

1. Kinematik zwangläufiger Mechanismen

1.1. Aufgabenstellung

Die kinematische Analyse ist die Grundlage für die kinetostatische und die dynamische Analyse eines Mechanismus beliebiger Struktur. Die Struktur eines Mechanismus wird bestimmt durch die Anzahl und die Art der Kopplung seiner Glieder. Die Kopplungsstellen sind z. B. Drehgelenke, Schubgelenke, Rädergelenke oder Kurvengelenke. Bei der kinematischen Analyse besteht die Aufgabe, für gegebene geometrische Abmessungen und gegebene zeitliche Bewegungsabläufe der Antriebsglieder für Punkte der Abtriebsglieder den Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung (oder bezüglich der Drehachsen Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung) zu berechnen. Manchmal interessieren auch die höheren Zeitableitungen der Wege und Winkel.

Alle diese kinematischen Größen, und darüber hinaus Toleranzeinflüsse und statische Kraftrelationen, stehen in Zusammenhang mit der kinematischen Übertragungsfunktion (Lagefunktion). Die Berechnung einer kinematischen Übertragungsfunktion, kurz „ U -Funktion“ genannt, ist die Grundlage für alle kinematischen und dynamischen Untersuchungen. Eine U -Funktion beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen einer Antriebskoordinate q , die ein Weg oder ein Winkel sein kann, und einer Abtriebskoordinate U , die entweder ein Abtriebsweg s oder ein Abtriebswinkel φ ist: $U = U(q)$. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Abtriebsgliedes ergeben sich durch Differentiation der Lagefunktion nach der Zeit:

$$\dot{U} = U' \dot{q}, \quad \ddot{U} = U' \ddot{q} + U'' \dot{q}^2. \quad (1)$$

Die dabei vorkommenden Funktionen U' und U'' stellen die erste bzw. zweite Ableitung der Lagefunktion nach der Antriebskoordinate dar und heißen U -Funktionen erster bzw. zweiter Ordnung. Sie sind unabhängig von der Zeit und dem Bewegungszustand, da sie nur von der Stellung des Mechanismus abhängen.

Bei gleichmäßig übersetzenden Getrieben ist das Übersetzungsverhältnis (das Verhältnis zweier Drehzahlen) ein Sonderfall von U' . Das Verhältnis der Abtriebsgeschwindigkeit zur Antriebsdrehgeschwindigkeit, für das auch der Ausdruck *Drehschubstrecke* [1] bekannt ist, stellt ebenfalls eine U -Funktion erster Ordnung dar.

U -Funktionen erster Ordnung sind dimensionslos oder haben die Dimension einer Länge oder einer reziproken Länge.

Die Zwangsbedingungen (Bindungsgleichungen), welche die Tatsache ausdrücken, daß ein Mechanismus zusammenhängt und zwangläufig ist, bilden den Ausgangspunkt zur Berechnung der U -Funktionen nullter und höherer Ordnung. Als analytische Beziehungen zwischen den geometrischen Größen, liefern die Zwangsbedingungen zunächst die U -Funktionen nullter Ordnung.

Es kann zweckmäßig sein, die U -Funktionen erster und höherer Ordnung mit numerischen Methoden aus der punktweise bekannten U -Funktion nullter Ordnung zu bestimmen. Die Funktionen U' und U'' ergeben sich z. B. näherungsweise aus dem Differenzenquotienten:

$$U' = \frac{U(q + \Delta q) - U(q - \Delta q)}{2\Delta q}, \quad (2)$$

$$U'' = \frac{U(q + \Delta q) - 2U(q) + U(q - \Delta q)}{(\Delta q)^2}. \quad (3)$$

Dabei ist Δq eine kleine Größe, z. B. ein Winkel von $\Delta q = \Delta \varphi = 10^{-4}$ rad. Zur Berechnung der U -Funktionen erster und zweiter Ordnung bei irgendeinem Wert der Antriebskoordinate muß man U dann nicht nur für den gegebenen Wert q , sondern auch bei den Werten $q + \Delta q$ und $q - \Delta q$ ermitteln, also pro interessierender Stellung dreifach. Angesichts der Kleinheit von Δq garantieren die Formeln (2) und (3) eine praktisch meist ausreichende Rechengenauigkeit.

Im allgemeinen ist es jedoch zweckmäßig, die U -Funktionen erster und zweiter Ordnung aus den differenzierten Zwangsbedingungen direkt zu berechnen und umgekehrt die U -Funktionen nullter Ordnung aus ihnen zu bestimmen. Ist für eine Anfangsstellung q_0 die U -Funktion gegeben, so folgt U für eine Nachbarstellung ($q_0 + \Delta q$) aus der Beziehung

$$U(q_0 + \Delta q) = U(q_0) + U'(q_0) \Delta q + \frac{1}{2} U''(q_0) (\Delta q)^2 + \dots \quad (4)$$

In den folgenden Abschnitten werden zwei Methoden zur Ermittlung der U -Funktionen beschrieben. Die erste Methode, die vom Konzept der Gliedergruppe ausgeht, zeichnet sich durch geringen Rechenaufwand aus. Mit ihr lassen sich etwa 90% der im Maschinenbau benutzten Mechanismen behandeln [1.15], [1.20], [1.24]. Die zweite Methode, die das Konzept der unabhängigen Maschen benutzt, ist für Mechanismen beliebiger Struktur anwendbar, jedoch bedingt sie infolge des dabei benutzten iterativen Herangehens einen größeren Rechenaufwand.

Beide Methoden sind dazu geeignet, Programmsysteme für ebene Mechanismen zu konzipieren. Solche Rechenprogramme wurden seit Ende der sechziger und zu Beginn der siebziger Jahre unabhängig voneinander in mehreren Ländern entwickelt. Einige Programme ([1.9], [1.15], [1.18], [1.20], [3.41]) benutzen das Gliedergruppen-Konzept, während andere ([1.1], [1.2], [1.3], [1.7], [1.10], [1.14], [1.16], [1.21], [1.22], [2.6], [2.10], [5.23]) auf dem Maschenkonzept beruhen.

Gegenwärtig existieren viele solcher Programme, vorwiegend in größeren techni-

schen Bildungseinrichtungen und in Forschungszentren der Industrie. Da aber die Algorithmen für jede Rechnergeneration von Interesse bleiben, sollen die Grundgedanken hier beschrieben werden.

1.2. Gliedergruppen-Konzept

1.2.1. Kinematik einer Dyade

Die Ordnung der Getriebe beruht auf den grundsätzlichen kinematischen Merkmalen bei der Übertragung der Bewegung. ASSUR empfahl eine Einteilung der Mechanismen nach ihrer Entwicklung aus den einfachsten kinematischen Ketten durch Hinzufügung neuer Glieder und kinematischer Paare [1], [15], [18], [19], [21].

Die U -Funktion eines Mechanismus ergibt sich aus den kinematischen Größen einzelner Gliedergruppen, welche sich relativ einfach bestimmen lassen. Die Analyse des Gesamtmechanismus wird auf die Analyse der Gliedergruppen zurückgeführt, aus denen er besteht, vgl. Abschnitt 1.2.2.

Zunächst wird ein ebener Zweischlag (Dyade) betrachtet, bei welchem alle Gelenke der miteinander verbundenen starren Körper Drehgelenke mit parallelen Achsen sind (ebene Bewegung). Die Indizes zweier gekoppelter Körper seien j und k . Gegeben sind die Bewegungen der „Eingangspunkte“ $O_j(x_{ij}, y_{ij})$ und $O_k(x_{kl}, y_{kl})$ durch ihre Wege und deren Zeitableitungen. Gesucht sind die Winkel (φ_j, φ_k) und die Wege des „Gliedpunktes“ (x_{jm}, y_{jm}) und deren Zeitableitungen. Durch Vertauschung der Indizes folgen analoge Formeln für den Gliedpunkt (k, n) ; vgl. Bild 1.1 (auf der x -Achse lies x_{jk} statt x_{jm}).

Glied j ist am Drehgelenk (i, j) mit einem nicht dargestellten Glied i verbunden, während Glied k außer mit Glied j noch mit einem Nachbarglied mit dem Index l am Gelenkpunkt (k, l) verbunden ist.

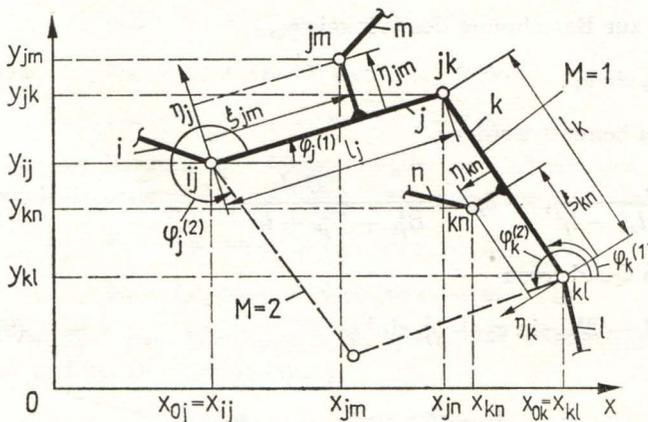


Bild 1.1 Bezeichnungen an einer Dyade mit Drehgelenken

Die Lage der Bezugspunkte $O_j \triangleq ij = (i, j)$ und $O_k \triangleq kl = (k, l)$ ist durch die Koordinaten x_{ij}, y_{ij}, x_{kl} und y_{kl} bestimmt, die wiederum entsprechend des Laufgrads F von der Stellung einer oder mehrerer Antriebskoordinaten abhängen. Die Lage beider Glieder ist gekennzeichnet durch die Winkel φ_j, φ_k und die Koordinaten des Gelenks (j, k) . Die „Ausgangspunkte“ (j, m) und (k, n) können wieder als „Eingangspunkte“ für die folgenden Gliedergruppen benutzt werden. Mit jedem Glied j ist ein körperfestes ξ_j, η_j -Koordinatensystem verbunden. Die ξ_j -Achse verläuft von dem Gelenkpunkt (i, j) zum Verbindungsgelenk (j, k) , während die η_j -Achse darauf senkrecht steht. Analog beginnt ξ_k beim Gelenk (k, l) . Der Winkel φ_j wird von der positiven x -Achse in mathematisch positivem Sinn bis zur ξ_j -Achse positiv gezählt.

Die Gleichungen zur Berechnung der Koordinaten von $x_{jm}, y_{jm}, x_{kn}, y_{kn}$ und der Winkel φ_j und φ_k folgen aus den Zwangsbedingungen, d. h. aus der Bedingung, daß die Projektionen der Koordinaten der Gelenkpunkte auf die beiden Koordinatenachsen in der Summe einen geschlossenen Linienzug bilden, vgl. Bild 1.1:

$$x_{ij} + l_j \cos \varphi_j - l_k \cos \varphi_k - x_{kl} = 0, \quad (1)$$

$$y_{ij} + l_j \sin \varphi_j - l_k \sin \varphi_k - y_{kl} = 0. \quad (2)$$

Mit den Abkürzungen

$$-B_{kj} = B_{jk} = x_{ij} - x_{kl}, \quad -C_{kj} = C_{jk} = y_{ij} - y_{kl} \quad (3)$$

für die Wegdifferenzen der Bezugspunkte haben (1) und (2) die Form

$$l_j \cos \varphi_j = l_k \cos \varphi_k - B_{jk}, \quad (4)$$

$$l_j \sin \varphi_j = l_k \sin \varphi_k - C_{jk}. \quad (5)$$

Quadrieren und Summieren von (4) und (5) ergibt

$$-l_j^2 + l_k^2 - 2B_{jk}l_k \cos \varphi_k - 2C_{jk}l_k \sin \varphi_k + B_{jk}^2 + C_{jk}^2 = 0. \quad (6)$$

Daraus folgt eine Gleichung zur Berechnung des Winkels φ_k ,

$$a_{jk} \cos \varphi_k = 1 - b_{jk} \sin \varphi_k, \quad (7)$$

wobei folgende Abkürzungen benutzt werden:

$$a_{jk} = \frac{2B_{jk}l_k}{B_{jk}^2 + C_{jk}^2 + l_k^2 - l_j^2}, \quad b_{jk} = \frac{2C_{jk}l_k}{B_{jk}^2 + C_{jk}^2 + l_k^2 - l_j^2}. \quad (8)$$

Aus (7) folgt zunächst durch Quadrieren

$$a_{jk}^2(1 - \sin^2 \varphi_k) = 1 - 2b_{jk} \sin \varphi_k + b_{jk}^2 \sin^2 \varphi_k \quad (9)$$

und daraus

$$\sin^2 \varphi_k - \frac{2b_{jk}}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2} \cdot \sin \varphi_k + \frac{1 - a_{jk}^2}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2} = 0. \quad (10)$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln:

$$(\sin \varphi_k)_{1,2} = \frac{b_{jk} \pm a_{jk} \sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2 - 1}}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}. \quad (11)$$

Mit Hilfe von (7) und (11) ergibt sich der Kosinus:

$$(\cos \varphi_k)_{1,2} = \frac{a_{jk} \mp b_{jk} \sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2 - 1}}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}. \quad (12)$$

Falls der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, existieren zwei reelle Winkel $(\varphi_k)_1$ und $(\varphi_k)_2$ unterschiedlicher Größe, weil mit denselben Längen l_j und l_k bei gleichen Lagen der Gelenkpunkte (i, j) und (k, l) zwei verschiedene Lagen der Dyade möglich sind, vgl. Bild 1.1. Sie entsprechen den sogenannten **Montagevarianten** der Dyade. Wird die Wurzel gleich 0, so entsteht eine Strecklage oder Decklage. Die Winkel $(\varphi_k)_1$ und $(\varphi_k)_2$ können ermittelt werden, wenn sowohl der Sinus (11) als auch der Kosinus (12) bekannt sind, weil sonst die Zuordnung zu den Quadranten (spitzer oder stumpfer Winkel) nicht eindeutig ist.

Die Sinus und Kosinus der Winkel $(\varphi_j)_1$ und $(\varphi_j)_2$ folgen aus (4) und (5) oder wenn in (11) und (12) der Index j mit dem Index k vertauscht wird, vgl. (8):

$$(\sin \varphi_j)_{1,2} = \frac{b_{kj} \mp a_{kj} \sqrt{a_{kj}^2 + b_{kj}^2 - 1}}{a_{kj}^2 + b_{kj}^2}, \quad (13)$$

$$(\cos \varphi_j)_{1,2} = \frac{a_{kj} \pm b_{kj} \sqrt{a_{kj}^2 + b_{kj}^2 - 1}}{a_{kj}^2 + b_{kj}^2}. \quad (14)$$

Die Koordinaten der gesuchten Gliedpunkte (j, m) und (k, n) ergeben sich mit Hilfe einfacher geometrischer Betrachtungen aus Bild 1.1. Sie lassen sich mit den Größen nach (11) bis (14) berechnen, d. h. ohne Bildung der Arcusfunktionen:

$$x_{jm} = x_{ij} + \xi_{jm} \cos \varphi_j - \eta_{jm} \sin \varphi_j, \quad (15)$$

$$y_{jm} = y_{ij} + \xi_{jm} \sin \varphi_j + \eta_{jm} \cos \varphi_j, \quad (16)$$

$$x_{kn} = x_{kl} + \xi_{kn} \cos \varphi_k - \eta_{kn} \sin \varphi_k, \quad (17)$$

$$y_{kn} = y_{kl} + \xi_{kn} \sin \varphi_k + \eta_{kn} \cos \varphi_k. \quad (18)$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten wird von den Zwangsbedingungen (1) und (2) ausgegangen. Die einmalige Differentiation nach der Zeit ergibt

$$\dot{x}_{ij} - l_j \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j + l_k \dot{\varphi}_k \sin \varphi_k - \dot{x}_{kl} = 0, \quad (19)$$

$$\dot{y}_{ij} + l_j \dot{\varphi}_j \cos \varphi_j - l_k \dot{\varphi}_k \cos \varphi_k - \dot{y}_{kl} = 0. \quad (20)$$

Dies sind zwei Gleichungen für die beiden unbekanntten Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_j$ und $\dot{\varphi}_k$. Die Lösung lautet

$$\dot{\varphi}_j = \frac{\dot{B}_{kj} \cos \varphi_k + \dot{C}_{kj} \sin \varphi_k}{l_j \sin (\varphi_k - \varphi_j)}, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{\dot{B}_{kj} \cos \varphi_j + \dot{C}_{kj} \sin \varphi_j}{l_k \sin (\varphi_k - \varphi_j)}. \quad (21)$$

Dabei gilt wegen (3) für die Relativgeschwindigkeit der Bezugspunkte:

$$\dot{B}_{kj} = -\dot{x}_{ij} + \dot{x}_{kl}, \quad \dot{C}_{kj} = -\dot{y}_{ij} + \dot{y}_{kl}. \quad (22)$$

Die Geschwindigkeiten beliebiger Gliedpunkte, die im körperfesten Bezugssystem die Koordinaten (ξ_{jm}, η_{jm}) bzw. (ξ_{kn}, η_{kn}) haben, ergeben sich durch eine Differentiation der Gleichungen (15) bis (18), die die Lage dieser Gliedpunkte ausdrücken:

$$\dot{x}_{jm} = \dot{x}_{ij} - \dot{\varphi}_j(\xi_{jm} \sin \varphi_j + \eta_{jm} \cos \varphi_j), \quad (23)$$

$$\dot{y}_{jm} = \dot{y}_{ij} + \dot{\varphi}_j(\xi_{jm} \cos \varphi_j - \eta_{jm} \sin \varphi_j). \quad (24)$$

Durch Vertauschung der Indizes i mit l , j mit k und m mit n ergeben sich aus (23) und (24) analoge Formeln für \dot{x}_{kn} und \dot{y}_{kn} .

Diese Beziehungen berücksichtigen die aus (21) bekannten Winkelgeschwindigkeiten und die aus (11) bis (14) bekannten Winkelfunktionen. Die Berechnung der Beschleunigungen geht von (19) und (20) aus. Ihre Differentiation nach der Zeit ergibt nach Umordnung der Terme

$$-l_j \ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j + l_k \ddot{\varphi}_k \sin \varphi_k = \ddot{B}_{kj} + l_j \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j - l_k \dot{\varphi}_k^2 \cos \varphi_k, \quad (25)$$

$$l_j \ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - l_k \ddot{\varphi}_k \cos \varphi_k = \ddot{C}_{kj} + l_j \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j - l_k \dot{\varphi}_k^2 \sin \varphi_k. \quad (26)$$

Daraus folgen die Winkelbeschleunigungen

$$\ddot{\varphi}_j = \frac{\ddot{B}_{kj} \cos \varphi_k + \ddot{C}_{kj} \sin \varphi_k - l_k \dot{\varphi}_k^2 + l_j \dot{\varphi}_j^2 \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{l_j \sin(\varphi_k - \varphi_j)}, \quad (27)$$

$$\ddot{\varphi}_k = \frac{\ddot{B}_{kj} \cos \varphi_j + \ddot{C}_{kj} \sin \varphi_j + l_j \dot{\varphi}_j^2 - l_k \dot{\varphi}_k^2 \cos(\varphi_k - \varphi_j)}{l_k \sin(\varphi_k - \varphi_j)}. \quad (28)$$

Sie sind also berechenbar aus den Relativbeschleunigungen der beiden Bezugspunkte (i, j) und (k, l) ,

$$\ddot{B}_{kj} = -\ddot{x}_{ij} + \ddot{x}_{kl}, \quad \ddot{C}_{kj} = -\ddot{y}_{ij} + \ddot{y}_{kl}, \quad (29)$$

in denen nur bekannte Beschleunigungskomponenten vorkommen, sowie aus den bekannten Winkelgeschwindigkeiten, vgl. (21). Die Beschleunigung eines beliebigen Gliedpunktes folgt dann durch Differentiation von (23) und (24):

$$\ddot{x}_{jm} = \ddot{x}_{ij} - \ddot{\varphi}_j(\xi_{jm} \sin \varphi_j + \eta_{jm} \cos \varphi_j) - \dot{\varphi}_j^2(\xi_{jm} \cos \varphi_j - \eta_{jm} \sin \varphi_j), \quad (30)$$

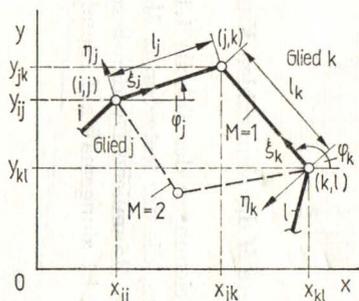
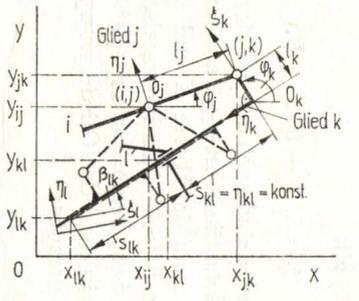
$$\ddot{y}_{jm} = \ddot{y}_{ij} + \ddot{\varphi}_j(\xi_{jm} \cos \varphi_j - \eta_{jm} \sin \varphi_j) - \dot{\varphi}_j^2(\xi_{jm} \sin \varphi_j + \eta_{jm} \cos \varphi_j). \quad (31)$$

Tabelle 1.1 enthält eine Zusammenstellung der Formeln für zwei wichtige Dyadenarten, die auf dem dargelegten Weg ermittelt wurden [1.24]. Die Programmierung dieser Formeln kann in Unterprogrammen erfolgen. Die Struktur des konkret interessierenden Dyadenmechanismus läßt sich dann durch eine Indexfolge verschlüsseln, mit welcher rechnerintern der Aufruf der Unterprogramme und die Analyse erfolgt.

Bei Benutzung der Dyaden wird im Gegensatz zum Maschenkonzept (Abschnitt 1.3.), wo die körperfesten Bezugssysteme beliebig wählbar sind, die Orientierung der ξ_j, η_j -Systeme durch folgende Vereinbarungen festgelegt:

- Der Ursprung O_j des Koordinatensystems eines Gliedes j , das zwei Drehgelenke besitzt, wird in das Anschlußgelenk (i, j) gelegt. Die ξ_j -Achse verläuft positiv

Tabelle 1.1. Grundformeln zur Kinematik von Dyaden

Fall	Skizze der Dyade	Kinematische Funktionen
1	 <p>Gegeben: $l_j, l_k, x_{ij}, y_{ij}, x_{kl}, y_{kl}$</p>	<p>Zwangsbedingung: $l_j \exp(i\varphi_j) - l_k \exp(i\varphi_k) = Z_{kl} - Z_{ij} = X_{kl} - X_{ij} + i(Y_{kl} - Y_{ij})$</p> $s_j = \sin \varphi_j = \frac{b_{kj} - K a_{kj} \sqrt{a_{kj}^2 + b_{kj}^2 - 1}}{a_{kj}^2 + b_{kj}^2}, \quad s_k = \sin \varphi_k = \frac{b_{jk} + K a_{jk} \sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2 - 1}}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}$ $c_j = \cos \varphi_j = \frac{a_{kj} + K b_{kj} \sqrt{a_{kj}^2 + b_{kj}^2 - 1}}{a_{kj}^2 + b_{kj}^2}, \quad c_k = \cos \varphi_k = \frac{a_{jk} - K b_{jk} \sqrt{a_{jk}^2 + b_{jk}^2 - 1}}{a_{jk}^2 + b_{jk}^2}$ $\dot{\varphi}_j = \frac{\dot{B} c_k + \dot{C} s_k}{l_j (s_k c_j - c_k s_j)}, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{\dot{B} c_j + \dot{C} s_j}{l_k (s_k c_j - c_k s_j)}$ $\ddot{\varphi}_j = \frac{\ddot{B} c_k + \ddot{C} s_k - l_k \dot{\varphi}_k^2 + l_j \dot{\varphi}_j^2 (c_k c_j + s_k s_j)}{l_j (s_k c_j - c_k s_j)}, \quad \ddot{\varphi}_k = \frac{\ddot{B} c_j + \ddot{C} s_j + l_j \dot{\varphi}_j^2 - l_k \dot{\varphi}_k^2 (c_k c_j + s_k s_j)}{l_k (s_k c_j - c_k s_j)}$ <p>Abkürzungen: $K = \text{sign}(\sin(\varphi_j - \varphi_k))$ $B = X_{kl} - X_{ij}, C = Y_{kl} - Y_{ij}, \eta_{jk} = 2Bl_k/A, b_{kj} = \eta_{jk} + 2Cl_k/A, A = B^2 + C^2 + l_k^2 - l_j^2$</p>
2	 <p>Gegeben: $l_j, l_k, x_{ij}, y_{ij}, x_{kl}, y_{kl}, \varphi_k$</p>	<p>Zwangsbedingung: $l_j \exp(i\varphi_j) + i s \exp(i\varphi_k) = -Z_{ij} + Z_{kl} + l_k \exp(i\varphi_k)$</p> $s_j = \sin \varphi_j = (C - s c_k) / l_j, \quad s = s_{ik} + s_{kl} = K [C c_k - B s_k + L \sqrt{l_j^2 - (B s_k + C c_k)^2}]$ $c_j = \cos \varphi_j = (B + s s_k) / l_j$ $\dot{\varphi}_j = \frac{\dot{B} c_k + \dot{C} s_k + s \dot{\varphi}_k (c_k c_j + s_k s_j)}{l_j (s_k c_j - c_k s_j)}, \quad \dot{s} = \dot{s}_{ik} = \frac{\dot{B} c_j + \dot{C} s_j + s \dot{\varphi}_k (c_k c_j + s_k s_j)}{(s_k c_j - c_k s_j)} K$ $\ddot{\varphi}_j = \frac{\ddot{B} c_k + \ddot{C} s_k + 2\dot{s} \dot{\varphi}_k + s \ddot{\varphi}_k + l_j \dot{\varphi}_j^2 (c_k c_j + s_k s_j)}{l_j (s_k c_j - c_k s_j)}, \quad \ddot{s} = \ddot{s}_{ik} = \left[\frac{\ddot{B} c_j + \ddot{C} s_j + (2\dot{s} \dot{\varphi}_k + s \ddot{\varphi}_k)(c_k c_j + s_k s_j) + l_j \dot{\varphi}_j^2 + s \dot{\varphi}_k^2}{(s_k c_j - c_k s_j)} \right] K$ <p>Abkürzungen: $B = X_{kl} - X_{ij} + l_k \cos \varphi_k, c_k = \cos \varphi_k, K = \text{sign}(\sin(\varphi_j - \varphi_k))$ $C = Y_{kl} - Y_{ij} + l_k \sin \varphi_k, s_k = \sin \varphi_k, L = \pm 1$</p>

$H a_{jk} =$

zum Verbindungsgelenk (j, k) , und die Gliedlänge ist $l_j = \xi_{jk} > 0$. Daraus folgt, daß analog O_k im Anschlußgelenk (k, l) liegt und $l_k = \xi_{kj} > 0$ gilt, weil die ξ_k -Achse auch zum Verbindungsgelenk (j, k) gerichtet ist, vgl. Fall 1 und 2 in Tabelle 1.1 sowie Bild 1.1.

- Bei einem Glied j , das ein Dreh- und ein Schubgelenk besitzt, wird die η_j -Achse in die Schubgerade gelegt. Die ξ_j -Achse, die senkrecht darauf steht, verläuft durch das Drehgelenk. Die positive ξ_j -Richtung ist dadurch bestimmt, daß der Abstand des Drehgelenkes vom Ursprung positiv ist ($\xi_{ji} = l_j \geq 0$ oder $\xi_{jk} = l_j \geq 0$). Die Koordinatenwerte des Schubgelenkes (η_{ji} oder η_{jk}) können positiv oder negativ sein.

Im Sonderfall $l_j = l_k = 0$ werden innerhalb der Dyade die beiden Koordinatensysteme gleichsinnig ausgerichtet, so daß $\varphi_j = \varphi_k$ wird.

Die Getriebeglieder, deren Längen $l_j > 0$ und $l_k > 0$ bekannt sind, können auf verschiedene Weise miteinander verbunden werden. PEISACH [1.15] wies daraufhin, daß bei den Dyaden zwei bis vier Montagevarianten unterscheidbar sind. Während der Bewegung eines Mechanismus bleibt normalerweise, falls indifferente Streck- oder Decklagen vermieden werden, die Montagevariante M erhalten, die mit der Anfangsstellung bestimmt wurde. Die Montagevarianten werden mit den Ziffern $M = 1, \dots, 4$ charakterisiert.

In Tabelle 1.1 ist jeweils eine Montagevariante durch eine Vollinie hervorgehoben, während die anderen gestrichelt dargestellt sind.

Die Montagevariante M ergibt sich aus den Kennzahlen K und L . Für die Dyadenart 1 mit drei Drehgelenken (Fall 1 in Tabelle 1.1) gilt

$$M = (K + 3)/2. \quad (32)$$

Für die Dyadenart 2 mit zwei Drehgelenken und einem Schubgelenk (Fall 2 in Tabelle 1.1) gilt

$$M = (K + 5)/2 + L. \quad (33)$$

Umgekehrt sind auch aus der Montagevariante M die Kennzahlen K und L bestimmbar, welche die Werte ± 1 annehmen.

Setzt man die Werte K und L in die Gleichungen der Tabelle 1.1 ein, so erhält man die betreffenden kinematischen Größen, die der festgelegten Montagevariante entsprechen, beginnend mit $\varphi_j^{(M)}$ und $\varphi_k^{(M)}$. Räumliche Dyaden lassen sich analog behandeln, und das Gliedergruppenkonzept ist sinngemäß auf räumliche Mechanismen übertragbar.

1.2.2. Kinematik von Dyadenmechanismen

Die Mehrzahl der Getriebe, die in Maschinen und Geräten angewendet werden, lassen sich aus Assur-Gruppen 1. Klasse und 2. Ordnung zusammensetzen. Zur Familie dieser Dyadenmechanismen gehören die in Bild 1.2 dargestellten Mechanismen. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie außer dem Antriebsglied und dem Gestell nur aus Dyaden zusammengesetzt sind und ihre Gelenke nur Dreh- oder Schubgelenke

sind. Zur eindeutigen Kennzeichnung werden die Glieder eines Mechanismus fortlaufend mit $i = 1, 2, \dots, I$ numeriert. Das Gestell erhält die Nummer 1 und das Antriebsglied die Nummer 2.

Die Analyse eines Mechanismus, der aus Dyaden besteht, erfolgt schrittweise entsprechend seiner speziellen Struktur. Aus bekannten Werten der Längen (l_j, l_k) und

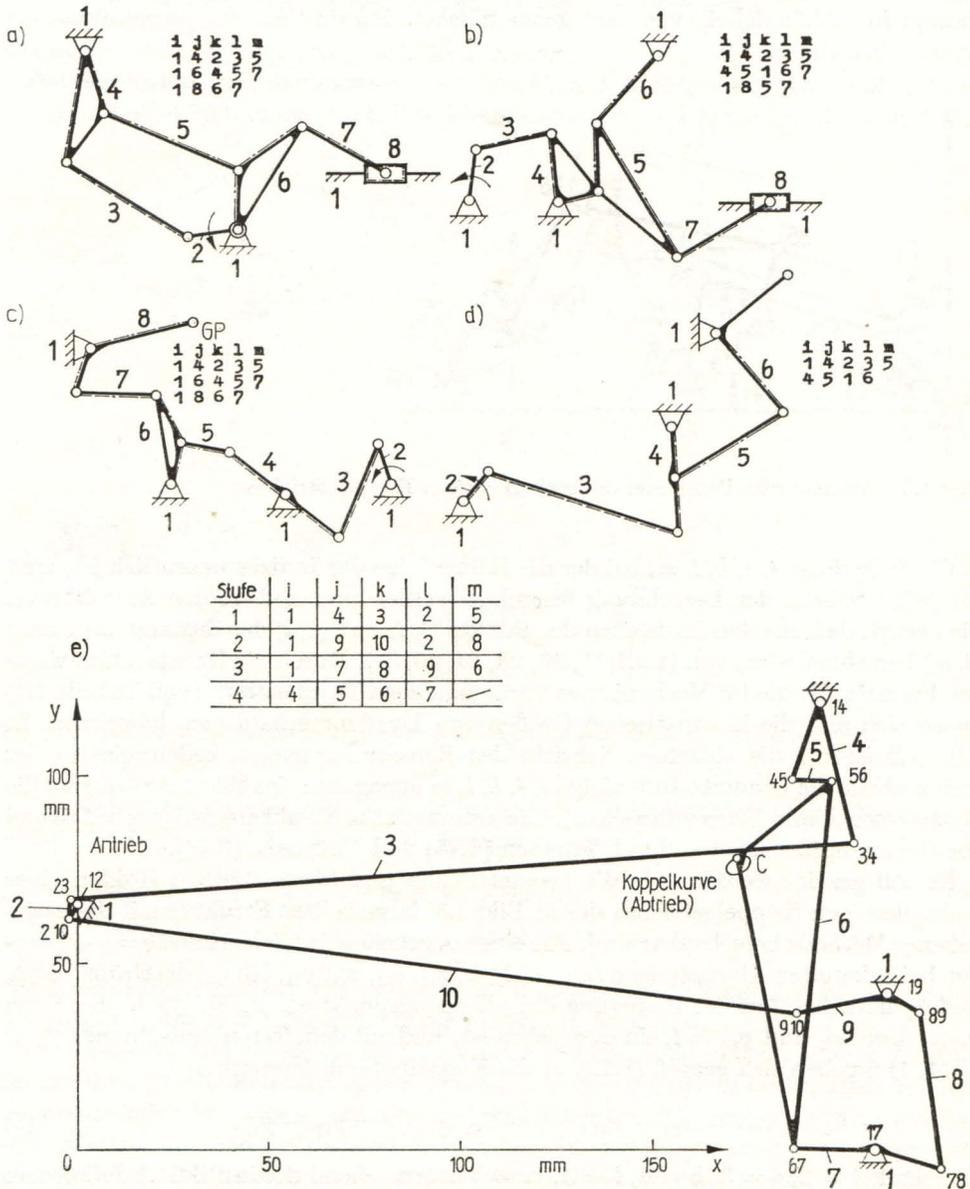


Bild 1.2 Beispiele von Mechanismen, die aus Dyaden zusammengesetzt sind

Koordinaten $(x_{ij}, y_{ij}, x_{kl}, y_{kl})$ der „Eingangspunkte“ (i, j) und (k, l) werden die Koordinaten des „Ausgangspunktes“ (j, m) berechnet. Dazu muß zu Beginn die Reihenfolge entsprechend des Strukturaufbaus gewählt werden.

Bei Mechanismen, deren Struktur aus kettenförmig angeordneten Dyaden besteht, ist die Reihenfolge eindeutig, bei vermaschten Strukturen kann sie ausgewählt werden. Die Koordinaten der Gelenke werden somit schrittweise auf Grund der kodierten Indizes in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern der angeschlossenen Dyaden berechnet.

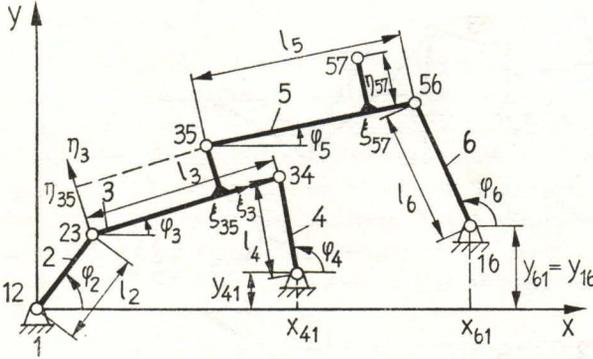


Bild 1.3 Geometrische Parameter des sechsgliedrigen Koppelgetriebes

Die Indexfolge i, j, k, l, m , bei der die Reihenfolge der Indizes wesentlich ist, muß für jeden Schritt der Berechnung festgelegt werden und kodiert den Algorithmus. Sie besagt, daß aus den Zuständen der Punkte (i, j) und (k, l) der Zustand am Punkt (j, m) berechnet wird, vgl. (1.2.1/15, 16, 23, 24, 30, 31). Durch die Kombination weniger Formeln für die im Mechanismus vorkommenden Dyadenarten (vgl. Tabelle 1.1) lassen sich also die kinematischen Größen von Dyadenmechanismen berechnen. In Bild 1.2 ist für die einzelnen Schritte des Berechnungsganges zeilenweise in der Indextabelle die benutzte Indexfolge i, j, k, l, m angegeben (im Bild 1.2 a—d sind die Buchstaben k und l zu vertauschen). Die automatische Strukturerrfassung auf Grund der Gelenkindizes erfolgte durch PEISACH [1.15] und THÜMMEL [3.41].

Es soll gezeigt werden, wie die geometrischen und kinematischen Größen eines sechsgliedrigen Koppelgetriebes der in Bild 1.3 dargestellten Struktur mit der angegebenen Methode berechenbar sind. Für einen gegebenen Antriebswinkel $q = \varphi_2(t)$ werden bei bekannten Abmessungen $l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, x_{41}, y_{41}, x_{61}, y_{61}, \xi_{35}, \eta_{35}$ die Größen $\varphi_6, \dot{\varphi}_6$ und $\ddot{\varphi}_6$ gesucht. Aus der Bewegung des „Eingangspunktes“ $(2, 3)$, die in der Form $x_{23} = l_2 \cos \varphi_2$ und $y_{23} = l_2 \sin \varphi_2$ gegeben ist, und mit dem festen Gestellpunkt $(1, 4) = (4, 1)$ ergeben sich gemäß (1.2.1./3) die Koordinatendifferenzen

$$-B_{43} = B_{34} = x_{23} - x_{41}, \quad -C_{43} = C_{34} = y_{23} - y_{41}. \quad (1)$$

Dabei gilt $i = 2, j = 3, k = 4, l = 1, m = 5$ entsprechend der in Bild 1.1 definierten Bezeichnungen der Dyade, also die Indexfolge 2 3 4 1 5. Aus (1.2.1./8) ergeben sich

damit die dimensionslosen Größen a_{34} und b_{34} , woraus $\sin \varphi_4$ und $\cos \varphi_4$ aus (1.2.1./11 und 12) berechnet werden. Zur Berechnung von $\sin \varphi_3$ und $\cos \varphi_3$ werden noch a_{43} und b_{43} aus (1.2.1./8) bestimmt, wobei die Indizes j und k vertauscht werden. Mit diesen Winkelfunktionen ergeben sich $\dot{\varphi}_3$ und $\dot{\varphi}_4$ aus (1.2.1./21), da die Komponenten der Relativgeschwindigkeiten der Bezugspunkte aus (1.2.1./22) bekannt sind, vgl. (1):

$$\dot{B}_{43} = -\dot{x}_{23} = l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2, \quad \dot{C}_{43} = -\dot{y}_{23} = -l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2. \quad (2)$$

Die Lage von (3, 5) folgt aus (1.2.1./15 und 16).

Die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes (3, 5) folgen aus (1.2.1./23 und 24) mit ($j = 3, m = 5$) und die Winkelbeschleunigungen $\ddot{\varphi}_3$ und $\ddot{\varphi}_4$ aus (1.2.1./27 und 28).

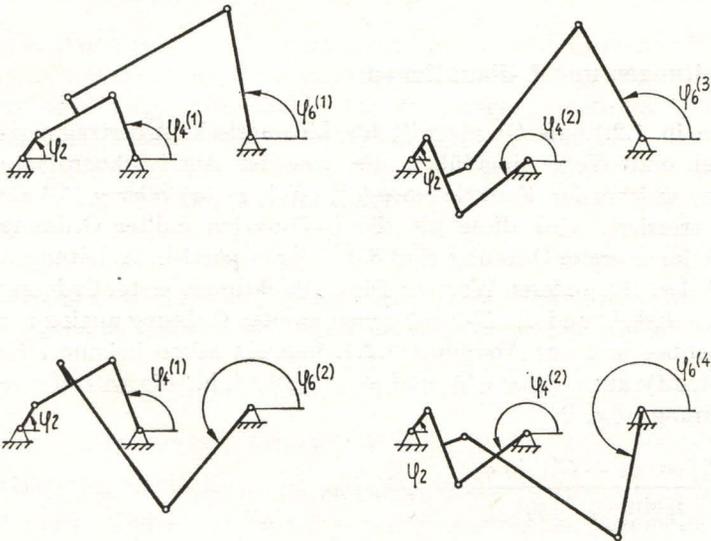


Bild 1.4 Mögliche Montagevarianten eines sechsgliedrigen Koppelgetriebes

Die Relativbeschleunigungen erhält man durch Differentiation von (2) entsprechend (1.2.1./29), weil $\ddot{x}_{14} = \ddot{y}_{14} = 0$ (Festpunkt) ist:

$$\ddot{B}_{43} = -\ddot{x}_{23} = l_2 (\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2), \quad (3)$$

$$\ddot{C}_{43} = -\ddot{y}_{23} = l_2 (-\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2). \quad (4)$$

Die Beschleunigungen des Koppelpunktes (3, 5) ergeben sich mit \ddot{x}_{23} , \ddot{y}_{23} , $\ddot{\varphi}_3$, $\sin \varphi_3$, $\cos \varphi_3$ und $\dot{\varphi}_3$ aus (1.2.1./30 und 31) für $i = 2, j = 3, m = 5$.

Geometrische und kinematische Größen der Punkte (3, 5) und (6, 1) sind die Eingangsgrößen für die Berechnung der Bewegung der Dyade (5–6) und speziell des hier interessierenden Winkels φ_6 mit seinen Zeitableitungen. Die Größen für x_{57} und y_{57} (vgl. Bild 1.3) können auf demselben Weg berechnet werden, wenn noch ξ_{57} und η_{57} gegeben sind. Für diese neue Dyade, die sich auf die „Eingangspunkte“ (3, 5) und (6, 1) stützt, müssen die Indizes gemäß Bild 1.1 bezeichnet werden, d. h., es gilt für

diesen zweiten Schritt mit denselben Formeln $i = 3, j = 5, k = 6, l = 1, m = 7$, d. h., die Indexfolge 3 5 6 1 7 bestimmt die zweite Stufe. Die weiteren Rechenschritte erfolgen mit den Formeln, die in Tabelle 1.1 zusammengestellt sind. Das sechsgliedrige Koppelgetriebe besitzt vier Montagevarianten, vgl. Bild 1.4. Die in Tabelle 1.1 angegebenen Formeln ergeben entsprechend der vier möglichen Vorzeichenkombinationen diese vier Varianten. Der Konstrukteur muß dabei entscheiden, welche konkrete Montagevariante $\varphi_6^{(M)}$ zutrifft.

Die Reihenfolge der berechneten Werte ist dann also folgende, vgl. Bild 1.3: $\sin \varphi_6, \cos \varphi_6, \sin \varphi_5, \cos \varphi_5, \dot{\varphi}_5, \dot{\varphi}_6, \ddot{\varphi}_6$, wobei die nicht unterstrichenen Größen als Zwischenwerte benötigt werden. Aus $\sin \varphi_6$ und $\cos \varphi_6$ folgen φ_6 und die Lage des Quadranten dieses Winkels.

1.2.3. Partielle Ableitungen und U -Funktionen

Die U -Funktion wurde in 1.2.1. als Oberbegriff für kinematische Übertragungsfunktionen der Winkel und Wege eingeführt, die von der Antriebskoordinate abhängen. Je nachdem, welche der Funktionen $\varphi_j(\varphi), \varphi_k(\varphi), x_{jm}(\varphi)$ oder $y_{jm}(\varphi)$ als Abtriebskoordinate interessiert, wird diese als die U -Funktion nullter Ordnung bezeichnet. Die U -Funktionen erster Ordnung sind dann deren partielle Ableitungen nach dem Antriebswinkel φ . Mit anderen Worten: Die U -Funktionen erster Ordnung sind analog zur Geschwindigkeit und die U -Funktionen zweiter Ordnung analog zur Beschleunigung berechenbar und aus Abschnitt 1.2.1. indirekt schon bekannt. Es gilt nämlich für (1.2.1./21) auch $\dot{\varphi}_j = \varphi_j' \dot{\varphi}$ und $\dot{\varphi}_k = \varphi_k' \dot{\varphi}$, d. h., die betreffende U -Funktion erster Ordnung ist z. B.

$$U' \triangleq \varphi_j' = \frac{B'_{kj} \cos \varphi_k + C'_{kj} \sin \varphi_k}{l_j \sin (\varphi_k - \varphi_j)} = \dot{\varphi}_j / \dot{\varphi}, \quad (1)$$

und aus (1.2.1./27 und 28) folgt durch einen Koeffizientenvergleich mit (1.2.1./1) die U -Funktion zweiter Ordnung:

$$U'' \triangleq \varphi_j'' = \frac{B''_{kj} \cos \varphi_k + C''_{kj} \sin \varphi_k - l_k \varphi_k'^2 + l_j \varphi_j'^2 \cos (\varphi_k - \varphi_j)}{l_j \sin (\varphi_k - \varphi_j)}. \quad (2)$$

Die Berechnung der U -Funktionen erster und höherer Ordnung kann als Spezialfall der Berechnung partieller Ableitungen der U -Funktionen nullter Ordnung nach beliebigen geometrischen Parametern eines Mechanismus betrachtet werden.

Vielfach will man wissen, wie sich U -Funktionen nullter und höherer Ordnung ändern, wenn geometrische Parameter des Mechanismus (l_j, ξ_{jm}, η_{jm}) variiert werden. Es interessieren dabei oft kleine Parameteränderungen, z. B. für die Untersuchung des Einflusses von Spiel, Toleranzen und Deformationen (vgl. Abschnitt 4.2.1.), und auch bei der Berechnung der Gelenkkräfte und der verallgemeinerten Massen braucht man die ersten Ableitungen, vgl. Abschnitt 2.2.1. und 2.2.2.

Die geometrischen Parameter werden einheitlich mit w_p ($p = 1, 2, \dots, P$) bezeichnet und im Parametervektor $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_P)$ zusammengefaßt. Der Ein-

Die zweiten und höheren Ableitungen sind ebenso aus den implizit differenzierten Zwangsbedingungen (jeweils zwei linearen Gleichungen) berechenbar. Aus (5) und (6) folgt z. B. durch Differentiation nach w_q (der Index q muß vom Index p unterschieden werden)

$$-l_j \sin \varphi_j \cdot \varphi_{j,pq} + l_k \sin \varphi_k \cdot \varphi_{k,pq} = r_1, \quad (9)$$

$$l_j \cos \varphi_j \cdot \varphi_{j,pq} - l_k \cos \varphi_k \cdot \varphi_{k,pq} = r_2. \quad (10)$$

Weil die zweiten Ableitungen von l_j und l_k immer gleich 0 sind, gilt

$$r_1 = (l_{j,q} \varphi_{j,p} + l_{j,p} \varphi_{j,q}) \sin \varphi_j - (l_{k,q} \varphi_{k,p} + l_{k,p} \varphi_{k,q}) \sin \varphi_k \\ + l_j \cos \varphi_j \varphi_{j,p} \varphi_{j,q} - l_k \cos \varphi_k \varphi_{k,p} \varphi_{k,q} - x_{ij,pq} + x_{kl,pq}, \quad (11)$$

$$r_2 = -(l_{j,q} \varphi_{j,p} + l_{j,p} \varphi_{j,q}) \cos \varphi_j + (l_{k,q} \varphi_{k,p} + l_{k,p} \varphi_{k,q}) \cos \varphi_k \\ + l_j \sin \varphi_j \varphi_{j,p} \varphi_{j,q} - l_k \sin \varphi_k \varphi_{k,p} \varphi_{k,q} - y_{ij,pq} + y_{kl,pq}. \quad (12)$$

Aus (9) und (10) folgen $\varphi_{j,pq}$ und $\varphi_{k,pq}$. Mit ihnen ergeben sich die zweiten Ableitungen der Koordinaten, die man aus (7) und (8) durch Differentiation gewinnt:

$$x_{jm,pq} = x_{ij,pq} - (\xi_{jm} \sin \varphi_j + \eta_{jm} \cos \varphi_j) \varphi_{j,pq} - (\xi_{jm} \cos \varphi_j - \eta_{jm} \sin \varphi_j) \varphi_{j,p} \varphi_{j,q} \\ - (\xi_{jm,p} \varphi_{j,q} + \xi_{jm,q} \varphi_{j,p}) \sin \varphi_j - (\eta_{jm,p} \varphi_{j,q} + \eta_{jm,q} \varphi_{j,p}) \cos \varphi_j, \quad (13)$$

$$y_{jm,pq} = y_{ij,pq} + (\xi_{jm} \cos \varphi_j - \eta_{jm} \sin \varphi_j) \varphi_{j,pq} - (\xi_{jm} \sin \varphi_j + \eta_{jm} \cos \varphi_j) \varphi_{j,p} \varphi_{j,q} \\ + (\xi_{jm,p} \varphi_{j,q} + \xi_{jm,q} \varphi_{j,p}) \cos \varphi_j - (\eta_{jm,p} \varphi_{j,q} + \eta_{jm,q} \varphi_{j,p}) \sin \varphi_j. \quad (14)$$

Die höheren Ableitungen lassen sich analog herleiten. Sie sind bestimmbar, wenn die niedrigeren Ableitungen bekannt sind, da diese in den „rechten Seiten“ auftreten.

Als Beispiel sollen für das in Bild 1.3 dargestellte Getriebe die Formeln für die partiellen Ableitungen von φ_6 und y_{57} nach der Lagerkoordinate x_{16} bzw. der Länge l_3 angegeben werden. Für die zweite Dyade gilt die Indexfolge $i = 3, j = 5, k = 6, l = 1, m = 7$. Die Gleichungen (5) und (6) nehmen mit diesen Indizes für $w_p \triangleq x_{16} = x_{61}$, weil gemäß Tabelle 1.2 (zweite Zeile) alle partiellen Ableitungen (außer $x_{61,p} = 1$) gleich 0 sind, folgende Form an:

$$-l_5 \sin \varphi_5 \varphi_{5,p} + l_6 \sin \varphi_6 \varphi_{6,p} = 1, \quad (15)$$

$$l_5 \cos \varphi_5 \varphi_{5,p} - l_6 \cos \varphi_6 \varphi_{6,p} = 0. \quad (16)$$

Mit Benutzung des Additionstheorems $\sin(\varphi_6 - \varphi_5) = \sin \varphi_6 \cos \varphi_5 - \cos \varphi_6 \sin \varphi_5$ folgt daraus

$$\varphi_{5,p} \triangleq \frac{\partial \varphi_5}{\partial x_{16}} = \frac{\cos \varphi_6}{l_5 \sin(\varphi_6 - \varphi_5)}, \quad \varphi_{6,p} \triangleq \frac{\partial \varphi_6}{\partial x_{16}} = \frac{\cos \varphi_5}{l_6 \sin(\varphi_6 - \varphi_5)}. \quad (17)$$

Die Sinus und Kosinus von φ_5 und φ_6 sind aus (1.2.1./11 bis 14) bekannt. Aus (8) ergibt sich, da $\xi_{57,p} = \eta_{57,p} = 0$ ist (Tabelle 1.2),

$$y_{57,p} = y_{35,p} + (\xi_{57} \cos \varphi_5 - \eta_{57} \sin \varphi_5) \varphi_{5,p}. \quad (18)$$

Da y_{35} nicht von x_{16} abhängt, ist auch $y_{35,p} = 0$, und es gilt mit (17)

$$y_{57,p} \triangleq \frac{\partial y_{57}}{\partial x_{16}} = \frac{(\xi_{57} \cos \varphi_5 - \eta_{57} \sin \varphi_5) \cos \varphi_6}{l_5 \sin(\varphi_6 - \varphi_5)}. \quad (19)$$

Ist der Parameter (wie hier l_3) in einer vorhergehenden Dyade enthalten, so ist ein Rechenschritt mehr erforderlich. Aus (5) und (6) folgt analog zu (15) und (16) zunächst für $w_p \triangleq l_3$, vgl. Tabelle 1.2,

$$-l_5 \sin \varphi_5 \varphi_{5,p} + l_6 \sin \varphi_6 \varphi_{6,p} = -x_{35,p}, \quad (20)$$

$$l_5 \cos \varphi_5 \varphi_{5,p} - l_6 \cos \varphi_6 \varphi_{6,p} = -y_{35,p}, \quad (21)$$

weil sich die Koordinaten des Punktes (3, 5) mit l_3 ändern, aber x_{61} und y_{61} unabhängig davon sind. Die partiellen Ableitungen folgen wiederum aus (7) und (8) mit $i = 2$, $j = 3$, $k = 4$, $l = 1$, $m = 5$, weil $x_{23,p} = y_{23,p} = \xi_{35,p} = \eta_{35,p} = 0$ ist:

$$x_{35,p} = -(\xi_{35} \sin \varphi_3 + \eta_{35} \cos \varphi_3) \varphi_{3,p}, \quad (22)$$

$$y_{35,p} = (\xi_{35} \cos \varphi_3 - \eta_{35} \sin \varphi_3) \varphi_{3,p}. \quad (23)$$

Nun werden noch $\varphi_{3,p}$ und $\varphi_{4,p}$ benötigt, welche aus (5) und (6) folgen, wobei $x_{23,p} = y_{23,p} = l_{4,p} = x_{41,p} = y_{41,p} = 0$ und $l_{3,p} = 1$ ist:

$$-l_3 \sin \varphi_3 \varphi_{3,p} + l_4 \sin \varphi_4 \varphi_{4,p} = -\cos \varphi_3, \quad (24)$$

$$l_3 \cos \varphi_3 \varphi_{3,p} - l_4 \cos \varphi_4 \varphi_{4,p} = -\sin \varphi_3. \quad (25)$$

Die Sinus und Kosinus von φ_3 und φ_4 sind aus (1.2.1./11 bis 14) für diese erste Dyade bekannt.

Aus dieser Beschreibung wird das schrittweise Herangehen ersichtlich. Es werden abwechselnd nur die Gleichungen (1.2.1./11 bis 14) und (5) bis (8) benötigt. Der Rechenablauf kann algorithmiert und in einem Rechenprogramm realisiert werden. Im vorliegenden Beispiel läßt sich durch Kombination der Gleichungen (20) bis (25) auch eine relativ kurze analytische Abhängigkeit finden:

$$\varphi_{6,p} \triangleq \frac{\partial \varphi_6}{\partial l_3} = \frac{\xi_{35} \sin(\varphi_3 - \varphi_5) + \eta_{35} \cos(\varphi_3 - \varphi_5)}{l_3 l_6 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) \sin(\varphi_6 - \varphi_5)} \cos(\varphi_4 - \varphi_3). \quad (26)$$

Schließlich ergibt sich mit (18) auch

$$\begin{aligned} y_{57,p} \triangleq \frac{\partial y_{57}}{\partial l_3} &= \left\{ \frac{\xi_{35} \cos \varphi_3 - \eta_{35} \sin \varphi_3}{l_3 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)} \right. \\ &+ \left. \frac{(\xi_{57} \cos \varphi_5 - \eta_{57} \sin \varphi_5) (\xi_{35} \sin(\varphi_3 - \varphi_6) + \eta_{35} \cos(\varphi_3 - \varphi_6))}{l_3 l_5 \sin(\varphi_4 - \varphi_3) \sin(\varphi_6 - \varphi_5)} \right\} \\ &\times \cos(\varphi_4 - \varphi_3). \end{aligned} \quad (27)$$

Solche Formeln wie (26) und (27) lassen eine anschauliche geometrische Interpretation des Ergebnisses zu, und sie können auch zur Auswertung auf Tischrechnern von Vorteil sein. Auf die Angabe der zweiten partiellen Ableitungen, die durch wiederholte Anwendung von (9) bis (14) folgen, wird verzichtet.

1.3. Maschenkonzept

1.3.1. Methode zur Aufstellung der Zwangsbedingungen

Die Aufstellung der Zwangsbedingungen eines beliebigen Mechanismus kann formalisiert werden. Den modernen Rechenprogrammen liegen Algorithmen zu Grunde, welche aus Informationen über die Struktur und die geometrischen Abmessungen eines Mechanismus die Zwangsbedingungen automatisch aufstellen und lösen. Die Grundgedanken eines solchen Algorithmus, der in [1.22], [1.23] beschrieben und von PAUSCH [1.16] modifiziert und ausgearbeitet wurde, sollen hier dargelegt werden. Das Maschenkonzept wurde nahezu gleichzeitig unabhängig voneinander durch PAUL/KRAJČINOVIC [1.14], [21] und DRESIG/PAUSCH/TAUBALD/RÖSSLER [1.7], [1.8], [1.16], [1.21] entwickelt. Ausgangspunkt der Beschreibung der Struktur und der geometrischen Abmessungen ist das Getriebeschema.

Das **Getriebeschema** enthält in einer zeichnerischen Darstellung neben der Anzahl und Anordnung der Glieder auch die Art der Gelenke (topologische Struktur) sowie die geometrischen Abmessungen, die die Lage der Gelenke innerhalb der Glieder eindeutig festlegen.

Ein ebener Mechanismus bestehe aus I Gliedern. Jedem Getriebeglied wird ein Index j zugeordnet ($j = 1, 2, \dots, I$). Das Gestell erhält die Nummer 1, und die Reihenfolge der Numerierung aller weiteren Getriebeglieder ist beliebig. Jedes Gelenk erhält einen Doppelindex, der sich aus den Ziffern der verbundenen Getriebeglieder zusammensetzt und in der Form (j, k) oder einfach jk geschrieben wird.

In jedem Glied j wird ein gliedfestes (mitbewegtes) ξ_j, η_j -Koordinatensystem festgelegt. Im Gegensatz zum Dyadenkonzept kann es beliebig orientiert sein, vgl. 1.2.1. Alle Koordinatensysteme werden als komplexe Zahlenebenen aufgefaßt. Dadurch können beliebige Punkte eines Gliedes durch komplexe Zahlen dargestellt und die Vorteile des Rechnens mit komplexen Zahlen genutzt werden. Jedes ξ_j, η_j -Koordinatensystem ist durch die Lage seines Bezugspunkts $O_j(x_{0j}, y_{0j})$ und den Winkel φ_j , der von der x -Achse zur ξ_j -Achse mathematisch positiv gezählt wird, eindeutig definiert.

Das raumfeste x, y -Koordinatensystem ist mit dem ξ_1, η_1 -System identisch, so daß also $\varphi_1 = 0$ ist. Die gliedfesten komplexen Koordinaten ζ_{jk} und $\bar{\zeta}_{kj}$ aller Gelenkpunkte (j, k) müssen sowohl bezüglich des Koordinatensystems $j(\zeta_{jk})$ als auch im Koordinatensystem des Nachbargliedes $k(\bar{\zeta}_{kj})$ angegeben werden. Im allgemeinen ist $\zeta_{jk} \neq \bar{\zeta}_{kj}$. Diese Koordinaten aller Gelenkpunkte reichen aus, um die geometrischen Parameter (Abmessungen) einer Struktur zu erfassen. Der erste Index der Koordinaten gibt die

Nummer des Gliedes an, in dem der Gelenkpunkt gelegen ist. Der zweite Index entspricht der Nummer des Nachbargliedes.

Die Lage eines beliebigen Punktes (j, k) im Glied j , dessen gliedfeste Koordination in komplexer Form durch

$$\zeta_{jk} = \xi_{jk} + i\eta_{jk} = r_{jk} e^{i\beta_{jk}} = r_{jk} (\cos \beta_{jk} + i \sin \beta_{jk}) \tag{1}$$

gegeben seien, kann in der raumfesten x,y -Ebene durch die komplexe Zahl

$$z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk} = z_{oj} + \zeta_{jk} e^{i\varphi_j} \tag{2}$$

dargestellt werden, vgl. Bild 1.5. Der Bezugspunkt O_j hat die Koordinaten $z_{oj} = x_{oj} + iy_{oj}$. Die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ darf nicht mit einem Gliedindex, für den im weiteren manchmal auch der Buchstabe i verwendet wird, verwechselt werden.

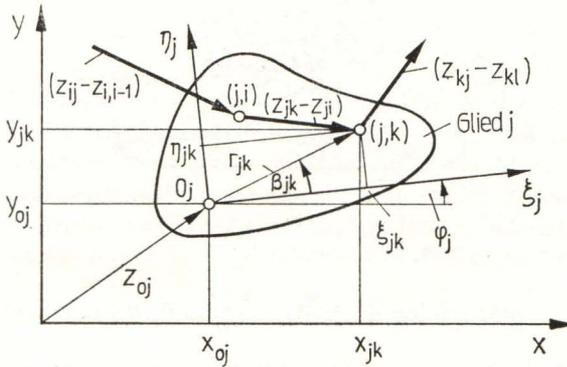


Bild 1.5 Gliedfeste Koordinatensysteme und Polygon einer Masche

Die gliedfesten Koordinaten eines Gelenkpunktes (j, k) bezüglich des Systems j haben allgemein die Form

$$\zeta_{jk}(t) = [\xi_{jk}(t) + i\eta_{jk}(t)] e^{i\beta_{jk}(t)} + \xi_{jk}^0 + i\eta_{jk}^0. \tag{3}$$

Mit (3) ist die Bewegung eines Gelenkpunktes relativ zu jedem gliedfesten Koordinatensystem angebar. Die Darstellung vereinfacht sich für spezielle Gelenkarten.

In Bild 1.6 a, b und c ist jeweils der allgemeine Fall, den die Lage eines gliedfesten Bezugssystems annehmen kann, gezeichnet worden. Meist ist es jedoch zweckmäßig, den jeweiligen Ursprung O_j in ein Gelenk zu legen, so daß $\xi_{jk}^0 = \eta_{jk}^0 = 0$ ist und die ξ_j -Achse von einem Gelenk zu einem anderen laufen zu lassen, vgl. Bilder 1.3, 1.7 und 1.9 sowie Tabellen 1.3 und 1.4.

Ein **Drehgelenk** im Gelenkpunkt (j, k) ist sowohl aus der Sicht des Gliedes j als auch von Glied k aus gesehen unbeweglich. Die gliedfesten Koordinaten des Gelenkpunktes $P_{jk} = P_{kj}$ sind

$$\zeta_{jk} = \xi_{jk} + i\eta_{jk}, \quad \zeta_{kj} = \xi_{kj} + i\eta_{kj} \tag{4}$$

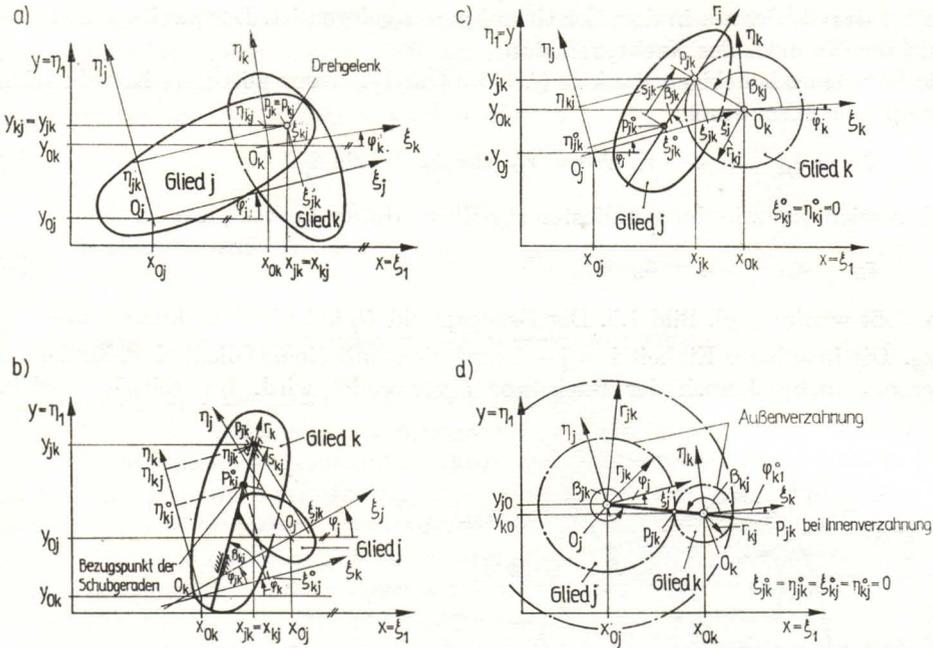


Bild 1.6 Geometrische Parameter der Gelenke
 a) Drehgelenk, b) Schubgelenk, c) Zahnstangengelenk, d) Rädergelenk

d. h., in (3) ist $\xi_{jk}^0 = \eta_{jk}^0 = 0$, $\beta_{jk} = 0$ und analog auch $\xi_{kj}^0 = \eta_{kj}^0 = 0$, $\beta_{kj} = 0$, vgl. Bild 1.6a.

Ein **Schubgelenk** (j, k) bewegt sich in einem der beiden Glieder, z. B. im Glied k , auf einer Geraden. Die Bewegung auf dieser gliedfesten Schubgeraden wird durch

$$\zeta_{kj}(t) = s_{kj}(t) e^{i\beta_{kj}} + \xi_{kj}^0 + i\eta_{kj}^0 \quad (5)$$

mit $\beta_{kj} = \text{konst}$ erfaßt. Gleichung (5) kann gedeutet werden als Darstellung der Drehung einer parallel zur ξ_k -Achse verlaufenden Geraden um den Winkel β_{kj} (Bild 1.6b). Durch Angabe der während der Bewegung des Mechanismus unveränderlichen Größen β_{kj} (Steigungswinkel der Geraden) und des Bezugspunktes (ξ_{kj}^0, η_{kj}^0) ist jede Schubgerade eindeutig bestimmt.

Sinngemäß können auch Räderkoppelgetriebe und Zahnradgetriebe erfaßt werden. Ein **Rädergelenk**, das im System j einen Kreis beschreibt, wird in diesem System durch

$$\zeta_{jk}(t) = r_{jk} e^{i\beta_{jk}(t)} \quad (6)$$

erfaßt, wobei in (3) $\xi_{jk} = r_{jk} = \text{konst}$ und $\eta_{jk} = 0$ ist, vgl. Bild 1.6c und d. Hier ist jedoch die einschränkende Forderung zu erfüllen, daß der Mittelpunkt des Zahnrades mit dem Ursprung des gliedfesten Koordinatensystems zusammenfällt ($\xi_{jk}^0 = \eta_{jk}^0 = 0$). Die Beschreibung eines beliebigen Kurvengelenks mit $\zeta_{jk}^0 = 0$ durch

$$\zeta_{jk}(t) = r_{jk}(t) e^{i\beta_{jk}(t)} \quad \text{bzw.} \quad \zeta_{jk}(t) = \xi_{jk}(t) + i\eta_{jk}(t) \quad (7)$$

erfordert die Angabe des Kurvenprofils in dem gliedfesten System, vgl. [1.14], [1.16].

Bei ebenen Koppelgetrieben, Räderkoppelgetrieben und Zahnradgetrieben treten Drehgelenke, Schubgelenke, Rädergelenke und Rad-Zahnstangengelenke auf. Drehgelenke besitzen nur einen Freiheitsgrad, den Relativwinkel zwischen beiden gliedfesten Systemen. Die anderen Gelenkarten besitzen einen weiteren Freiheitsgrad in dem gliedfesten System. Deshalb sind zusätzliche Zwangsbedingungen für Schubgelenke, Rädergelenke und Rad-Zahnstangengelenke charakteristisch, die aus den Bewegungsmöglichkeiten der Gelenke folgen.

Für ein **Schubgelenk** (Bild 1.6 b) bleibt bei beliebigen Bewegungen der Relativwinkel zwischen Nachbargliedern unveränderlich. Deshalb gilt $\dot{\varphi}_j = \dot{\varphi}_k$ oder

$$\varphi_j = \varphi_k + \varphi_{jk}, \quad \varphi_{jk} = \text{konst.} \quad (8)$$

Bei einem **Rädergelenk** rollen die Teilkreise der Zahnräder aufeinander ab, ohne zu gleiten. Deshalb gilt $r_{kj}\dot{\beta}_{kj} = \pm r_{jk}\dot{\beta}_{jk}$, und daraus folgt die Beziehung (Bild 1.6 d)

$$\beta_{kj} = \pm \frac{r_{jk}}{r_{kj}} \beta_{jk} + \beta_{kj}^0, \quad \beta_{kj}^0 = \text{konst.} \quad (9)$$

Die Radien entsprechen dem Verhältnis der Zähnezahlen (Übersetzungsverhältnis). Der Winkel β_{kj}^0 ist der Montagewinkel, welcher die Anfangsstellung bestimmt. Das negative Vorzeichen gilt für Außenverzahnung, das positive für den Fall eines innerhalb eines Rades abrollenden Rades (Innenverzahnung).

Bei einem **Rad-Zahnstangengelenk** (Bild 1.6 c) gilt wegen $s_{jk} = \pm r_{kj}\dot{\beta}_{kj}$ die Beziehung

$$\beta_{kj} = \pm \frac{s_{jk}}{r_{kj}} + \beta_{kj}^0, \quad \beta_{kj}^0 = \text{konst.} \quad (10)$$

Das Rad ist das Glied k . Das Vorzeichen folgt aus der Orientierung der Schubgeraden: „plus“ gilt, wenn die positive Richtung der Schubgeraden vom Rad aus gesehen nach links gerichtet ist. Dies entspricht einem innenverzahnten Zahnrad mit unendlich großem Radius, vgl. (9).

Auf **Kurvengelenke**, die ebenfalls in [21], [1.14], [1.16] behandelt wurden, wird aus Platzgründen nicht näher eingegangen.

Die Struktur eines beliebigen Mechanismus kann in Maschen aufgeteilt werden. Eine **Masche** ist eine Folge von miteinander verbundenen Gliedern, wobei jeweils benachbarte Glieder sowie das erste mit dem letzten Glied durch Gelenke verbunden sind. Ein Glied darf in einer Masche nur einmal vorkommen, muß jedoch in mindestens einer Masche enthalten sein. Die Verbindung der Gelenkpunkte der Glieder, die zu einer Masche gehören, stellt ein geschlossenes Polygon dar.

Die Maschen werden fortlaufend mit dem Index iM numeriert ($iM = 1, 2, \dots, IM$), wobei dafür zwei Buchstaben benutzt werden, weil die Einzelbuchstaben des Alphabets nicht mehr ausreichen. Ein Mechanismus mit I Gliedern und I_1 Gelenken kann in

$$IM = I_1 - I + 1 \quad (11)$$

unabhängige Maschen zerlegt werden [1.14], [1.22], [1.16], [21]. Mehrfachgelenke sind als zusammenfallende Einzelgelenke zu interpretieren.

Mechanismen mit I Gliedern, die nur einfache Drehgelenke besitzen, bestehen aus $I_1 = (3I - 4)/2$ Drehgelenken und gemäß (11) also aus $(I - 2)/2$ Maschen. Zu einer Masche gehören KM Glieder ($kM = 3, 4, \dots, KM$). Die Höchstzahl beträgt $KM = I$.

Analog zur Indexfolge bei der Zerlegung eines Mechanismus in Dyaden wird im Falle der Maschenaufteilung eine Mechanismenstruktur durch eine Maschenmatrix $P = (p_{iMkM})$ charakterisiert. P ist eine Rechteckmatrix mit IM Zeilen und I Spalten. In der iM -ten Zeile dieser Matrix ($iM = 1, 2, \dots, IM$) sind die Ziffern der zur iM -ten Masche gehörenden KM Getriebeglieder in der Reihenfolge angegeben, wie das Polygon innerhalb des Mechanismus durchlaufen wird. Falls $KM < I$ ist, sind die letzten $I - KM$ Elemente der iM -ten Zeile Nullen.

Die topologische Struktur eines ebenen Mechanismus läßt sich mit der Gelenkmatrix $G = ((g_{jk}))$ beschreiben, welche der aus der Topologie bekannten Adjazenzmatrix entspricht. Die Gelenkmatrix ist eine $(I \times I)$ -Matrix, deren Elemente durch

$$g_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{falls Gelenk } (j, k) \text{ existiert,} \\ 0, & \text{falls Gelenk } (j, k) \text{ nicht existiert,} \end{cases}$$

definiert sind. Beispiele für Gelenkmatrizen enthalten die Tabellen 1.3 und 1.4.

Eine Maschenmatrix kann auf Grund der geschlossenen Polygone, die aus einer Getriebeskizze ersichtlich sind, aufgestellt werden. Einen Algorithmus, der zum formalen Aufstellen der Maschenmatrix P aus der Gelenkmatrix G geeignet ist, wurde z. B. von PAUSCH [1.16] entwickelt und innerhalb der Programme KOGEO [1.16] und DAM [2.6] benutzt. Für die damit erhaltenen Maschenmatrizen zeigen die Tabellen 1.3 und 1.4 Beispiele.

Die Aufteilung eines Mechanismus in unabhängige Maschen und damit auch die Maschenmatrix ist allerdings im Gegensatz zur Gelenkmatrix mehrdeutig. Für den Fall 1 in Tabelle 1.4 wäre z. B. auch die Maschenmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

benutzbar. Von der Maschenmatrix ist die Form der Jacobi-Matrix A (Bandstruktur oder stark besetzt) abhängig, die bei der iterativen Lösung der Zwangsbedingungen von Bedeutung ist, vgl. (1.3.3./4).

Mit der Maschenmatrix ist die Voraussetzung zur formalen Aufstellung der **Zwangsbedingungen** gegeben. Die Zwangsbedingungen drücken analytisch aus, daß und mit welchen Bewegungsmöglichkeiten die Glieder eines Mechanismus miteinander verbunden sind.

Ein Getriebeglied mit der Nummer j sei durch das Gelenk (j, i) mit dem Glied i und durch das Gelenk (j, k) mit dem Glied k verbunden. Dann beträgt der vektorielle Abstand zwischen den Gelenken (j, i) und (j, k) in komplexer Schreibweise im raumfesten Bezugssystem

$$z_{jk} - z_{ji} = (\zeta_{jk} - \zeta_{ji}) e^{i\varphi}, \quad (12)$$

vgl. Bild 1.5 und (2). Eine Masche bildet ein geschlossenes Polygon. Die Summe aller Vektoren dieses Polygons ist gleich 0. Somit ergibt sich pro Masche eine komplexe

Tabelle 1.3. Getriebeschema, Maschenmatrix und Maschengleichung von einmaschigen Mechanismen

Fall	Getriebeschema	Gelenkmatrix	Maschenmatrix und Maschengleichung
1		$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(1 \ 2 \ 3 \ 4) = P$ $\xi_{12} - \xi_{14} + \xi_{23} e^{i\varphi_2(t)} + \xi_{34} e^{i\varphi_3(t)} - \xi_{43} e^{i\varphi_4(t)} = 0$ $\eta_{34} = \eta_{43} = 0$
2		$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(1 \ 2 \ 3 \ 4) = P$ $\sum_{k=1}^4 (\xi_{k,k+1} - \xi_{k,k-1}) e^{i\varphi_k} = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_4 = 0$ $\xi_{21} = \xi_{41} = \xi_{43} = \eta_{32} = \eta_{34} = 0$ $\xi_{12} + i\eta_{12} - \xi_{14}^0 - i\eta_{14}^0 - s_{14} e^{i\beta_{14}} + \xi_{23} e^{i\varphi_2} + \xi_{34} e^{i\varphi_3} = 0$
3		$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(1 \ 2 \ 3) = P$ $\xi_{12} - \xi_{13} + r_{23} e^{i\beta_{23}(t)} e^{i\varphi_2(t)} - r_{32} e^{i\beta_{32}(t)} e^{i\varphi_3(t)} = 0$ $\beta_{32}(t) = -\frac{r_{23}}{r_{32}} \beta_{23}(t) + \beta_{32}^0$
4		$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(1 \ 2 \ 3) = P$ $\xi_{12} - \xi_{13} + r_{23} e^{i\beta_{23}(t)} e^{i\varphi_2(t)} + (s_{31}(t) - s_{32}(t)) e^{i\varphi_3(t)} = 0$ $\beta_{23}(t) = -\frac{1}{r_{23}} s_{32}(t) + \beta_{23}^0$ $\varphi_3 = \varphi_1 = 0$

Zwangsbedingung:

$$\bar{f}_{iM} = \sum_{kM=1}^{KM} (z_{kM, kM+1} - z_{kM, kM-1}) = 0, \quad iM = 1, 2, \dots, IM, \quad (13)$$

oder wegen (12)

$$\bar{f}_{iM} = \sum_{kM=1}^{KM} (\zeta_{kM, kM+1} - \zeta_{kM, kM-1}) e^{i\varphi_{kM}} = 0, \quad iM = 1, 2, \dots, IM. \quad (14)$$

Weil das erste Glied der Masche mit dem letzten verbunden ist, gilt für die Indizes $0 \triangleq KM$ und $KM + 1 \triangleq 1$. In (14) sind die gliedfesten Koordinaten $\zeta_{kM, kM+1}$ und $\zeta_{kM, kM-1}$ entsprechend der Art des Gelenkes durch eine der aus (3) abgeleiteten Beziehungen (4) bis (7) zu ersetzen, wobei die Indizes sich aus der iM -ten Zeile der Maschenmatrix P ergeben.

Für jede der insgesamt IM unabhängigen Maschen wird somit eine komplexe Zwangsbedingung erhalten. Nach deren Aufspaltung in Real- und Imaginärteil ergeben sich $2 \cdot IM$ im allgemeinen transzendente Gleichungen für die Berechnung der $2 \cdot IM$ Unbekannten. Hinzu kommen gegebenenfalls, wenn Schubgelenke, Rädergelenke oder Rad-Zahnstangengelenke im Mechanismus vorkommen, weitere Zwangsbedingungen der Form (8), (9) oder (10). Die Unbekannten sind Winkel $\varphi_i(t)$, Schubwege $s_{ik}(t)$ oder Winkel $\beta_{ik}(t)$ von Rädern, vgl. (1.3.2./15 bis 21).

Dyadenmechanismen können auch in Maschen aufgeteilt werden. Bei geschickter Aufteilung entsteht dann ein gestaffeltes System von $2 \cdot IM$ paarweise gekoppelten Gleichungen, so daß nur IM quadratische Gleichungen zu lösen sind. Die Maschenkonzeption gilt für beliebige Mechanismenstrukturen, also auch für solche, die aus Assurgruppen höherer Ordnung bestehen. Im allgemeinen entstehen dann Gleichungen höherer als zweiter Ordnung, wenn man versucht, das System transzendenter Gleichungen, das aus (14) folgt, analytisch zu lösen.

Bevor auf die Lösung der Zwangsbedingungen (14) eingegangen wird, soll noch die dargelegte Methode auf Beispiele angewendet werden.

1.3.2. Beispiele zur Aufstellung von Zwangsbedingungen

In Tabelle 1.3 sind vier Beispiele (mit allen Gelenkarten) einmaschiger Mechanismen zusammengestellt. Die Maschenmatrix entartet dabei zu einer Zeile. Aus der Lage der Koordinatensysteme im Getriebschema sieht man, welche gliedfesten Gelenkkordinaten (ξ_{jk}, η_{jk}) gleich 0 sind. In den Zwangsbedingungen, die formal aus (1.3.1./14) folgen, tauchen nur die Koordinatenwerte auf, die ungleich 0 sind. Die Winkel φ_j sind laut Definition durch die Lage der ξ_j -Achsen eindeutig bestimmt.

Beispiele für mehrmaschige Mechanismen enthält Tabelle 1.4. Die Lage der gliedfesten Koordinatensysteme, die vom Problembearbeiter unabhängig von der Maschenmatrix frei wählbar ist, wurde vorgegeben. Für die Fälle 2 und 3 soll der in 1.3.1. beschriebene Weg bis zu den reellen Zwangsbedingungen gezeigt werden.

Aus der Maschenmatrix (Fall 2) und aus (1.3.1./14) ergeben sich die beiden komplexen Zwangsbedingungen (gemäß (1.3.1./11) ist $IM = 2$) formal zu

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 = & (\zeta_{12} - \zeta_{16}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{23} - \zeta_{21}) e^{i\varphi_2} + (\zeta_{34} - \zeta_{32}) e^{i\varphi_3} \\ & + (\zeta_{46} - \zeta_{43}) e^{i\varphi_4} + (\zeta_{61} - \zeta_{64}) e^{i\varphi_6} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 = & (\zeta_{12} - \zeta_{16}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{23} - \zeta_{21}) e^{i\varphi_2} + (\zeta_{35} - \zeta_{32}) e^{i\varphi_3} \\ & + (\zeta_{56} - \zeta_{53}) e^{i\varphi_5} + (\zeta_{61} - \zeta_{65}) e^{i\varphi_6} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Beim ersten und letzten Term wurde die zyklische Vertauschung der Indizes benutzt, weil das Polygon sich schließen muß, vgl. Fall 2 in Tabelle 1.4.

Wie aus dem Getriebschema ersichtlich, sind bei dieser speziellen Wahl der Bezugssysteme mehrere Koordinaten identisch 0:

$$\begin{aligned} \zeta_{12} = \zeta_{21} = \zeta_{32} = \zeta_{43} = \zeta_{53} = \zeta_{61} = 0, \\ \eta_{16} = \eta_{23} = \eta_{35} = \eta_{46} = \eta_{56} = \eta_{64} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Tabelle 1.4. Getriebeschema und Maschenmatrix mehrmaschiger Mechanismen

Fall	Getriebeschema	Gelenkmatrix	Maschenmatrix	ϕ	q
1		$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix}$	ϕ_2
2	<p> $\varphi_{20} = 45^\circ$ $\varphi_{30} \approx 20^\circ$ $\varphi_{40} \approx 15^\circ$ $\varphi_{50} \approx 340^\circ$ $\varphi_{60} \approx 100^\circ$ </p>	$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix}$	ϕ_2
3		$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ s_{71} \\ s_{76} \\ \beta_{13} \\ \beta_{56} \end{pmatrix}$	ϕ_2
4		$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \phi_4 \\ \phi_5 \\ s_{43} \\ s_{46} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_5 \end{pmatrix}$
5	<p> $\varphi_3 = \varphi_4 - \varphi_{43}$, $\varphi_6 = \varphi_5 + \varphi_{65}$ </p>	$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} s_{43} \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ s_{65} \end{pmatrix}$	ϕ_2

Zur Verminderung des Schreibaufwandes werden Abkürzungen für die trigonometrischen Funktionen eingeführt:

$$c_j = \cos \varphi_j, \quad s_j = \sin \varphi_j. \quad (4)$$

Auf Grund der Eulerschen Relation ($e^{i\varphi_j} = c_j + is_j$) können mit den genannten Vereinfachungen die Gleichungen (1) und (2) so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 = & -\xi_{16}(c_1 + is_1) + \xi_{23}(c_2 + is_2) + (\xi_{34} + i\eta_{34})(c_3 + is_3) \\ & + \xi_{46}(c_4 + is_4) - \xi_{64}(c_6 + is_6) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 = & -\xi_{16}(c_1 + is_1) + \xi_{23}(c_2 + is_2) + \xi_{35}(c_3 + is_3) \\ & + \xi_{56}(c_5 + is_5) - (\xi_{65} + i\eta_{65})(c_6 + is_6) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Nach Trennung der komplexen Zahlen in ihre Real- und Imaginärteile entstehen vier reelle Gleichungen. Sie werden so geordnet, daß auf der linken Seite die unbekannt Winkel ($\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$) und auf der rechten Seite der bekannte Antriebswinkel φ_2 vorkommen. Infolge der Übereinstimmung der x -Achse mit der ξ_1 -Achse ist $\varphi_1 = 0$ und somit $c_1 = 1$ und $s_1 = 0$, vgl. (4).

$$\xi_{34}c_3 - \eta_{34}s_3 + \xi_{46}c_4 - \xi_{64}c_6 = +\xi_{16} - \xi_{23}c_2, \quad (7)$$

$$\xi_{34}s_3 + \eta_{34}c_3 + \xi_{46}s_4 - \xi_{64}s_6 = -\xi_{23}s_2, \quad (8)$$

$$\xi_{35}c_3 + \xi_{56}c_5 - \xi_{65}c_6 + \eta_{65}s_6 = \xi_{16} - \xi_{23}c_2, \quad (9)$$

$$\xi_{35}s_3 + \xi_{56}s_5 - \xi_{65}s_6 - \eta_{65}c_6 = -\xi_{23}s_2. \quad (10)$$

Mit (7) bis (10) liegen vier transzendente Gleichungen vor, die nach umfangreichen Umformungen auf eine Gleichung vierten Grades für c_j oder s_j zurückgeführt werden könnten. Ihre simultane iterative Lösung ist jedoch zweckmäßiger, vgl. 1.3.3.

Als zweites Beispiel wird das Räderkoppelgetriebe aus Tabelle 1.4, Fall 3, betrachtet. Aus (1.3.1./14) und der Maschenmatrix folgen $IM = 4$ komplexe Zwangsbedingungen:

$$\bar{f}_1 = (\zeta_{12} - \zeta_{13}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{23} - \zeta_{21}) e^{i\varphi_2} + (\zeta_{31} - \zeta_{32}) e^{i\varphi_3} = 0, \quad (11)$$

$$\bar{f}_2 = (\zeta_{15} - \zeta_{13}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{54} - \zeta_{51}) e^{i\varphi_3} + (\zeta_{43} - \zeta_{45}) e^{i\varphi_4} + (\zeta_{31} - \zeta_{34}) e^{i\varphi_3} = 0, \quad (12)$$

$$\bar{f}_3 = (\zeta_{16} - \zeta_{15}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{65} - \zeta_{61}) e^{i\varphi_3} + (\zeta_{51} - \zeta_{56}) e^{i\varphi_3} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{f}_4 = (\zeta_{17} - \zeta_{16}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{76} - \zeta_{71}) e^{i\varphi_3} + (\zeta_{61} - \zeta_{67}) e^{i\varphi_3} = 0. \quad (14)$$

Sie vereinfachen sich, weil die Koordinatensysteme so gewählt wurden, daß $\zeta_{12} = \zeta_{21} = \zeta_{51} = \zeta_{61} = \zeta_{32} = \zeta_{43} = 0$, $\eta_{23} = \eta_{34} = \eta_{45} = 0$, $\beta_{71} = \beta_{76} = 0$ gilt, vgl. Getriebschema in Tabelle 1.4.

Für die Schubgelenke ist (1.3.1./5) und für die Rädergelenke (1.3.1./6) zu beachten. Somit nehmen (11) bis (14) folgende Form an:

$$\bar{f}_1 = f_1 + if_2 = \xi_{23}e^{i\varphi_3(t)} + r_{31}e^{i\beta_{31}(t)}e^{i\varphi_3(t)} - r_{13}e^{i\beta_{13}(t)} = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 = f_3 + if_4 &= \xi_{54} e^{i\varphi_3(t)} - \xi_{45} e^{i\varphi_4(t)} - [\xi_{34} - r_{31} e^{i\beta_{31}(t)}] e^{i\varphi_3(t)} + \xi_{15} + i\eta_{15} \\ &\quad - r_{13} e^{i\beta_{13}(t)} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\bar{f}_3 = f_5 + if_6 = r_{65} e^{i\beta_{65}(t)} e^{i\varphi_6(t)} - r_{56} e^{i\beta_{56}(t)} e^{i\varphi_5(t)} + \xi_{16} + i\eta_{16} - \xi_{15} - i\eta_{15} = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_4 = f_7 + if_8 &= [s_{71}(t) - s_{76}(t)] e^{i\varphi_7(t)} + r_{67} e^{i\beta_{67}(t)} e^{i\varphi_6(t)} + \xi_{16} + i\eta_{16} - \xi_{17}^0 \\ &\quad - i\eta_{17}^0 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Sie können nach der Trennung in Real- und Imaginärteil als acht reelle Gleichungen geschrieben werden. Unbekannte Größen sind die zehn Winkel β_{13} , β_{31} , β_{56} , β_{65} , β_{67} , φ_3 , φ_4 , φ_5 , φ_6 , φ_7 und die zwei Schubwege s_{71} und s_{76} . Die fehlenden vier Gleichungen folgen aus den Zwangsbedingungen, die für die vier Gelenke mit je zwei Freiheitsgraden gelten, vgl. (1.3.1./8 bis 10): Für das Schubgelenk folgt aus (1.3.1./8) mit $\varphi_{71} = \pi/2$ und $\varphi_1 = 0$:

$$f_9 = \varphi_7 - \varphi_1 - \varphi_{71} = \varphi_7 - \pi/2 = 0. \quad (19)$$

Für die Rädergelenke (1, 3) bzw. (5, 6) gilt wegen (1.3.1./9):

$$f_{10} = \beta_{31} - \frac{r_{13}}{r_{31}} \beta_{13} - \beta_{31}^0 = 0, \quad f_{11} = \beta_{65} + \frac{r_{56}}{r_{65}} \beta_{56} - \beta_{65}^0 = 0 \quad (20)$$

und für das Rad-Zahnstangengelenk (1.3.1./10):

$$f_{12} = \beta_{67} + \frac{s_{76}}{r_{67}} - \beta_{67}^0 = 0. \quad (21)$$

Da der Antriebswinkel $\varphi_2(t)$ veränderlich ist, müssen die zwölf reellen Gleichungen, die aus (15) bis (21) folgen, für jede interessierende Stellung φ_2 gelöst werden, um die Größe aller Winkel und Wege zu bestimmen. Es verbleiben acht reelle transzendente Gleichungen, vgl. Φ in Tabelle 1.4.

1.3.3. Lösung der Zwangsbedingungen

Die Zwangsbedingungen beliebiger Mechanismen, die vom Standpunkt der Theoretischen Mechanik holonome Systeme darstellen, haben die allgemeine Form

$$f_i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Sie sind bei ungleichmäßig übersetzenden Mechanismen transzendente Gleichungen, und die Variablen ψ_j können Drehwinkel φ_j , β_{jk} oder Schubwege s_{jk} sein. Beispiele für solche Gleichungen sind (1.3.2./5, 6) und (1.3.2./15–21).

Die Variablen ψ_j müssen unterschieden werden in die generalisierten unabhängigen Lagrangeschen Koordinaten $(q_1, q_2, \dots, q_F) = \mathbf{q}^T$, die man auch als Antriebskoordinaten bezeichnen kann, und die Lagekoordinaten $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N) = \Phi^T$. Die Anzahl F der Lagrangeschen Koordinaten ist so groß wie der Getriebefreiheitsgrad

(Laufgrad) des Mechanismus, d. h., sie entspricht der Anzahl der unabhängigen Antriebe. Die Lagrangeschen Koordinaten bestimmen eindeutig die Lagekoordinaten Φ_n , welche die Winkel und Schubwege der Glieder innerhalb des Mechanismus beschreiben. Für jede Getriebestellung, die durch den Vektor der Antriebskoordinaten \mathbf{q} definiert ist, sind die N unbekanntenen Lagekoordinaten Φ aus den N reellen transzendenten Gleichungen ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$f_i(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N; q_1, q_2, \dots, q_F) = 0 \quad (2)$$

zu bestimmen.

Die Funktionen f_i werden an einem Startpunkt Φ_0 (Anfangsstellung) in eine Taylorreihe entwickelt:

$$f_i = f_i(\Phi_0, \mathbf{q}) + \sum_{n=1}^N \left. \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_n} \right|_0 \Delta \Phi_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left. \frac{\partial^2 f_i}{\partial \Phi_n \partial \Phi_m} \right|_0 \Delta \Phi_n \Delta \Phi_m + \dots \quad (3)$$

Falls nur die linearen Terme berücksichtigt werden, erhält man nach dem Einsetzen von (3) in (2) ein lineares Gleichungssystem:

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \Phi = -\mathbf{f} \quad (4)$$

mit der $(N \times N)$ -Jacobimatrix

$$\mathbf{A} = \left(\left. \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_n} \right|_0 \right), \quad (5)$$

dem Vektor $\Delta \Phi^T = (\Delta \Phi_1, \Delta \Phi_2, \dots, \Delta \Phi_N)$ der Koordinatenänderungen und dem Vektor $\mathbf{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ der Restwerte.

Falls der Startvektor Φ_0 die Zwangsbedingungen (2) nicht exakt erfüllt, können aus (4) Korrekturwerte $\Delta \Phi$ berechnet werden, welche (wenn die Methode konvergiert) zu einer genaueren Erfüllung von (2) führen. Dazu eignet sich das Newtonsche Iterationsverfahren.

Gleichung (4) kann nach den Unbekannten $\Delta \Phi$ aufgelöst werden, falls $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist. Im Fall $\det \mathbf{A} = 0$ ist die Matrix \mathbf{A} singulär und keine Lösung möglich. Solche Fälle können auftreten, sie entsprechen singulären Mechanismenstellungen, d. h. indifferenten Stellungen (z. B. Parallelkurbelgetriebe in Strecklage) oder übergeschlossenen Mechanismen (z. B. Parallelkurbelgetriebe mit drei Kurbeln). Bei der numerischen Analyse muß man indifferente Stellungen vermeiden, z. B. durch passende Schrittweitenwahl von $\Delta \mathbf{q}$.

Die Voraussetzung zur Lösung von (4) ist, daß die Matrix \mathbf{A} für die interessierende Getriebestellung bekannt ist. Dazu ist mit \mathbf{q}_0 eine Anfangsstellung des Mechanismus maßstäblich zu zeichnen, um Näherungswerte der Wege und Winkel für den Startvektor Φ_0 abmessen zu können. Diese Anfangsstellung charakterisiert gleichzeitig die betrachtete Montagevariante, vgl. z. B. Bild 1.4. Die meisten Mechanismen besitzen mehrere (M geradzahlig) Montagevarianten. Das Iterationsverfahren konvergiert gegen diejenige, die sich nahe am Startvektor Φ_0 befindet.

Mit den Werten \mathbf{q}_0 und Φ_0 werden berechnet:

$$\mathbf{A}(\Phi_0, \mathbf{q}_0) = \mathbf{A}_0 = \left(\left. \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_n} \right|_0 \right), \quad \mathbf{f}^T(\Phi_0, \mathbf{q}_0) = \mathbf{f}_0^T = (f_1, f_2, \dots, f_N)_0. \quad (6)$$

Der nullte Korrekturvektor der Lagekoordinaten $\Delta\Phi_0^T = (\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_2, \dots, \Delta\Phi_N)_0$ folgt aus dem linearen Gleichungssystem für die Anfangsstellung:

$$A_0\Delta\Phi_0 = -f_0. \quad (7)$$

Genauere Lagekoordinaten ergeben sich zu

$$\Phi_1 = \Phi_0 + \Delta\Phi_0. \quad (8)$$

Damit wird geprüft, ob die zulässigen Restwerte hinreichend klein sind:

$$|f_i(\Phi, \mathbf{q})| \leq \varepsilon_i. \quad (9)$$

Die Werte ε_i , welche ein Maß für die Erfüllung der Zwangsbedingungen darstellen, sind vorzugeben. Sie sollten eine Zehnerpotenz kleiner als die Fertigungsgenauigkeit des kleinsten Getriebegliedes sein. Die allgemeine Iterationsvorschrift lautet also

$$A_k(\Phi_k) \Delta\Phi_k = -f_k, \quad \Phi_{k+1} = \Phi_k + \Delta\Phi_k \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (10)$$

Die Iterationsschritte sind solange zu wiederholen, bis (9) erfüllt ist oder die Korrekturwerte $\Delta\Phi$ ein Mindestmaß unterschreiten. Falls zu viele Iterationsschritte verlangt werden, ist dies ein Anzeichen für die Divergenz des Verfahrens und ein Grund zum Abbruch.

Bei der Analyse von Mechanismen, die sowohl Dreh- als auch Schubgelenke besitzen, können numerische Schwierigkeiten dadurch entstehen, daß die Zahlenwerte der Änderungen der Komponenten des Vektors $\Delta\Phi$ sich um mehrere Zehnerpotenzen unterscheiden. Durch die Wahl der Maßeinheit (Meter oder Millimeter) für die Schubwege wird der Zahlenwert von Δs_{jk} schon um den Faktor 1000 beeinflusst. Es kann passieren, daß das Verhältnis von Δs_{jk} zu $\Delta\varphi_j$ so viele Zehnerpotenzen beträgt, daß Rundungsfehler ins Gewicht fallen. Es empfiehlt sich deshalb, mit dimensionsgleichen geometrischen Größen zu operieren, also z. B. die Schubwege durch eine Länge zu dividieren, um annähernd gleichgroße Zahlenwerte innerhalb von $\Delta\Phi$ zu erhalten wie für die Winkel.

Normalerweise sind die Lagekoordinaten für mehrere Getriebestellungen \mathbf{q}_i zu berechnen, die sich durch eine konstante Schrittweite $\Delta\mathbf{q}$ unterscheiden. Es ist dann zweckmäßig, eine so kleine Schrittweite $\Delta\mathbf{q}$ zu wählen, daß die Lagekoordinaten $\Phi(\mathbf{q}_i)$ der vorherigen Stellung als Startvektor für die nächste Stellung $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \Delta\mathbf{q}$ geeignet sind. Erfahrungsgemäß reicht es bei den üblichen Koppelgetrieben mit umlaufendem Antriebsglied aus, den Antriebswinkel φ_2 mit einer Schrittweite von $\Delta\varphi_2 = 20^\circ$ zu verändern, ohne daß mehr als etwa $k = 4$ Iterationsschritte pro Stellung benötigt werden. Meist wird man wegen der besseren Übersicht über die Funktionsverläufe ohnehin eine kleinere Schrittweite benutzen.

Abschließend wird noch das konkrete Getriebe in Tabelle 1.4, Fall 2 betrachtet. Für dieses schon in 1.3.2. behandelte Beispiel des sechsgliedrigen Koppelgetriebes sind vier reelle Zwangsbedingungen durch (1.3.2./7 bis 10) gegeben. Die Antriebskoordinate ist $q_1 = \varphi_2$, die Lagekoordinaten sind $\Phi_1 = \varphi_3$, $\Phi_2 = \varphi_4$, $\Phi_3 = \varphi_5$, $\Phi_4 = \varphi_6$.

Aus der gezeichneten Anfangsstellung könnte man dem Getriebeschema für den Antriebswinkel $q_0 = \varphi_2 = \pi/4$ den Startvektor

$$\Phi_0^T = (0,35; 0,26; 5,93; 1,75) \triangleq (\varphi_{30}, \varphi_{40}, \varphi_{50}, \varphi_{60}) \quad (11)$$

entnehmen, wobei alle Winkel in Bogenmaß umzurechnen sind, vgl. Tabelle 1.4, Fall 2. Aus dem Restvektor

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{34}c_3 - \eta_{34}s_3 + \xi_{46}c_4 - \xi_{64}c_6 - \xi_{16} + \xi_{23}c_2 \\ \xi_{34}s_3 + \eta_{34}c_3 + \xi_{46}s_4 - \xi_{64}s_6 + \xi_{23}s_2 \\ \xi_{35}c_3 + \xi_{56}c_5 - \xi_{65}c_6 + \eta_{65}s_6 - \xi_{16} + \xi_{23}c_2 \\ \xi_{35}s_3 + \xi_{56}s_5 - \xi_{65}s_6 - \eta_{65}c_6 + \xi_{23}s_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

findet man gemäß (5) die Jacobimatrix allgemein zu

$$A = \begin{bmatrix} -\xi_{34}s_3 - \eta_{34}c_3 & -\xi_{46}s_4 & 0 & \xi_{64}s_6 \\ \xi_{34}c_3 - \eta_{34}s_3 & \xi_{46}c_4 & 0 & -\xi_{64}c_6 \\ -\xi_{35}s_3 & 0 & -\xi_{56}s_5 & \xi_{65}s_6 + \eta_{65}c_6 \\ \xi_{35}c_3 & 0 & \xi_{56}c_5 & -\xi_{65}c_6 + \eta_{65}s_6 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Einsetzen von q_0 und Φ_0 aus (11) liefert f_0 aus (12) und A_0 aus (13), womit die Iteration gemäß (7) beginnen kann, vgl. (6) und (10).

1.3.4. Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, partielle Ableitungen und U -Funktionen

In Abschnitt 1.2.3. ist für die Dyadenmechanismen gezeigt worden, wie die partiellen Ableitungen der Lagekoordinaten (einschließlich der U -Funktionen) nach den geometrischen Parametern berechnet werden können. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen stellen dabei einen Sonderfall dar. Für den Fall beliebiger Mechanismen, der hier interessiert, wird analog vorgegangen.

Die geometrischen Parameter des Mechanismus, zu denen die Abmessungen ξ_{jk} , η_{jk} , ξ_{jk}^0 , η_{jk}^0 , β_{jk} , r_{jk} gehören, sind Elemente des Parametervektors W . Für die Lagekoordinaten wurde in 1.3.3. schon die Bezeichnung $\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N)$ eingeführt. Die Zwangsbedingungen (1.3.3./2) sind Funktionen des Koordinatenvektors Φ und des Parametervektors W und lauten

$$f_i(\Phi, W) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Hier wurden im Vektor

$$\begin{aligned} W^T &= (w_1, w_2, \dots, w_F, w_{F+1}, \dots, w_{F+P}) \\ &= (q_1, \dots, q_F, w_{F+1}, \dots, w_{F+P}) \end{aligned} \quad (2)$$

sowohl die Antriebskoordinaten q_f ($f = 1, 2, \dots, F$) als auch die geometrischen Parameter, die den Indizes $(F + 1)$ bis $(F + P)$ zugeordnet sind, zusammengefaßt,

vgl. auch (23) und (24). Nachdem (1) nach der in Abschnitt 1.3.3. beschriebenen Methode gelöst wurde, ist für einen gegebenen Parametervektor \mathbf{W}_0 der Koordinatenvektor Φ bekannt. Gesucht sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial w_p} = \Phi_{i,p}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial w_p \partial w_q} = \Phi_{i,pq}, \quad (3)$$

$$p, q = 1, 2, \dots, P, P+1, P+2, \dots, P+N.$$

Im einfachsten (und häufigsten) Fall eines Mechanismus mit einem ($F = 1$) Antriebswinkel $w_1 \triangleq q_1 \triangleq \varphi$ gilt mit dieser Symbolik also

$$U' \triangleq \Phi_i' = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial q_1} = \Phi_{i,1}, \quad U'' = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \varphi^2} = \Phi_{i,11}. \quad (4)$$

Die U -Funktion ist der Oberbegriff, der sowohl die Lagekoordinaten Φ_i als auch die Koordinaten beliebiger Gliedpunkte (x_{jm}, y_{jm}) umfaßt, so daß im allgemeinen $U = U(q_i, \Phi_i)$ gilt. Geschwindigkeit und Beschleunigung einer beliebigen Lagekoordinate ergeben sich bei einem Antrieb zu

$$\dot{\Phi}_i = \Phi_{i,1} \dot{q}_1, \quad \ddot{\Phi}_i = \Phi_{i,11} \dot{q}_1^2 + \Phi_{i,1} \ddot{q}_1. \quad (5)$$

Manchmal spielt bei der Schwingungsberechnung von Mechanismen auch die Änderung der Beschleunigung eine Rolle. Sie erfordert die Berechnung der dritten Ableitung

$$\ddot{\ddot{\Phi}}_i = \Phi_{i,111} \ddot{q}_1^3 + 3\Phi_{i,11} \dot{q}_1 \ddot{q}_1 + \Phi_{i,111} \dot{q}_1^3, \quad (6)$$

vgl. Abschnitt 4.3.2. Hat ein Mechanismus zwei Antriebe (Getriebefreiheitsgrad $F = 2$), so folgt aus der Funktion $\Phi_i(q_1, q_2)$ durch Differentiation nach der Zeit

$$\dot{\Phi}_i = \Phi_{i,1} \dot{q}_1 + \Phi_{i,2} \dot{q}_2, \quad (7)$$

$$\ddot{\Phi}_i = \Phi_{i,11} \dot{q}_1^2 + \Phi_{i,22} \dot{q}_2^2 + \Phi_{i,11} \dot{q}_1^2 + 2\Phi_{i,12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \Phi_{i,22} \dot{q}_2^2. \quad (8)$$

Bei F Antrieben gilt

$$\dot{\Phi}_i = \sum_{p=1}^F \Phi_{i,p} \dot{q}_p, \quad \ddot{\Phi}_i = \sum_{p=1}^F \Phi_{i,p} \ddot{q}_p + \sum_{p=1}^F \sum_{q=1}^F \Phi_{i,pq} \dot{q}_p \dot{q}_q. \quad (9)$$

Es werden also die ersten und zweiten partiellen Ableitungen (3) benötigt, wenn man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Lagekoordinaten berechnen will.

Die Koordinaten beliebiger Gliedpunkte (Lagefunktionen U) sind von den Antriebs- und Lagekoordinaten abhängig. Bei Entwicklung der entsprechenden U -Funktionen (die aus (1.3.1./2) folgen) in eine Taylorreihe (1.2.3./3) treten bekanntlich (1.2.3./4) auch deren partielle Ableitungen auf. Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich analog (9) zu

$$\dot{U} = \sum_{p=1}^F U_{,p} \dot{q}_p, \quad \ddot{U} = \sum_{p=1}^F U_{,p} \ddot{q}_p + \sum_{p=1}^F \sum_{q=1}^F U_{,pq} \dot{q}_p \dot{q}_q. \quad (10)$$

Die partiellen Ableitungen von U sind aus denen der Funktionen Φ_i berechenbar.

Bei der Berechnung der verallgemeinerten Massen m_{ki} und deren partiellen Ableitungen (vgl. die Abschnitte 2.2.2. und 5.2.2.) werden nicht nur die ersten und zweiten, sondern auch dritte und vierte Ableitungen benötigt. Die Berechnung der höheren partiellen Ableitungen der Φ_i ist schrittweise möglich, wobei beim nächstfolgenden Schritt immer die Ergebnisse aller vorhergehenden Schritte gebraucht werden.

Man erhält ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der **ersten** partiellen Ableitungen $\Phi_{i,p}$, wenn man die f_i einmal total nach dem Parameter w_p differenziert. Es ergibt sich aus (1) mit der verallgemeinerten Kettenregel:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \Phi_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial w_p} + \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial w_p} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_N} \frac{\partial \Phi_N}{\partial w_p} = -\frac{\partial f_i}{\partial w_p}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Mit der bereits in (1.3.3./5) eingeführten Jacobimatrix \mathbf{A} des Mechanismus aus (11) auch so schreiben:

$$\mathbf{A} \cdot \Phi_{,p} = -\mathbf{f}_{,p}. \quad (12)$$

Es erscheinen jeweils für andere w_p nur neue rechte Seiten mit dem Vektor der partiellen Ableitungen, der aus (1) folgt:

$$\mathbf{f}_{,p}^T = (\partial f_1 / \partial w_p, \partial f_2 / \partial w_p, \dots, \partial f_N / \partial w_p). \quad (13)$$

Die **zweiten** partiellen Ableitungen $\Phi_{,pq}$ ergeben sich aus folgendem linearem Gleichungssystem, welches durch **totale** Differentiation von (11) nach w_q entsteht:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial \Phi_j} \Phi_{j,pq} = & -f_{i,pq} - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f_{i,p}}{\partial \Phi_j} \Phi_{j,q} + \frac{\partial f_{i,q}}{\partial \Phi_j} \Phi_{j,p} \right) \\ & - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f_i}{\partial \Phi_j \partial \Phi_k} \Phi_{j,p} \Phi_{k,q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Die Lösungen von (11) gehen in die rechte Seite von (14) ein. Man kann (14) analog zu (12) in Matrizenform schreiben:

$$\mathbf{A} \Phi_{,pq} = -\mathbf{f}_{,pq} - \mathbf{A}_{,p} \Phi_{,q} - \mathbf{A}_{,q} \Phi_{,p} - \Phi_{,p}^T \mathbf{B} \Phi_{,q}. \quad (15)$$

Die Matrix \mathbf{B} enthält die zweiten partiellen Ableitungen von f_i nach Φ_j und Φ_k .

Die **dritten** partiellen Ableitungen ergeben sich analog aus einem linearen Gleichungssystem, das durch totale Differentiation aus (14) folgt, mit derselben Koeffizientenmatrix \mathbf{A} auf der linken Seite.

Es ist rechentechnisch vorteilhaft, daß bei verschiedenen Parametern und allen partiellen Ableitungen höherer Ordnung die Jacobimatrix \mathbf{A} des Gleichungssystems, die schon bei der Lösung der Zwangsbedingungen in Abschnitt 1.3.3. auftauchte, benutzt werden kann.

Die dargelegten allgemeinen Zusammenhänge sollen am Beispiel eines Mechanismus (Bild 1.7) erläutert werden, der zwei Antriebe und zwei Schubgelenke hat und somit eine Ergänzung zu dem in Abschnitt 1.3.2. behandelten Koppelgetriebe darstellt, welches ausschließlich Drehgelenke besaß. Gegeben seien alle Abmessungen

dieser Struktur bezüglich der in Bild 1.7 bereits eingezeichneten gliedfesten Bezugssysteme. Ungleich 0 sind demzufolge die geometrischen Parameter von η_{12} , ξ_{15}^0 , η_{15}^0 , β_{17} , ξ_{17}^0 , η_{17}^0 , ξ_{23} , ξ_{34} , ξ_{43} , η_{43} , ξ_{46} , ξ_{67} .

Mit der dargelegten systematischen Methode sollen die komplexen und die reellen Maschengleichungen aufgestellt und die Jacobimatrix \mathbf{A} angegeben werden. Der weitere Weg zur Berechnung der Änderung des Schubweges s_{17} bei Variation des Parameters ξ_{46} und zur Berechnung der Geschwindigkeit \dot{s}_{17} und Beschleunigung \ddot{s}_{17} als Funktion der Antriebsbewegung $\varphi_2(t)$ und der Zusatzbewegung $s_{15}(t)$ soll beschrieben werden.

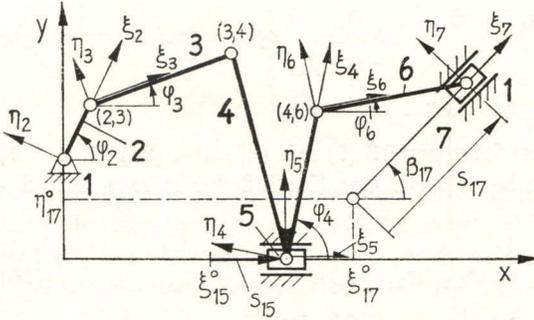


Bild 1.7. Koppelgetriebe mit zwei Antrieben. Maschenmatrix: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

Den Ausgangspunkt bilden die komplexen Zwangsbedingungen, die formal aus der in Bild 1.7 angegebenen Maschenmatrix \mathbf{P} folgen:

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 = & (\zeta_{12} - \zeta_{15}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{23} - \zeta_{21}) e^{i\varphi_2} + (\zeta_{34} - \zeta_{32}) e^{i\varphi_3} \\ & + (\zeta_{45} - \zeta_{43}) e^{i\varphi_4} + (\zeta_{51} - \zeta_{54}) e^{i\varphi_5} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_4 = & (\zeta_{15} - \zeta_{17}) e^{i\varphi_1} + (\zeta_{54} - \zeta_{51}) e^{i\varphi_5} + (\zeta_{46} - \zeta_{45}) e^{i\varphi_4} \\ & + (\zeta_{67} - \zeta_{64}) e^{i\varphi_6} + (\zeta_{71} - \zeta_{76}) e^{i\varphi_7} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Die in den unterstrichenen Größen enthaltenen Parameter sind identisch 0. Weiterhin ist $\varphi_1 = \varphi_5 = 0$ und $\xi_{12} = \beta_{15} = \eta_{15}^0 = \eta_{23} = \eta_{34} = \eta_{43} = \eta_{67} = 0$. Da beide Schubgeraden im Gestell liegen, gilt für $j = 5$ und $j = 7$ gemäß (1.3.1./5)

$$\zeta_{1j} = \xi_{1j}^0 + i\eta_{1j}^0 + s_{1j}(\cos \beta_{1j} + i \sin \beta_{1j}). \quad (18)$$

Somit entstehen aus (16) und (17) vier reelle Bedingungen, vgl. (1.3.2./4):

$$f_1 = -\xi_{15}^0 - s_{15} + \xi_{23}c_2 + \xi_{34}c_3 - \xi_{43}c_4 + \eta_{43}s_4 = 0, \quad (19)$$

$$f_2 = \eta_{12} + \xi_{23}s_2 + \xi_{34}s_3 - \xi_{43}s_4 - \eta_{43}c_4 = 0, \quad (20)$$

$$f_3 = \xi_{15}^0 + s_{15} - \xi_{17}^0 - s_{17} \cos \beta_{17} + \xi_{46}c_4 + \xi_{67}c_6 = 0, \quad (21)$$

$$f_4 = -\eta_{17}^0 - s_{17} \sin \beta_{17} + \xi_{46}s_4 + \xi_{67}s_6 = 0. \quad (22)$$

Die beiden Antriebskoordinaten (φ_2, s_{15}) und die Strecke ξ_{46} gehören zum Parametervektor \mathbf{W} gemäß (2):

$$w_1 = q_1 = \varphi_2, \quad w_2 = q_2 = s_{15}, \quad w_3 = \xi_{46}. \quad (23)$$

Lagekoordinaten sind laut Definition in Abschnitt 1.3.3.

$$\Phi_1 = \varphi_3, \quad \Phi_2 = \varphi_4, \quad \Phi_3 = \varphi_6, \quad \Phi_4 = s_{17}. \quad (24)$$

Die Jacobimatrix (1.3.3./5) findet man damit aus (19) bis (22) zu

$$A = \begin{bmatrix} -\xi_{34}s_3 & \xi_{43}s_4 + \eta_{43}c_4 & 0 & 0 \\ \xi_{34}c_3 & -\xi_{43}c_4 + \eta_{43}s_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{46}s_4 & -\xi_{67}s_6 & -\cos \beta_{17} \\ 0 & \xi_{46}c_4 & \xi_{67}c_6 & -\sin \beta_{17} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Die Geschwindigkeit des Abtriebsgliedes folgt gemäß (7) mit (23) und (24) für $i = 4$, d. h., es sind $\Phi_{4,1}$ und $\Phi_{4,2}$ aus (12) zu berechnen. Der Einfluß der Parameteränderung von ξ_{46} kann durch

$$\Delta s_{17} = \frac{\partial s_{17}}{\partial \xi_{46}} \Delta \xi_{46} \quad \text{oder} \quad \Delta \Phi_4 = \Phi_{4,3} \Delta w_3, \quad (26)$$

also aus $\Phi_{4,3}$ ermittelt werden.

Die partiellen Ableitungen, die den rechten Seiten von (12) entsprechen, ergeben sich aus (19) bis (22) zu

$$f_{,1} = \begin{pmatrix} -\xi_{23} \sin \varphi_2 \\ \xi_{23} \cos \varphi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \varphi_4 \\ \sin \varphi_4 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Damit folgen die $\Phi_{,p}$ (für $p = 1, 2$ und 3) aus (12), das in diesem Fall nicht zufällig ein gestaffeltes lineares Gleichungssystem bildet. Ein Blick auf (25) lehrt, daß sich zunächst aus den oberen zwei Gleichungen die beiden Unbekannten $\Phi_{1,p}$ und $\Phi_{2,p}$ berechnen lassen. Sie können dann in die unteren beiden Gleichungen eingesetzt werden, so daß auch wieder nur zwei Gleichungen für zwei Unbekannte ($\Phi_{3,p}$ und $\Phi_{4,p}$) zu lösen sind.

Diese Aufteilbarkeit hängt damit zusammen, daß sich dieser Mechanismus (Bild 1.7) aus zwei Dyaden zusammensetzt. Die Glieder 3-4 bilden im Sinne von Tabelle 1.1 eine Dyade 1. Art, die von den Eingangspunkten (2, 3) und (1, 5) angetrieben wird. Diese ist mit einer Dyade 2. Art (Tabelle 1.1 Nr. 2) gekoppelt, deren Eingabegrößen der bewegte Punkt (4, 6) und der feste Punkt (1, 7) sind. Die Geschwindigkeit des Abtriebsgliedes ist nun mit den bekannten Lagefunktionen erster Ordnung berechenbar ($U \triangleq s_{17}$):

$$\dot{\Phi}_4 = \Phi_{4,1} \dot{q}_1 + \Phi_{4,2} \dot{q}_2 \quad \text{oder} \quad \dot{s}_{17} = \frac{\partial s_{17}}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 + \frac{\partial s_{17}}{\partial s_{15}} \dot{s}_{15}. \quad (28)$$

Wie man aus A (25) und $f_{,3}$ (27) erkennen kann, ergibt sich $\Phi_{1,3} = \Phi_{2,3} = 0$, d. h., $\Phi_1 = \varphi_3$ und $\Phi_2 = \varphi_4$ behalten ihre Werte, obwohl sich der Parameter $w_3 = \xi_{46}$ ändert. Diese Tatsache läßt sich an Hand des Getriebeschemas in Bild 1.7 anschaulich geometrisch deuten: Wenn die Strecke ξ_{46} variiert wird, ändern sich φ_3 und φ_4 nicht, da diese Winkel innerhalb der näher am Antrieb befindlichen Gliedergruppe liegen. Es verbleiben die beiden Gleichungen

$$-\xi_{67} \sin \varphi_6 \Phi_{3,3} - \cos \beta_{17} \Phi_{4,3} = -\cos \varphi_4, \quad (29)$$

$$\xi_{67} \cos \varphi_6 \Phi_{3,3} - \sin \beta_{17} \Phi_{4,3} = -\sin \varphi_4, \quad (30)$$

deren Lösung nach kurzer Umformung die Gestalt

$$\Phi_{3,3} = \frac{\partial \varphi_6}{\partial \xi_{46}} = \frac{\sin(\beta_{17} - \varphi_4)}{\xi_{67} \cos(\beta_{17} - \varphi_6)}, \quad \Phi_{4,3} = \frac{\partial s_{17}}{\partial \xi_{46}} = \frac{\cos(\varphi_4 - \varphi_6)}{\cos(\beta_{17} - \varphi_6)} \quad (31)$$

annimmt. Auch hier ist eine Plausibilitätskontrolle möglich. Im Fall $\varphi_4 = \varphi_6 = \beta_{17}$ liegen die Gelenkpunkte (4, 5), (4, 6) und (6, 7) auf einer Geraden, und φ_6 ändert sich nicht ($\Phi_{3,3} = 0$), während s_{17} sich um denselben Wert wie ξ_{46} verlängert ($\Phi_{4,3} = 1$).

Auf die explizite Angabe der Lösungen $\Phi_{i,1}$ und $\Phi_{i,2}$ wird verzichtet. Sie werden nicht nur für (28), sondern auch zur Berechnung der zweiten Ableitungen $\Phi_{,11}$, $\Phi_{,12}$ und $\Phi_{,22}$ für (8) benötigt. Aus (27) folgt wegen $w_1 = \varphi_2$

$$f_{,11} = \begin{pmatrix} -\xi_{23} \cos \varphi_2 \\ -\xi_{23} \sin \varphi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{,12} = f_{,22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Die abgeleiteten Matrizen

$$A_{,1} = \begin{bmatrix} -\xi_{34} c_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\xi_{34} s_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{,2} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_{43} c_4 - \eta_{43} s_4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{43} s_4 + \eta_{43} c_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{46} c_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{46} s_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

sind in (15) einzusetzen. Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen ist

$$B = \begin{bmatrix} -\xi_{34} c_3 & \xi_{43} c_4 - \eta_{43} s_4 & 0 & 0 \\ -\xi_{34} s_3 & \xi_{43} s_4 + \eta_{43} c_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_{46} c_4 & -\xi_{67} c_6 & 0 \\ 0 & -\xi_{46} s_4 & -\xi_{67} s_6 & 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Die rechten Seiten des Gleichungssystems (15) sind damit bestimmbar.

1.4. Beispiele

1.4.1. Ergebnisdarstellung

Bei der kinematischen Analyse fällt eine große Datenmenge der Ergebnisse an, so daß der Konstrukteur Mühe hat, einen Überblick über die Bewegungsabläufe zu gewinnen. Der Tabellendruck ist nur bei einfachen Problemen die geeignete Ausgabeform. Für manche Zwecke ist eine Pseudografik (Zeichenzahl pro Druckzeile proportional dem Zahlenwert) ausreichend. Im allgemeinen ist es ratsam, Software zur grafischen Ausgabe auf Bildschirm oder Mehrfarbenplotter zu benutzen.

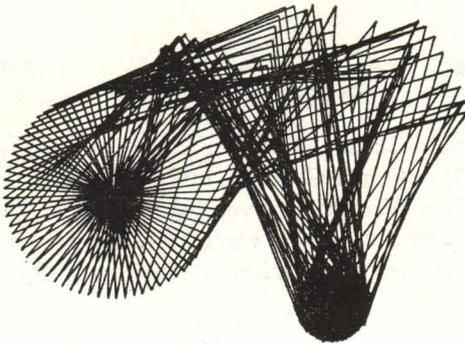


Bild 1.8 Beispiel für die Darstellung der Analyseergebnisse von KOGEBILD [1.26]

Als Beispiel wird in Bild 1.8 ein mit KOGEBILD [1.26], [2.2], [3.44] erhaltenes Ergebnis gezeigt. Ähnliche Möglichkeiten sind in [1.19] gegeben. Derartige Darstellungen gestatten es, den Platzbedarf eines Mechanismus zu übersehen. Bei konstanter Zeit-Schrittweite der Bewegung des Antriebsgliedes kann man aus so einem Bild auch etwas über die Geschwindigkeitsverhältnisse erfahren. Ebenso lassen sich im gliedfesten oder raumfesten Bezugssystem die Verläufe von Koppelkurven, Hodografen der Geschwindigkeit, Beschleunigungen u. a. darstellen.

1.4.2. Einfluß der Änderung von Gliedlängen

Die Berechnung des Einflusses, den die Änderung eines geometrischen Parameters (Gliedlänge) (ξ_{jk} , η_{jk}) auf die Lagefunktionen nullter und höherer Ordnung hat, ist von großer praktischer Bedeutung. Es kann damit der Einfluß von Spiel, Fertigungsgenauigkeiten (Abweichungen von idealen Gliedlängen) und elastischen Deformationen auf die Abtriebsbewegung beurteilt werden, vgl. Abschnitt 4.2.1., Bild 4.1 bis Bild 4.3.

Mit der Festlegung von Toleranzen für Bolzen- und Lagerdurchmesser bei Drehgelenken wird über das Lagerspiel entschieden, welches nicht nur für die kinematische Genauigkeit, sondern auch für die Stoßkräfte in den Gelenken von Mechanismen von Bedeutung ist, vgl. die Abschnitte 4.3.3. und 4.3.6.2. Beim Einsatz von mathe-

matischen Optimierungsmethoden zur Synthese von Mechanismen empfiehlt sich die vorherige Analyse von geometrischen Parameteränderungen [1.8], [1.13].

Gemäß (1.2.3./3) gilt für kleine Änderungen Δw_p eines Parameters w_p in erster Näherung

$$\Delta U = U(\mathbf{W}_0 + \Delta \mathbf{W}) - U(\mathbf{W}_0) = \sum_p \frac{\partial U}{\partial w_p} \Delta w_p = \sum_p U_{,p} \Delta w_p. \quad (1)$$

Die kinematischen Einflußfunktionen $U_{,p}$ sind die ersten Ableitungen der U -Funktion nach den Parametern w_p , vgl. (1.3.4./2). Sie erlauben Aussagen in der Nähe des Parametervektors \mathbf{W}_0 , d. h. nur für kleine Änderungen der ursprünglichen Abmessungen der Getriebeglieder. Ihre Berechnung ist mit den in den Abschnitten 1.2.3. und 1.3.4. beschriebenen Methoden möglich und Bestandteil der Rechenprogramme KOGIOP [1.8], KOGEBILD [1.26] und DAM [2.6]. Im Maschinenbau wurden diese kinematischen Einflußfunktionen, z. B. bei der Korrektur der Abmessungen eines Wippkranes [1.6], bei der Analyse einer Verpackungsmaschine [1.13], einer Webmaschine [1.8], der Toleranzanalyse einer Presse [4.43] u. a. angewendet.

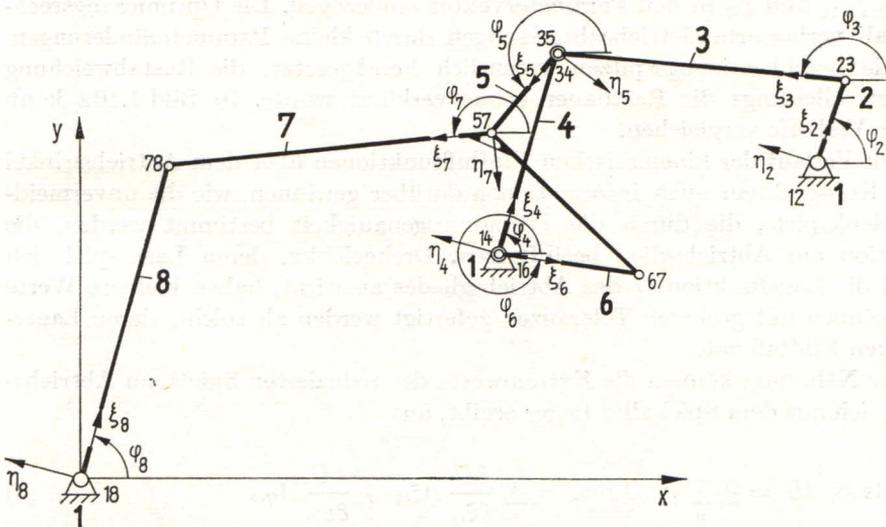


Bild 1.9 Getriebeschema eines achtgliedrigen Koppelrastgetriebes

Bei der Konstruktion des in Bild 1.9 dargestellten achtgliedrigen Koppelrastgetriebes kam es darauf an, mit möglichst wenig Änderungen der Gliedlängen an einer schon vorhandenen Maschine den Bewegungsablauf zu verbessern, d. h. die Rastabweichung und die Maximalbeschleunigung zu vermindern. Aus konstruktiven Gründen durfte das vorgeschaltete viergliedrige Getriebe nicht verändert werden. Als Variable wurden die ξ - und η -Koordinaten der Gelenkpunkte in Betracht gezogen.

Mit dem Rechenprogramm KOGIOP wurden die kinematischen Einflußfunktio-

nen der beeinflussbaren geometrischen Abmessungen berechnet [1.13]. Ihr Verlauf ist in Bild 1.10b dargestellt. Gleichung (1) nimmt folgende konkrete Form an:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_8 = & \frac{\partial\varphi_8}{\partial\xi_{18}} \Delta\xi_{18} + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\eta_{18}} \Delta\eta_{18} + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\xi_{57}} \Delta\xi_{57} + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\xi_{67}} \Delta\xi_{67} + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\xi_{76}} \Delta\xi_{76} \\ & + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\eta_{76}} \Delta\eta_{76} + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\xi_{78}} \Delta\xi_{78} + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\eta_{78}} \Delta\eta_{78} + \frac{\partial\varphi_8}{\partial\xi_{87}} \Delta\xi_{87}. \end{aligned} \quad (2)$$

Wie man sieht, haben die Änderungen der Parameter ξ_{18} , ξ_{57} , ξ_{67} , ξ_{76} und ξ_{78} den größten Einfluß auf die U -Funktion φ_8 . Da die „Koordinatenpaare“ ξ_{76} und ξ_{67} , ξ_{18} und ξ_{78} sowie ξ_{87} , η_{18} und η_{78} annähernd den gleichen qualitativen Verlauf haben, genügt es, je eine Koordinate dieser „Paare“ zu berücksichtigen. Die Koordinaten ξ_{18} und η_{78} bewirken praktisch nur eine Parallelverschiebung der Lagefunktion $U = \varphi_8$.

Auf Grund dieser Analyse wurden zur Optimierung der U -Funktion die Parameter ξ_{18} , ξ_{87} , η_{76} , ξ_{76} und ξ_{57} in den Parametervektor einbezogen. Die Optimierungsrechnung ergab verbesserte Getriebeabmessungen durch kleine Parameteränderungen, so daß die Beschleunigungsspitzen wesentlich herabgesetzt, die Rastabweichung vermindert, allerdings die Rastdauer etwas verkürzt wurde. In Bild 1.10a kann man beide Verläufe vergleichen.

Aus dem Verlauf der kinematischen Einflußfunktionen über dem Antriebswinkel kann der Konstrukteur auch Informationen darüber gewinnen, wie die unvermeidlichen Gelenkspiele, die durch die Fertigungsgenauigkeit bestimmt werden, die Lagefunktion am Abtriebsglied beeinflussen. Drehgelenke, deren Lagerspiel sich wenig auf die Lagefunktion U des Abtriebsgliedes auswirkt, haben kleinere Werte $U_{,p}$ und können mit groberen Toleranzen gefertigt werden als solche, deren Lagerspiel starken Einfluß hat.

In erster Näherung können die Extremwerte des reduzierten Spiels am Abtriebsglied, das sich aus dem Spiel aller Lager ergibt, aus

$$\Delta s \triangleq \Delta U = \pm \sum_p |U_{,p}| \Delta w_p = \sum \frac{\partial U}{\partial \xi_{ik}} \Delta \xi_{ik} + \frac{\partial U}{\partial \eta_{ik}} \Delta \eta_{ik} \quad (3)$$

berechnet werden, wenn man Δw_p als Abweichungen $\Delta \xi_{ik}$ und $\Delta \eta_{ik}$ auffaßt. Diese Näherung ist schon vor einer kinetischen Analyse berechenbar, aber sie liefert zu große Werte, wenn man für $\Delta \xi_{ik}$ und $\Delta \eta_{ik}$ den Betrag des Lagerspiels ansetzt, weil nicht alle Gelenke in jeder Getriebebestellung so anliegen, daß sich ihre Anteile addieren.

Genauere Werte erhält man, wenn man nach der kinetostatischen Analyse die Kraftrichtungen in den Gelenken und damit die Kontaktwinkel $\bar{\beta}_{ik}$ zwischen Bolzen und Lagerschale kennt, vgl. Bild 4.8 und 2.9. Dann sind die Abweichungen im Lager

$$\Delta \xi_{ik} = \Delta r_{ik} \cos \bar{\beta}_{ik}, \quad \Delta \eta_{ik} = \Delta r_{ik} \sin \bar{\beta}_{ik} \quad (4)$$

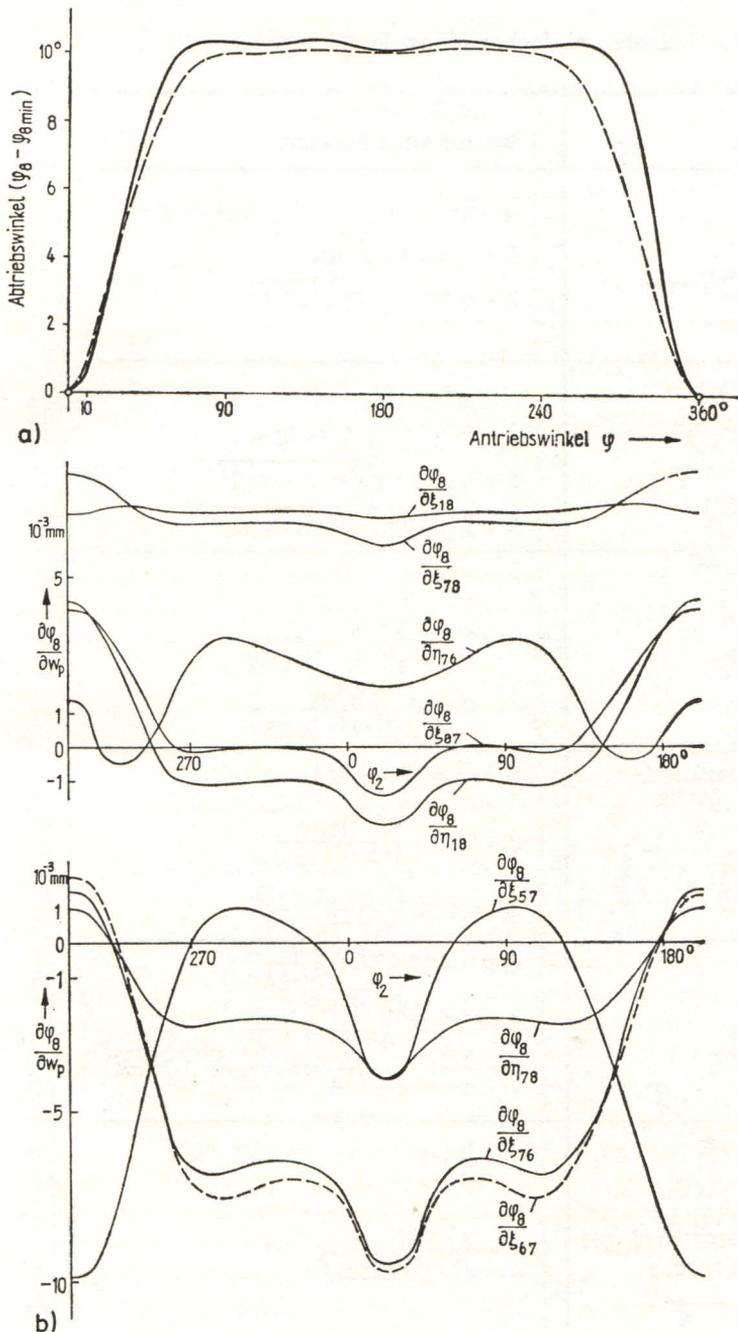


Bild 1.10 Analyseergebnisse für das Koppelrastgetriebe von Bild 1.9

a) U -Funktion φ_B , — Urzustand, ---- Optimum
 b) kinematische Einflußfunktionen

Tabelle 1.5. Fourierkoeffizienten einfacher Koppelgetriebe

Fall	Getriebeschema	Geometrische Funktion
1	<p>Schubkurbel</p>	$\lambda = l_2/l_3 < 1$ $x = l_2 \cos \varphi + \sqrt{l_3^2 - l_2^2 \sin^2 \varphi}$ $x = l_2 \left(\cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \right)$
2	<p>Exzentrische Schubkurbel</p>	$\lambda = l_2/l_3 < 1, \epsilon = e/l_3 < 1$ $x = l_2 \cos \varphi + \sqrt{l_3^2 - (e + l_2 \sin \varphi)^2}$ $x = l_2 \left[\cos \varphi + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (\epsilon + \lambda \sin \varphi)^2} \right]$
3	<p>Zentrische Kurbelschleife</p>	$\lambda = \frac{l_2}{l_1} < 1$ $\varphi_3 = \pi - \arcsin \frac{\lambda \sin \varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}}$ $\varphi_3 = \pi - \arccos \frac{-\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}}$
4	<p>Gegentläufiges Zwillingskurbelgetriebe</p>	$\lambda = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_4}{l_3} = \frac{l}{L} < 1$ $\varphi_4 = \arcsin \frac{(\lambda^2 - 1) \sin \varphi}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}$ $\varphi_4 = \arccos \frac{(1 + \lambda^2) \cos \varphi - 2\lambda}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}$
5	<p>Kurbelschwinge</p> <p>Sonderfall: $l_1^2 + l_2^2 = l_3^2 + l_4^2$</p>	$\varphi_{4/12} = \pi - \arctan \frac{\lambda \sin \varphi}{1 - \lambda \cos \varphi}$ $\pm \arctan \frac{l_3 \sqrt{1 - 4t^2 \cos^2 \varphi}}{l_4 - l_3 2t \cos \varphi}$ $\lambda = \frac{l_2}{l_1} < 1, t = \frac{l_4 l_2}{2 l_3 l_4} < 1, v = \sqrt{t^2 (1 + \lambda^2)^2 - \lambda^2}$
6	<p>Sechsgliedriges Getriebe</p>	$\lambda = \frac{l_2}{l_1} < 1$ $x = \frac{l_4 \lambda \sin \varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}}$

$$\varphi_i \triangleq x = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

Fourierkoeffizienten		
k	a _k	b _k
1	+l ₂	0
2	l ₂ (λ/4 + λ ³ /16 + 15λ ⁵ /512 + ...)	0
3	0	0
4	-l ₂ (λ ³ /64 + 3λ ⁵ /512 + ...)	0
5	0	0
6	l ₂ (λ ⁵ /512 + ...)	0
1	l ₂	-l ₂ (ε + 3ελ ³ /8 + ε ³ /2 + 15ελ ⁵ /64 + 15ε ³ λ ² /16 + 3ε ⁵ /8 + ...)
2	l ₂ (λ/4 + λ ³ /16 + 3ε ² λ/8 + 15λ ⁵ /512 + 15ε ² λ ³ /32 + 15ε ⁴ λ/32 + ...)	0
3	0	l ₂ (ελ ³ /8 + 15ελ ⁵ /128 + 5ε ³ λ ³ /16 + ...)
4	-l ₂ (λ ³ /64 + 3λ ⁵ /512 + 15ε ² λ ³ /128 + ...)	0
5	0	-l ₂ (3ελ ⁴ /128 + ...)
6	l ₂ (λ ⁵ /512 + ...)	0
1	0	+λ
2	0	+λ ² /2
3	0	λ ³ /3
4	0	λ ⁴ /4
5	0	λ ⁵ /5
6	0	λ ⁶ /6
1	0	2 - 2λ
2	0	1 - λ ²
3	0	2/3 - 2λ ³ /3
4	0	1/2 - λ ⁴ /2
5	0	2/5 - 2λ ⁵ /5
6	0	1/3 - λ ⁶ /3
1	±t(1 + t ² + t ⁴ + t ⁶) ± v(2 + t ² + t ² λ ² + t ⁴) / 2	-λ
2	±λv(2 + 2t ² + t ² λ ² + t ⁴) / 4	-λ ² /2
3	±t ³ (1 + t ² + t ⁴) ± v(1 + 2t ² λ ² + 2λ ² + t ⁴) / 6	-λ ³ /3
4	±λv(t ² + 2t ² λ ² + 2λ ² + 3t ⁴) / 8	-λ ⁴ /4
5	±t ⁵ (3 + t ²) / 40 ± v(3t ² + 4λ ²)t ² / 40	-λ ⁵ /5
6	±vλt ² (3t ² + 4λ ²) / 48	-λ ⁶ /6
1	0	l ₄ λ(1 - λ ³ /8 - λ ⁵ /64 - ...)
2	0	l ₄ λ ² (1/2 - λ ³ /8 - 5λ ⁵ /256 - ...)
3	0	l ₄ λ ³ (3/8 - 15λ ³ /128 - ...)
4	0	l ₄ λ ⁴ (5/16 - 7λ ³ /64 - ...)
5	0	l ₄ λ ⁵ - 35/128
6	0	l ₄ λ ⁶ - 63/256

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k} \sin k\varphi$$

$$\psi' = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \cos k\varphi$$

$$\psi_4 = -\varphi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k} \sin k\varphi$$

$$\psi = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\varphi$$

$$\psi_4' = -1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \cos k\varphi$$

mit dem Radius $\Delta r_{ik} = \Delta s_{ik}/2$ der sogenannten Wellenverlagerungsbahn. Es gilt also genauer, vgl. (3) und (4),

$$\Delta s \triangleq \Delta U = \sum \Delta r_{ik} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_{ik}} \cos \bar{\beta}_{ik} + \frac{\partial U}{\partial \eta_{ik}} \sin \bar{\beta}_{ik} \right). \quad (5)$$

Die $\bar{\beta}_{ik}$ sind die Kontaktwinkel gemäß Bild 4.8 und dürfen nicht mit den Winkeln der Schub- oder Rädergelenke (Bild 1.6 und 1.7) verwechselt werden.

1.4.3. Harmonische Analyse

Im Hinblick auf die dynamische Analyse, insbesondere für das Schwingungsverhalten, ist die harmonische Analyse der Lagefunktionen periodischer Mechanismen besonders wichtig. Die Fourierkoeffizienten der Wege und Winkel interessieren, wenn eine Wegerregung eines Schwingers vorliegt, aber oft werden auch die Harmonischen (Fourierkoeffizienten) der Geschwindigkeit und Beschleunigung oder der Kräfte und Momente gebraucht, vgl. (3.4.2./29), (4.2.2./9), (4.3.1./14), (4.4.2./10).

Aus den Ergebnissen einer kinematischen Analyse können die Fourierkoeffizienten mit bekannten Methoden berechnet werden, vgl. [2], [5], [11] und (4.3.1./15). Dazu kann man auf Unterprogramme zurückgreifen, die in jedem Rechenzentrum vorhanden sind. Es sollen deshalb hier nur einige Bemerkungen zu den für Mechanismen typischen Fourierreihen gemacht werden.

Für manche Zwecke ist es vorteilhaft, die analytischen Beziehungen zu kennen, durch welche die Fourierkoeffizienten mit den geometrischen Parametern der Mechanismen zusammenhängen. Von MEYER ZUR CAPELLEN (z. B. [1.11], [1.12]) und RANKERS [1.17] wurden viele ein- und zweiparametrische Mechanismen analysiert, jedoch kostet es bei mehrparametrischen Mechanismen einen hohen Aufwand, solche analytischen Abhängigkeiten anzugeben [1.5], [1.25]. Eine Möglichkeit zur Gewinnung analytischer Ausdrücke bestünde in der Anwendung der Methode der Beschreibungsfunktionen [5.1]. Dies könnte bei der Synthese eines Mechanismus auf Grund vorgegebener Fourierkoeffizienten, so wie es in [1.17] für einfache Mechanismen vorgeschlagen wurde, weiterhelfen.

Tabelle 1.5 gibt für einfache Koppelgetriebe die ersten sechs Fourierkoeffizienten an. Sie wurden durch eine Reihenentwicklung der angegebenen analytischen Funktionen nach einem kleinen Parameter gefunden. Als wesentliches Merkmal, das für alle viergliedrigen Koppelgetriebe gilt, die nur Dreh- und Schubgelenke besitzen, ist festzustellen, daß stets **unendlich** viele Fourierkoeffizienten auftreten. In manchen Fällen, wie hier beim gegenläufigen Zwillingsskurbelgetriebe, konvergieren die Fourierreihen so langsam, daß auch die Ordnungen von $k > 10$ von Bedeutung sind und zu störenden Resonanzen führen, vgl. Abschnitt 4.6.

Große praktische Bedeutung haben **endliche** und schnell konvergierende Fourierreihen in der Mechanismendynamik. Sie sind durch Kurvengetriebe (vgl. Abschnitt 4.6.2.) und Räderkoppelgetriebe realisierbar. Bei mehrgliedrigen ($I \geq 6$) Koppelgetrieben können Abmessungen gefunden werden, bei denen einzelne Harmonische verschwinden.