

5.3. Lösung linearisierter Gleichungen

5.3.1. Anwendung der numerischen Integration

Die Lösung der Bewegungsgleichungen (5.2.2./9) wird in der Mechanismendynamik entweder in einem endlichen Zeitabschnitt für gegebene Anfangsbedingungen oder bei einer periodischen Erregung für den stationären Zustand gesucht. Um die Dar-

legungen kurz zu fassen, werden die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

betrachtet, die in der Systemdynamik üblich ist [5.29]. Sie sind mit (5.2.2./9) äquivalent, wenn der $2n$ -Steuervektor \mathbf{u} , der $2n$ -Zustandsvektor \mathbf{x} und die $(2n \times 2n)$ -Systemmatrix \mathbf{A} wie folgt mit den ursprünglichen Größen verknüpft sind:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Sind die Anfangsbedingungen

$$t = 0: \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

gegeben, so läßt sich die Lösung $\mathbf{x}(t)$ durch ein numerisches Integrationsverfahren berechnen. Für die durch (1) und (3) definierte Problemklasse existiert eine große Zahl von Verfahren mit einer weit ausgebauten Lösungstheorie [5.2], [5.24], [5.25], [5.26], [5.43]. Man kann die Verfahren einteilen in

- Runge-Kutta-Verfahren,
- Extrapolationsverfahren und
- lineare Mehrschrittverfahren.

Runge-Kutta-Verfahren und Extrapolationsverfahren sind Einschrittverfahren, die die Zustandsgrößen am Ende eines Teilintervalls (t_k) aus Zwischenwerten aus diesem Intervall berechnen. Die linearen Mehrschrittverfahren berechnen aus den Zustandsgrößen zu den Zeitpunkten t_{k-i} ($i = 0, 1, 2, \dots, l$) die Größen zur Zeit t_k . Sie kommen ohne die Berechnung von Zwischenwerten aus und werden nach der Schrittzahl l geordnet.

Es wird auf die erwähnte Spezialliteratur verwiesen. Die Ermittlung periodischer Lösungen, die in der Mechanismendynamik eine besondere Rolle spielt, weil viele Mechanismen mit konstanter Antriebswinkelgeschwindigkeit Ω angetrieben werden, kann auf ein Anfangswertproblem zurückgeführt werden. Die Lösung von (1) ist periodisch in T , wenn $\mathbf{u}(t)$ und $\mathbf{A}(t)$ periodisch sind und ein stabiler Betriebszustand vorausgesetzt wird. Die Lösung muß dann auch die Periodizitätsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T) \quad (4)$$

erfüllen.

In diesem Fall ist es zweckmäßig, folgende Methode zu benutzen, die auf dem Grundgedanken des Superpositionsprinzips aufbaut. Im nullten Schritt wird die partikuläre Lösung von (1) mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ durch numerische Integration im Intervall $0 \leq t \leq T$ bestimmt. Damit ist der Vektor $\mathbf{x}_p(T)$ bekannt. Im ersten Schritt wird eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} \quad (5)$$

unter der Anfangsbedingung

$$t = 0: \quad \mathbf{x}_1^T(0) = (x_{11}(0) \ x_{21}(0) \ \dots \ x_{2n1}(0)) = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (6)$$

durch numerische Integration von (5) im Intervall $0 \leq t \leq T$ berechnet. Dabei wird die Lösung von $x_1(t)$ gewonnen, und es sind für jede Komponente dieses Vektors x_1 auch die Endwerte $x_{l1}(T)$ bekannt ($l = 1, 2, \dots, 2n$). Beim zweiten Schritt ($k = 2$) wird mit dem Anfangsvektor $x_2^T(0) = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$ begonnen und die Lösung $x_2(t)$ durch numerische Integration gefunden. Insbesondere erhält man den Endwert $x_{lk}(T)$, wenn man die l -te Komponente des k -ten Vektors betrachtet, deren Anfangswert $x_{lk}(0) = \delta_{lk}$ sich durch das Kronecker-Symbol beschreiben läßt.

Auf diese Weise erhält man nach $2n$ Schritten ($k = 1, 2, \dots, 2n$) $2n$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (5). Die vollständige Lösung von (1) kann aus allen diesen Lösungen superponiert werden:

$$x = \sum_{k=1}^{2n} [a_k x_k(t)] + x_p(t). \quad (7)$$

Wird an die vollständige Lösung (7) die Forderung nach Periodizität gestellt, so entsteht zunächst

$$x_l(0) = \sum_{k=1}^{2n} a_k \delta_{lk} = a_l, \quad x_l(T) = \sum_{k=1}^{2n} a_k x_{lk}(T) + X_{lp}(T), \quad (8)$$

und mit (4) folgt ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Anfangswerte a_k . Es lautet

$$\begin{pmatrix} 1 - x_{11}(T) & x_{12}(T) & \dots & x_{12n}(T) \\ x_{21}(T) & 1 - x_{22}(T) & \dots & x_{22n}(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2n1}(T) & x_{2n2}(T) & \dots & 1 - x_{2n2n}(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1p}(T) \\ X_{2p}(T) \\ \vdots \\ X_{2np}(T) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Wiederholt man die numerische Integration mit den erhaltenen Anfangswerten, so findet man die gesuchte periodische Lösung. Bei der beschriebenen Methode werden durch die numerische Integration in einem begrenzten Zeitabschnitt Lösungen berechnet, so daß nur geringe Rundungsfehler auftreten. Das wirkt sich günstig auf die Genauigkeit der dadurch gewinnbaren Lösung aus. Selbstverständlich ist, wie bei allen Aufgaben, die numerisch gelöst werden, vorher darauf zu achten, daß die Komponenten des Vektors x etwa in derselben Größenordnung liegen, was sich durch Einführung bezogener und dimensionsgleicher Variabler erreichen läßt.

5.3.2. Quasinormalkoordinaten

Die folgende Methode basiert auf der Anwendung der Methode des fiktiven Oszillators und wurde in [27] und [5.52] dargestellt. Diese Methode ist typisch für das Herangehen des Ingenieurs, weil dabei einige mathematische Vereinfachungen vorgenommen werden, die erst durch Erfahrungen bei der Berechnung realer Systeme gewonnen wurden. Die Formulierung der Voraussetzungen erfolgt erst an den Stellen des Verfahrens, wo der Rechenaufwand sichtbar wird.

Aus Erfahrung weiß man, daß es Mechanismenschwingungen gibt, bei denen der

Einfluß der Dämpfung auf die Eigenfrequenzen vernachlässigbar klein ist. Dies gilt auch für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, vgl. (5.2.2./9). Zur Berechnung des Eigenfrequenzspektrums wird deshalb von der homogenen Gleichung für $\mathbf{q}^\top = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$$\mathbf{M}(t) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (1)$$

ausgegangen. Die Zeit ist dabei ein Parameter, welcher unabhängig vom Laufgrad F einer Stellung des Mechanismus entspricht. Für jede festgehaltene Stellung wird das sich aus (1) mit dem Ansatz $\mathbf{q} = \mathbf{v} \exp(i\omega_0 t)$ ergebende Eigenwertproblem

$$[\mathbf{C}(t) - \omega_0^2 \mathbf{M}(t)] \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (2)$$

gelöst. Dies kann mit bekannten Methoden geschehen, so daß für „eingefrorene“ Koeffizienten die Eigenkreisfrequenzen $\omega_{i0}(t)$ und die zugehörigen Eigenformen $\mathbf{v}_i(t)$ erhalten werden. Der Mechanismus wird gewissermaßen als elastisches Tragwerk (Stabtragwerk, Fachwerk oder System von elastisch gekoppelten starren Körpern) aufgefaßt, welches seine geometrischen Verhältnisse infolge einer oder mehrerer Antriebsbewegungen kontinuierlich mit der Zeit ändert. Für jeden Zeitpunkt t existieren dann Eigenvektoren (für $i = 1, 2, \dots, n$):

$$\mathbf{v}_i^\top(t) = (v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ni}). \quad (3)$$

Bei zyklischen Mechanismen sind die ω_i und \mathbf{v}_i periodische Funktionen. Die Darstellung des von der Stellung eines Mechanismus abhängigen Eigenfrequenzspektrums (vgl. Bilder 4.3, 4.7, 4.9 und 4.19) liefert gemeinsam mit den zugehörigen Eigenvektoren ein anschauliches Bild über wichtige dynamische Eigenschaften des untersuchten Systems, von denen auch die weitere mathematische Behandlung abhängt.

Stellt man die Eigenvektoren in Analogie zum linearen Schwinger mit konstanten Koeffizienten zur Modalmatrix

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = ((v_{ik})) \quad (4)$$

zusammen, so kann der Übergang zu Quasinormalkoordinaten mit Hilfe der Transformation

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}(t) \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \text{diag}(1/\tilde{m}_i) \mathbf{V}^\top \mathbf{M} \mathbf{q} \quad (5)$$

erfolgen, vgl. [11], S. 325 und (8). Der Vektor der Quasinormalkoordinaten ist $\mathbf{p}^\top = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Setzt man \mathbf{q} aus (5) in die ursprüngliche Bewegungsgleichung (5.2.2./9) ein, so erhält man nach den entsprechenden Differentiationen und indem man noch von links mit \mathbf{V}^\top multipliziert,

$$\mathbf{V}^\top \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{p}} + (2\mathbf{V}^\top \dot{\mathbf{M}} \mathbf{V} + \mathbf{V}^\top \mathbf{B} \mathbf{V}) \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{V}^\top \mathbf{M} \ddot{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^\top \dot{\mathbf{B}} \mathbf{V} + \mathbf{V}^\top \mathbf{C} \mathbf{V}) \mathbf{p} = \mathbf{V}^\top \mathbf{F}. \quad (6)$$

Diese Vektordifferentialgleichung kann unter Beachtung gewisser Voraussetzungen (10) in Analogie zu Systemen mit konstanten Parametern in ein System voneinander unabhängiger Gleichungen zerlegt werden. Für die aus der Lösung von (2) gewonnenen

Eigenvektoren gelten exakt die verallgemeinerten Orthogonalitätsrelationen

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \text{diag}(\tilde{m}_i), \quad \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} = \text{diag}(\tilde{c}_i). \quad (7)$$

Die auf die Normalkoordinaten reduzierten Massen und Federkonstanten können also direkt aus den Eigenvektoren berechnet werden ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\tilde{m}_i(t) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i, \quad \tilde{c}_i(t) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i. \quad (8)$$

Ohne Berücksichtigung der Dämpfung und der Komponenten von $\dot{\mathbf{V}}$ gilt für die Eigenkreisfrequenzen des Eigenwertproblems (2)

$$\omega_{i0}^2(t) = \tilde{c}_i / \tilde{m}_i. \quad (9)$$

Bei solchen Systemen, bei denen sich die Eigenvektoren \mathbf{v}_i nur langsam mit t ändern, und das ist nach Ingenieur-Erfahrungen bei vielen Mechanismen der Fall, können in (6) Vereinfachungen erfolgen. „Langsame“ Änderung heißt, daß

$$\dot{v}_{ik} \ll \omega_{i0} v_{ik}, \quad \ddot{v}_{ik} \ll \omega_{i0} \dot{v}_{ik} \ll \omega_{i0}^2 v_{ik} \quad (10)$$

gilt. Eine Näherungslösung von (1) existiert dann in der Form

$$q_i = \sum_{k=1}^n q_{ik} = \sum_{k=1}^n v_{ik}(t) a_{kk}(t) \cos \Phi_k(t). \quad (11)$$

Entsprechend der Methode des fiktiven Oszillators werden die Funktionen Φ_k und a_{kk} folgenden Bedingungen unterworfen, vgl. (4.4.1./5):

$$2\dot{a}_{kk}\omega_k^* + a_{kk}\dot{\omega}_k^* = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Es wird eingeführt, vgl. (4.4.1./4):

$$\omega_k^* = \frac{d\Phi_k}{dt}, \quad \Phi_k = \int_0^t \omega_k^*(\xi) d\xi + \Phi(0). \quad (13)$$

Dann ist

$$\ddot{q}_{kk} = (\ddot{a}_{kk} - a_{kk}\omega_k^{*2}) \cos \Phi_k = -\omega_k^2(t) q_{kk}. \quad (14)$$

Nach zweifacher Differentiation

$$(v_{ik} a_{kk})'' = \ddot{v}_{ik} a_{kk} + 2\dot{v}_{ik} \dot{a}_{kk} + v_{ik} \ddot{a}_{kk} \quad (15)$$

kann man unter Beachtung von (14) schreiben:

$$\ddot{q}_{ik} = -v_{ik} \omega_k^2 \left[\left(1 - \frac{\ddot{v}_{ik}}{v_{ik} \omega_k^2} \right) q_{kk} - 2 \frac{\dot{v}_{ik}}{v_{ik} \omega_k^2} \dot{q}_{kk} \right]. \quad (16)$$

Bei langsamen Parameteränderungen gemäß (10) finden wir für alle Kombinationen von i und k

$$\ddot{q}_{ik} = -v_{ik}(t) \omega_k^2(t) q_{kk} = -\omega_k^2(t) q_{ik}. \quad (17)$$

Die „Eigenfrequenzen“ ergeben sich aus (9). Die Bedingung (12) stellt ein System von Differentialgleichungen mit trennbaren Parametern dar, dessen Lösungen

$$a_{kk}(t) = a_{kk}(0) \sqrt{\omega_{k0}^* / \omega_k^*(t)} \quad (18)$$

sind. Nach analogen Umformungen wie in Abschnitt 4.4.1. ergibt sich

$$\ddot{z}_k - 0,5\dot{z}_k^2 + 2\bar{\omega}_k^2 e^{2z_k} = 2\omega_k^2(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

wobei $z_k = \ln(\omega_k^* / \bar{\omega}_k)$ ist, vgl. (4.4.1./11).

Die Vernachlässigung der „schnellen Komponenten“ in den $v_{ik}(t)$ gemäß (10) ist kein Hindernis dafür, den Einfluß der zeitabhängigen „Eigenfrequenzen“ $\omega_k^2(t)$ in (19) zu untersuchen. Das ist bedingt durch die geringe Empfindlichkeit der Eigenfrequenz gegenüber kleinen Änderungen der Eigenformen. Auf dieser Eigenschaft beruhen bekanntlich der Rayleigh-Quotient und andere Näherungsmethoden zur Bestimmung von Eigenfrequenzen [11], [17], [4.28].

In erster Näherung kann man zur Berücksichtigung der Dämpfung die Annahme benutzen, daß keine dissipativen Kopplungen zwischen den verschiedenen Eigenformen bestehen. Dann werden von der Dämpfungsmatrix nur die auf die Normalkoordinaten entfallenden Komponenten berücksichtigt, d. h., von dem Matrizenprodukt $\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V}$ in (6) werden nur die Hauptdiagonalelemente \tilde{b}_i zur Beschreibung der Dämpfung erfaßt und alle anderen Matrixelemente vernachlässigt.

Wird die Dämpfungsmatrix durch eine von CAUGHEY (im Jahr 1960) vorgeschlagene Reihe

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \sum_{k=0}^K b_k (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C})^k \quad (20)$$

approximiert, dann erfüllt sie auch die Orthogonalitätsrelation analog (7). Die Koeffizienten b_k werden so bestimmt, daß sie für $K + 1$ vorgegebene Ordnungen den Dämpfungsgrad der betreffenden Normalschwingung ergeben. Sie folgen aus einem linearen Gleichungssystem ($i = 1, 2, \dots, K + 1$):

$$b_0 / \omega_i + b_1 \omega_i + b_2 \omega_i^3 + \dots + b_k \omega_i^{2K-1} = 2\vartheta_i. \quad (21)$$

Für $K = 1$ entsteht aus (20) der Sonderfall der seit dem Jahr 1877 bekannten Rayleigh-Dämpfung mit

$$\mathbf{B} = b_0 \mathbf{M} + b_1 \mathbf{C}, \quad (22)$$

der auch als „Bequemlichkeitshypothese“ bekannt ist.

Zur Ermittlung realer Dämpfungsparameter von Mechanismen muß ein hoher meßtechnischer Aufwand getrieben werden, der bisher im Maschinenbau nur bei Werkzeugmaschinenstellen in Kauf genommen wird. Von TIETZ [5.57] wurde gezeigt, daß bei solchen Gestellschwingungen ein geschwindigkeitsproportionaler Dämpfungsansatz genügt, um experimentelle Ergebnisse hinreichend genau anzunähern, d. h., die komplexen Eigenwerte und die komplexen Eigenvektoren sind wesentlich, aber modale Dämpfungsansätze sind unzureichend. Die Dämpfungskonstanten der hier vorausgesetzten Normaldämpfungen folgen aus der Dämpfungs-

matrix und den Eigenvektoren zu

$$\tilde{b}_i(t) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \mathbf{v}_i. \quad (23)$$

Da die Dämpfung von schwingungsfähigen Mechanismen gering ist, zeigt sich erfahrungsgemäß bei realen Systemen meist, daß folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\tilde{b}_i \ll 2\omega_{i0}\tilde{m}_i = 2\tilde{c}_i/\omega_{i0} = 2\sqrt{\tilde{c}_i\tilde{m}_i}. \quad (24)$$

Falls die Annahmen gemäß (10) und (24) erfüllt sind, erweisen sich in (6) die ersten Summanden in den Klammern gegenüber dem jeweils letzten Term als vernachlässigbar klein, und wegen (8) und (23) erhält (6) die wesentlich einfachere Form, vgl. (4.5.2./1):

$$\tilde{m}_i \ddot{p}_i + \tilde{b}_i \dot{p}_i + \tilde{c}_i p_i = F_{\text{red},i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

Dabei wurde für das Produkt $\mathbf{V}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{red}}$ geschrieben, d. h., es wurden die auf die Normalkoordinaten reduzierten Erregerkräfte $F_{\text{red},i}$ eingeführt.

Bezüglich der Quasinormalkoordinaten p_i entstehen n unabhängige Bewegungsgleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten. Die Lösung der Gleichungen (25) kann mit den Methoden erfolgen, welche in Abschnitt 4.4. behandelt wurden, weil (25) die Form von (4.2.6./1) besitzt. Häufig lassen sich die Vorteile der Methode des fiktiven Oszillators, die in den Abschnitten 4.4.1. und 4.4.2. zutage treten, ausnutzen, um übersichtliche Lösungen zu erhalten. Wenn $\mathbf{p}(t)$ bekannt ist, wird mit (5) zurücktransformiert. Vom physikalischen Standpunkt bedeuten die getroffenen Vereinfachungen, daß die gegenseitige Beeinflussung der Quasieigenformen und die dynamischen Kräfte vernachlässigt werden, welche die zeitliche Änderung der Eigenformen hervorrufen. In vielen Anwendungsbeispielen [27], [28], [5.61], [5.62], [5.64] wurde der Nachweis für die Zweckmäßigkeit und Effektivität dieser Methode erbracht.

5.3.3. Einfluß von Parameteränderungen

Der Ingenieur fragt bei der Berechnung von Eigenfrequenzen nicht nur nach den Ergebnissen für fest vorgegebene Parameterwerte. Er ist oft auch an einem Variantenvergleich interessiert, weil er die Parameterkombination für das in einer Hinsicht beste Schwingungssystem sucht. Es entsteht z. B. manchmal die Aufgabe, durch Veränderung der ursprünglichen Systemparameter die Eigenfrequenzen und -formen aus gefährlichen Resonanzonen zu verschieben. Quantitative Untersuchungen dazu stammen von FOX und KATOOR [5.21].

Es ist aus der Schwingungslehre bekannt, daß alle Eigenfrequenzen zunehmen, wenn eine Masse verringert oder eine Steifigkeit erhöht wird. Die Eigenfrequenzen nehmen ab, wenn Massen vergrößert oder Steifigkeiten verringert werden. Es kann ausnahmsweise vorkommen, daß die Veränderung einer Masse keinen Einfluß auf eine bestimmte Eigenfrequenz hat. Dann befindet sich diese Masse im Schwingungsknoten der betreffenden Eigenschwingform. Auch eine Steifigkeitsänderung ist ohne Wirkung auf eine Eigenfrequenz, wenn z. B. eine Stützung im Schwingungsknoten

erfolgt oder ein Gelenk in den Momenten-Nullpunkt einer Eigenkraftform gelegt wird [11], [5.15], [5.16].

Eine sehr wirksame, aber nicht immer durchführbare Maßnahme stellt die Steifigkeitserhöhung mit Hilfe zusätzlicher Bindungen dar, wie zusätzliche Verstrebungen, Lagerstellen, Einspannungen. Meist besteht jedoch nur die Möglichkeit, einige Parameterwerte in engen Grenzen zu variieren.

Die K variablen Parameter eines schwingfähigen Mechanismus werden im Parametervektor $\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, \dots, x_K)$ zusammengefaßt. In der Praxis existieren oft obere und untere Grenzen für die Parameterwerte, so daß Restriktionen der Form

$$\mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max} \quad (1)$$

zu beachten sind. Die Eigenfrequenzen ω_{i0} des ursprünglichen Systems entsprechen dem Parametervektor $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{X}_{\min} + \mathbf{X}_{\max})/2$. Parameteränderungen $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ führen zu Veränderungen der Feder- und Massenmatrix in (5.3.2./2):

$$\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{X}) - \mathbf{C}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{C} - \mathbf{C}_0, \quad \Delta\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{X}) - \mathbf{M}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0. \quad (2)$$

Damit ist sowohl der Einfluß der Änderungen von Massen, Massenträgheitsmomenten, Federkonstanten und Biege- oder Torsionssteifigkeiten, als auch von geometrischen Parametern, wie Längen, Durchmessern, U -Funktionen, erfaßbar [5.18]. Oft sind die Matrizen (2) von den Masse- und Federparametern linear abhängig, so daß mit den dimensionslosen Matrizen \mathbf{C}_k und \mathbf{M}_k , die nur noch „Strukturinformation“ enthalten, für (2) folgendes geschrieben werden kann ($\mathbf{M}_k = \partial\mathbf{M}/\partial x_k$, $\mathbf{C}_k = \partial\mathbf{C}/\partial x_k$)

$$\Delta\mathbf{C} = \sum_k \Delta c_k \mathbf{C}_k, \quad \Delta\mathbf{M} = \sum_k \Delta m_k \mathbf{M}_k. \quad (3)$$

Dabei wurden die Δx_k , die in der Federmatrix Steifigkeitsänderungen und in der Massematrix Masseänderungen bedeuten, mit Δc_k und Δm_k bezeichnet.

Aus (5.3.2./8 und 9) ist der Zusammenhang zwischen den Eigenformen und Eigenkreisfrequenzen bekannt. Werden die Eigenformen des ursprünglichen Systems mit \mathbf{v}_{i0} bezeichnet, so folgt damit

$$\omega_{i0}^2 = \frac{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{C} \mathbf{v}_{i0}}{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_{i0}}. \quad (4)$$

Bei veränderten Parameterwerten ergibt sich

$$\omega_i^2 = \omega_{i0}^2 + \Delta\omega_i^2 = \frac{(\mathbf{v}_{i0} + \Delta\mathbf{v}_i)^T (\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{C}) (\mathbf{v}_{i0} + \Delta\mathbf{v}_i)}{(\mathbf{v}_{i0} + \Delta\mathbf{v}_i)^T (\mathbf{M}_0 + \Delta\mathbf{M}) (\mathbf{v}_{i0} + \Delta\mathbf{v}_i)}. \quad (5)$$

Wenn man annehmen kann, daß sich eine Eigenschwingform infolge der Parameteränderungen nur wenig ändert (so daß $\Delta\mathbf{v}_i \approx \mathbf{0}$ ist) und daß die Parameteränderungen klein sind ($\|\Delta\mathbf{C}\| \ll \|\mathbf{C}_0\|$, $\|\Delta\mathbf{M}\| \ll \|\mathbf{M}_0\|$), so ergibt sich aus (5) in erster Näherung

$$\Delta\omega_i^2 = \omega_{i0}^2 \left(\frac{\mathbf{v}_{i0}^T \Delta\mathbf{C} \mathbf{v}_{i0}}{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{v}_{i0}} - \frac{\mathbf{v}_{i0}^T \Delta\mathbf{M} \mathbf{v}_{i0}}{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{v}_{i0}} \right) = \frac{\mathbf{v}_{i0}^T \Delta\mathbf{C} \mathbf{v}_{i0}}{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{v}_{i0}} - \omega_{i0}^2 \frac{\mathbf{v}_{i0}^T \Delta\mathbf{M} \mathbf{v}_{i0}}{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{v}_{i0}}. \quad (6)$$

Die Normierung $\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{v}_{i0} = 1$ ist dabei ~~also zweckmäßig~~. Falls die Parameteränderungen nur Massen und Federn betreffen, so daß (3) gilt, so ergibt sich aus (6) mit

die Bedingung für die Gültigkeit folgender Formeln

den Empfindlichkeitskoeffizienten

$$\gamma_{ik} = \frac{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{C}_k \mathbf{v}_{i0}}{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{v}_{i0}}, \quad \mu_{ik} = \frac{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{M}_k \mathbf{v}_{i0}}{\mathbf{v}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{v}_{i0}} \quad (7)$$

die Beziehung [5.15]

$$\Delta \omega_i^2 = \omega_{i0}^2 \sum_{k=1}^K (\gamma_{ik} \Delta c_k - \mu_{ik} \Delta m_k). \quad (8)$$

Wie aus (6) und (8) hervorgeht, ist der Parametereinfluß auf die verschiedenen Eigenfrequenzen unterschiedlich. Die Berechnung des Einflusses **kleiner** Parameteränderungen kann also folgendermaßen erfolgen:

1. Lösung des Eigenwertproblems für den Parametervektor \mathbf{X}_0 des dämpfungsfreien ursprünglichen Systems. Daraus: ω_{i0} , \mathbf{v}_{i0} für die interessierenden Ordnungen i .
2. Berechnung der Matrizenänderungen $\Delta \mathbf{C}$ und $\Delta \mathbf{M}$ aus den Parameteränderungen $\Delta \mathbf{X}$ oder Ermittlung der Matrizen \mathbf{C}_k und \mathbf{M}_k aus einem Koeffizientenvergleich; Bestimmung der Gewichtsfaktoren γ_{ik} und μ_{ik} aus (7).
3. Berechnung der interessierenden Änderungen aus (8).

Für die Änderung der Eigenformen ergibt sich, vgl. [5.5], [5.21]:

$$\Delta \mathbf{v}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\mathbf{v}_{j0}^T (\Delta \mathbf{C} - \omega_{i0}^2 \Delta \mathbf{M}) \mathbf{v}_{i0}}{\omega_{i0}^2 - \omega_{j0}^2} \mathbf{v}_{j0}, \quad i \neq j. \quad (9)$$

Falls **große** Parameteränderungen $\Delta \mathbf{X}$ auftreten und sich die Eigenformen stark ändern, kann die Abhängigkeit der Eigenfrequenz f von den Parameteränderungen innerhalb des durch (1) begrenzten Bereichs durch ein quadratisches Polynom approximiert werden (Methode der Beschreibungsfunktionen [5.1]):

$$f(\Delta \mathbf{X}) = a_0 + \sum_k a_k \Delta x_k + \sum_k \sum_l a_{kl} \Delta x_k \Delta x_l. \quad (10)$$

Für die Ermittlung der Koeffizienten a_0 , a_k und a_{kl} ist eine bestimmte Anzahl von exakten Eigenfrequenzberechnungen vorzunehmen. Es ist vorteilhaft, die Punkte, in denen die genauen Eigenfrequenzen bestimmt werden sollen, entsprechend eines optimalen Versuchsplanes festzulegen [5.18].

Aus der Menge der exakten Werte f_i erfolgt die Berechnung der Koeffizienten mit Hilfe der Regressionsanalyse. Die Regressionsgleichung erfüllt bezüglich der f_i die Bedingung des Fehlerquadratminimums. Normierte Versuchspläne bis zu zehn Parametern, die den Bedingungen der Orthogonalität entsprechen, sind in [5.1] enthalten.

Die letztgenannte Methode kann auf viele andere Probleme der Mechanismendynamik angewendet werden, z. B. bei der Suche von optimalen Parameterwerten hinsichtlich solcher Kriterien wie „minimale Maximalkraft“, „minimale Amplitude“ oder auch bei den in Kapitel 3 behandelten Problemen des dynamischen Ausgleichs u. a. Damit sind bei minimaler Anzahl von Zielfunktionsberechnungen auch Optimierungsprobleme lösbar, wie z. B. HUPFER [5.31] bei Pressenmechanismen zeigte, vgl. Abschnitt 5.5.5.1.

5.3.4. Modifizierte Übertragungsmatrizen

Das Verfahren der Übertragungsmatrizen ist bei der Analyse dynamischer Systeme mit konstanten Parametern weit verbreitet [11], [5.9], [5.38]. In den Arbeiten von VUL'FSON [27], [28], [5.61], [5.70] wurde diese Methode auf Aufgaben der Mechanismendynamik angewendet, die durch Systeme von Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten beschrieben werden. Um die Übertragungsmatrizen bei veränderlichen Parametern der Systeme von den üblichen zu unterscheiden, werden sie „modifizierte“ Übertragungsmatrizen genannt. Im weiteren wird dieser Terminus nur dann angewendet, wenn die Notwendigkeit besteht, die Spezifik dieser Übertragungsmatrizen zu betonen.

Die Möglichkeit, die Methode der Übertragungsmatrizen auf Systeme mit veränderlichen Parametern anzuwenden, ist damit verbunden, daß langsam veränderliche Eigenformen vorliegen und Bedingungen des fiktiven Oszillators in Form von (5.3.2./11 bis 19) gelten. Offensichtlich erhält man analoge Beziehungen bei $\omega = \text{konst}$ für Systeme mit konstanten Parametern.

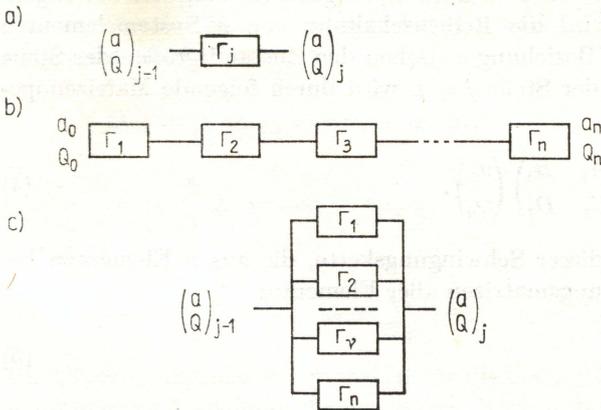


Bild 5.4 Zur Methode der Übertragungsmatrizen

a) einzelnes Feld, b) Reihenschaltung (Schwingerkette), c) Parallelschaltung

Die Grundgedanken des Verfahrens der Übertragungsmatrizen werden aus der Lehrbuchliteratur (z. B. [11], S. 186) als bekannt vorausgesetzt. Hier wird es an Hand einer Torsionsschwingerkette erläutert, deren zwei Zustandsgrößen (vgl. Bild 5.4a) an jeder Schnittstelle der Drehwinkel und das Torsionsmoment sind. Die Aussagen gelten ebenso für Längsschwingerketten (dem Winkel entspricht dann die Längsverschiebung, dem Moment eine Längskraft), so daß mit allgemeinen Bezeichnungen (a für die Deformationsamplitude, Q für die Kraftamplitude) operiert wird, aber im verbalen Text der Einfachheit halber nur von Winkel a und Moment Q gesprochen wird.

Für eine beliebige Eigenschwingform ändern sich der Winkel und das Moment der

freien Schwingungen bei der Übertragung durch ein Element j , was in Matrixschreibweise folgendermaßen ausgedrückt wird:

$$\begin{pmatrix} a_j \\ Q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ Q_{j-1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Die Matrix Γ_j heißt modifizierte Übertragungsmatrix. Man kann zeigen, daß sie die Eigenschaft $\det(\Gamma_j) = 1$ besitzt.

Die Bewegung des Winkels an der j -ten Schnittstelle verläuft bei der i -ten Eigenschwingung gemäß

$$\dot{\Phi} = \omega_i(t), \quad \varphi_{ij}(t) = a_{ij}(\tau) \cos \Phi(t), \quad (2)$$

worin $\tau = \Omega t$ eine „langsame“ Zeit (Ω kleiner Parameter) und $\omega_i(t)$ die variable Eigenfrequenz ist. Es gilt dann analog zu (5.3.2./17)

$$\ddot{\varphi}_{ij} \approx -\omega^2(\tau) \varphi_{ij}. \quad (3)$$

Praktisch läuft das z. B. darauf hinaus, daß die Änderung der Eigenfrequenzen über dem Kurbelwinkel (Abhängigkeit von U' -Funktion) langsam im Vergleich zur Eigenfrequenz selbst ist. Zunächst wird die **Reihenschaltung** von n Systemelementen betrachtet, vgl. Bild 5.4 b. Die Beziehung zwischen den Zustandsgrößen der Stelle $j = 0$ und den Zustandsgrößen der Stelle $j = n$ wird durch folgende Matrizenoperation ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

So ist die Übertragungsmatrix dieser Schwingungskette, die aus n Elementen besteht, das Produkt der Übertragungsmatrizen aller Elemente:

$$\Gamma = \prod_{j=n}^1 \Gamma_j. \quad (5)$$

Die Reihenfolge der Multiplikationen muß umgekehrt wie die Reihenfolge der Elemente erfolgen, da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. In Tabelle 5.2 sind Elemente der Übertragungsmatrizen für einige typische Verbindungen von Mechanismen innerhalb einer Schwingungskette zusammengestellt. Bei der **Parallelschaltung von n Feldelementen** gilt für jedes dieser Elemente ebenfalls die Matrixgleichung (1). Dabei ist v die Nummer des Feldelements, vgl. Bild 5.4 c. Diese Struktur ist dadurch gekennzeichnet, daß die Winkel am Eingang und am Ausgang aller Feldelemente gleich groß sind. Infolgedessen gilt für sie

$$a_{jv} = a_j, \quad a_{j-1,v} = a_{j-1}, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} a_j &= A_{jv} a_{j-1} + B_{jv} Q_{j-1,v}, \\ Q_{jv} &= C_{jv} a_{j-1} + D_{jv} Q_{j-1,v}. \end{aligned} \quad (7)$$

Tabelle 5.2. Elemente der Übertragungsmatrizen für typische Fälle

Fall Nr.	Kopplung	A	B	C	D
1	c	1	$1/c$	0	1
2	J	1	0	$-J\omega^2$	1
3	U	U'	0	0	$1/U'$
4	$c - J - U$	U'	U'/c	$-J\omega^2/U'$	$(1 - J\omega^2/c)/U'$
5	$c - U - J$	U'	U'/c	$-J\omega^2 U'$	$-J\omega^2 U'/c + 1/U'$
6	$J - c - U$	$U'(1 - J\omega^2/c)$	U'/c	$-J\omega^2/U'$	$1/U'$
7	$J - U - c$	$U' - J\omega^2/c U'$	$1/(cU')$	$-J\omega^2/U'$	$1/U'$
8	$U - J - c$	$U'(1 - J\omega^2/c)$	$1/(cU')$	$-J\omega^2 U'$	$1/U'$
9	$U - c - J$	U'	$1/(cU')$	$-J\omega^2 U'$	$(1 - J\omega^2/c)/U'$
10	Kontinuum	$\cos \theta$	$\sigma \cdot \sin \theta/\omega$	$-\omega \sin \theta/\sigma$	$\cos \theta$

Die Summe der Momentamplituden Q_{j-1} und Q_j kann wegen (7) folgendermaßen dargestellt werden:

$$Q_{j-1} = \sum_{\nu=1}^n Q_{j-1,\nu} = a_j \kappa_2 - a_{j-1} \kappa_1, \quad (8)$$

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^n Q_{j\nu} = a_j \kappa_3 - a_{j-1} \kappa_2.$$

Dabei ist

$$\kappa_1 = \sum_{\nu=1}^n A_{j\nu}/B_{j\nu}, \quad \kappa_2 = \sum_{\nu=1}^n 1/B_{j\nu}, \quad \kappa_3 = \sum_{\nu=1}^n D_{j\nu}/B_{j\nu}. \quad (9)$$

Die Übertragungsmatrix entspricht für die Gesamtheit der Elemente dieser Parallelschaltung der Beziehung (5), wenn die Matrizenelemente folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned} A_j &= \kappa_1/\kappa_2, & B_j &= 1/\kappa_2, \\ C_j &= (\kappa_1 \kappa_3 - \kappa_2^2)/\kappa_2^2, & D_j &= \kappa_3/\kappa_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Offensichtlich kann man das Gesamtsystem eines elastischen Mechanismus beliebiger topologischer Struktur in eine Folge von Parallel- und Reihenschaltungen einteilen und mit der beschriebenen Methode der Übertragungsmatrizen behandeln.

Die Methode der modifizierten Übertragungsmatrizen ist dafür geeignet, die Quasi-Eigenfrequenzen und Quasi-Eigenformen zu berechnen. Dazu wird (4) in folgender Form dargestellt:

$$a_n = A(\omega) a_0 + B(\omega) Q_0, \quad Q_n = C(\omega) a_0 + D(\omega) Q_0, \quad (11)$$

wobei A , B , C und D die Elemente der Übertragungsmatrix Γ des Gesamtsystems sind, vgl. (5).

In Abhängigkeit von den Randbedingungen können folgende vier Fälle auftreten:

1. „fest-frei“: Dies entspricht den Randbedingungen $a_0 = 0$ und $Q_n = 0$. Da $Q_0 = a_n/B$, gilt $Q_n = Da_n/B = 0$. Daraus ergibt sich die Frequenzgleichung $D(\omega) = 0$.
2. „fest-fest“: ($a_0 = 0, a_n = 0$). Dabei ist $B(\omega) = 0$.
3. „frei-frei“: ($Q_0 = 0, Q_n = 0$). Dabei ist $C(\omega) = 0$.
4. „frei-fest“: ($Q_0 = 0, a_n = 0$). Dabei ist $A(\omega) = 0$.

Die Nullstellen der Frequenzgleichung können nach einem Restgrößenverfahren bestimmt werden. Es sind die Eigenkreisfrequenzen $\omega_r(\tau)$. Nach der Lösung der Frequenzgleichung können mit den Übertragungsmatrizen die nichtstationären langsam veränderlichen Eigenformen berechnet werden. Es ist zulässig, in einer Schnittstelle die Amplitude zu 1 anzunehmen und unter Berücksichtigung der Randbedingungen bei $\omega = \omega_r$ die Amplituden an beliebigen anderen Schnittstellen zu berechnen, wobei ω_r die r -te Wurzel der Frequenzgleichung ist.

Die dabei erhaltenen Amplitudenwerte sind die Amplitudenverhältnisse der r -ten „Eigenschwingform“. Ein Minuszeichen bei einem Amplitudenverhältnis zeigt, daß die Schwingung an dieser Schnittstelle in Gegenphase zur Schwingung an der Stelle liegt, für die die Amplitude mit 1 angenommen wurde.

Für den Fall 4 soll z. B. für das Amplitudenverhältnis $v_{jr} = a_{jr}$ sein (Querschnitt j und Frequenz r), bei $a_0 = 1$. Dann gilt wegen (4)

$$\begin{pmatrix} a_{jr} \\ Q_{jr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^*(\omega_r) & B_j^*(\omega_r) \\ C_j^*(\omega_r) & D_j^*(\omega_r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

wobei A_j^* , B_j^* , C_j^* und D_j^* die Elemente der Übertragungsmatrix

$$\Gamma_j^* = \prod_{s=j}^1 \Gamma_s \quad (13)$$

sind. Offenbar ist $a_{jr} = v_{jr} = A_j^*(\omega_r)$. Da sich ω mit der Zeit τ verändert, sind die Amplitudenverhältnisse auch zeitveränderlich, vgl. (5.3.2./3).

Die Methode der Übertragungsmatrizen kann analog wie bei Systemen mit konstanten Parametern auch zur Berechnung der gedämpften erzwungenen Schwingungen von Mechanismen angewendet werden [11], [4.45]. Kleine Dämpfungen werden zweckmäßig erst nach dem Übergang auf Quasinormalkoordinaten berücksichtigt, da sie die „Eigenfrequenzen“ und „Eigenschwingformen“ nur unwesentlich beeinflussen.

5.3.5. Anwendung von Substrukturen

Die Methode der finiten Elemente (FEM) hat sich auf vielen Gebieten der Mechanik bewährt. Es gibt dazu eine umfangreiche einführende Literatur, z. B. [17], [31], [5.6], [5.14]. Die FEM liefert auch einen Zugang zur Untersuchung von starren und elastischen Mechanismen, worauf BAGHAT/WILLMERT [5.4], KANARACHOS/KLEIN [2.13], [5.36], RANKERS/VAN DER WERFF [1.18], [5.59] und andere aufmerksam mach-

ten. Von vielen Autoren wurde die FEM auf Mechanismen mit elastischen Gliedern angewendet, z. B. in [2.24], [5.11], [5.44], [5.69].

Kennzeichnend ist, daß Berechnungsmodelle komplizierter Mechanismensysteme durch endlich viele Elemente, sogenannte Substrukturen, darstellbar sind, wobei das dynamische Verhalten jedes Elementes durch endlich viele Koordinaten beschrieben wird. Der lineare Zusammenhang zwischen den Koordinaten und ihren Zeitableitungen in der Bewegungsgleichung der Substruktur, der nach der Linearisierung auch bei Mechanismen besteht, läßt die Anwendung der FEM analog zu Balken-, Platten- oder Schalenelementen mit konstanten Parametern zu, vgl. Abschnitt 5.2.2.

Von RÖSSLER [4.37], [5.51], [5.52] wurden spezielle Matrizen für Mechanismen-Substrukturen vorgeschlagen, deren Besonderheit gegenüber den üblicherweise verwendeten Matrizen darin besteht, daß die Matrizenelemente zeitabhängig sind. Darin treten die für die Mechanismendynamik typischen höheren Ableitungen der Lagefunktionen auf, welche die sich infolge der Antriebsbewegung veränderliche Relativlage der Getriebeglieder berücksichtigen.

Die lokalen Koordinaten $\mathbf{q}^{(r)} = (q_1^{(r)}, q_2^{(r)}, \dots)^T$, die sich auf die Substruktur mit der Nummer r beziehen, beschreiben kleine Bewegungen des linearisierten Berechnungsmodells. Die Matrizen $\mathbf{M}_r(t)$, $\mathbf{B}_r(t)$ und $\mathbf{C}_r(t)$ beziehen sich auf diese Koordinaten. Jede Substruktur gehorcht Bewegungsgleichungen der Form

$$\mathbf{M}_r(t) \ddot{\mathbf{q}}^{(r)} + \mathbf{B}_r(t) \dot{\mathbf{q}}^{(r)} + \mathbf{C}_r(t) \mathbf{q}^{(r)} = \mathbf{Q}_r(t). \quad (1)$$

Die Vektoren $\mathbf{q}^{(r)}$ enthalten die lokalen Koordinaten der Substruktur, vgl. Tabelle 5.3 (in Tab. 5.3, Fall 4, ist \mathbf{Q} durch die zweite Spalte mit den Elementen $-mU'U''\Omega^2$, $-mU''\Omega^2$ zu ergänzen). An den Verbindungsstellen der finiten Elemente werden sogenannte globale Koordinaten eingeführt und im Vektor \mathbf{q} zusammengefaßt.

Die in Tabelle 5.3 angegebenen Matrizen unterscheiden sich für dieselben Substrukturen zum Teil von denen in Tabelle 5.1, weil dort die oft sehr kleinen Terme mit q^2 stellenweise vernachlässigt wurden.

Wie die Struktur eines Mechanismus sich aus Substrukturen zusammensetzt, wird durch die Zuordnung der lokalen Koordinaten zu den globalen Koordinaten an den Verbindungsstellen beschrieben. Diese Zuordnung, die die topologische Struktur chiffriert, erfolgt durch die Koinzidenzmatrizen \mathbf{T}_r und hat allgemein die Form

$$\mathbf{q}^{(r)} = \mathbf{T}_r \mathbf{q}. \quad (2)$$

Die Elemente der Koinzidenzmatrizen, die meist Rechteckmatrizen sind, lassen sich durch einen Koeffizientenvergleich aus den Zwangsbedingungen an den Verbindungsstellen ermitteln.

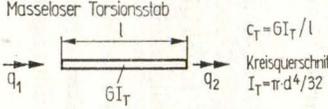
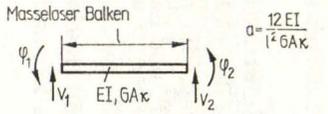
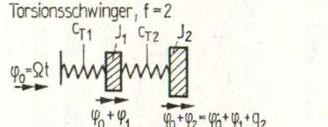
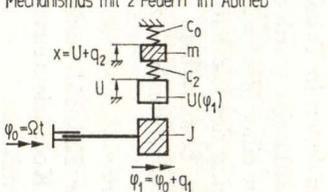
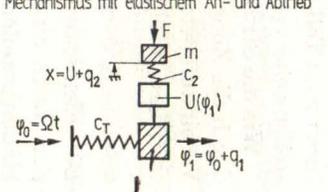
Für die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems des Mechanismus oder der Maschine

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t) \mathbf{q} = \mathbf{Q}(t), \quad (3)$$

die Gleichung (5.2.2./9) entspricht, erhält man die Systemmatrizen aus den bekannten Ausdrücken, vgl. z. B. [17], [5.14]:

$$\mathbf{M} = \sum_r \mathbf{T}_r^T \mathbf{M}_r \mathbf{T}_r, \quad \mathbf{B} = \sum_r \mathbf{T}_r^T \mathbf{B}_r \mathbf{T}_r, \quad \mathbf{C} = \sum_r \mathbf{T}_r^T \mathbf{C}_r \mathbf{T}_r, \quad \mathbf{Q} = \sum_r \mathbf{T}_r^T \mathbf{Q}_r. \quad (4)$$

Tabelle 5.3. Matrizen der finiten Elemente und Substrukturen von Antriebssystemen

Fall	Substrukturen und finite Elemente mit Parametern	Koordinatenvektor \mathbf{q}^T	Matrizen $\mathbf{C}_r, \mathbf{M}_r$, Vektor \mathbf{Q}_r für Gl. (5.3.5./4)
1	<p>Masseloser Torsionsstab</p>  <p>$C_T = GI_T/l$ Kreisquerschnitt $I_T = \pi \cdot d^4/32$</p>	$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_T & -C_T \\ -C_T & C_T \end{pmatrix} = C_T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2	<p>Masseloser Balken</p>  <p>$a = \frac{12EI}{l^2 GA_k}$</p>	$\begin{pmatrix} V_1 \\ \varphi_1 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = \frac{EI}{l^3(1+a)} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & l^2(4+a) & -6l & l^2(2-a) \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & l^2(2-a) & -6l & l^2(4+a) \end{pmatrix}$
3	<p>Torsionsschwinger, $f = 2$</p>  <p>$\varphi_0 = \Omega t$ $\varphi_0 + \varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_1 + q_2$</p>	$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{T1} & 0 \\ 0 & C_{T2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{pmatrix}$
4	<p>Mechanismus mit 2 Federn im Abtrieb</p>  <p>$x = U + q_2$ $\varphi_1 = \varphi_0 + q_1$</p>	$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0(U'^2 + UU'') & c_0 U' \\ c_0 U' & c_0 + c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} J + mU'^2 & mU' \\ mU' & m \end{pmatrix},$ $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -c_0 U U' & -m \Omega^2 U' U'' \\ -c_0 U & -m \Omega^2 U'' \end{pmatrix}$
5	<p>Mechanismus mit elastischem An- und Abtrieb</p>  <p>$x = U + q_2$ $\varphi_1 = \varphi_0 + q_1$</p>	$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_T & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} J + mU'^2 & mU' \\ mU' & m \end{pmatrix}$ $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -U' F & -mU' U'' \Omega^2 \\ -F & -mU'' \Omega^2 \end{pmatrix}$

6	<p>Kurbeltrieb</p> <p>$\lambda = l_2 / l_3$ $\vec{c}_1 = c_p^1 + c_b^1$</p>	$\begin{pmatrix} \varphi \\ l_2 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$	$M = \begin{pmatrix} J_2 / l_2^2 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & m_2 & \\ & & & & m_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \sin^2 \varphi_0 & -c_1 \sin \varphi_0 & c_1 \lambda \sin^2 \varphi_0 & -c_1 \sin \varphi_0 \\ -c_1 \sin \varphi_0 & c_1 + c_2 & -c_1 \lambda \sin \varphi_0 & c_1 \\ c_1 \lambda \sin^2 \varphi_0 & -c_1 \lambda \sin \varphi_0 & c_2 + c_1 \lambda^2 \sin^2 \varphi_0 & -c_1 \lambda \sin \varphi_0 \\ -c_1 \sin \varphi_0 & c_1 & -c_1 \lambda \sin \varphi_0 & c_1 \end{pmatrix}$
7	<p>Zahnradpaar, isotrop gelagert</p> <p>Zahn-Eingriffslinie</p>	$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$	$M = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & J_2 & & & & \\ & & m_1 & & & \\ & & & m_2 & & \\ & & & & m_2 & \\ & & & & & m_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_2 r_1^2 c^2 & & & & & \\ -c_2 r_1 r_2 c^2 & c_2 r_2^2 c^2 & & & & \text{symm.} \\ -c_2 r_1^2 c & c_2 r_2^2 c & c_1 + c_2 s^2 & & & \\ -c_2 r_1 c^2 & c_2 r_2^2 c & c_2 s c & c_1 + c_2 c^2 & & \\ c_2 r_1^2 c & -c_2 r_2^2 c & -c_2 s^2 & -c_2 s c & c_2 + c_2 s^2 & \\ c_2 r_1 c^2 & -c_2 r_2 c^2 & -c_2 s c & -c_2 c^2 & c_2 s c & c_2 + c_2 c^2 \end{pmatrix}$
8	<p>Zahnradpaar, anisotrop gelagert</p> <p>Eingriffslinie</p>	$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$M = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & m_1 & \\ & & & m_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_z r_1^2 & & & \text{symm.} \\ -c_z r_1 r_2 & c_z r_2^2 & & \\ -c_z r_1 & c_z r_2 & c_1 + c_z & \\ c_z r_1 & -c_z r_2 & -c_z & c_2 + c_z \end{pmatrix}$
9	<p>Koppelgetriebe mit 2 elastischen Lagern</p> <p>$\varphi_0 = \Omega t$</p>	$\begin{pmatrix} \varphi \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$	$M = (m_{jk}) \quad , j, k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad ()_{,0} = \partial() / \partial \varphi_0$ $m_{jk} = \sum_{i=2}^4 [m_i (x_{si,j} x_{si,k} + y_{si,j} y_{si,k}) + J_{si} \varphi_{i,j} \varphi_{i,k}]$ $C = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & c_{1h} & & & \\ & & c_{1v} & & \\ & & & c_{2h} & \\ & & & & c_{2v} \end{pmatrix}, \quad Q = -\Omega^2 \begin{pmatrix} m_{00,0} / 2 \\ m_{01,0} - m_{00,1} / 2 \\ m_{02,0} - m_{00,2} / 2 \\ m_{03,0} - m_{00,3} / 2 \\ m_{04,0} - m_{00,4} / 2 \end{pmatrix}$

Mit Hilfe der FEM ist es relativ leicht möglich, die Bewegungsgleichungen für die gekoppelten Schwingungen der Mechanismen mit dem Gestell aufzustellen und eine komplette Maschine, die aus mehreren Baugruppen mit bekanntem Schwingungsverhalten besteht, zu erfassen. Falls die Wechselwirkung der Mechanismen mit dem Gestell, in dem sie gelagert sind, untersucht werden soll, so sind dabei die Bewegungsgleichungen des Gestells zu berücksichtigen, die in der Form

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + \mathbf{B}_0 \dot{\mathbf{q}}^{(0)} + \mathbf{C}_0 \mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (5)$$

vorliegen. Der Index 0 an den Matrizen drückt aus, daß diese konstant sind und keine Parameter von Mechanismen enthalten. Dieser Index kann gleichzeitig als Nummer $r = 0$ der „Substruktur“ Gestell aufgefaßt werden. Die Gleichung (3) beschreibt die gekoppelten Schwingungen von starren oder elastischen Mechanismen mit dem elastischen Gestell oder Fundament, wenn in (4) die Summation bei $r = 0$ beginnt.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen mit Substrukturen wird exemplarisch für die in Bild 5.5 dargestellte Mechanismenstruktur erklärt. Das Gesamtsystem wird in vier Substrukturen aufgeteilt ($r = 1, 2, 3, 4$). Es besteht aus je zwei Substrukturen der in Tabelle 5.3 angegebenen Standardfälle 1 und 4, die in Reihenschaltung angeordnet sind.

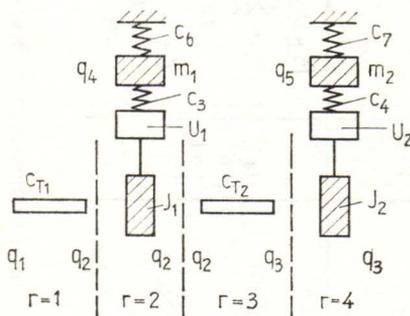


Bild 5.5 Aufteilung eines Antriebssystems in Substrukturen

Als globale Koordinaten werden diejenigen gewählt, die schon in Abschnitt 5.2.3.2. benutzt wurden. Die Beziehungen zu den lokalen Koordinaten erkennt man aus Bild 5.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(1)} &= \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_2 \end{pmatrix}, & \mathbf{q}^{(2)} &= \begin{pmatrix} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_4 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q}^{(3)} &= \begin{pmatrix} q_1^{(3)} \\ q_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 + q_2 \end{pmatrix}, & \mathbf{q}^{(4)} &= \begin{pmatrix} q_1^{(4)} \\ q_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 + q_3 \\ q_5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Dabei wurde beachtet, daß der Absolutwinkel $q_2^{(3)} = q_1^{(4)}$ der Substrukturen $r = 3$ und $r = 4$ an der Welle die Summe aus zwei Relativwinkeln der Torsionsstäbe 1 und 3 ist. Aus (6) kann man durch Vergleich mit (2) entnehmen, daß die Koinzidenz-

matrizen für $\mathbf{q}^T = (q_2, q_3, q_4, q_5)$ folgende Form haben:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

In dem betrachteten Beispiel lauten die Matrizen der Substrukturen gemäß Tabelle 5.3 mit den Bezeichnungen der Parameter wie in Bild 5.5:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} c_{T1} & -c_{T1} \\ -c_{T1} & c_{T1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} -c_6 U_1 U_1' - m_1 \Omega^2 U_1' U_1'' \\ -c_6 U_1 - m_1 \Omega^2 U_1'' \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} c_6 (U_1'^2 + U_1 U_1'') & c_6 U_1' \\ c_6 U_1' & c_3 + c_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} J_1 + m_1 U_1'^2 & m_1 U_1' \\ m_1 U_1' & m_1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} c_{T2} & -c_{T2} \\ -c_{T2} & c_{T2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_4 = \begin{pmatrix} -c_7 U_2 U_2' - m_2 \Omega^2 U_2' U_2'' \\ -c_7 U_2 - m_2 \Omega^2 U_2'' \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} c_7 (U_2'^2 + U_2 U_2'') & c_7 U_2' \\ c_7 U_2' & c_4 + c_7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} J_2 + m_2 U_2'^2 & m_2 U_2' \\ m_2 U_2' & m_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Setzt man diese Matrizen aus (7) und (8) bis (11) in (4) ein, so kann man sich davon überzeugen, daß dieselben Matrizen entstehen, die aus (5.2.3.2./20 bis 22) bekannt sind. Es ist dabei in (4) über $r = 1$ bis 4 zu summieren. Da in Abschnitt 5.2.3.2. ein beliebiger Verlauf $q_1(t)$ zugelassen war, treten in (5.2.3.2./23) Beschleunigungsterme auf, die bei der hier angenommenen Grundbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω entfallen. Der Kraftvektor ergibt sich gemäß (4) wegen $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_3 = \mathbf{0}$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{T}_2^T \mathbf{Q}_2 + \mathbf{T}_4^T \mathbf{Q}_4 \\ &= \begin{pmatrix} -c_6 U_1 U_1' - c_7 U_2 U_2' - (m_1 U_1' U_1'' + m_2 U_2' U_2'') \Omega^2 \\ -c_7 U_2 U_2' - m_2 U_2' U_2'' \Omega^2 \\ -c_6 U_1 - m_1 U_1'' \Omega^2 \\ -c_7 U_2 - m_2 U_2'' \Omega^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Er stimmt mit demjenigen von (5.2.3.2./23) überein, wenn dort $\dot{q}_1 = \Omega$, $\ddot{q}_1 = 0$ gesetzt wird. Durch Anwendung der Methode der Substrukturen kann man also formal, d. h. computergerecht, zu den Bewegungsgleichungen kommen, die man sonst (wie in Abschnitt 5.2.3.2.) nur durch „Handrechnung“ erhält.

Die hier dargelegten Grundgedanken liegen dem Rechenprogramm FEMAS [4.37], [5.52] zu Grunde. Damit können gekoppelte Biege- und Torsionsschwingungen beliebig verzweigter und vermaschter Mechanismensysteme analysiert werden. Die Angaben zur Topologie einer Mechanismenstruktur werden kodiert. Aus diesen Strukturinformationen werden dann rechnerintern die Elemente der Matrizen des Gesamtsystems bestimmt.

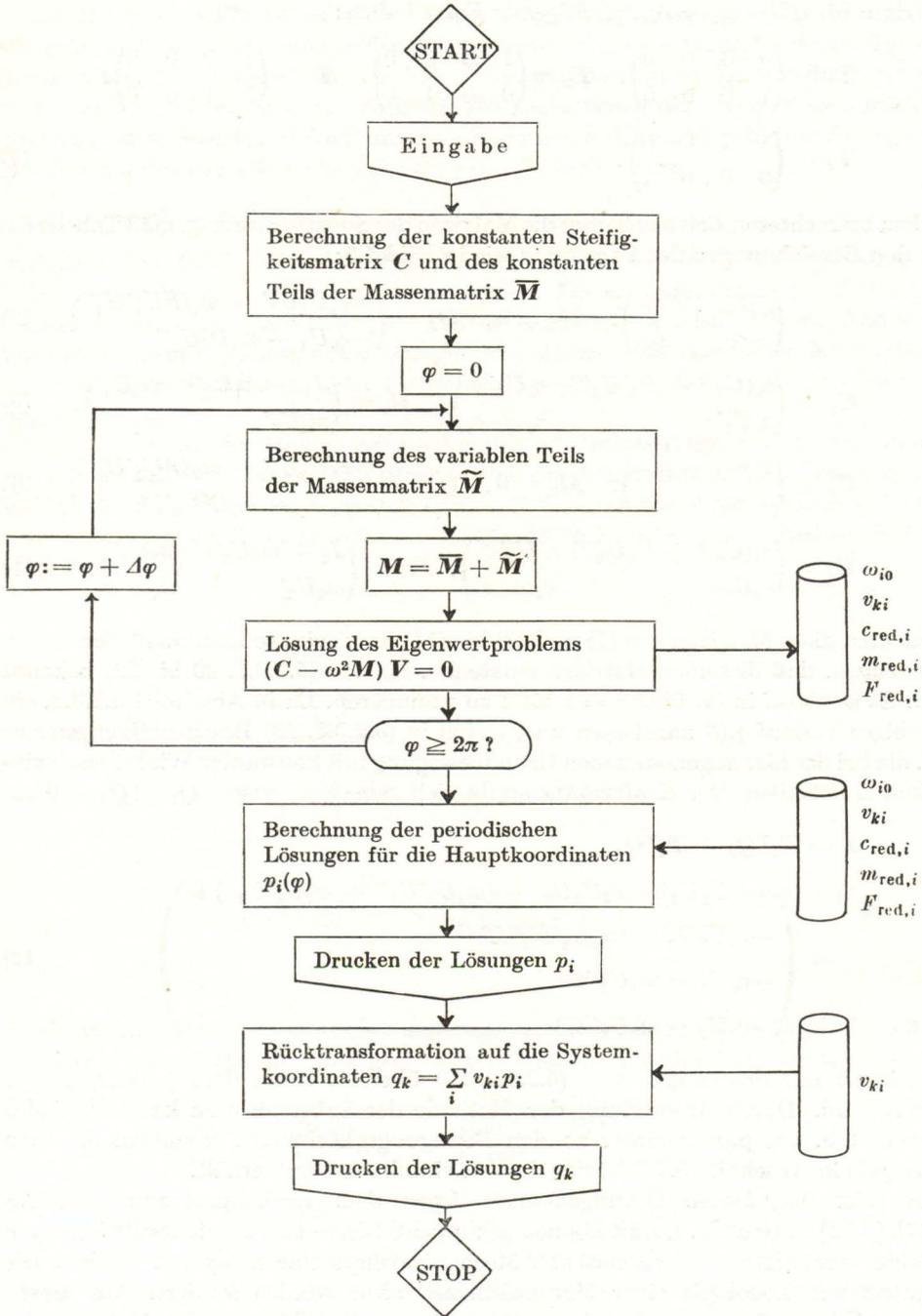


Bild 5.6 Programmablaufplan des Programms FEMAS

Den Ablauf des Programms FEMAS zeigt Bild 5.6. Aus ihm geht hervor, daß die Berechnung der stellungsabhängigen Eigenfrequenzen und Eigenformen in einem Zyklus erfolgt, bei dem nur der variable Teil der Massenmatrix wiederholt berechnet wird, bevor das Eigenwertproblem gelöst wird. Unter den genannten Voraussetzungen ist die Matrix C von der Getriebestellung unabhängig (vgl. Tabelle 5.3), während nur M von den Lagefunktionen erster Ordnung abhängt.

Wenn man die Berechnung der Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen als Funktionen des Parameters U' vornimmt, kann man daraus für beliebige Funktionen $U'(\varphi)$ die stellungsabhängigen ω_i und v_i berechnen. Dieser Weg besitzt den Vorteil, daß eine Synthese und Optimierung durch Variation der Lagefunktionen leichter möglich wird, weil die aufwendige Lösung des Eigenwertproblems nicht bei jedem Schritt nötig ist.

Aus den Eigenkreisfrequenzen ω_i und der Modalmatrix V , die zunächst gespeichert werden, kann die Transformation auf Gleichungen des Typs (5.3.2./25) vorgenommen werden. Es wird dann erst bei diesem Modell die praktisch stets vorhandene Energiedissipation berücksichtigt, z. B. durch eine modale Dämpferkonstante

$$\tilde{b} = 2\vartheta \sqrt{\tilde{c}\tilde{m}}, \tag{13}$$

mit einem Erfahrungswert für den Dämpfungsgrad, der meist im Bereich $\vartheta = 0,02$ bis $0,1$ liegt.

Nachdem damit das ursprüngliche Problem auf mehrere mit je einem Freiheitsgrad reduziert wurde (5.3.2./25), können die in Abschnitt 4.4. genannten Methoden angewendet werden, um die Bewegungen der Quasinormalkoordinaten $p_i(t)$ zu berechnen. Am Ende wird auf die ursprünglichen Systemkoordinaten q gemäß (5.3.2./5) zurücktransformiert und auf solche Komponenten p_i verzichtet, die vernachlässigbar kleine Beiträge zur resultierenden Bewegung liefern.

Die in Abschnitt 5.5.3. beschriebene Methode der modalen Reduktion wird hier zweckmäßigerweise angewendet, d. h. daß praktisch die höheren Eigenformen (was „höher“ ist, kann im Laufe der Berechnung am Computer entschieden werden) unbeachtet bleiben. Die eigentlich quadratische Modalmatrix schrumpft zu einer Rechteckmatrix zusammen, was auf eine Verminderung des Rechenaufwandes hinausläuft.

Für das in Bild 5.7 dargestellte Pressenmodell, das von HUPFER [5.31] untersucht wurde, enthält der globale Koordinatenvektor die Komponenten

$$q^T = (\varphi_6, \varphi_5, x_6, y_6, x_5, y_5, x_3, x_2, x_1).$$

Die Koordinaten $q^{(r)}$ und Koinzidenzmatrizen T_r der vier Substrukturen ergeben sich wie folgt: Eine Substruktur ($r = 1$) ist die Antriebswelle, ein Torsionsstab zwischen dem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit angenommenen Schwungrad und dem ersten Zahnrad. Dafür folgt aus Tabelle 5.3, Fall 1, vgl. (6):

$$q^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_T & -c_T \\ -c_T & c_T \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Für das Zahnradpaar (Substruktur $r = 2$) ergibt sich unter Beachtung der geometrischen Verhältnisse in Bild 5.7 mit den Abkürzungen $c = \cos(\gamma - \alpha)$ und

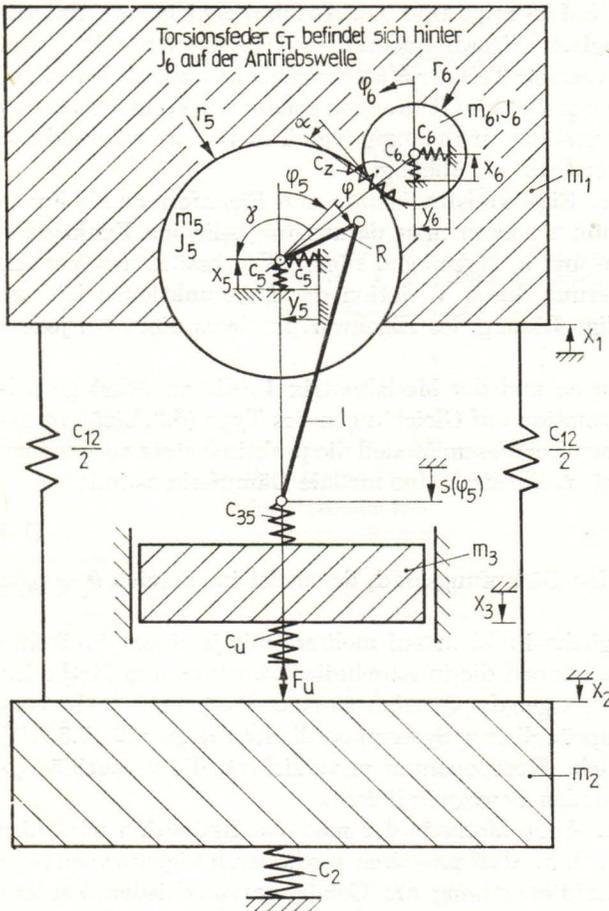


Bild 5.7 Aufteilung des Berechnungsmodells einer Presse in Substrukturen (Zahnradpaar, Schubkurbelgetriebe, Torsionsschwinger, Längsschwinger)

$s = \sin(\gamma - \alpha)$:

$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c & s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{C}_2 ist in Tabelle 5.3, Fall 8, enthalten. Es sind lediglich die Radien ($r_1 \triangleq r_6, r_2 \triangleq r_5$) und die Federkonstanten ($c_1 \triangleq c_6, c_2 \triangleq c_5$) umzubenenen.

Die dritte Substruktur ($r = 3$) ist das Schubkurbelgetriebe, das im Gesamtsystem

durch folgende Transformation eingeordnet ist:

$$\mathbf{q}^{(3)} = \begin{pmatrix} R\varphi \\ x_2 \\ y_2 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Seine Steifigkeitsmatrix folgt aus Tabelle 5.3, Fall 6, mit $c_1 \triangleq c_{35}$, $c_2 \triangleq c_5$ und $\lambda = R/l$.

Die vierte Substruktur ist das Gestell, das mit zwei Punktmassen und zwei Längsfedern modelliert wird. Es entspricht dem Torsionsschwinger in Tabelle 5.3, Fall 3, mit $c_{T1} \triangleq c_2$, $c_{T2} \triangleq c_{12}$, $J_1 \triangleq m_2$, $J_2 \triangleq m_1$, so daß wegen $q_1^{(4)} = x_2$, $q_2^{(4)} = x_1 + x_2$

$$\mathbf{q}^{(4)} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_{12} \end{pmatrix} \quad (17)$$

gilt.

Aus den Substrukturen der Zahnradpaarung, des Schubkurbelgetriebes, des Torsionsschwingers und des längselastischen Gestells wurden gemäß (5.3.5./9) die Matrizen gewonnen, von denen hier nur die Steifigkeitsmatrix (18) angegeben sei (siehe S. 258; dort ist $s = \sin(\alpha + \gamma)$, $c = \cos(\alpha + \gamma)$). In Zeile und Spalte 2, 5, 6, 7 erkennt man darin z. B. die Elemente der Steifigkeitsmatrix des Kurbelgetriebes (Tabelle 5.3, Fall 6) wieder. Die Massematrix ist eine Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonale die Elemente J_6 , J_5 , m_6 , m_6 , m_5 , m_5 , m_3 , m_2 und m_1 stehen. In Abschnitt 5.5.4.1. wird auf die Lösung der Bewegungsgleichungen für dieses Pressenmodell eingegangen.

5.3.6. Allgemeines zu Systemen mit vielen Freiheitsgraden

Für den Ingenieur, der eine Maschine mit günstigen dynamischen Eigenschaften bei hohen Drehzahlen konstruieren soll, besteht die Aufgabe vor allem darin, gefährliche Resonanzzustände zu vermeiden. Ihn interessieren die Bedingungen, unter denen Resonanzen auftreten, und Maßnahmen, wie diese beseitigt werden können. Hier soll deshalb zusammenfassend dazu etwas gesagt werden.

Entsprechend dem Herangehen in Abschnitt 5.3.2. kann infolge des kleinen Einflusses dissipativer Kräfte der Übergang zu Hauptkoordinaten erfolgen und die Resonanzbedingungen für die n Bewegungsgleichungen, die jeweils einer Eigenschwingform entsprechen, getrennt formuliert werden, vgl. Abschnitt 4.3.1. Damit ergibt sich bei einer periodischen Erregung, daß Resonanz dann auftreten kann, wenn

$$k\Omega = \bar{\omega}_i, \quad i, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

gilt. Dabei ist k die Ordnung der Harmonischen der Erregung und $\bar{\omega}_i$ die i -te Eigenkreisfrequenz. In der Umgebung der durch (1) bestimmten Resonanzstellen für die

erzwungenen Schwingungen liegen die gefährlichen Drehzahlen, die als kritische Drehzahlen (n_{ik}) der Maschine bezeichnet werden, vgl. Abschnitt 5.3.7.

Daneben kann es kritische Gebiete der Parametererregung geben, vgl. (4.5.2./5). Sie liegen in der Umgebung der Frequenzen, die in erster Näherung der Beziehung

$$k\Omega = 2\bar{\omega}_i/j, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

gehörchen. Hier, wie in (1), ist $\bar{\omega}_i$ der pro Periode gemittelte Wert der i -ten Eigenkreisfrequenz.

Zu den Zonen der Parametererregung muß man auch die der sog. **Kombinationsresonanzen** zählen, bei denen

$$k\Omega = \bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j, \quad i \neq j = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

gilt. Diese kritischen Betriebszustände werden in Mechanismen aber schon bei relativ kleinen dissipativen Kräften unterdrückt und brauchen gewöhnlich nicht gefürchtet zu werden.

Genau genommen sind die verschiedenen Schwingformen des Systems mit vielen Freiheitsgraden (5.2.2./9) untereinander „parametrisch gekoppelt“, weshalb der Begriff des Stabilitätsgebiets einer bestimmten Schwingform nur bedingt einen Sinn hat [4.6], [4.41]. Bei der Trennung der Kopplungen beim Übergang zu Normalschwingungen werden diejenigen Massenkkräfte aus der Betrachtung ausgeschlossen, die bei der zeitlichen Änderung der Schwingformen entstehen. Allerdings ist die Kopplung verschiedener Eigenformen bei der betrachteten Aufgabenklasse erfahrungsgemäß schwach. Die formale Trennung der Eigenformen führt in der Regel bei den Zonen der Parametererregung zu einer größeren Reserve hinsichtlich der dynamischen Stabilität. Das kritische Niveau der Parametererregung kann man näherungsweise analog wie (4.5.1./7) berechnen. Grenzbedingungen zur Entstehung von Kombinationsresonanzen wurden für Mechanismen von VUL'FSON [27] angegeben.

Als Gegenmaßnahmen zur Vermeidung der durch (1) bis (3) beschriebenen Resonanzstellen kommen in Betracht:

- Beschränkung der Harmonischen auf eine möglichst kleine Anzahl, vgl. Abschnitt 4.6.2.
- Einsatz von Mechanismen mit schnell konvergierenden Fourierreihen, vgl. Abschnitt 1.4.3.
- Beeinflussung der Erregerharmonischen durch Kompensatoren oder Ausgleichsgetriebe, vgl. Abschnitt 3.4.2.
- Verlagerung der Eigenkreisfrequenzen, um im Betriebsdrehzahlbereich ein breites resonanzfreies Gebiet zu erreichen, vgl. Abschnitt 5.3.3., evtl. in Kombination mit dem Ausgleich einer wesentlichen Harmonischen oder der Anwendung eines Schwingungstilgers [11]
- Beeinflussung der Veränderlichkeit der „Eigenkreisfrequenzen“, um die Pulsantistiefe der Parametererregung und damit die Gefährlichkeit der Parameterresonanzen zu vermindern, vgl. Abschnitt 4.5.1.
- Einsatz regelbarer mechanischer, hydraulischer, pneumatischer oder elektromagnetischer aktiver Elemente zur Kompensation der Erregerkräfte [3.28]

— Beeinflussung der Eigenformen, so daß die Erregerkräfte mit ihnen keine Arbeit verrichten, vgl. Abschnitt 5.4.6.3.

Für alle diese Maßnahmen gibt es praktische Erfahrungen in der Ingenieurpraxis, aber es sprengt den Rahmen dieses Buches, hier weiter auf konstruktive Details einzugehen.

5.3.7. Beispiel: Nadelantrieb einer Kettenwirkmaschine

Als Beispiel für die Anwendung des Programms FEMAS wird das von RÖSSLER [4.37] untersuchte Antriebssystem der Nadelbarre einer Kettenwirkmaschine betrachtet, vgl. Bild 5.8. Es besteht aus vier Wellenabschnitten, die als Torsionsfedern (Tabelle 5.3, Fall 1) modelliert wurden, von denen über vier Koppelgetriebe (Tabelle 5.3, Fall 5) die Nadelbarre (Balken, vgl. Tabelle 5.3, Fall 2) angetrieben wird. Die

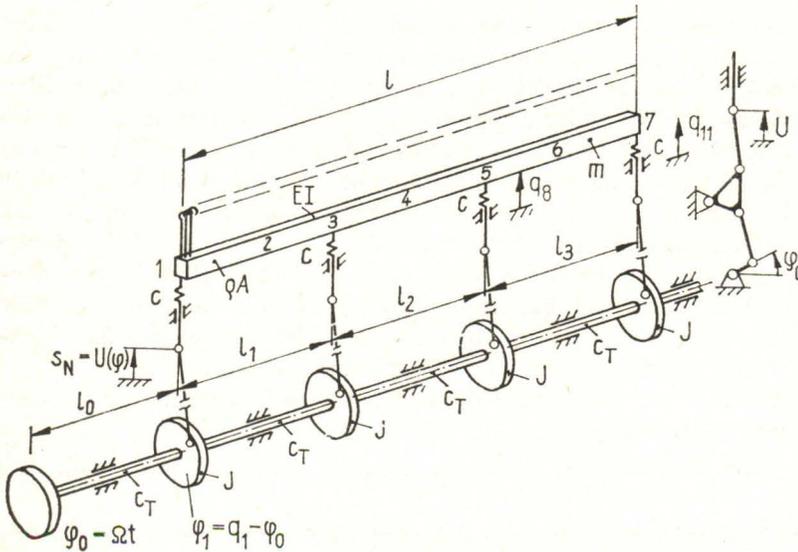


Bild 5.8 Antriebssystem der Nadelbarre einer Kettenwirkmaschine mit vier Teilmechanismen

Federkonstante c ist der Mittelwert der gemäß (4.2.1./18) reduzierten Steifigkeit eines Mechanismus. Dabei liegen folgende Parameter vor:

Torsionsfederkonstante	$c_T = 7,2 \cdot 10^4 \text{ Nm}$,
Biegesteifigkeit	$EI = 2,75 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$,
Federkonstante	$c = 3,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}$,
Massenträgheitsmoment	$J = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$,
Masse der Nadelbarre	$m = 16,41 \text{ kg} = \rho A(l_1 + l_2 + l_3)$,
Längen	$l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = 0,675 \text{ m}$.

Die Lagefunktionen werden durch das Koppelgetriebe bestimmt. Ihr Verlauf ist in Bild 5.10a dargestellt. Mit dem Rechenprogramm FEMAS wurden die stellungabhängigen Eigenfrequenzen und Eigenformen berechnet, wovon Bild 5.9 die ersten sechs zeigt. Für $U' = 0$ zeigen Welle und Balken voneinander unabhängige Eigenformen, die mit denen des eingespannten Torsionsstabes und des elastisch gestützten Balkens übereinstimmen. Da der Wert von U'_{\max} unbedeutend ist, wie man durch Vergleich mit den anderen Matrizenelementen in Tabelle 5.3, Fall 4, erkennen kann ($mU'^2 \ll J$), wirkt sich die Getriebestellung φ_0 nur wenig auf die Eigenfrequenzen aus. Bei den niederen Eigenformen ist die Kopplung der Schwingungen von Antriebswelle und Nadelbarre gering.

Der Drehwinkel φ_1 , der dem Moment in der Torsionsfeder des Wellenabschnitts l_0 proportional ist (vgl. Bild 5.8), und der Schwingweg q_{11} der Nadelbarre werden als

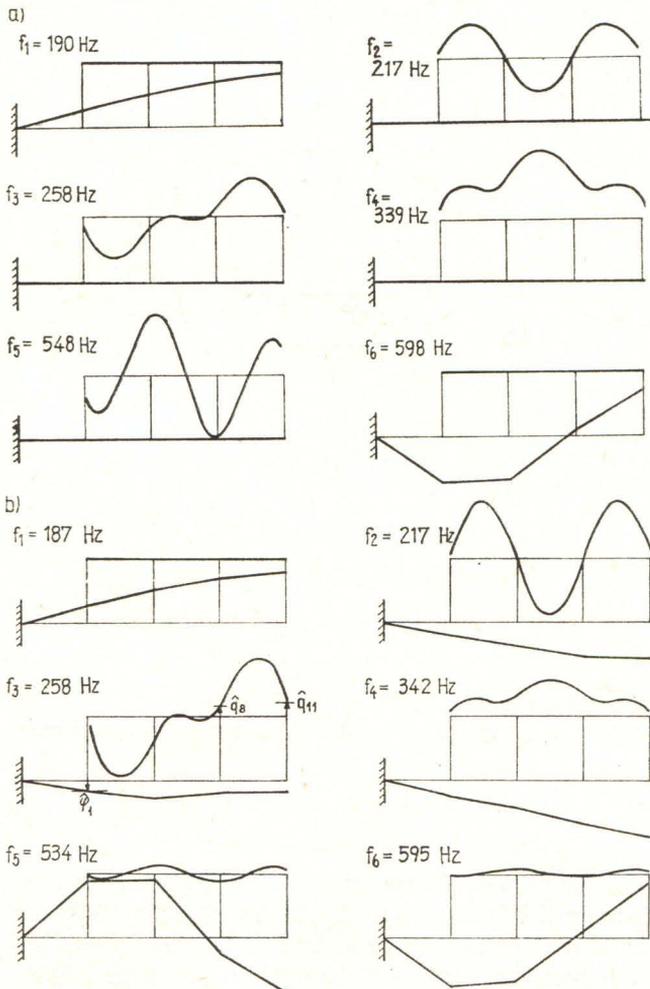


Bild 5.9 Eigenschwingformen des Antriebssystems von Bild 5.8

a) bei $U' = 0$,

b) bei $U' = 7,8$ mm/rad

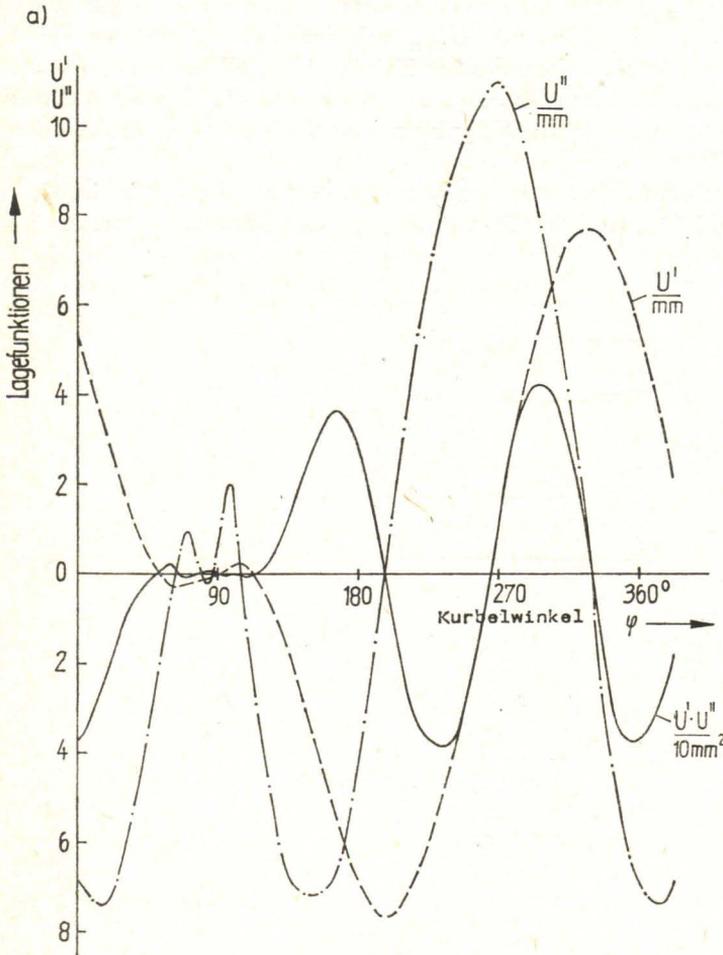
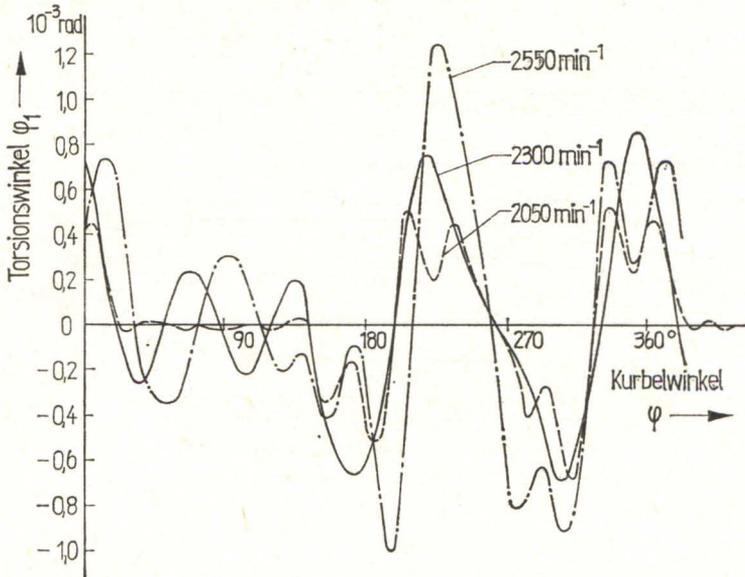


Bild 5.10 Zum Berechnungsmodell von Bild 5.9

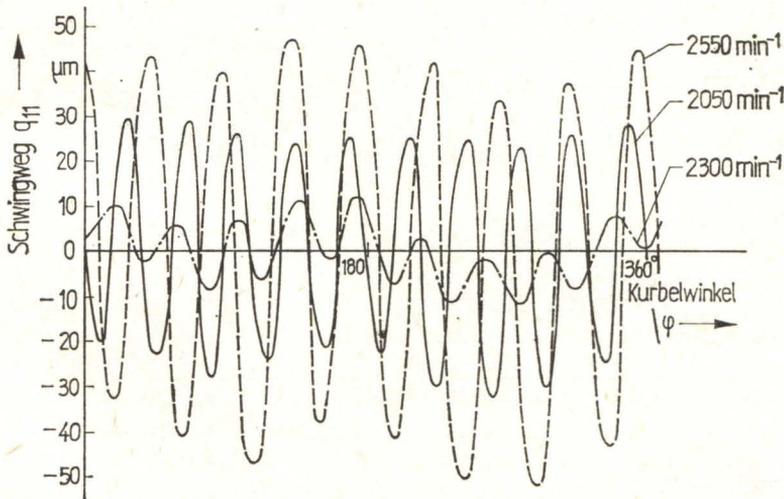
a) Lagefunktionen erster und zweiter Ordnung, b) dem Antriebsmoment proportionaler Torsionswinkel, c) Schwingweg

repräsentativ für das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems betrachtet. Bild 5.10 b und c zeigen den Zeitverlauf dieser Größen bei den Drehzahlen 2050, 2300 und 2550 min^{-1} . Das Torsionsmoment in der Antriebswelle ist betragsgleich dem Antriebsmoment, und es wird im wesentlichen durch den kinetostatischen Wert

b)



c)



$\bar{M}_{\text{an}} = m\Omega^2 U' U''$ bestimmt, der sich gemäß (2.2.1./13) ergibt. Mit Berücksichtigung der Schwingungen ist $M_{\text{an}} = c_T \varphi_1$ anwendbar.

Der kinetostatische Wert vergrößert sich mit dem Quadrat der Drehzahl. Ihm sind Schwingungen überlagert, deren Amplitude und Frequenz ebenfalls drehzahlabhän-

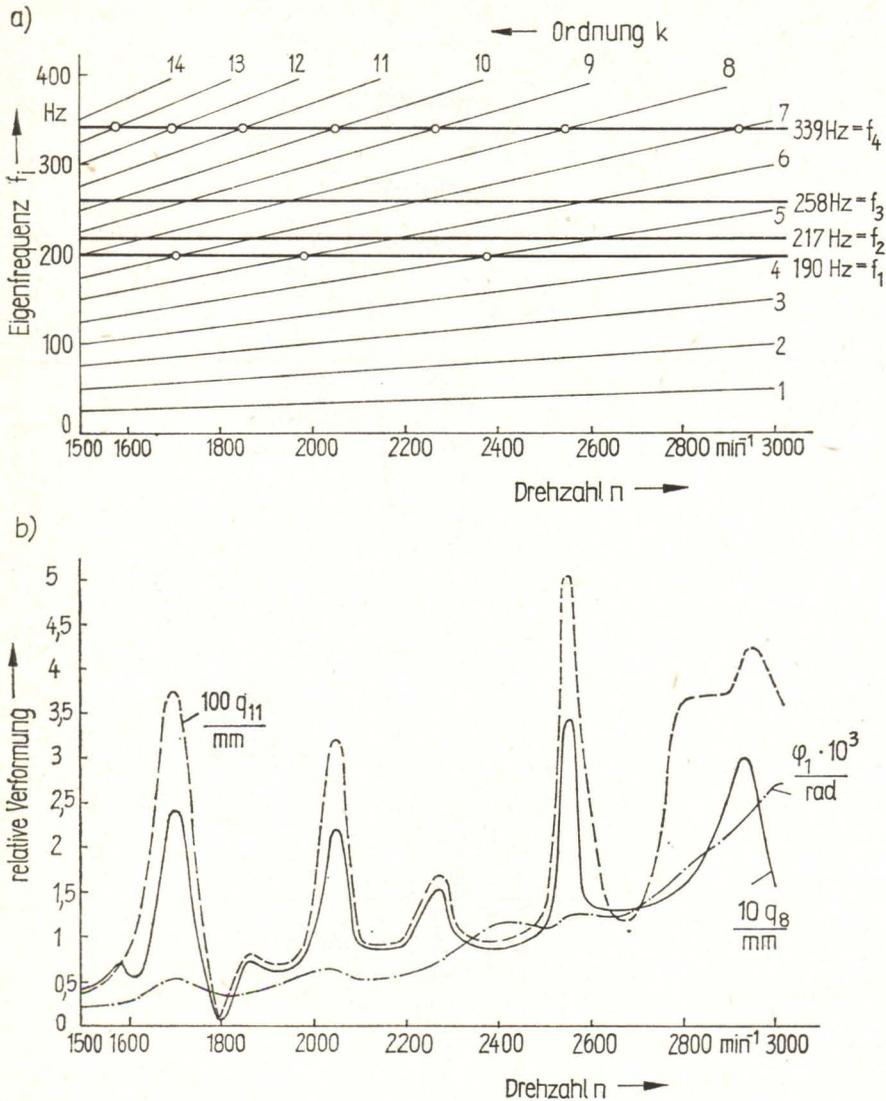


Bild 5.11 Rechenergebnis

a) Campbell-Diagramm, b) Maximalwerte als Funktion der Drehzahl

gig sind. Bei allen Drehzahlen n_{ik} , die der Resonanzbedingung (5.3.6./1) entsprechen, sind große Resonanzausschläge zu erwarten.

Aus Bild 5.10 ist zu sehen, daß das Antriebsmoment M_{an} und der Schwingweg q_{11} bei 2050 min^{-1} durch die 10. Harmonische beeinflusst wird, die bei 2046 min^{-1} mit f_4 in Resonanz gerät. Bei 2300 min^{-1} ist die Nähe der Resonanzstelle der 9. Harmonischen mit f_4 spürbar. Bei 2550 min^{-1} dominieren die Schwingungen der 8. Har-

monischen, die f_4 in Resonanz erregt. Sie entsprechen der kritischen Drehzahl $n_{48} = 2557 \text{ min}^{-1}$, vgl. (5.3.6./1).

Aus Bild 5.10c ist zu erkennen, welche Harmonischen die Schwingbewegung des Balkenendes bestimmen. Aus der Anzahl der Spitzenwerte pro Periode läßt sich ermitteln, daß bei 2050 min^{-1} die 10. Harmonische, bei 2300 min^{-1} die 9. Harmonische und bei 2550 min^{-1} die 8. Harmonische am meisten durch die Vergrößerungsfunktion verstärkt wurden, vgl. (4.3.1./16). Der niederfrequente Verlauf, dem diese Schwingungen überlagert sind, resultiert aus der kinetostatischen Deformation, die der Lagefunktion 2. Ordnung proportional ist ($F = mU''\Omega^2$), die in Bild 5.10a auch dargestellt ist. Die unterschiedliche Wirkung der Biegeschwingung der Nadelbarre auf das Antriebsmoment ist an Hand der in Bild 5.9 gezeigten Eigenschwingformen erklärlich. Als wesentlich erweisen sich alle Schwingungen mit der 4. Eigenform, bei welcher Nadelbarre und Antriebswelle in Gegenphase schwingen.

Trägt man die Extremwerte der Verformungen über der Drehzahl auf (Bild 5.11b), so erkennt man, welche Erregerharmonischen sich kritisch auswirken. Das Diagramm der zugeordneten Drehzahlen (Bild 5.11a) zeigt durch die Schnittpunkte der Geraden, wo die Resonanzbedingung (5.3.6./1) erfüllt ist. Verfolgt man die Spitzenwerte der Verläufe von Bild 5.11b bis hinauf zum Bild 5.11a, so erkennt man, daß alle kritischen Drehzahlen einem solchen Schnittpunkt zugeordnet werden können. Umgekehrt ist aber nicht jeder dieser Schnittpunkte gleich „gefährlich“, da die Fourierkoeffizienten der Erregung unterschiedlich und die Eigenformen maßgeblich sind.