

5.5. Nichtlineare Schwingungen von Mechanismen

5.5.1. Bemerkungen zu nichtlinearen Aufgaben

Der Übergang vom linearen zum nichtlinearen Berechnungsmodell verlangt gewöhnlich prinzipielle Erwägungen, weil viele wesentliche dynamische Erscheinungen nicht mit linearen Theorien erklärt werden können. Dazu gehört z. B. die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Amplitude; die Existenz verschiedener Betriebszustände bei gleicher Erregerfrequenz, deren Auftreten von den Anfangsbedingungen abhängt; subharmonische Schwingungen, deren Frequenz sich von der Erregerfrequenz unterscheidet; Selbstschwingungen u. a. Man muß betonen, daß nichtlineare Modelle, die nur zur Präzisierung von Ergebnissen benutzt werden, die mit einem linearen Modell erhalten wurden, gewöhnlich zweitrangige Bedeutung haben.

Die Ursachen von Nichtlinearitäten, die in der Mechanismendynamik auftreten, kann man einteilen in

- Nichtlineare technologische Kräfte infolge nichtlinearen Materialverhaltens (z. B. Umformkräfte von Pressen, Verdichterkräfte von Kompressoren, Kräfte von Textilien, Papier, u. a. Verarbeitungsvorgänge).
- Nichtlineare Dissipationskräfte, z. B. Coulombsche Reibung
- Nichtlineare unstetige Verbindungen von Bauteilen, z. B. Spiel in Kupplungen, Lagerspiel in Gelenken, Anschläge
- Geometrische Nichtlinearitäten bei großen Bewegungen.

Nichtlineare Eigenschaften mechanischer Systeme werden oft zielgerichtet ausgenutzt, um gewünschte dynamische Effekte zu erreichen. Als Beispiele können verschiedene Schwing-Stoß-Systeme [4.4], die Synchronisationserscheinungen in mechanischen Systemen [6], [22], nichtlineare Schwingungsisolierungen [4.45] und verschiedenartige Selbstschwingungssysteme genannt werden, die in vielen Gebieten der Technik auftreten.

Andererseits muß sich der Ingenieur auch oft mit unerwünschten nichtlinearen Effekten auseinandersetzen, z. B. mit subharmonischen Resonanzen, Stößen infolge Spiel, selbsterregten Reibungsschwingungen u. a.

Die nichtlinearen Systeme und ihre Untersuchungsmethoden bilden einen bedeutenden Teil der Schwingungstheorie und der Systemtheorie. Die größere Schwierigkeit, solche Systeme zu untersuchen und Ingenieurberechnungen zugänglich zu machen, ist im Vergleich mit linearen Systemen damit verbunden, daß mit Ausnahme weniger Sonderfälle, die kaum praktisches Interesse besitzen, exakte Lösungen von Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen fehlen.

Zur Untersuchung nichtlinearer Systeme werden sowohl numerische als auch analytische Methoden angewendet. Manchmal begegnet man der Meinung, daß die Bedeutung analytischer Methoden dank der starken Entwicklung der numerischen Mathematik und der elektronischen Rechentechnik wesentlich abnimmt. Jedoch zeigt die Erfahrung bei der Lösung nichtlinearer Aufgaben überzeugend, daß diese vom Problembearbeiter ein tieferes Verständnis des physikalischen Wesens der betrachteten Erscheinungen und der entstehenden spezifischen nichtlinearen Effekte erfordern. Dies ist undenkbar ohne die Beherrschung der analytischen Methoden. Außerdem wurde erkannt, daß die vom Standpunkt der Rechenzeit effektiven Berechnungsmethoden auf analytischen Methoden beruhen, welche der Natur der Erscheinungen qualitativ gerecht werden. Deshalb muß man auch bei dieser Aufgabenklasse anstreben, numerische und analytische Methoden sinnvoll zu verbinden. Den Lösungsmethoden für nichtlineare Schwingungsprobleme sind viele Arbeiten gewidmet, z. B. [1], [6], [22], [33], [4.5], [4.17], [4.28], [4.33], [4.45].

5.5.2. Numerische Integration

Eine wesentliche Aufgabe in der Dynamik von Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden besteht darin, die Zeitverläufe der Bewegungen (der Koordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen) und die inneren Belastungen zu berechnen. Wenn keine vollständige Linearisierung bezüglich aller Koordinaten möglich ist, müssen die nichtlinearen Differentialgleichungen in der Form (5.2.1./11), (5.2.1./20) oder (5.2.1./21) numerisch gelöst werden.

Gegenüber dem allgemeinen mathematischen Problem der Integration nichtlinearer Differentialgleichungen bestehen einige Besonderheiten der Mechanismen, die es erlauben, einige restriktive Bedingungen zu nennen.

Die Nichtlinearitäten unterliegen i. a. nicht der Einschränkung, daß sie schwach sind, aber sie beziehen sich bei Mechanismen meist nur auf wenige Koordinaten, da das Gestell, in dem die Mechanismen gelagert sind, oft ein lineares Schwingungssystem darstellt. Man kann die Tatsache ausnutzen, daß es sich um ein lineares Grundsystem mit wenigen Nichtlinearitäten handelt. Die folgende Darstellung stützt sich auf KALTOFEN [5.35].

Die auftretenden Nichtlinearitäten lassen sich in einem Vektor $f_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ ausdrücken, und es ist möglich, ein lineares Grundsystem in Form der Matrizen $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ und $\bar{\mathbf{C}}$ abzuspalten, die Elemente von konstanter Größe haben. Es sind dann aus

(5.2.1./11) nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\bar{M}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{B}\dot{\mathbf{q}} + \bar{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}_l(t) + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (1)$$

zu gewinnen und zu integrieren. Das System besitzt den Freiheitsgrad n . Die nichtlinearen Terme werden als „Pseudo-Erregerkräfte“ auf der rechten Seite von (1) berücksichtigt, vgl. Abschnitt 5.2.2. Die Analyse des dynamischen Verhaltens bezieht sich entweder auf instationäre Zustände, wie z. B. Anlaufen, Bremsen und Resonanzdurchlauf, oder auf stationäre Zustände, die durch das mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umlaufende Antriebsglied eines Mechanismus bedingt sind. In beiden Fällen erstreckt sich die Integration auf ein endliches Intervall, das durch eine Endzeit t_E und bei periodischen Vorgängen durch die Periodendauer T begrenzt ist, vgl. Abschnitt 5.5.

Bei instationären Vorgängen sind zum Anfangszeitpunkt die Koordinaten und deren Geschwindigkeiten bekannt, so daß ein Anfangswertproblem mit folgenden Anfangsbedingungen zu lösen ist:

$$t = t_0: \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t_0) = \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (2)$$

Das gesamte Intervall (t_0, t_E) wird in Teilintervalle diskretisiert, für die

$$t_k = t_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

gilt. Bei der Wahl der Schrittweite h muß man beachten, daß ein weites Spektrum von Eigenkreisfrequenzen ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) des Systems (1) existiert, bei dem das Verhältnis $\omega_{\max}/\omega_{\min}$ im allgemeinen mehrere Zehnerpotenzen beträgt. In der mathematischen Literatur werden solche Systeme als „steif“ bezeichnet [5.33], [5.49].

Bei der numerischen Integration steifer Systeme besteht folgender Widerspruch: Paßt man die Schrittweite h den hochfrequenten Komponenten mit $\omega_{\max}$ an, so wird sie extrem klein. Es werden viele Schritte nötig, und demzufolge treten größere Rundungsfehler auf. Wählt man eine größere Schrittweite, so wird zwar der Rechenaufwand kleiner, aber die „steifen“ Anteile werden ungenau berechnet und führen leicht zu numerischen Instabilitäten.

Man muß also mit Schrittweiten rechnen, die den wesentlichen Schwingungen des dynamischen Systems angepaßt sind. Aus der Vielzahl der existierenden numerischen Verfahren, die in der Literatur [5.2], [5.25] zu finden sind, hat man solche auszuwählen, die den Forderungen nach erträglichem numerischen Aufwand und ausreichender Genauigkeit der Ergebnisse Rechnung tragen. Numerische Integrationsverfahren wurden eingehend analysiert und verglichen [5.14], [5.47], [5.68]. Die am häufigsten benutzten Verfahren, die sich bei Strukturdynamik-Aufgaben bewährt haben, sind das BDF-, das Newmark- und das Wilson-Verfahren [5.6], [5.35], [5.47], [5.68]. Die Auswahl eines günstigen Verfahrens ist abhängig von den Systemeigenschaften, dem Umfang der „rechten Seite“, den Genauigkeitsanforderungen u. a.

Bei Mechanismenschwingungen in „steifen“ Systemen sind die von GEAR [5.22] entwickelten BDF-Verfahren, die eine Unterklasse der linearen Mehrschrittverfahren sind, für die betrachtete Modellklasse gut geeignet. Sie sind den Runge-Kutta-Verfahren und den Extrapolationsverfahren überlegen, da sie numerisch stabil sind.

Um BDF-Verfahren anwenden zu können, transformieren wir das ursprüngliche Problem (1) in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Man benutzt zweckmäßig nach [5.2] den Hilfsvektor

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{q} \quad (4)$$

und erhält durch die Kombination mit (1) die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_k :

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_k \\ \dot{\mathbf{v}}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}} & -\mathbf{E} \\ \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{nlk} + \mathbf{f}_{tk} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Die BDF-Operatoren sind von der Form

$$h\beta_0\dot{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=0}^l \alpha_i \mathbf{y}_{k-i}. \quad (6)$$

Dabei sind die α_i und β_0 skalare Faktoren ($\alpha_0 = 1$), und l ist die Anzahl der benutzten Rückwärtsdifferenzen. Setzt man den Operator (6) mit

$$\mathbf{y}_k^T = (\mathbf{q}_k^T, \mathbf{v}_k^T) \quad (7)$$

in (5) ein, so erhält man mit den „historischen Vektoren“

$$\mathbf{h}_k^q = -\sum_{i=1}^l \alpha_i \mathbf{q}_{k-i}, \quad \mathbf{h}_k^v = -\sum_{i=1}^l \alpha_i \mathbf{v}_{k-i}, \quad (8)$$

das wegen der Funktionen f_{nt} nichtlineare Gleichungssystem

$$(\bar{\mathbf{M}} + h_\beta \bar{\mathbf{B}}) \mathbf{q}_k - h_\beta \mathbf{v}_k = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{h}_k^q, \quad (9)$$

$$h_\beta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{q}_k + \mathbf{v}_k = h_\beta (\mathbf{f}_{tk} + \mathbf{f}_{nlk}) + \mathbf{h}_k^v, \quad (10)$$

das aus (5) folgt. Dabei ist

$$h_\beta = \beta_0 h \quad (11)$$

die „verallgemeinerte Schrittweite“. Nach der Elimination von $\mathbf{v}_k$ aus (10) und Einsetzen in (9) erhält man ein Gleichungssystem für $\mathbf{q}_k$. Es kann in der Form

$$\mathbf{A} \mathbf{q}_k = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_{NLk} \quad (12)$$

geschrieben werden, mit

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{M}} + h_\beta \bar{\mathbf{B}} + h_\beta^2 \bar{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{f}_k = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{h}_k^q + h_\beta \mathbf{h}_k^v + h_\beta^2 \mathbf{f}_{tk}, \quad \mathbf{f}_{NLk} = h_\beta^2 \mathbf{f}_{nlk}. \quad (13)$$

Mit dieser Vorgehensweise ist das Problem der numerischen Integration auf ein Gleichungssystem reduziert worden, das zu jedem Zeitpunkt t_k (im Fall der Nichtlinearität iterativ) gelöst werden muß.

5.5.3. Reduktion der Anzahl der Koordinaten

Die **Kondensationsmethode** ist anwendbar, wenn die Anzahl n_N der Koordinaten, an denen Nichtlinearitäten wirken, klein gegenüber der Gesamtanzahl n der Koordinaten des Systems ist, von denen n_L einem linearen Grundsystem zugeordnet werden

können ($n = n_N + n_L$). Nach einem eventuell nötigen Umsortieren der Einzelgleichungen hat das Gleichungssystem (5.5.2./12) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_{NN} & A_{NL} \\ A_{LN} & A_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_N \\ \mathbf{q}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{NL} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A_{NL}^T = A_{LN}. \quad (1)$$

In (1) wurden also die Matrix A und die Vektoren $\mathbf{q}$ und $\mathbf{f}$ entsprechend der Aufteilung des Koordinatenvektors partitioniert. Aus (1) ergibt sich das Gleichungssystem

$$A_{NN}\mathbf{q}_N + A_{NL}\mathbf{q}_L = \mathbf{f}_N + \mathbf{f}_{NL}, \quad (2)$$

$$A_{LN}\mathbf{q}_N + A_{LL}\mathbf{q}_L = \mathbf{f}_L. \quad (3)$$

Aus (3) folgt

$$\mathbf{q}_L = A_{LL}^{-1}(\mathbf{f}_L - A_{LN}\mathbf{q}_N). \quad (4)$$

Einsetzen in (2) liefert ein nichtlineares Gleichungssystem für $\mathbf{q}_N$, das jedoch nur noch die kleine Dimension n_N hat. Mit

$$\mathbf{f}_{\text{red}} = \mathbf{f}_N - A_{NL}A_{LL}^{-1} \cdot \mathbf{f}_L, \quad (5)$$

$$A_{\text{red}} = A_{NN} - A_{NL}A_{LL}^{-1}A_{LN} \quad (6)$$

ergibt sich die reduzierte Gleichung zu

$$A_{\text{red}}\mathbf{q}_N = \mathbf{f}_{\text{red}} + \mathbf{f}_{NL}. \quad (7)$$

Die Inversion der Matrix A_{LL} kann umgangen werden, vgl. [5.14], S. 216.

Die nichtlinearen Funktionen in $\mathbf{f}_{NL}$ können von $\dot{\mathbf{q}}_N$ und $\ddot{\mathbf{q}}_N$ abhängen. Da (7) ohnehin iterativ gelöst wird, kann aus dem berechneten Vektor $\mathbf{q}_{Ni}$ (i ist die Nummer der Iteration) auch $\dot{\mathbf{q}}_{Ni}$ und $\ddot{\mathbf{q}}_{Ni}$ berechnet und zur Berechnung von $\mathbf{f}_{NLi}$ eingesetzt werden. Aus (7) wird $\mathbf{q}_N$ und dann aus (4) $\mathbf{q}_L$ ermittelt.

Der Vorteil dieser Reduktion besteht darin, daß die Lösung des großen nichtlinearen Systems (1) vermieden und auf das kleinere Problem (7) reduziert wird.

Die Methode der **modalen Superposition**, die ebenfalls das Ziel hat, gegenüber der direkten Integration den Rechenaufwand zu senken, basiert auf den Grundgedanken der modalen Analyse eines linearen Systems. Dazu wird aus der nichtlinearen Vektordifferentialgleichung (5.5.2./1) ein lineares ungedämpftes Grundsystem abgespalten. Dann wird für das homogene lineare Grundsystem, welches durch die Matrizen $\bar{C}$ und $\bar{M}$ beschrieben wird, das Eigenwertproblem

$$(\bar{C} - \omega^2 \bar{M}) \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

mit dem Ansatz

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} e^{i\omega t} \quad (9)$$

gelöst. Man wählt aus praktischen Gründen die Eigenformen und Eigenfrequenzen des gemittelten Systems, obwohl auch die in Abschnitt 5.3.2. behandelten Quasieigenfrequenzen, die von der Getriebestellung abhängig sind, geeignet wären. Sie bedingen aber einen höheren Rechenaufwand, da das Eigenwertproblem (8) vielfach gelöst werden müßte, und damit gingen die Vorteile dieser Methode verloren.

Die modale Superposition ist für die nichtlinearen Probleme der Mechanismendynamik als eine Näherungsmethode anzusehen, die einen Kompromiß zwischen Aufwand und Genauigkeit darstellt. Diese Methode geht von der physikalisch begründeten Überlegung aus, daß die Systemantwort nur durch m Eigenformen, deren Eigenfrequenzen den Erregerfrequenzen am nächsten liegen, repräsentiert wird und der Anteil der restlichen $n - m$ Eigenformen vernachlässigt werden kann. Im allgemeinen werden bei Mechanismenschwingungen die untersten m Eigenformen relevant sein.

Die modale Superposition kann man als eine Transformation der Lagekoordinaten $\mathbf{q}$ auf die Modalkoordinaten $\mathbf{p}$ auffassen, vgl. (5.3.2./5). Diese Transformation ist dann effektiv, wenn nur einige wenige Modalkoordinaten verwendet zu werden brauchen ($m \ll n$). Man kann davon ausgehen, daß diejenigen Eigenformen benötigt werden, welche zu den Eigenfrequenzen gehören, die höchstens drei- bis viermal so groß wie die höchste in der Erregerfunktion f enthaltene Frequenz ist. In vielen praktischen Fällen ist damit eine wirksame Reduktion möglich.

Mit der Modalmatrix $\mathbf{V}$, deren m Spalten die Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$ der gemäß (5.3.2./7) verallgemeinert orthogonalen linear unabhängigen Eigenformen der m ausgewählten Eigenfrequenzen des Systems (8) sind, lautet die Koordinatentransformation

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}. \quad (10)$$

$\mathbf{V}$ ist eine Rechteckmatrix, die n Zeilen und m Spalten hat. Durch Einsetzen von $\mathbf{q}$ aus (10) in (5.5.2./1) und Linksmultiplikation mit $\mathbf{V}^T$ erhält man ein System der Dimension m :

$$\ddot{\mathbf{p}} + 2\delta\dot{\mathbf{p}} + \omega^2\mathbf{p} = \mathbf{V}^T[\mathbf{f}_i(t) + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{V}\mathbf{p}, \mathbf{V}\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}})]. \quad (11)$$

Dabei wurde die Modalmatrix mit

$$\mathbf{V}^T\bar{\mathbf{M}}\mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (12)$$

normiert und die Abkürzungen

$$2\delta = \mathbf{V}^T\bar{\mathbf{B}}\mathbf{V}, \quad \omega^2 = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (13)$$

eingeführt. δ ist im allgemeinen keine Diagonalmatrix, und ω^2 enthält die m Eigenfrequenzen, die zu den ausgewählten m Eigenformen gehören. Die rechte Seite von (11) zu ermitteln kostet wegen der bei jedem Zeit- und Iterationsschritt erforderlichen Transformation (10) zur Berechnung von $\mathbf{f}_{NL}$ in (11) einen gewissen Mehraufwand. Trotzdem ist diese Vorgehensweise effektiv, weil nur eine m -dimensionale Gleichung zu integrieren ist. Neben der erheblich verminderten Dimension weist (11) gegenüber (5.5.2./1) den Vorteil auf, daß die höchste Eigenkreisfrequenz ω_m bekannt ist. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß (11) ohne Invertierung nach den Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{p}}$ auflösbar ist.

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 5.5.2. empfohlenen BDF-Verfahren bietet sich zur Integration von (11) ein explizites Verfahren an, da schon die Auflösung nach den Beschleunigungen erfolgte. Es kann von den Zustandsgrößen bis zur Zeit t_{k-1} direkt auf die zum Zeitpunkt t_k geschlossen werden. Unter den expliziten Integra-

tionsverfahren fällt der CD(central difference)-Methode eine gewisse Sonderstellung zu, da sie den geringsten Aufwand pro Zeitschritt benötigt [5.8], [5.49]. Ihre numerische Stabilitätsgrenze liegt bei $\omega_{\max} \cdot h = 2,0$.

Bei Antriebssystemen ist es oft schwierig, das Eigenwertproblem (8) zu lösen. Wenn im Berechnungsmodell Antriebskoordinaten vorkommen, deren Zeitverlauf erst berechnet werden soll, so wird die Steifigkeitsmatrix singulär. Ähnlich verhält es sich, wenn in der Hauptdiagonalen der Massenmatrix Nullen auftreten oder virtuelle Koordinaten dem mechanischen Modell hinzugefügt werden (z. B. dynamische Kennlinie eines Motors). Dann werden, wie bei jedem freien System, bei dem Bewegungen möglich sind, ohne daß Rückstellkräfte auftreten, die ersten Eigenfrequenzen gleich 0. In solchen Fällen ist die modale Reduktionsmethode nicht anwendbar. Die anfangs gezeigte Kondensationsmethode hat den Nachteil, daß große Systeme viel Rechenzeit beanspruchen.

Die Nachteile beider Methoden können jedoch vermieden werden, wenn man eine von KALTOFEN vorgeschlagene Methode benutzt. Die folgende Darstellung lehnt sich an [5.35] an.

Das ursprüngliche System (Freiheitsgrad n) wird in zwei Substrukturen aufgeteilt. Diese Aufteilung erfolgt nicht notwendigerweise nach dem geometrischen Aufbau des vorliegenden Systems. Sie basiert darauf, daß die eine Substruktur mit dem Freiheitsgrad n_1 alle Koordinaten $\mathbf{q}_1$ enthält, auf welche dynamische Erregungen (eingepreßte Erregerkräfte und nichtlineare Pseudoerregungen) wirken, und diejenigen, welche die Lösung des Eigenwertproblems verhindern. Die andere Substruktur beinhaltet die restlichen Koordinaten $\mathbf{q}_2$ und besitzt den Freiheitsgrad $n_2 = n - n_1$.

Die Bewegungsgleichungen (5.5.2./1) werden nach vorausgegangener Umordnung in folgender Weise partitioniert, wobei $\mathbf{f}_t$ noch in eine statische ($\mathbf{f}_s$) und eine dynamische ($\mathbf{f}(t)$) Komponente zerlegt wird:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{s1} \\ \mathbf{f}_{s2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{nl} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Es wird die Koordinatentransformation

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \mathbf{q}^* \quad (15)$$

angewendet, in welcher die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ von den Substruktur-Modalsynthese-Verfahren von CRAIG/BAMPTON [5.13] bekannt ist ([32], [5.10]),

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{22}^{-1} \mathbf{C}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

und die Untermatrix $\mathbf{V}_{22}$ eine Rechteckmatrix mit n_2 Zeilen und m Spalten ist, die sich aus der Modalmatrix des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{C}_{22} - \omega_{0i}^2 \mathbf{M}_{22}) \mathbf{v}_i = 0 \quad (17)$$

ergibt, wenn dort nach m Eigenschwingformen abgebrochen wird. Der neue Koordinatenvektor ist $\mathbf{q}^*{}^T = (\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^*{}^T)$, wobei $\mathbf{q}_2^*$ nur $m \ll n_2$ Komponenten hat.

Die Transformationsmatrix T kann als ein Ansatz Ritzscher Koordinaten aufgefaßt werden, mit dem die Eigenschwingformen des ursprünglichen Systems approximiert werden. Die Untermatrix $-C_{22}^{-1}C_{21}$ repräsentiert dabei die statische Lösung bei Einheitsverschiebungen an der ersten Substruktur (q_1).

Damit kann das Problem (14), welches die Dimension $n = n_1 + n_2$ hat, auf ein System mit dem Freiheitsgrad $m + n_1$ vor Beginn der numerischen Integration reduziert werden:

$$M^* \ddot{q}^* + B^* \dot{q}^* + C^* q^* = f_s^* + f^*(t) + f_{nl}^*(t, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1). \quad (18)$$

Die Matrizen in (18) ergeben sich analog (5.3.5./4) zu

$$M^* = T^T M T, \quad B^* = T^T B T, \quad C^* = T^T C T. \quad (19)$$

Ausführlich gilt mit der Normierung $V_{22}^T M_{22} V_{22} = E$:

$$\begin{aligned} M^* &= \begin{pmatrix} M_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} M_{21} - (C_{12} C_{22}^{-1} M_{21})^T + C_{12} C_{22}^{-1} M_{22} (C_{12} C_{22}^{-1})^T & \text{symm.} \\ M_{12} V_{22} - C_{12} C_{22}^{-1} M_{22} V_{22} & E \end{pmatrix}, \\ B^* &= \begin{pmatrix} B_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} B_{21} - (C_{12} C_{22}^{-1} B_{21})^T + C_{12} C_{22}^{-1} B_{22} (C_{12} C_{22}^{-1})^T & \text{symm.} \\ B_{12} V_{22} - C_{12} C_{22}^{-1} B_{22} V_{22} & V_{22}^T B_{22} V_{22} \end{pmatrix}, \\ C^* &= \begin{pmatrix} C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21} & 0 \\ 0 & V_{22}^T C_{22} V_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Dabei ist $V_{22}^T C_{22} V_{22} = \text{diag}(\omega_{0i}^2)$.

Die rechte Seite in (18) ergibt sich aus derjenigen von (14) bei dieser Transformation zu

$$f_s^* = T^T f_s = \begin{pmatrix} f_{s1} - C_{12} C_{22}^{-1} f_{s2} \\ V_{22}^T f_{s2} \end{pmatrix}, \quad f^*(t) = f(t), \quad f_{nl}^* = f_{nl}. \quad (21)$$

Die Anfangswerte findet man aus den ursprünglichen Lagekoordinaten unter Benutzung von (15), (16) und (19):

$$q_{10}^* = q_{10}, \quad \dot{q}_{20}^* = \text{diag}(1/\omega_{0i}^2) (V_{22}^T C_{21} \dot{q}_{10} + V_{22}^T C_{22} \dot{q}_{20}), \quad (22)$$

$$\ddot{q}_{10}^* = \ddot{q}_{10}, \quad \ddot{q}_{20}^* = \text{diag}(1/\omega_{0i}^2) (V_{22}^T C_{21} \ddot{q}_{10} + V_{22}^T C_{22} \ddot{q}_{20}). \quad (23)$$

Diese Art der Reduktion bedeutet zunächst einen großen Aufwand vor der Integration. Da er jedoch nur einmal getrieben werden muß, ist er bei großen Systemen gerechtfertigt, weil

- die Dimension von großen Systemen stark reduziert werden kann,
- die Transformation der Vektoren $f(t)$ und f_{nl} entfällt,
- die nichtlinearen Kräfte f_{nl} lokal begrenzt bleiben, so daß während der Integration die Kondensationsmethode angewendet werden kann [32].

Derartige Verfahren wurden in Rechenprogramme umgesetzt und lieferten Lösungen für große Systeme, wo andere Verfahren infolge des großen Rechenaufwandes scheiterten [5.35], [5.57].

5.5.4. Berechnung periodischer Lösungen

Die Berechnung periodischer Lösungen nichtlinearer Mechanismenschwingungen wird im Maschinenbau selten vorgenommen. Dem Anliegen dieses Buches entsprechend mögen deshalb hier einige Bemerkungen genügen.

Aus der Theorie der nichtlinearen Schwingungen folgt, daß das Differentialgleichungssystem (5.5.2./1) die Voraussetzungen für die Existenz periodischer Lösungen besitzt ([33], [4.17], [5.20]), denn alle Koeffizienten dieser Differentialgleichung setzen sich aus einer Summe von periodischen Funktionen mit der gemeinsamen Zyklusdauer T (bedingt durch den vollen Umlauf der Antriebskurbel eines Mechanismus) zusammen. Die Bedingungen für die Periodizität lauten

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T), \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}(T). \quad (1)$$

Für die Lösung dieser durch (5.5.2./1) und (1) definierten nichtlinearen Randwertaufgabe stehen zur Verfügung

- die Verfahren von RITZ-GALERKIN [5.42], [5.58]
- die Kollokationsmethode [5.43], [5.53]
- die asymptotische Entwicklung (Mittelungsmethode) nach BOGOLJUBOW-MITROPOLSKI [4.5]
- iterative Methoden [33], [4.41].

Wenn man die Werte der Koordinaten (1) kennen würde, könnte man die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen numerischen Integrationsverfahren zur Berechnung des Zeitverlaufs der Lösung innerhalb einer Periode benutzen. Um solche Werte zu bestimmen, kann man eine Optimierungsmethode einsetzen, die das Minimum der Zielfunktion

$$F = \sum_{k=1}^n \{ [q_k(T) - q_k(0)]^2 \Omega^2 + [\dot{q}_k(T) - \dot{q}_k(0)]^2 \} \quad (2)$$

ermittelt. Die Anfangsbedingungen der periodischen Lösung sind gefunden, wenn $F = 0$ ist.

Da durch „falsche Anfangsbedingungen“ in dem Mechanismus Eigenschwingungen angeregt werden, die nur bei geeigneter Dämpfung abklingen, ist dieses rein mathematisch begründete Vorgehen problematisch. Infolge der praktisch stets vorhandenen Dämpfung entstehen bei realen Mechanismen nach einer gewissen Zeit stationäre Lösungen, wenn die Einflüsse der Anfangsbedingungen nicht mehr vorhanden sind. Daraus resultiert ein einfaches Verfahren, welches auf Mechanismenschwingungen in [4.13], [5.3], [5.23] und [5.17] erfolgreich angewendet wurde.

Ausgehend von willkürlich vorgegebenen Anfangsbedingungen wird die Bewegungsgleichung über mehrere Perioden numerisch integriert, bis sich der stationäre Zustand einstellt. Das Verfahren kann beschleunigt werden, wenn die Dämpfung zu Beginn der Berechnung noch größer als in Wirklichkeit vorhanden gewählt und danach erst auf den realen Wert „zurückgestellt“ wird.

Diese Herangehensweise ist vom mathematischen Standpunkt sehr gewagt, denn es existieren bei nichtlinearen Problemen theoretisch mehrere stationäre Lösungen.

Vom ingenieurtechnischen Standpunkt besitzt aber die überwältigende Mehrheit der realen Mechanismen solche „gutartigen“ dynamischen Eigenschaften, daß nur ein stationärer Zustand (z. B. bei Gestellschwingungen einer Maschine infolge des in ihr gelagerten Mechanismus) auftritt.

Das skizzierte Herangehen ist also nur bei „gutartigen“ Mechanismen vertretbar. Wenn man, was selten der Fall ist, schon alle Parameterwerte eines Mechanismus kennt, bevor er gebaut wurde, und allein von diesen Daten das dynamische Verhalten vorausberechnen soll, so wird empfohlen, alle Lösungsvarianten des Optimierungsproblems (2) zu ermitteln. Dabei ist wiederholt eine numerische Integration über eine Periode T erforderlich, um die Werte $\mathbf{q}(T)$ und $\dot{\mathbf{q}}(T)$ zu berechnen.

5.5.5. Beispiele

5.5.5.1. Pressenantrieb im Gestell

Dynamische Belastungen in Kurbelpressen bei verschiedenen technologischen Operationen wurden von HUPFER [5.31] mit einigen Berechnungsmodellen untersucht, zu denen auch das in Bild 5.7 dargestellte zählt. Es stellte sich heraus, daß die wesentlichen dynamischen Erscheinungen nur dann qualitativ richtig erfaßt werden, wenn die Kurbelpressen als gekoppelte Torsionslängsschwinger modelliert werden, weil die Wechselwirkung der Schwingungen von Antriebs- und Tragsystem wesentlich ist.

Ebenso wie in anderen Untersuchungen von Mechanismen im Gestell [5.54] hat sich die Auffassung bestätigt, daß es zweckmäßig ist, zunächst das Minimalmodell eines linearisierten ungedämpften Systems zu analysieren, d. h. Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen dafür zu ermitteln, und überschlägig die Eigenschwingungen zu berechnen. Auf diese Weise gewinnt man Vorstellungen über die physikalischen Ursachen, über wesentliche Parameter (z. B. Verhältnis von Belastungsdauer zu Periodendauer einer Eigenschwingung) und den erforderlichen Umfang des Berechnungsmodells.

Die System-Matrizen des linearen Modells sind aus (5.3.5./18) bekannt, Bild 5.23 zeigt drei der Eigenschwingformen des Pressenmodells von Bild 5.7. Wie zu ersehen ist, können diese als Torsionsschwingung des Antriebs (f_2), Gestellschwingung (f_3) und Stößelschwingung in Gegenphase zum Tisch (f_4) charakterisiert werden. Die dynamische Pressenbelastung entsteht durch eine kinetostatische Auslenkung infolge der Stößelbewegung und durch Erregung der Eigenschwingungen infolge des Stoßes. Die Eigenschwingformen in Bild 5.23 werden deshalb besonders angeregt, weil die technologische Kraft F_u Erregerarbeit vor allem mit diesen Formen verrichtet.

Der genaue Kraftverlauf beim Schneid- oder Preßvorgang kann durch numerische Integration der nichtlinearen Differentialgleichung berechnet werden, in welcher die nichtlineare Kraft-Weg-Funktion des Schneidvorgangs berücksichtigt wird [5.31], [5.54]. Dazu wurde Gleichung (5.5.2./1) mit den in Abschnitt 5.5.2. genannten Methoden integriert.

Ergebnisse der numerischen Integration zeigt Bild 5.24. Man kann daraus nicht

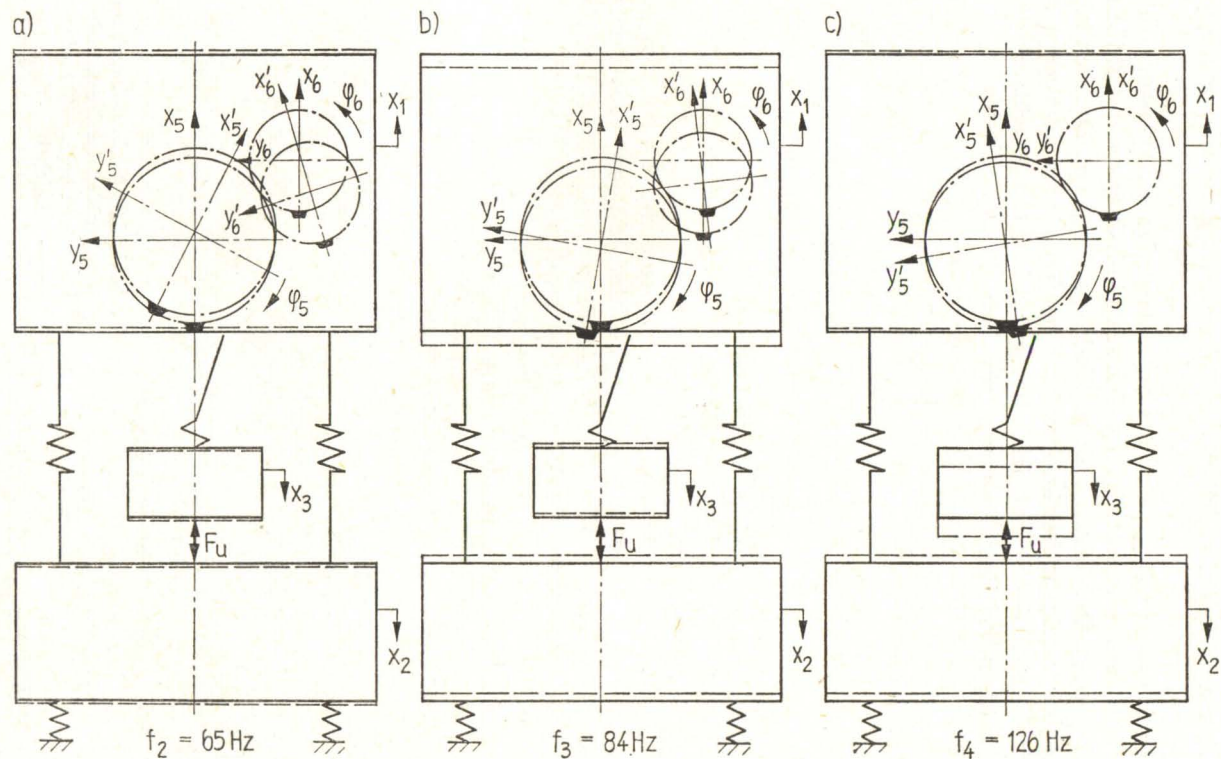


Bild 5.23 Eigenformen der Pesse nach Bild 5.7

nur die maximalen dynamischen Belastungen entnehmen, sondern aus dem Zeitverlauf auch die Ursachen der Schwingungen erkennen. Als typische Erscheinung ist das relativ langsame Eindringen des Werkzeugs in das Material zu bemerken, das von Stoßschwingungen begleitet ist, die der vierten Eigenfrequenz entsprechen, vgl. Bild 5.23.

Nach dem Erreichen von $F_{u\max}$ findet eine schlagartige Entspannung des bis dahin vorgespannten Systems statt. Sie hat eine schnelle Bewegung des Stößels (x_3) nach unten und einen steilen Kraftabfall am Werkzeug zur Folge. Dadurch kommt es zum Spieldurchlauf, zu Zugkräften im Pleuel und Kraftspitzen in entgegengesetzter Richtung zur Preßkraft. Dieser Kraftrichtungswechsel ist unerwünscht und schädlich, da durch ihn Lärm und Erschütterungen des Aufstellortes entstehen.

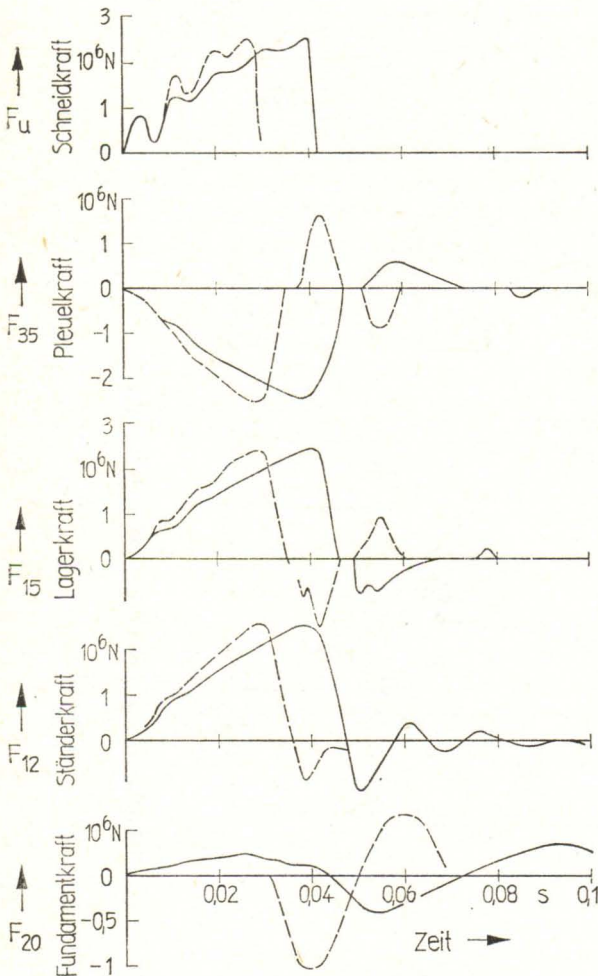


Bild 5.24 Verlauf berechneter Kraftgrößen der Presse (Schneiden von Blech bei $n = 30 \text{ min}^{-1}$)
 — Leichtbau-Variante
 --- Urzustand

Mit diesem Beispiel sollte angedeutet werden, welche Informationen über die realen dynamischen Abläufe der Ingenieur aus derartigen Modellberechnungen gewinnen kann. Im vorliegenden Beispiel nahm HUFFER [5.31] noch eine Optimierung der mechanischen Parameter (Massen, Federkonstanten, Dämpfungen, Spiele) der Kurbelpresse vor. Dabei wurde die in Abschnitt 5.3.3. erwähnte Methode der Beschreibungsfunktionen [5.1] erfolgreich angewandt. Da bei jeder Zielfunktionsberechnung eine numerische Integration des Differentialgleichungssystems erforderlich ist, entsteht eine zu lange Rechenzeit, wenn man die üblichen Methoden der nichtlinearen Optimierung anwendet, bei denen man einige tausend Varianten vergleichen muß. Bei Benutzung eines optimalen Versuchsplanes waren nur 24 „Versuche“ bei vier Optimierungsvariablen erforderlich, vgl. (5.3.3./9).

Es konnte eine Verminderung der größten Pleuelkraft und des Betrags der kleinsten Pleuelkraft nach dem Schneidschlag bei gleichzeitiger Massereduzierung der gesamten Presse erreicht werden. In Bild 5.24 sind die Kraftverläufe einer verbesserten Variante eingezeichnet.

5.5.5.2. Mobilkran mit Lastmomentensicherung

Bei Kranen sind oft die Schwingungen des Auslegersystems (Mechanismus) mit denen des Fahrgestells bzw. Kranportals gekoppelt. Eine zusammenfassende Darstellung zur Krandynamik von DRESIG [15] und jüngere Untersuchungen von SOSNA/WOJCIECH [5.55] beachten diesen Zusammenhang [5.55]. Hier wird auf das einfache Beispiel aus Abschnitt 5.2.3.1. eingegangen.

Bei der Konstruktion von Mobilkränen trat die Frage auf, wie die hydraulischen Antriebe am günstigsten zu verzögern sind. Werden sie beim Erreichen des Abschaltpunktes plötzlich scharf gebremst, entstehen solch große Massenkräfte, daß die Gefahr des Umstürzens besteht. Ein vorsichtiges sanftes Bremsen, bei dem geringe Massenkräfte entstehen, hat dagegen ein weiteres Hinauslaufen des Auslegers zur Folge, so daß die statische Standsicherheit gefährdet wird, vgl. Bild 5.2.

Da sowohl scharfes als auch sanftes Bremsen zum Verlust der dynamischen Standsicherheit führen kann, bestand die Aufgabe des Konstrukteurs darin, den Zeitverlauf einer zuverlässigen Bremsbewegung zu ermitteln. Dazu wurden mit den in Abschnitt 5.2.3.1. aufgestellten Bewegungsgleichungen (5.2.3.1./14 bis 16) für vorgegebene Verläufe von $q_4(t)$ Variantenrechnungen durchgeführt. Zur Integration der Bewegungsgleichungen wurde ein numerisches Verfahren von GUMPERT [5.26] benutzt. Bild 5.25 zeigt Rechenergebnisse für eine Variante.

Es sind drei Etappen zu unterscheiden. Während der ersten Etappe bewegt sich der Hydraulikzylinder mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{q}_4 < 0$. Infolge der dabei größer werdenden Ausladung steigt die Kraft Q_4 langsam an, aber sie wird wenig von den Schwingungen beeinflusst. Nach etwa $t_0 = 2,65$ s wird die Abschaltkraft $Q_4 = F_{\max}$ erreicht.

In diesem Augenblick beginnt die zweite Etappe: Der Hydraulikzylinder wird gemäß einem vorgegebenen Verlauf $q_4(t)$ scharf gebremst. In Bild 5.25 sieht man, wie stark die Kraft Q_4 ansteigt und welche Schwingungen des ganzen Systems angeregt werden. Die Bremsung ist beendet, wenn der Zylinder still steht ($\dot{q}_4(t) = 0$).

Danach beginnt die dritte Etappe, in welcher der Kran bei $q_4 = \text{konst}$ wie ein linearer Schwinger mit dem Freiheitsgrad 3 schwingt. Dieser Ausschwingvorgang wurde in der Rechnung nur etwa 2,5 s verfolgt. Es existieren drei Eigenfrequenzen mit ihren Eigenformen. Die Grundswingform entspricht im wesentlichen dem Pendel der Last (Periodendauer ca. 2,5 s). Die beiden Oberschwingungen, die einer gekoppelten Hub-Nick-Schwingung des Fahrgestells entsprechen, sind aus dem Verlauf von F_h , F_v , q_1 und q_2 erkennbar.

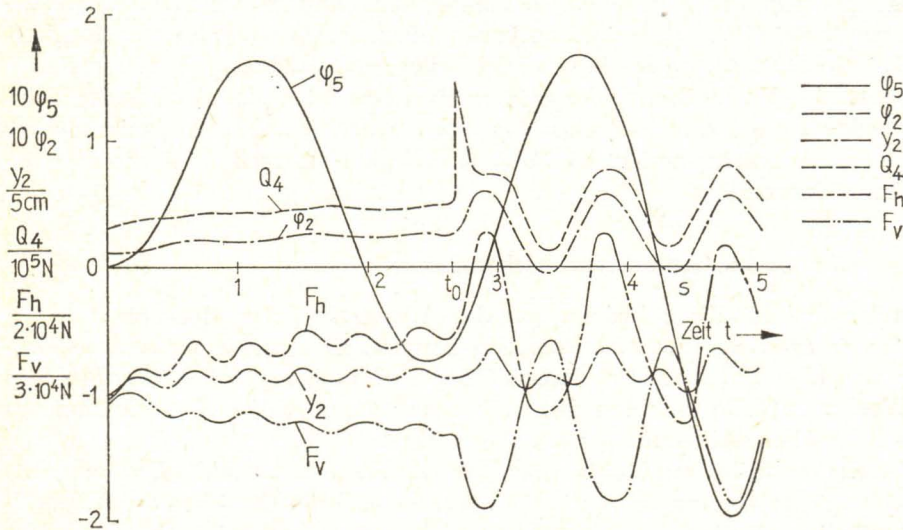


Bild 5.25 Verlauf der Mobilkranschwingungen gemäß Modell Bild 5.2.; Bewegungs- und Kraftverläufe bei Vergrößerung der Ausladung und Ansprechen der Lastmomentensicherung (Bezeichnungen wie in Bild 5.2b)

Die Resultate zeigen, daß sich das System in der dritten Etappe nahezu wie ein linearer Schwinger verhält. Die angestoßenen Schwingungen sind so intensiv, daß die Radkraft F_h sogar durch Null geht. Dies bedeutet praktisch ein Abheben der Hinterräder vom Boden. Genaugenommen müßte in diesem Augenblick die Rechnung unterbrochen werden, da der Boden keine Zugkräfte aufnimmt. Ein genaueres Berechnungsmodell könnte die Intervalle des Kontakts und des Abhebens berücksichtigen, falls dieser Vorgang interessiert.

Aus den Ergebnissen konnte man Schlußfolgerungen für einen zweckmäßigen Verlauf der Bremsbewegung $q_4(t)$ nach Ansprechen der Lastmomentensicherung ziehen.