo mit dem *Momentenkennwert* C_M als Kriterium gearbeitet wird [2], aber sie ist nur berechtigt, wenn die Schwingungen unwesentlich sind.

Bei schnellaufenden Mechanismen können die Momente aus den gekoppelten parameterregten und erzwungenen Schwingungen die kinetostatischen Werte bedeutend übersteigen, so daß obige Betrachtungsweise bei der Synthese von Kurvenprofilen nötig ist. Ein Beispiel dafür enthalten [4.37] und [4.42], vgl. Abschnitt 4.6.4.3.

4.6.4. Beispiele

4.6.4.1. Symmetrische Rast-in-Rast-Bewegung

Für den speziellen Fall ($N = 2$) einer symmetrischen Rast (vgl. (4.6.2./17) und Bild 4.24) mit

$$\begin{aligned} \varphi_{a1} &= -\Delta\varphi, & \varphi_{e1} &= \Delta\varphi, & \bar{U}_1 &= 0,5, \\ \varphi_{a2} &= \pi - \Delta\varphi, & \varphi_{e2} &= \pi + \Delta\varphi, & \bar{U}_2 &= -0,5, \end{aligned} \quad (1)$$

wurden in [4.11] die Koeffizienten A_k für die Ansatzfunktionen mit $K = 3, 5, 7$ und 9 berechnet. Aus Symmetriegründen sind in diesem Fall $A_0 = 0$ und alle $B_k = 0$. Die Koeffizienten erweisen sich als monoton von $\Delta\varphi$ abhängig, so daß sie in guter Näherung durch folgende Polynome dritten Grades berechnet werden können (im Bereich $0 \leq \Delta\varphi \leq 1$ rad):

Für $K = 3$:

$$A_1 = 0,56253 - 0,00060\Delta\varphi + 0,04302(\Delta\varphi)^2 - 0,00499(\Delta\varphi)^3, \quad (2)$$

$$A_3 = -0,06216 - 0,00584\Delta\varphi - 0,01624(\Delta\varphi)^2 - 0,03322(\Delta\varphi)^3. \quad (3)$$

Für $K = 5$:

$$A_1 = 0,58606 - 0,00111\Delta\varphi + 0,03005(\Delta\varphi)^2 - 0,00446(\Delta\varphi)^3, \quad (4)$$

$$A_3 = -0,09753 - 0,00131\Delta\varphi - 0,03482(\Delta\varphi)^2 - 0,00879(\Delta\varphi)^3, \quad (5)$$

$$A_5 = 0,00939 + 0,01807\Delta\varphi - 0,03207(\Delta\varphi)^2 + 0,04126(\Delta\varphi)^3. \quad (6)$$

Bemerkenswert ist, daß sich diese Koeffizienten im Gegensatz zu den üblichen Fourierkoeffizienten mit K verändern. Dies liegt an der hier angewendeten Berechnungsvorschrift (4.6.2./12), die sich von den Euler-Fourierschen Integralen unterscheidet, da die periodische Funktion nur in einem endlichen Bereich approximiert wird.

Für eine Rastbreite von $2\Delta\varphi = 64$ Grad = $1,117$ rad betragen demzufolge diese Koeffizienten bei $K = 3$ gemäß (2) und (3):

$$A_1 = 0,57475, \quad A_3 = -0,07627.$$

Für $K = 5$ folgt aus (4) bis (6):

$$A_1 = 0,59404, \quad A_3 = -0,11066, \quad A_5 = 0,01667.$$

Für denselben Fall (1), der oben mit der Zielfunktion S_1 optimiert wurde, ergeben sich mit der Zielfunktion S_3 folgende Koeffizienten für $K = 5$:

$$A_1 = 0,59488, \quad A_3 = -0,11214, \quad A_5 = 0,01743. \quad (7)$$

Die maximale Rastabweichung beim optimalen Abstimmungsverhältnis η_{opt} beträgt dabei $\Delta y_{max} = 0,00017$. Bei einem Rastgetriebe mit 10 mm Hub entspricht

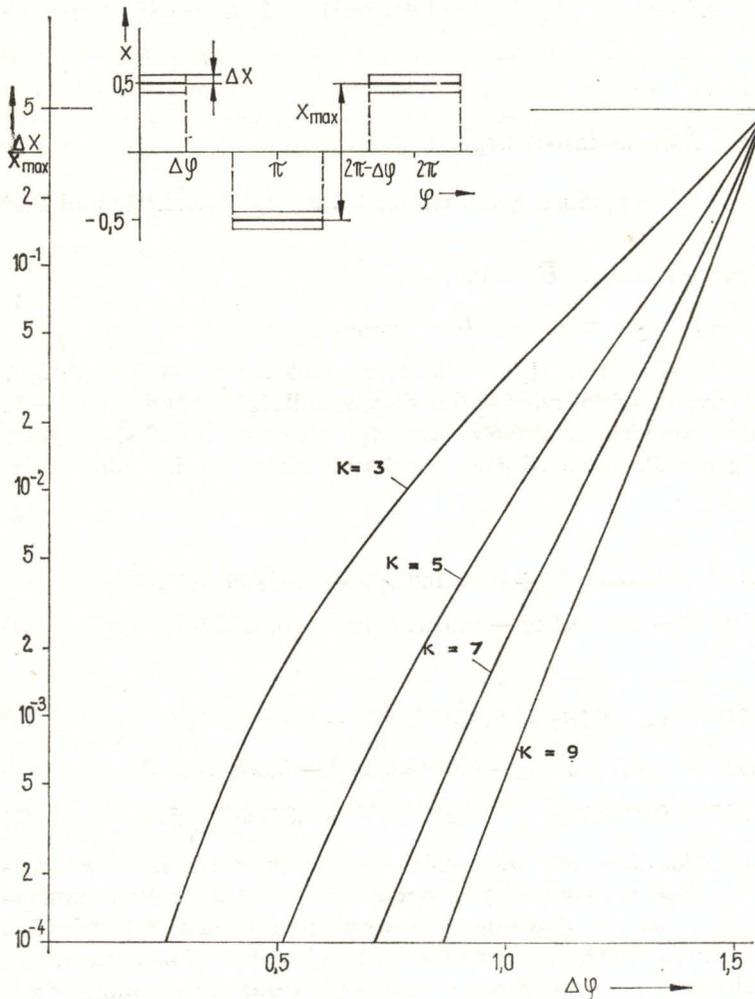


Bild 4.24 Relative Genauigkeit bei der Approximation einer Rast-in-Rast-Bewegung durch K Harmonische

dem eine Abweichung von der idealen Rast von $1,7 \mu\text{m}$, was noch unterhalb der üblichen Fertigungsgenauigkeit liegt.

Die maximale Abweichung im Rastbereich tritt bei der Approximation S_1 bei $\varphi = \Delta\varphi = 0,5585$ rad auf und beträgt $\Delta y_{\text{max}} = 0,00033$, ist also fast doppelt so groß wie bei S_3 . Allerdings ist die Abweichung bei $\varphi = 0$, die sich aus $\Delta y = A_1 + A_3 + A_5 - 0,5$ leicht prüfen läßt, bei Benutzung der Zielfunktion S_1 nur $\Delta y = 0,0005$, während sie bei S_3 ebenso groß wie bei $\varphi = \Delta\varphi$ ist, nämlich $0,00017$. Erfahrungsgemäß läßt sich durch Benutzung des Kriteriums S_3 (oder S_4) gegenüber S_1 (oder S_2) eine Verbesserung bei Δy von 30 bis 50% erreichen, was den höheren Rechenaufwand also lohnt.

In Bild 4.24 ist dargestellt, welche Rastdauer mit welcher Genauigkeit durch wie viele Harmonische erreichbar ist [4.11]. Es wird im allgemeinen nicht zweckmäßig sein, die Anzahl der Harmonischen größer als $K = 7$ bis 9 zu wählen, da dann zu viele Oberwellen auf der Kurvenscheibe auftreten und letztlich die bei $\eta = 1/K$ liegende Resonanzstelle nur noch unwesentlich gegenüber $\eta = 1/(K + 1)$ verschoben wird.

Die Untersuchung [4.11] zeigte, daß bei einer zulässigen Rastabweichung von $\Delta x/x_{\text{max}} = 0,001$ bei einer Rastbreite von $2\Delta\varphi = 60^\circ$ bei Benutzung der Bestehorn-Sinoide schon bei $\eta = 0,07$ eine unzulässige Resonanzhöhung auftritt, während das HS-Profil mit fünf Harmonischen $\eta_{\text{max}} = 0,135$ zuläßt. Die erreichbare Drehzahl ist damit fast doppelt so hoch, was die Überlegenheit der HS-Profile bei kurzen Rasten gegenüber traditionellen Kurvenprofilen zeigt.

4.6.4.2. Versatzbewegung einer Kettenwirkmaschine

Das Versatzgetriebe der Legeschiene einer Kettenwirkmaschine besteht aus einem Kurvenkörper, einer Abtastrolle und Übertragungselementen zur Legeschiene. Die Legeschiene trägt mehrere tausend Nadeln im Abstand von $0,94 \text{ mm}$ bei Arbeitsbreiten bis über 4 m und muß diese bis zu etwa 2000 mal pro Minute mit hoher Genauigkeit durch eine ebenso dichte Nadelschar hindurchbewegen. Das Profil der Kurvenscheibe setzt sich aus verschiedenen Bereichen der Rast („Bewegungsaufgabe“, vgl. (4.6.2./17)) und des Übergangs zusammen, wobei traditionell die Bereiche der Rast als ideale Stillstände (keine Rastabweichung) und die Bereiche des Übergangs als die üblichen „normierten Übertragungsfunktionen“ ausgebildet waren. Bei hohen Arbeitsdrehzahlen waren bei Benutzung der traditionellen Kurvenprofile mit der Lagefunktion $x(\varphi)$ störende Schwingungen überlagert, und es wurde nach Wegen gesucht, diese zu eliminieren.

Es zeigte sich aus Experimenten der in Bild 4.25 dargestellte reale Verlauf des Abtriebsweges: Schwingungen mit der dominierenden 9. Harmonischen störten die technologisch geforderte Lagefunktion, besonders in den Rastbereichen. Die Erscheinungen ließen sich mit dem in Abschnitt 4.2.2. (Bild 4.4a) behandelten Berechnungsmodell deuten und quantitativ erklären [4.10], [4.37]. Die 9. Harmonische der traditionellen Kurvenprofile geriet in Resonanz mit der ersten Eigenfrequenz des Versatzgetriebes, so daß der Bereich der Arbeitsdrehzahlen begrenzt wurde.

werkzeugen arbeiten und dürfen trotz hoher Hubzahl und großer zu bewegender Massen keine Schwingungen aufweisen, weil es sonst zu Kollisionen und Zerstörungen kommt.

Infolge der räumlichen Entfernung zwischen dem Pressenantrieb und dem Antrieb des Transfermanipulators kann die mechanische Kopplung zwischen ihnen nicht

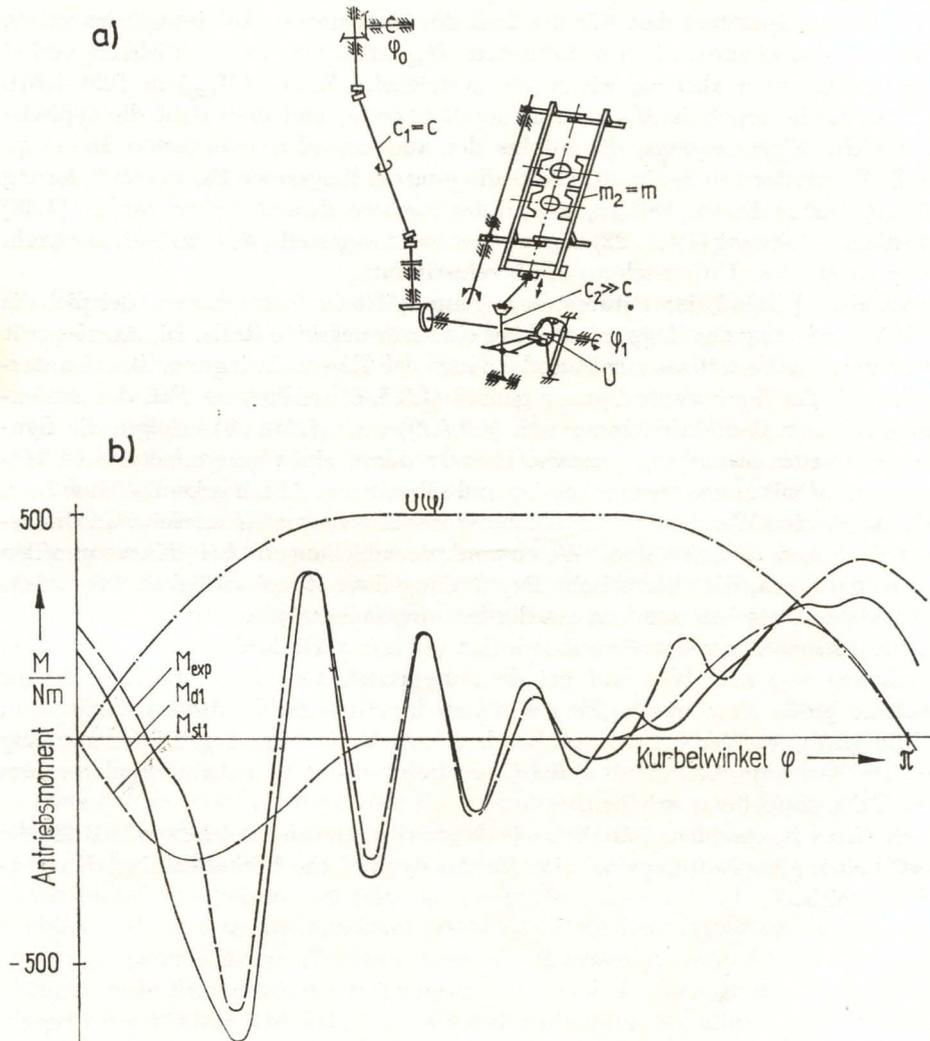


Bild 4.26 Transfermanipulator

a) Getriebeschema, b) Lagefunktion und Momentenverlauf in der Antriebswelle

— dynamisches Moment M_d (Rechnung)

- - - - - Moment M_{exp} (Messung)

- · - · - U -Funktion (Abtriebsbewegung)

— kinetostatisches Moment $M_{st} = -mU'U''\Omega^2$

beliebig steif gestaltet werden. Die in Bild 4.26a angedeutete Gelenkwelle stellt sich als das relativ weichste Glied heraus. Damit trifft auf diesen Fall das in Abschnitt 4.2.3. behandelte Berechnungsmodell zu, das in Bild 4.5 dargestellt ist.

In den Arbeiten [4.42] und [4.37] wurden für eine konkrete Maschine (Bild 4.26a) die Schwingungsuntersuchungen mit Hilfe der in Abschnitt 4.4.2. behandelten Methodik vorgenommen. Bild 4.26b stellt den Momentenverlauf in der Antriebswelle des Transfermanipulators dar. Für den Fall des ideal starren Antriebsgliedes würde der Verlauf des kinetostatischen Momentes M_{st} auftreten. In Wirklichkeit verlief das Antriebsmoment aber so, wie es die gestrichelte Kurve (M_{exp}) in Bild 4.26b zeigt. Das Rechenergebnis M_{d1} stimmt damit überein, und man sieht die typische veränderliche Eigenfrequenz, die infolge der abnehmenden reduzierten Masse an dieser Stelle mit der Zeit zunimmt. Die Bedingung der langsamen Parameteränderung (4.4.2./19) traf in diesem Fall zu, so daß der Rechenaufwand gering war. In [4.38] wurde die Abschätzung (4.4.1./22) angewendet und festgestellt, daß die Grenzdrehzahl mit experimentellen Untersuchungen übereinstimmte.

Neben dem Einfluß der Parametererregung spielt im betrachteten Beispiel die scharfe Veränderung des Erregermomentes eine sehr negative Rolle. Die Anstiegszeit ist sehr kurz im Verhältnis zur Periodendauer der Eigenschwingung. Dabei unterscheidet sich der äquivalente Sprung gemäß (4.3.5./6) wenig vom Fall des Stufensprunges. Unter Berücksichtigung von (4.3.5./9) und (4.2.3./26) erfolgte die Synthese eines neuen Bewegungsgesetzes. Es war durch einen unsymmetrischen Momentenverlauf mit langsamerem Anstieg und schnellerem Abfall gekennzeichnet und wurde durch eine Wendepunktverschiebung des Kurvenprofils erreicht. In der getriebetechnischen Praxis sind Wendepunktverschiebungen bei Kurvenprofilen schon lange üblich, die theoretische Begründung ihrer Zweckmäßigkeit folgt nicht aus der kinetostatischen, sondern aus der Schwingungsanalyse.

Mit dem neuen Kurvenprofil traten selbst bei hohen Drehzahlen keine störenden Überschwingwege auf. Während bei dem ursprünglichen Kurvenprofil mehr als doppelt so große Momente im Vergleich zum kinetostatischen Moment auftraten, vgl. Bild 4.26b, war der Unterschied bei der neuen Variante gering. Die Anwendung des neuen Kurvenprofils erlaubte, die Grenzdrehzahl des Transfermanipulators um mehr als das Doppelte zu erhöhen.

Auch dieses Beispiel lehrt, ähnlich wie das vorhergehende, welche große Rolle die Auswahl einer günstigen Lagefunktion für das dynamische Verhalten eines Kurvengetriebes spielt.