

## 5. Schwingungsmodelle mit mehreren Freiheitsgraden

### 5.1. Aufgabenstellung

Die Kompliziertheit moderner Maschinen und die dynamische Kopplung zwischen den Baugruppen des Antriebssystems (Wellen, Kupplungen, Mechanismen), des technologischen Prozesses und des Gestells erfordert die Behandlung von Schwingungssystemen von großer Dimension, die Mechanismen enthalten. Bei der Analyse und besonders bei der Synthese solcher dynamischer Systeme entstehen häufig bedeutende Schwierigkeiten, weil die Gesamtheit der verallgemeinerten Koordinaten und der variierbaren Parameter groß und schwierig überschaubar ist.

Eine Besonderheit der Mechanismendynamik besteht darin, daß man es von Anfang an mit Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen zu tun bekommt. In manchen Fällen, wo keine Linearisierung möglich ist, sind effektive Verfahren zur numerischen Integration der Differentialgleichungen gefragt. Da solche Probleme durchaus für den Maschinenbau von praktischer Bedeutung sind, wie das die Beispiele zeigen, wird hier darauf eingegangen.

Vielfach ist eine Linearisierung der Bewegungsgleichungen berechtigt, jedoch stößt man bei den Mechanismenschwingungen dann stets auf Differentialgleichungen mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten, so daß man sich mit gekoppelten parametererregten und erzwungenen Schwingungen befassen muß. In vorliegendem Abschnitt wird die allgemeine Herangehensweise beschrieben. Dabei wird von den linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten der wesentliche Begriff der Normalkoordinaten übertragen und mit „Quasieigenfrequenzen“ und „Quasieigenformen“ operiert. Diese Betrachtungsweise erweist sich als sehr fruchtbar. Sie macht verwickelte physikalische Erscheinungen durchschaubar und verständlich. Dabei können viele Ergebnisse des Schwingers mit einem Freiheitsgrad, u. a. die mit dem Begriff des fiktiven Oszillators in Kapitel 4 gewonnenen, angewendet werden. Die Aufgabe der Schwingungsanalyse besteht zunächst darin, die spektralen Eigenschaften des Schwingungssystems zu ermitteln, d. h. die Lage relevanter Eigenfrequenzen und deren Parameterabhängigkeit bzw. -empfindlichkeit. Weiterhin sind die modalen Eigenschaften von großem Interesse, weil man aus den Eigenschwingformen (Lage der Schwingungsknoten und -bäuche) wesentliche praktische Schlußfolgerungen ziehen kann. Schließlich kommt es vielfach darauf an, auch die realen Zeitverläufe von

Koordinaten und Kraftgrößen zu berechnen. Bei vielen dieser Aufgaben werden bekannte Methoden zur Lösung des Eigenwertproblems benutzt, worauf deshalb nicht näher eingegangen wird.

Zur ersten Phase der Problembearbeitung, der Modellbildung, bei welcher die Struktur und die Parameterwerte des Berechnungsmodells festzulegen sind, wird bei den einzelnen Beispielen etwas gesagt. Die dabei auftretenden Probleme („so wenig Freiheitsgrade wie möglich, so viele wie nötig“) sind dieselben wie in anderen Gebieten der Maschinendynamik und setzen ingenieurmäßige Erfahrungen voraus. Von den vielen Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen, welche die analytische Mechanik zur Verfügung stellt, werden die wesentlichen angegeben, die sich bei der Bearbeitung solcher Mechanismenschwingungen bewährt haben.

Es wird auf die topologische Struktur der Mechanismensysteme innerhalb von Maschinen besonders eingegangen. Typisch für den Textilmaschinenbau, aber auch für polygrafische Maschinen, Landmaschinen, Umformmaschinen und Verarbeitungsmaschinen aller Art sind Antriebssysteme mit mehreren parallel arbeitenden „identischen“ Mechanismen, vgl. Bild 5.1. Es wird eine Aufgabe darin gesehen, dafür zweckmäßige Lösungsmethoden darzustellen. Als solche haben sich die Methoden der Übertragungsmatrizen, der FEM (Finite Element Method) und der Kontinuumschwingungen bewährt, die auf Systeme mit zeitlich langsam veränderlichen Parametern erweitert werden.

Bei komplizierten Mechanismen, die eine kontinuierliche Masse- und Steifigkeitsverteilung besitzen, ist es vorteilhaft, konzentrierte Parameter einzuführen und sie als Systeme mit endlichem Freiheitsgrad zu behandeln. Die Methode der finiten Elemente (FEM) hat sich zur Lösung von Aufgaben der Strukturmechanik durchgesetzt, und es ist auch möglich, sie auf Probleme der Mechanismendynamik zu über-

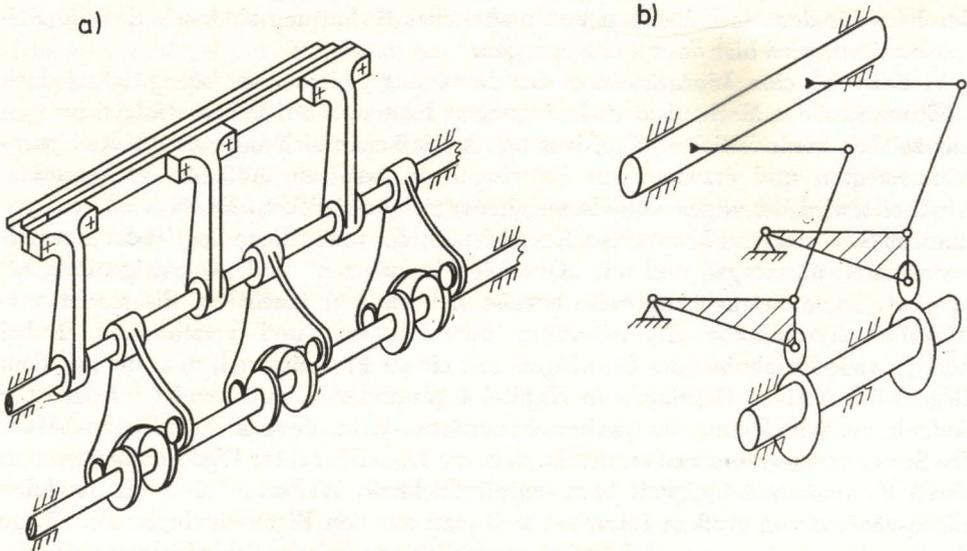


Bild 5.1 Mechanismen realer Maschinen

tragen. Dies gilt auch für die Substruktur- und Kondensationsmethoden [32]. Diese Methoden ermöglichen es, sowohl gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen vermaschter Mechanismensysteme als auch die gekoppelten Schwingungen von Maschinengestellen und den in ihnen gelagerten Mechanismen zu untersuchen.

Zur Überwindung der Schwierigkeiten, die bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden entstehen können, werden weiterhin kontinuierliche Modelle benutzt. In Analogie zur Kontinuumsmechanik werden die kinematischen, elastischen und Trägheitseigenschaften der Mechanismen „verschmiert“ und durch Parameter eines Kontinuums ausgedrückt. Dies erlaubt, die Anzahl der Koordinaten wesentlich zu vermindern und die Analyse und Synthese von Systemen mit spezieller Struktur zu vereinfachen.

Die Lösung der dynamischen Probleme von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden ist nur durch die Anwendung moderner Digitalrechner möglich. Es ist aber nicht damit getan, die Probleme auf eine numerische Integration nichtlinearer Differentialgleichungen zurückzuführen. Überlegungen zur zweckmäßigen Vereinfachung, zur Reduktion des Freiheitsgrades, zur sinnvollen Modellwahl und zur günstigen konstruktiven Auslegung des gesamten dynamischen Systems haben auch im Zeitalter schneller Computer ihre Bedeutung. Es wird deshalb an allen geeigneten Stellen auf einen Vergleich der Methoden und auf die physikalisch-anschauliche Interpretation der Ergebnisse geachtet. Der Ingenieur muß gerade bei umfangreichen analytischen und rechentechnischen Untersuchungen grundsätzliche Klarheit über den Einfluß von Masse-, Steifigkeits- und anderen Parametern besitzen, damit er nicht Gefahr läuft, fehlerhafte Rechenergebnisse zu akzeptieren.

Neben typischen Schwingerketten von Hauptwellen mit identischen Mechanismen, die bei vielen Maschinentypen vorkommen, werden konkrete Untersuchungen realer Maschinen veröffentlicht. Bei diesen Maschinen waren ganz aktuelle Fragen der Konstruktion zu beantworten, so daß die vorgestellten Ergebnisse der Kettenwirkmaschine, der Nähwirkmaschine, der Presse und des Mobilkrans mit Lastmomentensicherung als typische Beispiele für eine CAD-Anwendung gelten können. Diese Beispiele sollen dem Leser als Anregung für eigene Untersuchungen dienen, indem sie andeuten, welche Informationen ein Konstrukteur durch Anwendung der hier behandelten Methoden für sein Erzeugnis gewinnen kann.

## 5.2. Bewegungsgleichungen von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden

### 5.2.1. Nichtlineare Bewegungsgleichungen

Bewegungsgleichungen für Mechanismen mit mehreren Antrieben wurden schon in Abschnitt 2.2.2. aufgestellt. Dort bestand die Aufgabe darin, für gegebene Bewegungsabläufe die Kräfte und Momente auf Lager, Gelenke und Antriebe zu berechnen, die aus den Massenkräften und eingepprägten (technologischen) Kräften entstehen.

In vielen Fällen kann jedoch die Bewegung der Antriebe nicht einfach kinematisch vorgegeben werden, da sie selbst erst aus der Wechselwirkung der Antriebs-, Massen- und technologischen Kräfte bestimmt werden muß. Außerdem existieren infolge der Elastizität der Getriebeglieder gegenüber dem kinetostatischen Modell mit dem Laufgrad  $F$  noch zusätzliche Freiheiten, die mit den  $n$  verallgemeinerten Koordinaten des Schwingungssystems beschrieben werden.

Die kinetische Energie des Mechanismus ist das Integral der kinetischen Energien der Massenpunkte aller bewegten Körper ( $i = 2, 3, \dots, I$ ). Ein Massenpunkt des  $i$ -ten Körpers habe die Masse  $dm_i$  und die Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$ . Für den Mechanismus ergibt sich

$$2W_{\text{kin}} = \sum_i \int \vec{v}_i^2 dm_i. \quad (1)$$

Die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  der Massenpunkte sind bei den vorliegenden holonomen Bindungen von den verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$  abhängig:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\mathbf{q}). \quad (2)$$

Daraus folgt der Geschwindigkeitsvektor des  $i$ -ten Massenpunktes:

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \vec{r}_{i,j} \dot{q}_j. \quad (3)$$

Die Ableitung nach der Koordinate  $q_j$  wird dabei, wie in den vorhergehenden Abschnitten, durch ein Komma und den Index  $j$  abgekürzt. Die Geschwindigkeiten hängen linear von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$  ab. Nach dem Einsetzen von (3) in (1) erhält man für die kinetische Energie eines beliebigen ebenen oder räumlichen Mechanismus den Ausdruck

$$2W_{\text{kin}} = \sum_i \int \left( \sum_j \vec{r}_{i,j} \dot{q}_j \right) \left( \sum_k \vec{r}_{i,k} \dot{q}_k \right) dm_i = \sum_j \sum_k \left( \sum_i \int \vec{r}_{i,j} \vec{r}_{i,k} dm_i \right) \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (4)$$

oder einfacher

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad (5)$$

vgl. (2.2.2./5).

Damit sind die verallgemeinerten Massen für beliebige Mechanismen folgendermaßen definiert, vgl. auch Gleichung (2.2.2./6):

$$m_{jk} = \sum_i \int \vec{r}_{i,j} \vec{r}_{i,k} dm_i = \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}. \quad (6)$$

Die potentielle Energie schwingungsfähiger Mechanismen resultiert im wesentlichen aus den elastischen Deformationen. In manchen Mechanismen offener kinematischer Ketten, z. B. beim Last-Pendel an Kranen, muß auch die potentielle Energie der Schwerkraft in Betracht gezogen werden, während sie sonst nur statischen Einfluß ausübt.

Die potentielle Energie, eine stetige und differenzierbare Funktion, wird in der

Umgebung der Gleichgewichtslage in eine Reihe entwickelt:

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{q}) = W_{\text{pot}}^0 + \sum_{j=1}^N W_{\text{pot},j}^0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N W_{\text{pot},jk}^0 q_j q_k + \dots \quad (7)$$

Die statische Gleichgewichtslage wird als Bezugsbasis für die potentielle Energie gewählt, so daß  $W_{\text{pot}}(\mathbf{0}) = W_{\text{pot}}^0 = 0$  ist. Außerdem sind bei einer stabilen Gleichgewichtslage bei  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  die Rückstellkräfte null, und deshalb gilt  $W_{\text{pot},j}^0 = 0$ . Somit folgt aus (7) die vielfach ausreichende Näherung, die für ebene und räumliche Mechanismen gilt:

$$W_{\text{pot}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (8)$$

Dabei sind die  $c_{jk}$  die Federzahlen. Sie bilden die Elemente der Federmatrix  $\mathbf{C}$  und ergeben sich in Analogie zu (6) auch aus zweiten partiellen Ableitungen:

$$c_{kj} = c_{jk} = W_{\text{pot},jk}^0, \quad j, k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Sie sind im allgemeinen bei ungleichmäßig übersetzenden Mechanismen noch von  $\mathbf{q}$  abhängig.

Die Summe der virtuellen Arbeiten der Nichtpotentialkräfte, die auf beliebige Glieder eines Mechanismus wirken, kann in der Form

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_i \sum_j \vec{F}_i \vec{r}_{i,j} \delta q_j = \sum_j Q_j^* \delta q_j \quad (10)$$

angegeben werden. Damit sind die auf die  $j$ -te Koordinate reduzierten Nichtpotentialkräfte für räumliche Mechanismen durch

$$Q_j^* = \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_{i,j} \quad (11)$$

definiert. Im Sonderfall ebener Mechanismen, wenn an den Getriebegliedern als eingeprägte Kraftgrößen eine Kraft im Schwerpunkt ( $\vec{F}_i = F_{xi} + iF_{yi}$ ) und ein Moment  $M_i$  angesetzt werden, ergibt sich die reduzierte Kraft aus (11) zu

$$Q_j^* = \sum_i [F_{xi} x_{si,j} + F_{yi} y_{si,j} + M_i \varphi_{i,j}]. \quad (12)$$

Die reduzierten Nichtpotentialkräfte können als eine Funktion der Zeit, der verallgemeinerten Koordinaten oder deren Zeitableitungen vorgegeben sein. Bei Aufgaben der Mechanismendynamik sind die  $Q_j^*$  meist Antriebskräfte oder -momente, Bremskräfte oder -momente, aber häufig auch die vom Abtriebsglied auf die Koordinate  $q_j$  reduzierten technologischen Kräfte, Reibungs- und Dämpfungskräfte.

Die Bewegungsgleichungen folgen dann unter Benutzung von (5), (8) und (11) oder (12) durch Anwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art, vgl. (2.2.2./11) und (2.2.2./13).

Nach Ausführung der Differentiationen ergeben sich die Bewegungsgleichungen

für ebene und räumliche Mechanismen mit  $N$  Freiheitsgraden zu

$$\sum_{k=1}^N m_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^N c_{jk} q_k = Q_j^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (13)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

vgl. [27], [4.8], [5.1], [5.3]. Dabei gilt der Zusammenhang, vgl. (2.2.2./9):

$$m_{klj} + m_{jlk} = 2m_{jk,l},$$

$$m_{klj} = m_{ljk} = m_{l,j,k} + m_{j,k,l} - m_{kl,j}.$$

Für manche Indexkombinationen ergeben sich Vereinfachungen, z. B. gilt

$$m_{lkk} = m_{klk} = m_{kk,l}.$$

Bei (13) handelt es sich um die allgemeinste Form der Bewegungsgleichungen von Mechanismen. Mit der Lösung dieser  $N$  gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten befaßt sich Abschnitt 5.5.

Bei vielen realen Aufgaben ist eine Vereinfachung dieser Gleichungen zweckmäßig, weil eine Analyse von Parametereinflüssen, die Synthese und Optimierung dann leichter möglich sind.

Wenn außer den  $N$  verallgemeinerten Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_N$  noch  $n\ddot{u}$  überzählige Koordinaten eingeführt werden, also  $q_{N+1}, q_{N+2}, \dots, q_{N+n\ddot{u}}$ , dann entstehen die Lagrangeschen Gleichungen gemischten Typs ([2.7], [27], [5.29], [5.45]):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial q_j} + \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial q_j} = Q_j^* - \sum_{i=1}^{n\ddot{u}} \lambda_i h_{ij}. \quad (14)$$

Hierbei sind  $\lambda_i$  die sogenannten *Lagrangeschen Multiplikatoren*. Die von den verallgemeinerten Koordinaten abhängigen Funktionen  $h_{ij}$  folgen aus Zwangsbedingungen, vgl. (15).

Der physikalische Sinn der Terme mit den Lagrangeschen Multiplikatoren hängt mit dem Auftreten zusätzlicher Reaktionskräfte in den Bindungen zusammen, welche bei dieser Betrachtungsweise nicht vollständig aus den Lagrangeschen Gleichungen eliminiert werden. Die überzähligen Koordinaten sind keine unabhängigen, weswegen zusätzlich zu (14) noch  $n\ddot{u}$  Zwangsbedingungen (Bindungsgleichungen) aufgestellt werden müssen, welche die Beziehung zwischen allen Koordinaten bei dem konkreten System beschreiben.

Gleichungen für holonome Bindungen haben die Form, vgl. 1.3.2.:

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_{N+n\ddot{u}}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\ddot{u}; \quad (15)$$

Differentiation nach der Zeit ergibt aus diesen Zwangsbedingungen

$$\sum_{j=1}^{N+n\ddot{u}} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Mit

$$h_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = f_{i,j}, \quad h_i = \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad (17)$$

lauten die Gleichungen (16)

$$\sum_{j=1}^{N+n\ddot{u}} h_{ij} \dot{q}_j + h_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\ddot{u}. \quad (18)$$

In der Form (18) und (14) können die Bewegungsgleichungen auch für nichtholonyme Bindungen angewendet werden, ohne daß (15) bis (17) gelten müssen. Bei Mechanismen treten solche Verhältnisse auf, wenn Drehzahlwandler mit stufenlos einstellbarem Übersetzungsverhältnis eingesetzt werden, z. B. Reibradgetriebe, Riemengetriebe, hydraulische Drehzahlwandler. Die Lösung der  $N + 2n\ddot{u}$  Gleichungen (14) und (18) liefert sowohl die  $N + n\ddot{u}$  Bewegungen  $q_i(t)$  des Mechanismus als auch  $n\ddot{u}$  Reaktionskräfte in den Gelenken, die den  $n\ddot{u}$  Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda_i$  entsprechen. Die Lagrangeschen Multiplikatoren können aus beliebigen  $n\ddot{u}$  Gleichungen des Systems (14) ausgedrückt werden, allerdings ist es am einfachsten, die letzten  $n\ddot{u}$  davon zu verwenden.

Die überzähligen Koordinaten werden zweckmäßig derart ausgewählt, daß bezüglich aller verallgemeinerter Koordinaten

$$\frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial q_j} = 0 \quad (19)$$

gilt. Dann sind die  $m_{jk}$  konstant, und (14) vereinfacht sich zu

$$\sum_{k=1}^{N+n\ddot{u}} m_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{N+n\ddot{u}} c_{jk} \dot{q}_k = Q_j^* - \sum_{i=1}^{n\ddot{u}} \lambda_i h_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, N + n\ddot{u}, \quad (20)$$

wobei von der ersten Summe oft nur ein Summand auftritt. Diese Gleichungen unterscheiden sich von (11) dadurch, daß statt  $N$  hier  $N + n\ddot{u}$  Gleichungen vorhanden sind und auf der rechten Seite zusätzliche Terme mit den Lagrangeschen Multiplikatoren auftreten, welche die Nichtlinearitäten enthalten.

Wird (18) noch einmal nach der Zeit differenziert, dann kann nach Umordnung der Terme daraus in Verbindung mit (11) und (13) folgendes Gleichungssystem erhalten werden:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+n\ddot{u}} m_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{i=1}^{n\ddot{u}} h_{ij} \lambda_i &= Q_j^* - \sum_{k=1}^{N+n\ddot{u}} c_{jk} \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N+n\ddot{u}} \sum_{l=1}^{N+n\ddot{u}} m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l, \\ \sum_{k=1}^{N+n\ddot{u}} h_{ik} \ddot{q}_k &= - \sum_{k=1}^{N+n\ddot{u}} \sum_{l=1}^{N+n\ddot{u}} h_{ik,l} \dot{q}_k \dot{q}_l - \dot{h}_i, \end{aligned} \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, n\ddot{u}; \quad j = 1, 2, \dots, N + n\ddot{u}.$$

Die Gleichungen (21) sind linear bezüglich der Beschleunigungen  $\ddot{q}_k$  und der Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda_i$ . Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  ist

quadratisch, symmetrisch und regulär,

$$A = \begin{pmatrix} \underbrace{m_{jk}}_{N+n\ddot{u}} & \underbrace{h_{ij}}_{n\ddot{u}} \\ \underbrace{h_{ik}}_{N+n\ddot{u}} & \underbrace{0}_{n\ddot{u}} \end{pmatrix}^{N+n\ddot{u}}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_k \\ \lambda_i \end{pmatrix} \quad (25)$$

so daß eine Auflösung nach den Beschleunigungen günstig möglich ist. Die Symmetrie von  $A$  wurde mit der Vorzeichendefinition der  $\lambda_i$  in (14) erreicht und von NGUYEN VAN KHANG [5.45] ausgenutzt, wobei die numerische Integration in Zusammenarbeit mit GUMPert [5.27] realisiert wurde.

### 5.2.2. Linearisierte Bewegungsgleichungen

Die verallgemeinerten Massen  $m_{jk}$  in (5.2.1./4) sind bei Mechanismen im allgemeinen nichtlineare Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten, vgl. (2.2.2./6) und (5.2.1./6). Bei den verallgemeinerten Koordinaten wurde in Abschnitt 5.2.1. nicht unterschieden, ob sie sich auf Antriebskoordinaten oder Schwingkoordinaten beziehen.

Reale Mechanismen in Maschinen besitzen einen oder mehrere Antriebe. Es ist zweckmäßig, zwischen dem **Laufgrad** ( $F$ ), welcher die Anzahl der unabhängigen Antriebskoordinaten des starren Mechanismus ausdrückt, und dem **Freiheitsgrad** ( $n$ ) zu unterscheiden, welcher die Anzahl der Koordinaten der infolge der Elastizität der realen Getriebeglieder möglichen Zusatzbewegungen angibt. Die verallgemeinerten Koordinaten werden mit  $q_1, q_2, \dots, q_n$  bezeichnet, während die Numerierung der Antriebskoordinaten mit  $n+1$  beginnt ( $N = F + n$ ).

Wenn sowohl die Antriebs- als auch die Zusatzbewegungen unbekannt sind, muß (5.2.1./11) ausgehend von den bekannten Kräften  $Q_j^*$  integriert werden. In vielen Fällen sind jedoch die Antriebskoordinaten  $q_j(t)$ ,  $j = n+1, \dots, N$ , als „Programmkoordinaten“ gegeben, so daß nur die verallgemeinerten Koordinaten unbekannt sind. In diesen Fällen, bei denen die Rückwirkung der Schwingungen auf den Antrieb vernachlässigt wird, lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{l=n+1}^N \dot{q}_l \left( \sum_{k=1}^n m_{klj} \dot{q}_k \right) + \sum_{k=1}^n c_{jk} \dot{q}_k \\ = Q_j^* - \sum_{k=n+1}^N m_{jk} \ddot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N \sum_{l=n+1}^N m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Für den Sonderfall einer einzigen Antriebsbewegung  $q_{n+1}(t)$  vereinfacht sich (1) wegen  $N = n + 1$  zu

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l + \dot{q}_{n+1} \sum_{k=1}^n m_{k(n+1)j} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n c_{jk} \dot{q}_k \\ = Q_j^* - m_{j(n+1)} \ddot{q}_{n+1} - \frac{1}{2} m_{(n+1)(n+1)j} \dot{q}_{n+1}^2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Falls Laufgrad und Freiheitsgrad beide gleich 1 sind ( $F = 1, n = 1, N = 2$ ) und die Antriebsbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erfolgt ( $q_2 = \Omega t$ ), ergibt sich aus (2) für  $j = 1$  die Bewegungsgleichung

$$m_{11}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_{111}\dot{q}_1^2 + m_{121}\Omega\dot{q}_1 + c_{11}q_1 = Q_1^* - \frac{1}{2} m_{221}\Omega^2. \quad (3)$$

Dieses Ergebnis läßt sich mit (4.2.4./1) vergleichen. Dazu nehme man eine Vertauschung der Indizes 1 und 2 vor und beachte (2.2.2./9). In (1) bis (3) sind die verallgemeinerten Massen, die potentielle Energie und die verallgemeinerten Kräfte noch nichtlineare Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten. Unter der Voraussetzung, daß die Gesamtbewegung eine Überlagerung aus den „großen“ Antriebsbewegungen und „kleinen“ Zusatzbewegungen  $q_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) ist, lassen sich diese Funktionen in eine Taylorreihe entwickeln:

$$m_{jk}(\mathbf{q}) = \bar{m}_{jk}(t) + \sum_{l=1}^n m_{jk,l}(t) q_l + \dots, \quad (4)$$

$$m_{klj}(\mathbf{q}) = \bar{m}_{klj}(t) + \sum_{l=1}^n m_{klj,p}(t) q_p + \dots, \quad (5)$$

$$Q_j^* = \bar{Q}_j^*(t) + \sum_{k=1}^n Q_{j,k}^*(t) q_k - \sum_{k=1}^n b_{jk}(t) \dot{q}_k + \dots \quad (6)$$

Dabei wurde zur Abkürzung

$$b_{jk} = -\partial Q_j^* / \partial \dot{q}_k \quad (7)$$

geschrieben. Die Zeitabhängigkeit in (4) bis (8) folgt aus dem gegebenen Zeitverlauf der Antriebskoordinaten.

Wenn in den Reihenentwicklungen, wie in (4) bis (6) angedeutet, die Terme höherer Ordnungen vernachlässigt werden, was erfahrungsgemäß bei vielen realen Mechanismen berechtigt ist, so entsteht ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \bar{m}_{jk}(t) \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \left[ b_{jk}(t) + \sum_{l=n+1}^N \bar{m}_{klj}(t) \dot{q}_l(t) \right] \dot{q}_k \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ c_{jk}(t) - Q_{j,k}^*(t) + \sum_{p=n+1}^N \left[ m_{jp,k}(t) \ddot{q}_p(t) + \frac{1}{2} \sum_{l=n+1}^N m_{plj,k}(t) \dot{q}_p(t) \dot{q}_l(t) \right] \right\} q_k \\ & = \bar{Q}_j^*(t) - \sum_{k=n+1}^N \left[ \bar{m}_{jk}(t) \ddot{q}_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{l=n+1}^N \bar{m}_{klj}(t) \dot{q}_k(t) \dot{q}_l(t) \right], \quad (8) \\ & j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (8) stimmen formal mit denen überein, welche kleine Schwingungen von Rotor- und Kreiselsystemen beschreiben, vgl. ([19], S. 213). Die dort weiterhin auf S. 215 bis 221 zusammengestellten allgemeinen Sätze (Stabilitätsbedingungen) sind zum Vergleich auch hierfür interessant, aber nicht einfach übertragbar, da sie für zeitunabhängige Koeffizienten gelten.

Die verallgemeinerten Massen  $\bar{m}_{jk}$  und deren Ableitungen sind in diesen Bewegungsgleichungen infolge der  $F$  Antriebskoordinaten  $q_k$  ( $k = n + 1, n + 2, \dots, n + F$ ) des zwangsläufigen starren Mechanismus zeitabhängig und lassen sich für

Tabelle 5.1. Matrizen der Bewegungsgleichungen von Mechanismen mit mehreren

Fall	Modell	Matrizen
1		$M = \begin{pmatrix} J_1 + m_2 U'^2 & m_2 U' \\ m_2 U' & m_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 + 2m_2 \Omega U' U'' & 0 \\ 2m_2 \Omega U'' & b_2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} c_1 + m_2 \Omega^2 (U'^2 + U' U''') & 0 \\ m_2 \Omega^2 U''' & c_2 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} -F_2 U' - m_2 \Omega^2 U' U'' \\ -F_2 & -m_2 \Omega^2 U'' \end{pmatrix}$ $b_T = 2 \psi_1 \bar{\omega}_1, \quad J_1 = 2 \psi_1 \sqrt{c_1 J_1}, \quad b_2 = 2 \psi_2 \sqrt{c_2 m_2}$
2		$M = \begin{pmatrix} J_1 + (m_2 + m_3) U'^2 & m_2 U' & m_3 U' \\ m_2 U' & m_2 & 0 \\ m_3 U' & 0 & m_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 + 2(m_2 + m_3) \Omega U' U'' & 0 & 0 \\ 2m_2 \Omega U'' & b_2 + b_3 & -b_3 \\ 2m_3 \Omega U'' & -b_3 & b_3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} c_1 + (m_2 + m_3) \Omega^2 (U'^2 + U' U''') & 0 & 0 \\ m_2 \Omega^2 U''' & c_2 + c_3 & -c_3 \\ m_3 \Omega^2 U''' & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} -F_3 U' - (m_2 + m_3) \Omega^2 U' U'' \\ -m_2 \Omega^2 U'' \\ -F_3 - m_3 \Omega^2 U_3'' \end{pmatrix}$

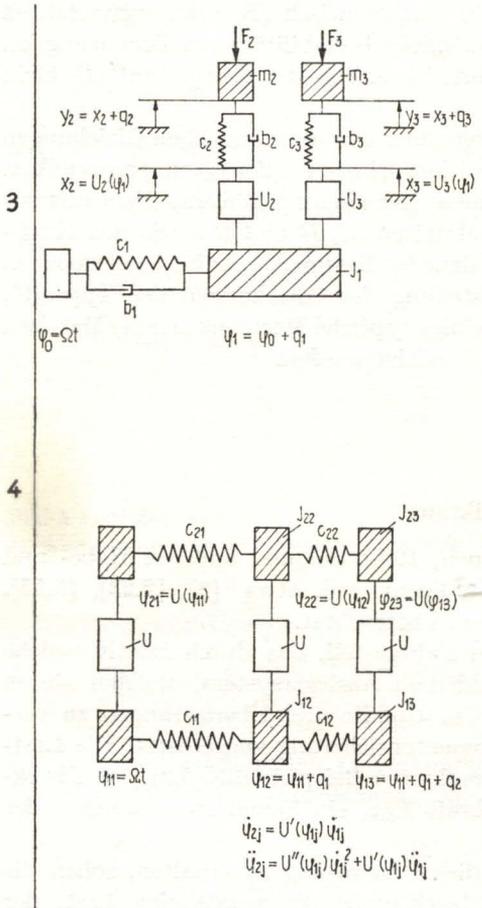
beliebige Strukturen mit den in den Abschnitten 2.2.2. und 5.2.1. beschriebenen Methoden berechnen. Dabei werden im allgemeinen nicht nur die ersten und zweiten, sondern auch die dritten partiellen Ableitungen der Lagefunktionen (5.2.1./2) gebraucht, vgl. (2.2.2./6 bis 9) und (5.2.1./5 bis 13).

Man kann die Summe der rechten Seite von (8) so deuten, daß die Massenkräfte des starren Mechanismus als Erregerkräfte auf das Schwingungssystem des elastischen Mechanismus wirken. Der erste Term in der Summe entspricht den durch eine beschleunigte (oder verzögerte) Antriebsbewegung verursachten Massenkräften, während in der zweiten Summe die Coriolis- und Zentrifugalkräfte stehen, die bei konstanten Antriebsgeschwindigkeiten auftreten, z. B. im stationären Zustand.

Das dynamische Verhalten schwingungsfähiger Mechanismen wird in erster Näherung durch erzwungene rheoliner Schwingungen bestimmt; deren Bewegungsgleichungen in Matrizenschreibweise lauten

$$M(t) \ddot{q} + B(t) \dot{q} + C(t) q = F(t). \tag{9}$$

Freiheitsgraden



$$M = \begin{pmatrix} J_1 + m_2 U_2'^2 + m_3 U_3'^2 & m_2 U_2' & m_3 U_3' \\ m_2 U_2' & m_2 & 0 \\ m_3 U_3' & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 + 2m_2 \Omega U_2' U_2'' + 2m_3 \Omega U_3' U_3'' & 0 & 0 \\ 2m_2 \Omega U_2'' & b_2 & 0 \\ 2m_3 \Omega U_3'' & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 + m_2 \Omega^2 (U_2'^2 + U_2' U_2''') + m_3 \Omega^2 (U_3'^2 + U_3' U_3''') & 0 & 0 \\ m_2 \Omega^2 U_2''' & c_2 & 0 \\ m_3 \Omega^2 U_3''' & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -F_2 U_2' - m_2 \Omega^2 U_2' U_2'' - F_3 U_3' - m_3 \Omega^2 U_3' U_3'' \\ -F_2 - m_2 \Omega^2 U_2'' \\ -F_3 - m_3 \Omega^2 U_3'' \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} J_{12} + J_{13} + U_1'^2 \frac{J_{22}}{J_{13}} (J_{13} + J_{23}) & J_{13} + J_{23} U_1'^2 \\ J_{13} + J_{23} U_1'^2 & J_{13} + J_{23} U_1'^2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} + c_{21} U_1'^2 & 0 \\ 0 & c_{12} + c_{22} U_1'^2 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen in (9) folgen mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs aus (8). Der Koordinatenvektor  $q^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  enthält nur die verallgemeinerten Koordinaten, und (9) beschreibt nur die kleinen Schwingungen. Die Matrixelemente und die Komponenten des Kraftvektors  $F$  ergeben sich aus

$$M = ((\bar{m}_{jk})), \quad B = \left( \left( b_{jk} + \sum_{l=n+1}^N \bar{m}_{klj} \dot{q}_l \right) \right),$$

$$C = \left( \left( c_{jk} - Q_{j,k}^* + \sum_{p=n+1}^N \left[ m_{jp,p,k} \ddot{q}_p + \frac{1}{2} \sum_{l=n+1}^N m_{plj,k} \dot{q}_p \dot{q}_l \right] \right) \right), \quad (10)$$

$$F_j = \bar{Q}_j^*(t) - \sum_{k=n+1}^N \left( \bar{m}_{jk} \ddot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{l=n+1}^N \bar{m}_{klj} \dot{q}_k \dot{q}_l \right).$$

Falls die Nichtpotentialkräfte von den Koordinaten stark abhängig sind, wird die Federmatrix  $\mathbf{C}$  unsymmetrisch, was sowohl mathematisch (Berechnungsverfahren für die Eigenwerte) als auch physikalisch (mögliche Instabilität) von Bedeutung ist. Oft ist der Einfluß der Zentrifugal- und Corioliskräfte in der Erregerkraft  $F_j$  klein gegenüber den anderen Termen.

Der wesentliche Vorteil von (8) und (9) gegenüber den ursprünglichen Gleichungen (1) ist ihre **Linearität**. Damit ist das Superpositionsprinzip bei der Lösung anwendbar. Das dynamische Verhalten eines elastischen (schwingungsfähigen) Mechanismus wird dabei durch die quadratischen  $n \times n$ -Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  sowie den Kraftvektor  $\mathbf{F}(t)$  charakterisiert. Es gibt neben dem in diesem Abschnitt beschriebenen Weg noch andere Möglichkeiten zur Aufstellung der Gleichungen des Typs (9), vgl. Abschnitt 5.3.5. In Tabelle 5.1 sind für einige typische Mechanismen die Matrizen und der Kraftvektor angegeben, die für (9) benötigt werden.

### 5.2.3. Beispiele

#### 5.2.3.1. Bewegungsgleichungen eines Mobilkrans

Bewegungsgleichungen von Baggern, Kranen, Robotern und anderen Hebe- und Transportmaschinen sind geometrisch ~~stark~~ linear; vgl. etwa [8], [2.23], [5.55]. Hier wird ein einfaches, aber typisches Beispiel betrachtet.

Mobilkrane bestehen aus einem starren Fahrgestell, das durch relativ weiche Federn der Autoreifen abgefedert wird, und dem Auslegersystem, welches durch mehrere Hydraulikzylinder bewegt wird. Um Unfälle und Überlastungen zu vermeiden, sind Mobilkrane mit einer Lastmomentensicherung ausgerüstet. Die Lastmomentensicherung verwendet in dem betrachteten Beispiel (Bild 5.2) eine Druckmeßdose, die beim Erreichen einer Grenzkraft  $F_{\max}$  ein Signal zum Bremsen der Hydraulikzylinder gibt.

Um Hinweise für die Dimensionierung dieser Bremsung zu erhalten, sollen die Massenkräfte des Mobilkrans unter Berücksichtigung der pendelnden Last, der Reifenfedern und des Bewegungsgesetzes des unteren Hydraulikzylinders berechnet werden. Das Berechnungsmodell in Bild 5.2b, das die wesentlichen Parameter erfaßt, ist ein Mechanismus mit  $N = 4$  Koordinaten, wobei der Freiheitsgrad  $n = 3$  und der Laufgrad  $F = 1$  beträgt.

Folgende verallgemeinerte Koordinaten werden zur Beschreibung der Lage des Mechanismus benutzt:

- $q_1 = y_{s2} - y_{20}$  vertikale Verschiebung des Schwerpunktes des Fahrgestells,
- $q_2 = \varphi_2$  Drehwinkel des Fahrgestells um seinen Schwerpunkt,
- $q_3 = \varphi_5$  Pendelwinkel im raumfesten Bezugssystem,
- $q_4 = s_4$  Weg des unteren Hydraulikzylinders.

Die verallgemeinerten Koordinaten sind  $q_1$  bis  $q_3$ , während  $q_4$  die Antriebskoordinate ist, vgl. Abschnitt 5.2.2.

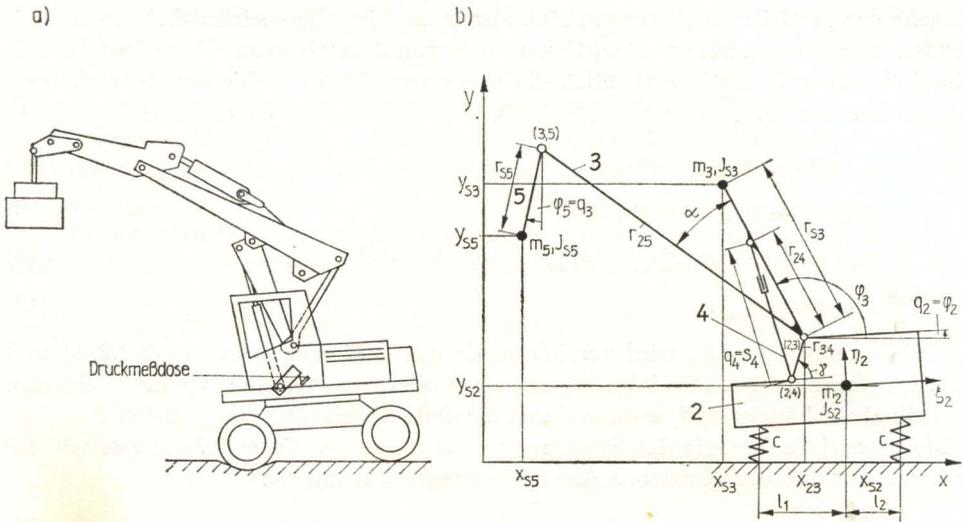


Bild 5.2 Mobilkran

a) Skizze des Krans, b) Berechnungsmodell

Die kinetische Energie des Systems hat die Form von (2.2.2./4) und beträgt

$$2W_{\text{kin}} = m_2 \dot{y}_2^2 + J_{S2} \dot{\varphi}_2^2 + m_3 (\dot{x}_{S3}^2 + \dot{y}_{S3}^2) + J_{S3} (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_2)^2 + m_5 (\dot{x}_{S5}^2 + \dot{y}_{S5}^2) + J_{S5} \dot{\varphi}_5^2. \quad (1)$$

Um die Geschwindigkeiten zu bestimmen, wird von den Schwerpunktkoordinaten der einzelnen Körper ausgegangen, die durch die Koordinaten ausgedrückt werden:

$$x_{S3} = x_{23} + r_{S3} \cos(\varphi_3 + q_2), \quad (2)$$

$$y_{S3} = q_1 + \xi_{23} \cdot q_2 + \eta_{23} + r_{S3} \sin(\varphi_3 + q_2), \quad (3)$$

$$\varphi_3 = \arccos \frac{q_4^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2}{2r_{24}r_{34}} + \gamma, \quad (4)$$

$$x_{S5} = x_{23} + r_{25} \cos(\varphi_3 + q_2 + \alpha) - r_{S5} \sin \varphi_3, \quad (5)$$

$$y_{S5} = q_1 + \xi_{23} \cdot q_2 + \eta_{23} + r_{25} \sin(\varphi_3 + q_2 + \alpha) - r_{S5} \cos \varphi_3. \quad (6)$$

Daraus können die benötigten Ableitungen gewonnen werden. Beispielsweise gilt mit den aus Abschnitt 1.2.3. bekannten Abkürzungen

$$x_{S3,1} = 0, \quad x_{S3,2} = -r_{S3} \sin(\varphi_3 + q_2), \quad (7)$$

$$x_{S3,3} = 0, \quad x_{S3,4} = -r_{S3} \sin(\varphi_3 + q_2) \cdot \varphi_{3,4}$$

und

$$\varphi_{3,1} = \varphi_{3,2} = \varphi_{3,3} = 0, \quad \varphi_{3,4} = \frac{-4r_{24}r_{34}q_4}{\sqrt{4r_{24}^2r_{34}^2 - (q_4^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2)^2}}. \quad (8)$$

Manche der partiellen Ableitungen sind also 0, und im allgemeinen sind die verbleibenden noch komplizierte Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten. Die kinetische Energie erhält schließlich die Form von (5.2.1./3). Die verallgemeinerten Massen lauten z. B.

$$m_{11} = m_2 + m_3 + m_5, \quad (9)$$

$$m_{12} = m_3 y_{S3,2} + m_5 y_{S5,2}, \quad (10)$$

$$m_{22} = J_{S2} + m_3(x_{S3,2}^2 + y_{S3,2}^2) + J_{S3} + m_5(x_{S5,2}^2 + y_{S5,2}^2), \quad (11)$$

$$m_{13} = m_5 y_{S5,3}. \quad (12)$$

Auf die Angabe aller  $m_{jk}$  wird verzichtet, da das Bildungsgesetz aus (2.2.2./6) und (5.2.1./5), bekannt ist. Da einige  $m_{jk}$  konstant oder nur von einer verallgemeinerten Koordinate abhängig sind, werden deren partielle Ableitungen  $m_{jk,p}$  gleich 0.

Die potentielle Energie des Systems setzt sich aus der Formänderungsarbeit der Reifenfedern und der Hubarbeit der Eigenmassen zusammen:

$$2W_{\text{pot}} = c(q_1 - l_1 q_2)^2 + c(q_1 + l_2 q_2)^2 + m_2 g y_{S2} + m_3 g y_{S3} + m_5 g y_{S5}. \quad (13)$$

Die Anwendung der Lagrangeschen Gleichung 2. Art liefert folgende Bewegungsgleichungen des Mobilkrans, vgl. (5.2.2./1):

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + m_{13}\ddot{q}_3 + \frac{1}{2}(2m_{12,2} - m_{22,1})\dot{q}_2^2 \\ + \frac{1}{2}(m_{41,2} + m_{12,4})\dot{q}_2\dot{q}_4 + m_{13,3}\dot{q}_3^2 + 2cq_1 + c(l_2 - l_1)q_2 \\ = -m_{14}\ddot{q}_4 - m_{14,4}\dot{q}_4^2 - (m_2 + m_3 + m_5)g, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + m_{23}\ddot{q}_3 + \frac{1}{2}(m_{21,4} - m_{14,2})\dot{q}_1\dot{q}_4 + \frac{1}{2}m_{22,2}\dot{q}_2^2 \\ + \frac{1}{2}(m_{24,2} - m_{22,4})\dot{q}_2\dot{q}_4 + m_{23,3}\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}(m_{42,3} + m_{23,4} - m_{34,2})\dot{q}_3\dot{q}_4 \\ + c(l_2 - l_1)q_1 + c(l_1^2 + l_2^2)q_2 + m_3 g y_{S3,2} + m_5 g y_{S5,2} \\ = -m_{24}\ddot{q}_4 - \frac{1}{2}(2m_{42,4} - m_{44,2})\dot{q}_4^2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} m_{31}\ddot{q}_1 + m_{32}\ddot{q}_2 + m_{33}\ddot{q}_3 + \frac{1}{2}(m_{31,2} - m_{12,3})\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}m_{13,3}\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ + \frac{1}{2}m_{23,2}\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}(m_{23,4} + m_{34,2} - m_{42,3})\dot{q}_2\dot{q}_4 + m_5 g y_{S5,3} \\ = -m_{34}\ddot{q}_4 - m_{34,4}\dot{q}_4^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Dabei wurden die  $m_{kij}$  gemäß (2.2.2./9) ausführlich ausgeschrieben, und diejenigen weggelassen, die Null sind. Diese Differentialgleichungen erfassen neben den Massen-

kräften (einschließlich der Flieh- und Corioliskräfte) und Federkräften auch die statischen Kräfte aus dem Eigengewicht, die sich mit der Ausladung ändern. In diesem Fall existiert keine unveränderliche statische Gleichgewichtslage. Als Bezugssystem wird die statische Ruhelage in der Anfangsstellung gewählt. Die Koordinaten  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  lassen sich für beliebige Anfangsbedingungen und für vorgegebene Bewegungsabläufe der Hydraulikzylinder  $q_4(t)$  durch numerische Integration aus (14) bis (16) bestimmen.

Bei bekannten Werten der  $q_i(t)$  ergibt sich die Kraft im Hydraulikzylinder gemäß (2.2.2./13) zu

$$\begin{aligned}
 Q_4 = & m_{41}\ddot{q}_1 + m_{42}\ddot{q}_2 + m_{43}\ddot{q}_3 + m_{44}\ddot{q}_4 + \frac{1}{2} (m_{41,2} - m_{12,4}) \dot{q}_1\dot{q}_4 \\
 & + \frac{1}{2} (2m_{24,2} - m_{22,4}) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} (m_{43,2} + m_{24,3} - m_{32,4}) \dot{q}_2\dot{q}_3 \\
 & + \frac{1}{2} m_{44,2}\dot{q}_2\dot{q}_4 + m_{34,3}\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} m_{44,4}\dot{q}_4^2 + m_3gy_{S3,4} + m_5gy_{S5,4}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Die Kräfte, die auf die Vorder- und Hinterachse übertragen werden, ergeben sich aus dem Produkt von Federkonstante und Federweg. Diese Federkräfte betragen

$$F_v = c(q_1 - l_1q_2), \quad F_h = c(q_1 + l_2q_2). \quad (18)$$

Die Auswertung der Gleichungen (14) bis (18) erfolgt in Abschnitt 5.5.5.2.

### 5.2.3.2. Bewegungsgleichungen einer Verarbeitungsmaschine

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen gemischten Typs (5.2.1./14) und mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art (2.2.2./11) soll am Beispiel des in Bild 5.3 dargestellten Berechnungsmodells beschrieben werden. Es besteht aus einer elastischen Antriebswelle und zwei periodischen Getrieben, die wiederum schwingungsfähige Teilsysteme mit je einem Freiheitsgrad sind.

Zwischen den Absolutkoordinaten der Drehwinkel  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  (der Drehmassen  $J_0$ ,  $J_1$  und  $J_2$ ), den Wegen  $y_1$  und  $y_2$  (der Massen  $m_1$  und  $m_2$ ) einerseits und den verall-

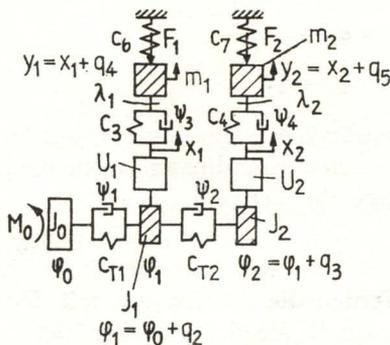


Bild 5.3 Berechnungsmodell eines Antriebs mit elastischer Antriebswelle und zwei elastischen Mechanismen

gemeinerten Koordinaten  $q_1$  bis  $q_5$  andererseits bestehen folgende Beziehungen:  
 $\varphi_0 = q_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_0 + q_2 = q_1 + q_2$ ,  $\varphi_2 = \varphi_1 + q_3 = q_1 + q_2 + q_3$ ,  $y_1 = x_1 + q_4$ ,  
 $y_2 = x_2 + q_5$ .

Mit Ausnahme der „Eingangskoordinate“  $q_1$  werden Relativkoordinaten eingeführt, die den Deformationen der elastischen Elemente entsprechen. Als überzählige Koordinaten werden  $q_6 = x_1 = U_1(\varphi_1)$  und  $q_7 = x_2 = U_2(\varphi_2)$  benutzt. In diesem Fall ist also der Freiheitsgrad des Systems gleich  $N = 5$  und die Anzahl der überzähligen Koordinaten gleich  $n\ddot{u} = 2$ . Zunächst wird keine Antriebskoordinate eingeführt.

Die kinetische Energie ergibt sich als Summe der Rotations- und Translationsenergien aller bewegten starren Körper des Systems zu

$$\begin{aligned} 2W_{\text{kin}} &= J_0\dot{\varphi}_0^2 + J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_2^2 \\ &= J_0\dot{q}_1^2 + J_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + m_1(\dot{q}_6 + \dot{q}_4)^2 + m_2(\dot{q}_7 + \dot{q}_5)^2 \\ &= (J_0 + J_1 + J_2)\dot{q}_1^2 + (J_1 + J_2)\dot{q}_2^2 + J_2\dot{q}_3^2 + m_1\dot{q}_4^2 + m_2\dot{q}_5^2 + m_1\dot{q}_6^2 \\ &\quad + m_2\dot{q}_7^2 + 2(J_1 + J_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2J_2\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2J_2\dot{q}_2\dot{q}_3 + 2m_1\dot{q}_4\dot{q}_6 + 2m_2\dot{q}_5\dot{q}_7. \end{aligned} \quad (1)$$

Aus (5.2.1./4) findet man

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_0 + J_1 + J_2, & m_{12} &= m_{22} = J_1 + J_2, & m_{13} &= m_{23} = m_{33} = J_2, \\ m_{44} &= m_{46} = m_{66} = m_1, & m_{55} &= m_{57} = m_{77} = m_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Die übrigen verallgemeinerten Massen folgen aus der Symmetrie ( $m_{jk} = m_{kj}$ ) oder sind gleich 0. Durch Einführung der überzähligen Koordinaten gelang es, die Abhängigkeit der verallgemeinerten Massen von den Koordinaten  $q_i$  zu vermeiden.

Die potentielle Energie entspricht der Formänderungsenergie aller elastischen Glieder des Systems und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} 2W_{\text{pot}} &= c_{T1}q_2^2 + c_{T2}q_3^2 + c_3q_4^2 + c_4q_5^2 + c_6y_1^2 + c_7y_2^2 \\ &= c_{T1}q_2^2 + c_{T2}q_3^2 + c_3q_4^2 + c_4q_5^2 + c_6(q_6 + q_4)^2 + c_7(q_7 + q_5)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Daraus folgen die Federzahlen gemäß (5.2.1./10):

$$\begin{aligned} c_{22} &= c_{T1}, & c_{33} &= c_{T2}, & c_{44} &= c_3 + c_6, & c_{55} &= c_4 + c_7, \\ c_{66} &= c_6, & c_{77} &= c_7, & c_{46} &= c_{64} = c_6, & c_{57} &= c_{75} = c_7. \end{aligned} \quad (4)$$

Die übrigen Federzahlen sind gleich 0. Die beiden zusätzlichen Gleichungen, welche die überzähligen Koordinaten mit den verallgemeinerten Koordinaten verbinden, werden in Form der Zwangsbedingungen (5.2.1./15) geschrieben:

$$f_1 = U_1(\varphi_1) - q_6 = 0, \quad f_2 = U_2(\varphi_2) - q_7 = 0. \quad (5)$$

Dabei ist  $\varphi_1 = q_1 + q_2$  und  $\varphi_2 = q_1 + q_2 + q_3$ . Werden die Ableitungen mit  $U_1' = dU_1/d\varphi_1$  und  $U_2' = dU_2/d\varphi_2$  bezeichnet, so kann man die für (5.2.1./20) benötigten

partiellen Ableitungen folgendermaßen angeben, vgl. (5.2.1./17):

$$\begin{aligned} h_{11} = h_{12} = U_1', \quad h_{16} = h_{27} = -1, \quad h_{21} = h_{22} = h_{23} = U_2' \\ h_{13} = h_{14} = h_{15} = h_{17} = 0, \quad h_{24} = h_{25} = h_{26} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Wird die virtuelle Arbeit der Nichtpotentialkräfte formuliert und die Terme nach den virtuellen Verrückungen  $\delta q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) geordnet, ergeben sich die verallgemeinerten Kräfte  $Q_j^*$ :

$$\begin{aligned} Q_1^* = M_0, \quad Q_2^* = -R_1, \quad Q_3^* = -R_2, \quad Q_4^* = -(F_1 + R_3), \\ Q_5^* = -(F_2 + R_4), \quad Q_6^* = -F_1, \quad Q_7^* = -F_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Hierbei sind die  $R_i$  Dämpfungskräfte, die an dieser Stelle nicht näher konkretisiert werden sollen.

Unter Benutzung der erhaltenen Koeffizienten  $m_{jk}$  und  $c_{jk}$ , der verallgemeinerten Kräfte  $Q_j^*$  und der partiellen Ableitungen  $\partial f_i / \partial q_j$  kann (5.2.1./20) für dieses Beispiel angegeben werden, wobei die gesamte Anzahl der Koordinaten gleich  $N + n\ddot{u} = 5 + 2 = 7$  ist.

Die letzten beiden Gleichungen ( $j = 6$  und  $7$ ) dieses Systems werden zur Bestimmung der Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  benutzt. Wegen (6) ergibt (5.2.1./20) in diesem Fall, vgl. (2) und (4):

$$\begin{aligned} \lambda_1 = m_1 \ddot{q}_4 + m_1 \ddot{q}_6 + c_6 q_4 + c_6 q_6 + F_1, \\ \lambda_2 = m_2 \ddot{q}_5 + m_2 \ddot{q}_7 + c_7 q_5 + c_7 q_7 + F_2. \end{aligned} \quad (8)$$

In seiner endgültigen Form besteht das Gleichungssystem also aus den ersten fünf Gleichungen entsprechend (5.2.1./20) ( $j = 1, \dots, 5$ ), in denen die Lagrangeschen Multiplikatoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  mit Hilfe von (8) ausgedrückt werden. Dabei muß beachtet werden, daß die überzähligen Koordinaten und ihre Zeitableitungen aus den Formeln zu berechnen sind, die sich durch die Differentiation der Zwangsbedingungen nach der Zeit ergeben. Für dieses Beispiel folgen sie aus (5) zu

$$q_6 = x_1 = U_1, \quad \dot{q}_6 = U_1'(\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad (9)$$

$$\ddot{q}_6 = U_1''(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + U_1'(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2),$$

$$q_7 = x_2 = U_2, \quad \dot{q}_7 = U_2' \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3), \quad (10)$$

$$\ddot{q}_7 = U_2'' \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 + U_2' \cdot (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \ddot{q}_3).$$

Dabei sind die Lagefunktion  $U_1$  und ihre Ableitungen eine Funktion von  $\varphi_1 = q_1 + q_2$ , während  $U_2$ ,  $U_2'$  und  $U_2''$  von den drei verallgemeinerten Koordinaten  $q_1 + q_2 + q_3 = \varphi_2$  abhängen.

Bei der Lösung derartiger Gleichungssysteme ist es in vielen Fällen bequem, die Form der Gleichungen in der Art wie (8) bis (10) für Zwischenrechnungen zu speichern. Infolge der nichtlinearen Zwangsbedingungen, die zu den Gleichungen (9) führten, wird das entstehende System der fünf Differentialgleichungen nichtlinear.

Falls die Koordinate  $q_1$  eine gegebene Funktion der Zeit ist (kinematische Erre-

gung durch vorgegebenen Verlauf der Antriebsbewegung), vermindert sich der Freiheitsgrad auf  $N = 4$ , und  $q_2, q_3, q_4$  und  $q_5$  muß man als Lösung des Systems der vier Differentialgleichungen für  $j = 2, 3, 4, 5$  bestimmen. Die erste Gleichung ( $j = 1$ ) kann zur Berechnung des Antriebsmoments benutzt werden, nachdem der Zeitverlauf aller Koordinaten berechnet wurde.

Die Lagrangeschen Multiplikatoren (8) stellen Zwangskräfte an der Stelle dar, für die die Zwangsbedingungen den Zusammenhang des Mechanismus ausdrücken. Im behandelten Beispiel betrifft das die Verbindung der ungleichmäßig übersetzenden Getriebe mit den  $U$ -Funktionen  $U_1$  und  $U_2$  mit den bewegten Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Demzufolge stellt  $\lambda_1$  die Zwangskraft zwischen Masse  $m_1$  und elastischem Element 3 und  $\lambda_2$  die Zwangskraft im zweiten Mechanismus dar.

Nun soll noch gezeigt werden, welche Form die Bewegungsgleichungen annehmen, wenn die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art angewendet werden. Die kinetische Energie muß dann ausschließlich durch die verallgemeinerten Koordinaten  $q_1$  bis  $q_5$  und deren Geschwindigkeiten ausgedrückt werden. Ersetzt man in (1)  $\dot{q}_7$  und  $\dot{q}_6$  entsprechend (9) und (10), so erhält man

$$2W_{\text{kin}} = J_0 \dot{q}_1^2 + J_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \\ + m_1 [U_1' (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \dot{q}_4]^2 + m_2 [U_2' (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \dot{q}_5]^2 \quad (11)$$

und nach Ordnung der Terme

$$2W_{\text{kin}} = (J_0 + J_1 + J_2 + m_1 U_1'^2 + m_2 U_2'^2) \dot{q}_1^2 + 2(J_1 + J_2 + m_1 U_1'^2 + m_2 U_2'^2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ + (J_1 + J_2 + m_1 U_1'^2 + m_2 U_2'^2) \dot{q}_2^2 + 2(J_2 + m_2 U_2'^2) \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ + 2(J_2 + m_2 U_2'^2) \dot{q}_2 \dot{q}_3 + (J_2 + m_2 U_2'^2) \dot{q}_3^2 + 2m_1 U_1' \dot{q}_1 \dot{q}_4 \\ + 2m_1 U_1' \dot{q}_2 \dot{q}_4 + m_1 \dot{q}_4^2 + 2m_2 U_2' \dot{q}_1 \dot{q}_5 + 2m_2 U_2' \dot{q}_2 \dot{q}_5 \\ + 2m_2 U_2' \dot{q}_3 \dot{q}_5 + m_2 \dot{q}_5^2. \quad (12)$$

Die Bewegungsgleichungen erhalten damit die Form (5.2.1./13), in der die partiellen Ableitungen der verallgemeinerten Massen nach den verallgemeinerten Koordinaten vorkommen. Auf diese Weise werden sie sehr umfangreich, so daß auf ihre vollständige Angabe hier verzichtet wird.

Man erhält letzten Endes dieselbe Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , als wenn man  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aus (8) nach Elimination der überzähligen Koordinaten aus (9) und (10) in (5.2.1./20) eingesetzt hätte. Wendet man (5.2.1./6) auf (12) an, so ergibt sich die folgende Massenmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{11} - J_0 & J_2 + m_2 U_2'^2 & m_1 U_1' & m_2 U_2' \\ m_{11} - J_0 & m_{11} - J_0 & J_2 + m_2 U_2'^2 & m_1 U_1' & m_2 U_2' \\ J_2 + m_2 U_2'^2 & J_2 + m_2 U_2'^2 & J_2 + m_2 U_2'^2 & 0 & m_2 U_2' \\ m_1 U_1' & m_1 U_1' & 0 & m_1 & 0 \\ m_2 U_2' & m_2 U_2' & m_2 U_2' & 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Das erste Element lautet ausführlich

$$m_{11} = J_0 + J_1 + J_2 + m_1 U_1'^2 + m_2 U_2'^2. \quad (14)$$

Die im zweiten Term von (5.2.1./13) auftretenden Ausdrücke  $m_{klj}$ , die sich aus (14) berechnen lassen, lauten, vgl. (2.2.2./9):

$$\begin{aligned} m_{111} &= m_{112} = 2m_1 U_1' U_1'' + 2m_2 U_2' U_2'', \\ m_{113} &= 2m_2 U_2' U_2'', \quad m_{114} = 2m_1 U_1'', \quad m_{115} = 2m_2 U_2''. \end{aligned} \quad (15)$$

Gemäß (5.2.1./9) können die Federzahlen aus der potentiellen Energie berechnet werden. Die bisher unter Berücksichtigung überzähliger Koordinaten aus (3) bekannte potentielle Energie muß zunächst unter Benutzung der Zwangsbedingungen (5) ausschließlich durch verallgemeinerte Koordinaten ausgedrückt werden. Sie lautet damit

$$2W_{\text{pot}} = c_{T1} q_2^2 + c_{T2} q_3^2 + c_3 q_4^2 + c_4 q_5^2 + c_6 (q_4 + U_1)^2 + c_7 (q_5 + U_2)^2. \quad (16)$$

Im weiteren ist zu beachten, daß die beiden  $U$ -Funktionen auch von den verallgemeinerten Koordinaten in der Form  $U_1(q_1 + q_2)$  und  $U_2(q_1 + q_2 + q_3)$  abhängen, vgl. (9) und (10). Die erste partielle Ableitung nach  $q_1$  lautet

$$\frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial q_1} = c_6 (q_4 + U_1) U_1' + c_7 (q_5 + U_2) U_2', \quad (17)$$

woraus z. B. gemäß (5.2.1./9)

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{12} = c_6 (U_1 U_1'' + U_1'^2) + c_7 (U_2 U_2'' + U_2'^2), \\ c_{13} &= c_{23} = c_7 (U_2 U_2'' + U_2'^2) \end{aligned} \quad (18)$$

und die anderen Federzahlen folgen.

Ohne auf diese elementaren Zwischenrechnungen einzugehen, geben wir die Federzahlen in Form der Federmatrix an:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_6 U_1' & c_7 U_2' \\ c_{21} & c_{11} + c_{T1} & c_{13} & c_6 U_1' & c_7 U_2' \\ c_{31} & c_{32} & c_{13} + c_{T2} & 0 & c_7 U_2' \\ c_6 U_1' & c_6 U_1' & 0 & c_3 + c_6 & 0 \\ c_7 U_2' & c_7 U_2' & c_7 U_2' & 0 & c_4 + c_7 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Wenn bei demselben Berechnungsmodell (Bild 5.3) von einer gegebenen Antriebsbewegung  $q_1(t)$  ausgegangen wird, erhält man die Bewegungsgleichungen als Sonderfall von (5.2.2./1). Die dabei auftretenden verallgemeinerten Koordinaten, die als klein vorausgesetzt werden können, sind dann ausschließlich Schwingkoordinaten, so daß die linearen Gleichungen (5.2.2./8) und (5.2.2./9) gelten.

Die Elemente der Massenmatrix stimmen dann mit denen überein, die man durch

Streichung der ersten Zeile und der ersten Spalte aus (13) erhält:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 + m_1 U_1'^2 + m_2 U_2'^2 & J_2 + m_2 U_2'^2 & m_1 U_1' & m_2 U_2' \\ J_2 + m_2 U_2'^2 & J_2 + m_2 U_2'^2 & 0 & m_2 U_2' \\ m_1 U_1' & 0 & m_1 & 0 \\ m_2 U_2' & m_2 U_2' & 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich analog aus (19):

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} + c_{r1} & c_{13} & c_6 U_1' & c_7 U_2' \\ c_{13} & c_{13} + c_{r2} & 0 & c_7 U_2' \\ c_6 U_1' & 0 & c_3 + c_6 & 0 \\ c_7 U_2' & c_7 U_2' & 0 & c_4 + c_7 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Die rechte Seite von (5.2.2./2) oder (5.2.2./8) verkürzt sich bei nur einer Antriebsbewegung, die hier nicht mit  $n + 1$ , sondern entgegen der formalen Numerierung mit  $q_1(t)$  bezeichnet wird, auf die Kraftkomponenten

$$Q_j = -m_{j1} \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} m_{11j} \dot{q}_1^2 - W_{\text{pot},j}^0. \quad (22)$$

Die  $m_{j1}$  folgen aus (13), die  $m_{11j}$  aus (15) und  $W_{\text{pot},j}^0$  aus (16) bzw. (17); der Kraftvektor lautet also

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -m_{11} \ddot{q}_1 - (m_1 U_1' U_1'' + m_2 U_2' U_2'') \dot{q}_1^2 - c_6 U_1 U_1' - c_7 U_2 U_2' \\ -(J_2 + m_2 U_2'^2) \ddot{q}_1 + m_2 U_2' U_2'' \dot{q}_1^2 - c_7 U_2 U_2' \\ -m_1 U_1' \ddot{q}_1 - m_1 U_1'' \dot{q}_1^2 - c_6 U_1 \\ -m_2 U_2' \ddot{q}_1 - m_2 U_2'' \dot{q}_1^2 - c_7 U_2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Der Kraftvektor  $\mathbf{F}$  resultiert aus der kinematischen Erregung, welche Massenkraften infolge der ungleichmäßigen Bewegung der Massen und Massenträgheitsmomente (letztere nur bei  $\dot{q}_1 \neq 0$  von Einfluß) sowie Federkräfte infolge der Abfederung gegenüber dem raumfesten Bezugssystem ( $c_6, c_7$ , vgl. Bild 5.3) verursacht. Mit (20), (21) und (23) können die Bewegungsgleichungen in der Form (5.2.2./9) geschrieben werden. Um die gegebene Antriebsbewegung  $q_1$  zu erzwingen, ist ein Antriebsmoment erforderlich, welches formal als Nichtpotentialkraft  $Q_{n+1}^*$  aus (5.2.2./2) für  $j = n + 1$  berechenbar ist.