

## 2. Kinetik zwangläufiger Mechanismen

### 2.1. Aufgabenstellung

Die dynamischen Kräfte, die in Mechanismen entstehen, werden in kinetostatische Kräfte und Vibrationskräfte eingeteilt. Als kinetostatische Kräfte werden die Massenkräfte bezeichnet, welche bei idealen kinematischen Bindungen der starren Körper auftreten. Die Vibrationskräfte haben ihre Ursache in der Elastizität der Lager und Getriebeglieder und im Spiel in den Gelenken, d. h., sie resultieren aus mechanischen Schwingungen.

Außer diesen dynamischen Kräften treten in Gliedern und Gelenken von Mechanismen noch zeitlich veränderliche Kräfte auf, die nicht durch Massenkräfte bedingt sind, aber infolge der Bewegung eines oder mehrerer Antriebsglieder von der Getriebestellung abhängig sind. Solche Kräfte werden durch das Eigengewicht der Getriebeglieder, technologische Kräfte am Abtrieb, Antriebskräfte oder -momente, Federkräfte, Dämpferkräfte und Zwangskräfte (infolge nicht paralleler Drehachsen) hervorgerufen.

Die Aufgabe der kinetischen Analyse besteht darin, die Antriebskräfte und -momente, die Kraftgrößen in den Gelenken und die Belastungen und Verformungen der Getriebeglieder zu ermitteln. Auf Grund einer kinetischen Analyse kann der Konstrukteur die Parameter der Gleit- oder Wälzlager festlegen und die Dimensionierung der Getriebeglieder vornehmen, wofür meist die Balkentheorie ausreicht [2.11].

Die kinetostatischen Kräfte können oft durch dynamischen Ausgleich reduziert werden, vgl. Kapitel 3. Ihnen sind meist bedeutende Vibrationskräfte überlagert, die oft gerade bei den statisch gut ausgeglichenen Mechanismen relativ groß und gefährlich sind. Mit den Vibrationskräften befassen sich die Kapitel 4 und 5, wobei vielfach auf die kinetostatischen Kräfte zurückgegriffen wird, da sie die Ursache von Schwingungserregungen sind. Neben der bekannten Theorie zur Berechnung der kinetostatischen Kraftgrößen innerhalb der Bewegungsebene (Abschnitt 2.2.) wird im folgenden auch eine Theorie zur Berechnung der Zwangskräfte quer zur Bewegungsebene dargestellt (Abschnitt 2.3.), die infolge der unvermeidlichen Fertigungstoleranzen von Gliedern und Gelenken entstehen.

Das Gebiet der kinetischen Analyse ebener und räumlicher Mechanismen ist vom Standpunkt der Mechanik weit ausgebaut und hat mit der Entwicklung der Roboter-

technik weitere Anstöße erfahren [2.18], [2.19], [2.20], [2.21], [2.23]. Die Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen sind relativ kompliziert aufgebaut, insbesondere bei räumlichen Bewegungsmöglichkeiten. Es gibt Methoden, welche die Aufstellung der Bewegungsgleichungen und die Lösung von Anfangswertproblemen Computern übertragen [2.8], [2.9], [2.16], [2.18], [2.19]. Für die Berechnung kinetostatischer Kräfte existieren in allen Industrieländern Rechenprogramme, so daß aus der DDR nur z. B. KOGIOP [2.5], [1.8], DAM [2.6], SPAMEC [2.15], MANANY [2.22], RAEKOP [1.1] u. a. [2.12] genannt seien.

Die folgenden Ausführungen zur kinetischen Analyse dienen auch der Vorbereitung der in den Kapiteln 3 bis 5 behandelten dynamischen Probleme an ebenen Mechanismen in Maschinen. Kinematische Bindungen nennt man **ideal**, wenn die Summe der Arbeiten der Reaktionskräfte dieser Bindungen bei beliebigen virtuellen Verrückungen gleich 0 ist. Da in realen Mechanismen stets eine tangential Komponente der Zwangskraft vorhanden ist, die gleich der Reibkraft ist, so ist praktisch keine Bindung ideal. Nichtsdestoweniger kann man in der Praxis die Vorstellung von idealen Bindungen beibehalten, wenn man die Reibkräfte in den entsprechenden Gleichungen als eingeprägte Kräfte behandelt. Dabei muß man zusätzliche Beziehungen berücksichtigen, welche durch die Reibungsgesetze bestimmt werden. Bei derartigem Herangehen kann der Begriff der idealen Bindungen trotzdem angewendet werden [2.14], [2.16].

Es existiert eine große Klasse der sogenannten *selbsthemmenden Getriebe*, für welche sich das erwähnte Herangehen als fehlerhaft erweisen kann, weil die Bewegungsmöglichkeit dieser Getriebe (z. B. Schneckenradgetriebe) wesentlich von der Richtung der übertragenen Kräfte abhängt. Diese Getriebe verlangen eine spezifische Behandlung, die ausführlich in [25] erfolgt.

## 2.2. Kinetische Kraftgrößen innerhalb der Bewegungsebene

### 2.2.1. Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Aufgabe besteht darin, die Wirkung der Massenkräfte, der eingeprägten Kräfte, der Feder- und Dämpferkräfte und -momente auf den Antrieb, das Gestell und die Gelenke zu berechnen. Die an einem Getriebeglied mit der Nummer  $i$  auftretenden Kraftgrößen sind in Bild 2.1 angegeben. Der Begriff „Kraftgröße“ ist der Oberbegriff für „Kraft“ und „Moment“.

Auf Grund der zwangläufigen Bewegung wirken am Getriebeglied  $i$  die Massenkräfte (D'ALEMBERT) mit den Komponenten

$$F_{xi}^* = -m_i \ddot{x}_{Si}, \quad F_{yi}^* = -m_i \ddot{y}_{Si} \quad (1)$$

als „Aktions“kräfte und das Massenmoment

$$M_i^* = -J_{Si} \ddot{\phi}_i. \quad (2)$$

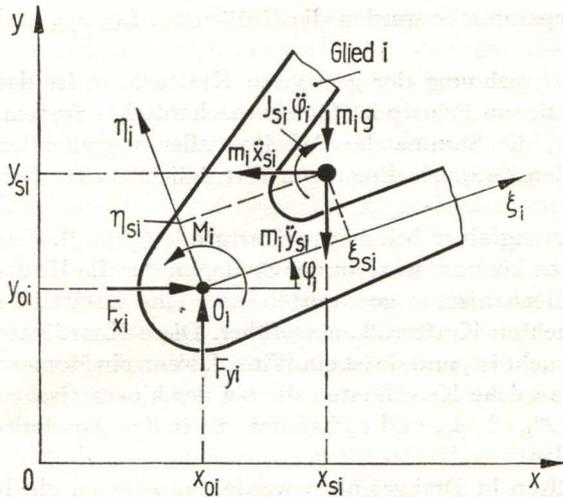


Bild 2.1 Bezeichnung der am Getriebeglied  $i$  wirkenden Kraftgrößen

Die Masse  $m_i$  und das Massenträgheitsmoment  $J_{Si}$  bezüglich des Schwerpunktes seien gegeben. Die Beschleunigungen der Schwerpunkte ( $\ddot{x}_{Si}$ ,  $\ddot{y}_{Si}$ ) und Winkel ( $\dot{\varphi}_i$ ) sind mit den in den Abschnitten 1.2. und 1.3. angegebenen Methoden berechenbar.

Im Schwerpunkt greift in der Höhe  $y_{Si}$  die Schwerkraft an, wobei  $y$  vertikal aufwärts gerichtet ist:

$$F_{yist} = -m_i g. \quad (3)$$

Außerdem werden auf den Bezugspunkt  $O_i$  mit den raumfesten Koordinaten  $x_{0i}$ ,  $y_{0i}$  eine eingeprägte Kraft mit den Komponenten  $F_{xi}$  und  $F_{yi}$  und auch ein eingeprägtes Moment  $M_i$  reduziert. Solche eingeprägten Kraftgrößen können technologische Kräfte (Umform-, Preß- oder Verarbeitungskräfte), Antriebs- und Bremskräfte oder -momente oder auch Reibkräfte und Reibmomente der Lager sein.

Als weitere Gruppe sind die Feder- und Dämpferkraftgrößen zu nennen. Eine Längsfeder  $m$  mit der Federkonstanten  $c_m$  und der ungespannten Federlänge  $l_{0m}$ , die zwischen zwei Gliedern angeordnet wird und die momentane Federlänge  $l_m$  hat, ruft eine Kraft

$$F_m = c_m(l_m - l_{0m}) \quad (4)$$

zwischen diesen Gliedern hervor, vgl. Bild 3.2. In gleicher Weise kann eine Drehfeder in einem Gelenk ( $i$ ,  $k$ ) zwischen den Gliedern  $i$  und  $k$  befestigt sein. Sie bewirkt ein Moment auf beide Glieder (actio = reactio):

$$M_{ik} = c_{Tik}(\varphi_i - \varphi_k - \varphi_{ik0}) = c_{Tm}(\varphi_m - \varphi_{0m}). \quad (5)$$

Dabei ist  $c_{Tm}$  die Drehfederkonstante und  $\varphi_{0m}$  der Einbauwinkel der unbelasteten Drehfeder. Nichtlineare Federn, Dämpfer und Aktoren (gesteuerte Zusatzkräfte) können analog behandelt werden, wenn man die entsprechenden Kennlinien  $F(l, \dot{l}, t)$

mathematisch formuliert. Als Federparameter werden die Größen  $c_m$ ,  $l_{0m}$ ,  $c_{Tm}$  und  $\varphi_{0m}$  bezeichnet.

Eine zweckmäßige Methode zur Berechnung der gesuchten Kraftgrößen ist das Prinzip der virtuellen Arbeit. Nach diesem Prinzip ist für ein mechanisches System, das sich im Gleichgewicht befindet, die Summe der Arbeiten aller angreifenden Kräfte und Momente bei einer mit den Zwangsbedingungen verträglichen virtuellen Verrückung gleich 0 [2.7].

Um dieses Prinzip auf die Berechnung einer beliebigen Kraftgröße  $Q_p$  (z. B. eine Gelenkkraftkomponente) anwenden zu können, wird an der Stelle, an der die Kraftgröße bestimmt werden soll, der Mechanismus geschnitten und eine zusätzliche Koordinate  $w_p$  in Richtung der gesuchten Kraftgröße eingeführt. Diese Koordinate  $w_p$  ist eine Länge, wenn eine Kraft gesucht ist, und sie ist ein Winkel, wenn ein Moment gesucht ist. Vorzugsweise werden als solche Koordinaten die bei der kinematischen Analyse bereits verwendeten  $\xi_{ik}$ ,  $\eta_{ik}$ ,  $\xi_{ik}^0$ ,  $\eta_{ik}^0$ ,  $\beta_{ik}$  und  $s_{ik}$  benutzt, die in den Abschnitten 1.2.3. und 1.3.4. eingeführt wurden.

Die Komponenten von Gelenkkraften in Drehgelenken werden günstig im gliedfesten Bezugssystem berechnet, indem  $w_p$  jeweils in die Richtung der gliedfesten Koordinatenachsen gelegt wird. Bei Schubgelenken wird  $w_p$  zur Berechnung der Normalkraft senkrecht zur Schubgeraden und zur Berechnung des Verkantungsmoments in Drehrichtung des Winkels  $\varphi_{ik}$  gewählt. Zur Berechnung raumfester Kraftkomponenten ist für  $w_p$  die entsprechende Koordinate  $x_{ik}$  oder  $y_{ik}$  zu nehmen, zur Berechnung eines Antriebsmomentes der Antriebswinkel  $\varphi$  und zur Berechnung einer Antriebskraft der Antriebsweg  $l$ , vgl. Tabelle 1.2.

Unter Berücksichtigung der oben erwähnten am Glied  $i$  angreifenden Kraftgrößen lautet die Arbeitsgleichung bei einer virtuellen Verrückung:

$$\begin{aligned} \delta W = & Q_p \delta w_p - \sum_{i=2}^I (m_i \ddot{x}_{Si} \delta x_{Si} + m_i \ddot{y}_{Si} \delta y_{Si} + J_{Si} \ddot{\varphi}_i \delta \varphi_i) \\ & + \sum_{i=2}^I (F_{xi} \delta x_{0i} + F_{yi} \delta y_{0i} + M_i \delta \varphi_i - m_i g \delta y_{Si}) \\ & - \sum_m [c_m (l_m - l_{0m}) \delta l_m + c_{Tm} (\varphi_m - \varphi_{0m}) \delta \varphi_m] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Summation über  $i$  erfolgt über alle bewegten Mechanismenglieder,  $m$  summiert über alle Federn (soweit überhaupt vorhanden). Der Übergang zu differentiell kleinen Verrückungen ist von den Variationen aus möglich, wenn unter diesen Verrückungen die mit den Zwangsbedingungen verträglichen gemeint sind. Damit liefert (6) die Beziehung für die gesuchte Kraftgröße („Reaktions“kraft):

$$\begin{aligned} Q_p = & \sum_{i=2}^I (m_i \ddot{x}_{Si} x_{Si,p} + m_i \ddot{y}_{Si} y_{Si,p} + J_{Si} \ddot{\varphi}_i \varphi_{i,p}) \\ & - \sum_{i=2}^I (F_{xi} x_{0i,p} + F_{yi} y_{0i,p} + M_i \varphi_{i,p} - m_i g y_{Si,p}) \\ & + \sum_m [c_m (l_m - l_{0m}) l_{m,p} + c_{Tm} (\varphi_m - \varphi_{0m}) \varphi_{m,p}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Die partiellen Ableitungen nach der Koordinate  $w_p$  sind durch Komma und Index  $p$  angegeben. Die in (7) vorkommenden partiellen Ableitungen erster Ordnung sind nach den in 1.2.3. und 1.3.4. angegebenen Methoden berechenbar. Dies erfordert bei Dyadenmechanismen die Lösung eines gestaffelten Systems von jeweils zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, während bei beliebigen Mechanismenstrukturen im allgemeinen  $2 \cdot IM$  simultane Gleichungen zu lösen sind. Anschließend können aus linearen Beziehungen des Typs (1.2.3./7 und 8) oder (1.3.4./11) die partiellen Ableitungen der anderen Koordinaten berechnet werden.

Zur Berechnung jeder der interessierenden  $2I_1$  Gelenkkraft- und  $F$  Antriebskraftgrößen ist (7) anwendbar. Ohne Berücksichtigung des Eigengewichts, der Federkräfte und der eingepprägten Kraftgrößen soll (7) für die am häufigsten vorkommenden Mechanismen mit einem Laufgrad  $F = 1$  und dem Antriebswinkel  $\varphi$  (an dem das Antriebsmoment  $M_{an}$  angreift) umgeformt werden. Zwischen den kinematischen Größen der Antriebsbewegung und den Schwerpunktbeschleunigungen bzw. der Winkelbeschleunigung des Gliedes  $i$  bestehen die Beziehungen, vgl. (1.1./1):

$$\ddot{x}_{si} = x'_{si}\ddot{\varphi} + x''_{si}\dot{\varphi}^2, \quad \ddot{y}_{si} = y'_{si}\ddot{\varphi} + y''_{si}\dot{\varphi}^2, \quad \ddot{\varphi}_i = \varphi'_i\ddot{\varphi} + \varphi''_i\dot{\varphi}^2. \quad (8)$$

Die partiellen Ableitungen nach der Antriebskoordinate ( $w_p = \varphi$ ) sind durch einen Strich gekennzeichnet. Sie lassen sich ebenso wie die Ableitungen nach anderen Koordinaten bei der kinematischen Analyse berechnen, vgl. Abschnitt 1.2. und 1.3.

Einsetzen von (8) in die erste Zeile von (7) liefert

$$Q_p = \ddot{\varphi} \sum_{i=2}^I (m_i x'_{si} x_{si,p} + m_i y'_{si} y_{si,p} + J_{si} \varphi'_i \varphi_{i,p}) + \dot{\varphi}^2 \sum_{i=2}^I (m_i x''_{si} x_{si,p} + m_i y''_{si} y_{si,p} + J_{si} \varphi''_i \varphi_{i,p}). \quad (9)$$

Daraus folgt, daß ohne Berücksichtigung eingepprägter Kraftgrößen jede kinetostatische Kraftgröße aus zwei Summanden besteht, von denen einer der Winkelbeschleunigung ( $\ddot{\varphi}$ ) und der andere dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit des Antriebsgliedes ( $\dot{\varphi}^2$ ) proportional ist. Bei doppelter Antriebswinkelgeschwindigkeit ( $\dot{\varphi} = 0$ ) sind z. B. die kinetostatischen Kraftgrößen viermal so groß und zeigen denselben Verlauf. Dieser elementare Fakt ist im Maschinenbau von großer praktischer Bedeutung, weil er mit vielen Problemen in Verbindung steht, die bei einer Drehzahlerhöhung auftreten.

Im allgemeinen sind die dynamischen Gelenkkräfte, im Gegensatz zu kinematischen Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, ...), nicht nur vom Bewegungszustand eines Mechanismus abhängig, sondern auch von der Position der Angriffspunkte aller eingepprägten Kraftgrößen einschließlich der Antriebskräfte oder Antriebsmomente. Ein und derselbe Bewegungszustand eines Mechanismus kann durch verschiedenartig räumlich verteilte eingepprägte Kräfte zustande kommen. Bei der Berechnung einer verallgemeinerten Kraftgröße  $Q_p$  ist also stets auch die Position der eingepprägten Kraftgrößen zu berücksichtigen. Die Tatsache, daß man durch eine andere Anordnung der Antriebsglieder die Gelenkkräfte beeinflussen kann, kann ein Konstrukteur zum dynamischen Ausgleich ausnutzen, vgl. Abschnitt 3.5.

Im Mittel treten minimale Gelenk- und Antriebskräfte dann auf, wenn ein Mechanismus seine Eigenbewegung ausführt. Die Eigenbewegung ist dadurch charakterisiert, daß alle eingepprägten Kraftgrößen fehlen ( $F_{xi} = F_{yi} = 0$ ,  $M_i = 0$ ) und sich der Mechanismus mit konstanter Energie, aber veränderlicher Geschwindigkeit bewegt, vgl. Abschnitt 3.3.1.

Die Ausdrücke in den Summen sind unabhängig vom Bewegungszustand eines Mechanismus. Sie können aus den geometrischen Parametern und Masseparametern berechnet werden und stehen im engen Zusammenhang mit dem Begriff der verallgemeinerten Massen, auf den in Abschnitt 2.2.2. eingegangen wird. Die zweiten Ableitungen nach der Antriebskoordinate ergeben sich aus Gleichungen der Form (1.2.3./9, 10, 13, 14) oder (1.3.4./14) für  $w_p = w_q = \varphi$ .

Das Antriebsmoment ist gewissermaßen die verallgemeinerte Kraft in Richtung der Koordinate  $\varphi$ . Aus (9) folgt damit für den Sonderfall  $w_p = \varphi$

$$Q_p \triangleq M_{an} = \ddot{\varphi} \sum [m_i(x_{si}'^2 + y_{si}'^2) + J_{si}\varphi_i'^2] \\ + \dot{\varphi}^2 \sum [m_i(x_{si}'x_{si}'' + y_{si}'y_{si}'') + J_{si}\varphi_i'\varphi_i''].$$
 (10)

Führt man das reduzierte Massenträgheitsmoment

$$J(\varphi) = \sum [m_i(x_{si}'^2 + y_{si}'^2) + J_{si}\varphi_i'^2], \\ J'(\varphi) = 2 \sum [m_i(x_{si}'x_{si}'' + y_{si}'y_{si}'') + J_{si}\varphi_i'\varphi_i'']$$
 (11)

ein, so kann (10) auch in der Form

$$M_{an} = J\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} J'\dot{\varphi}^2$$
 (12)

geschrieben werden. Falls nur eine einzelne Masse am Abtrieb translatorisch oder ein Massenträgheitsmoment rotatorisch bewegt wird (bei manchen Maschinen enthält diese Masse den Hauptanteil der kinetischen Energie), wird  $x_{SI}$ ,  $y_{SI}$  oder  $\varphi_I$  durch die Lagefunktion  $U$  und  $m_I$  oder  $J_{SI}$  durch  $m$  vertreten, so daß aus (11) der Sonderfall  $J = mU'^2$  entsteht.

Auch allgemein kann man die Veränderlichkeit von  $J(\varphi)$  durch eine fiktive  $U$ -Funktion  $U'(\varphi) = \sqrt{J(\varphi)/m}$  mit einer konstanten Masse  $m$  ausdrücken, und (12) erhält die Form

$$M_{an} = mU'^2\ddot{\varphi} + mU'U''\dot{\varphi}^2,$$
 (13)

vgl. Abschnitt 4.2.3.

Die Gleichungen der Form (10), (12) oder (13) erlauben, aus dem gegebenen (eingepprägten) Antriebsmoment den Antriebswinkel  $\varphi(t)$  unter bekannten Anfangsbedingungen durch numerische Integration zu bestimmen. Auf Sonderfälle geht z. B. DIZIOGLU [7] ein.

### 2.2.2. Lagrangesche Gleichungen 2. Art

Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art sind eng mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit verbunden [2.7]. Sie sollen hier ergänzend benutzt werden, weil sie einen einfachen Zugang zu dem wichtigen Begriff der verallgemeinerten Massen liefern. Damit werden die kinetostatischen Kraftgrößen für Mechanismen mit mehreren Antrieben berechnet.

Von einem Mechanismus mit mehreren Antrieben seien die Antriebskoordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_F$  als Wege oder Winkel gegeben.  $F$  ist der Laufgrad (Getriebefreiheitsgrad). Die Schwerpunktkoordinaten der einzelnen starren Körper und die Winkel sind bei zwangsläufigen Mechanismen eindeutige Funktionen der Antriebskoordinaten:

$$x_{Si} = x_{Si}(q_k), \quad y_{Si} = y_{Si}(q_k), \quad \varphi_i = \varphi_i(q_k). \quad (1)$$

Die Geschwindigkeiten folgen daraus zu, vgl. Abschnitt 1.3.4.,

$$\dot{x}_{Si} = \sum_{k=1}^F x_{Si,k} \dot{q}_k, \quad \dot{y}_{Si} = \sum_{k=1}^F y_{Si,k} \dot{q}_k, \quad \dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^F \varphi_{i,k} \dot{q}_k, \quad (2)$$

und die Schwerpunkt-Beschleunigungen sind analog zu (1.3.4./9)

$$\ddot{x}_{Si} = \sum_{k=1}^F x_{Si,k} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^F \sum_{l=1}^F x_{Si,kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (3)$$

( $\dot{y}_{Si}$  und  $\dot{\varphi}_i$  analog). Auch hier wurde wieder für die partiellen Ableitungen die Kurzschreibweise

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial q_k} = (\quad)_{,k} \quad \text{angewendet, vgl. (1.3.4./3).}$$

Die kinetische Energie des Mechanismus ist die Summe der kinetischen Energie aller bewegten Getriebeglieder (starre Körper) und beträgt

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^I (m_i \dot{x}_{Si}^2 + m_i \dot{y}_{Si}^2 + J_{Si} \dot{\varphi}_i^2). \quad (4)$$

Setzt man die Geschwindigkeiten aus (2) in (4) ein, dann erhält die kinetische Energie die Form

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \sum_{l=1}^F m_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l. \quad (5)$$

Dabei ergeben sich die verallgemeinerten Massen zu

$$m_{kl} = \sum_{i=2}^I (m_i x_{Si,k} x_{Si,l} + m_i y_{Si,k} y_{Si,l} + J_{Si} \varphi_{i,k} \varphi_{i,l}). \quad (6)$$

Man kann zeigen, daß die  $m_{kl}$  Tensoren zweiter Stufe sind, d. h., daß ihre Richtungsabhängigkeit sich aus den Gesetzen der Tensorrechnung ergibt. Die verallgemeinerten Massen  $m_{kl}$  sind bei gleichmäßig übersetzenden Getrieben, wie Zahnradgetrieben, Planetengetrieben, Riemengetrieben u. a. konstant. Bei ungleichmäßig übersetzenden

nicht immer

den Getrieben sind sie stellungsabhängig, da sie sich im allgemeinen mit den Koordinaten  $q_1$  bis  $q_F$  verändern. Bei den folgenden Betrachtungen treten auch Ableitungen der verallgemeinerten Massen nach einer verallgemeinerten Koordinate oder der Zeit auf. Dafür wird die Kurzschreibweise

$$\frac{\partial m_{kl}}{\partial q_p} = m_{kl,p}, \quad \frac{dm_{kl}}{dt} = \sum_{p=1}^F \frac{\partial m_{kl}}{\partial q_p} \dot{q}_p = \sum_{p=1}^F m_{kl,p} \dot{q}_p \quad (7)$$

gewählt, und es gilt

$$m_{kl,p} = \sum_{i=2}^I [m_i(x_{Si,kp}x_{Si,l} + x_{Si,k}x_{Si,lp}) + m_i(y_{Si,kp}y_{Si,l} + y_{Si,k}y_{Si,lp}) + J_{Si}(\varphi_{i,kp}\varphi_{i,l} + \varphi_{i,k}\varphi_{i,lp})]. \quad (8)$$

Die partiellen Ableitungen der verallgemeinerten Massen sind explizit von den ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Schwerpunkt- und Winkelkoordinaten (1) abhängig und damit implizit von den verallgemeinerten Koordinaten  $q_l$  ( $l = 1, 2, \dots, F$ ).

Es ist zweckmäßig, folgende Abkürzung einzuführen:

$$m_{klp} = m_{lp,k} + m_{pk,l} - m_{kl,p} = 2 \sum_{i=2}^I [m_i(x_{Si,kl}x_{Si,p} + y_{Si,kl}y_{Si,p}) + J_{Si}\varphi_{i,kl}\varphi_{i,p}]. \quad (9)$$

Die durch drei Indizes gekennzeichneten Größen  $m_{klp}$  in (9) unterscheiden sich um den Faktor 2 von den Christoffelschen Symbolen erster Art; vgl. z. B. [27], S. 61. Sie werden aus den partiellen Ableitungen der verallgemeinerten Massen berechnet.

Mit Benutzung der schon in Abschnitt 2.2.1. erklärten Federparameter beträgt die potentielle Energie:

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum_m [c_m(l_m - l_{0m})^2 + c_{Tm}(\varphi_m - \varphi_{0m})^2] + g \sum_{i=2}^I m_i y_{Si}. \quad (10)$$

Mit der Lagrangefunktion  $L = W_{\text{kin}} - W_{\text{pot}}$  lauten die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_p} = Q_p^* \quad (11)$$

([2.7], [2.11]). Dabei sind die  $Q_p^*$  die auf den Mechanismus wirkenden Nichtpotentialkräfte, die mit Hilfe der virtuellen Arbeit auf die verallgemeinerte Koordinate  $q_p$  reduziert werden. Sie ergeben sich aus den eingepprägten Kräften und Momenten, die in Abschnitt 2.2.1. genannt wurden, sowie der in Richtung der Relativkoordinate  $q_p$  wirkenden Kraftgröße  $Q_p$ :

$$Q_p^* = Q_p + \sum_{i=2}^I (F_{xi}x_{0i,p} + F_{yi}y_{0i,p} + M_i\varphi_{i,p}). \quad (12)$$

Einsetzen von (5) und (9) in (10) liefert nach Ausführung der Differentiationen gemäß (11) in Verbindung mit (12) nach kurzen Umformungen:

$$\begin{aligned}
 Q_p = & \sum_{l=1}^F m_{pl} \ddot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \sum_{l=1}^F (m_{lp,k} + m_{pk,l} - m_{kl,p}) \dot{q}_k \dot{q}_l \\
 & - \sum_{i=2}^I (F_{xi} x_{0i,p} + F_{yi} y_{0i,p} + M_i \varphi_{i,p} - m_i g y_{Si,p}) \\
 & + \sum_m [c_m (l_m - l_{m0}) l_{m,p} + c_{Tm} (\varphi_m - \varphi_{0m}) \varphi_{m,p}].
 \end{aligned} \tag{13}$$

Falls die Verläufe der Antriebskoordinaten  $q_l(t)$  ( $l = 1, 2, \dots, F$ ) bekannt sind, sind dies auch deren Geschwindigkeiten  $\dot{q}_l$  und Beschleunigungen  $\ddot{q}_l$ , und damit ist unter Beachtung eingepprägter Kraftgrößen die in Richtung der Koordinate  $q_p$  wirkende Kraftgröße („Reaktions“kraft)  $Q_p$  berechenbar. Gleichung (13) sagt dasselbe aus wie (2.2.1./7), allerdings sind die kinetostatischen Kräfte hier in einer äußerlich anderen Form enthalten. Mit (3), (6) und (8) läßt sich (2.2.1./7) in (13) überführen.

Bei der Formulierung von (1) und (2) für die Koordinaten und Geschwindigkeiten war zunächst von „Antriebskoordinaten“  $q_1, q_2, \dots, q_F$  die Rede. Man kann jedoch formal eine dieser verallgemeinerten Koordinaten als eine virtuelle Koordinate ( $q_p$ ) annehmen, für die  $\dot{q}_p$  und  $\ddot{q}_p$  gleich 0 sind. Dann wird aus der „Antriebskraft“  $Q_p$  eine Kraftgröße, die innerhalb des Mechanismus in Richtung  $q_p$  auftritt, also eine der Gelenkkraftgrößen. Für den bereits in (2.2.1./9) betrachteten Sonderfall mit einer Antriebskoordinate ergibt sich, wenn in (13) der Laufgrad  $F = 1$  gesetzt wird, die kinetostatische Kraft zu

$$Q_p = m_{p1} \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} (2m_{p1,1} - m_{11,p}) \dot{q}_1^2 = m_{p1} \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_{11p} \dot{q}_1^2. \tag{14}$$

Für  $q_1 = \varphi$  stimmt (14) mit (2.2.1./9) überein, denn gemäß (6) ist

$$m_{1p} = m_{p1} = \sum_{i=2}^I (m_i x_{Si,1} x_{Si,p} + m_i y_{Si,1} y_{Si,p} + J_{Si} \varphi_{i,1} \varphi_{i,p}), \tag{15}$$

und aus (8) folgt für  $k = p, l = 1$  und  $p = 1$

$$\begin{aligned}
 m_{p1,1} = & \sum_{i=2}^I [m_i (x_{Si,p1} x_{Si,1} + x_{Si,p} x_{Si,11}) + m_i (y_{Si,p1} y_{Si,1} + y_{Si,p} y_{Si,11}) \\
 & + J_{Si} (\varphi_{i,p1} \varphi_{i,1} + \varphi_{i,p} \varphi_{i,11})].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Für  $k = 1, l = 1$  folgt aus (8)

$$m_{11,p} = 2 \cdot \sum_{i=2}^I [m_i (x_{Si,p1} x_{Si,1} + y_{Si,p1} y_{Si,1}) + J_{Si} \varphi_{i,p1} \varphi_{i,1}]. \tag{17}$$

Es ergibt sich aus (9) für die schon in (14) benutzte Größe:

$$\begin{aligned}
 m_{11p} = & 2m_{p1,1} - m_{11,p} \\
 = & 2 \sum_{i=2}^I (m_i x_{Si,p} x_{Si,11} + m_i y_{Si,p} y_{Si,11} + J_{Si} \varphi_{i,p} \varphi_{i,11}).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Man sieht sofort, daß  $m_{p1}$  in (14) mit dem Faktor von  $\ddot{\varphi}$  in (2.2.1./9) übereinstimmt, und wenn man die Ausdrücke aus (16) und (17) in (14) einsetzt, erkennt man, daß auch der Faktor von  $\dot{q}_1^2$  in (14) mit demjenigen von  $\dot{\varphi}^2$  in (2.2.1./9) identisch ist. Der zu (2.2.1./9) gegebene Kommentar trifft genauso für (14) zu, wobei das Besondere an (14) der interessante Zusammenhang mit den verallgemeinerten Massen ist. Zur Berechnung der kinetostatischen Kraftgrößen in einem Mechanismus kann man also günstig die verallgemeinerten Massen und deren Ableitungen benutzen.

Für einen Mechanismus mit zwei Antrieben (Laufgrad  $F = 2$ ) folgt aus (13) mit (9)

$$Q_p = m_{p1}\ddot{q}_1 + m_{p2}\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{11p}\dot{q}_1^2 + m_{21p}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{22p}\dot{q}_2^2. \quad (19)$$

Ausführlicher lautet diese Gleichung, vgl. (9),

$$Q_p = m_{p1}\ddot{q}_1 + m_{p2}\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} (2m_{p1,1} - m_{11,p}) \dot{q}_1^2 + (m_{1p,2} + m_{p2,1} - m_{21,p}) \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} (2m_{2p,2} - m_{22,p}) \dot{q}_2^2. \quad (20)$$

Diese Formel vereinfacht sich, wenn man den Spezialfall  $q_p = q_1$  betrachtet, d. h. die auf einen Antrieb wirkende Kraftgröße berechnet (vgl. auch die Abschnitte 4.2.4. (Bild 4.7) und 4.2.5. (Bild 4.9)):

$$Q_1 = m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{11,1}\dot{q}_1^2 + m_{11,2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2} (2m_{21,2} - m_{22,1})\dot{q}_2^2. \quad (21)$$

Faßt man  $q_1$  als die ursprüngliche Antriebskoordinate  $\varphi_2$  auf und stellt man sich unter  $q_2$  eine zweite Antriebskoordinate vor, die an einer anderen Stelle eingeleitet

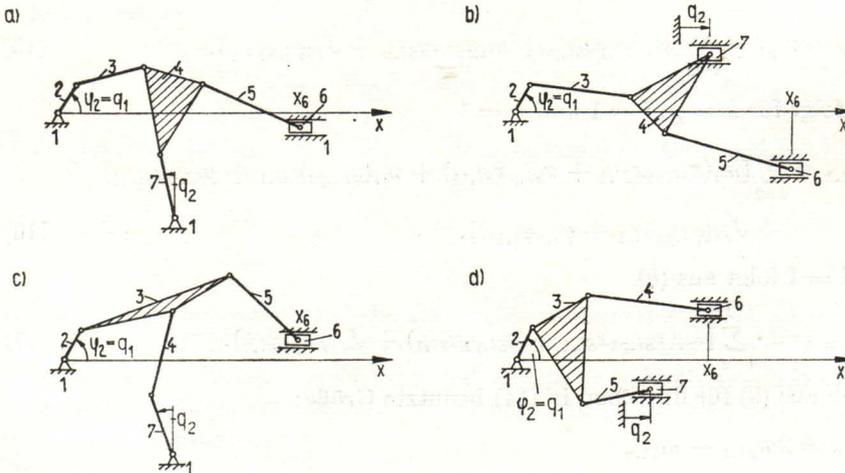


Bild 2.2. Beispiele für Mechanismen mit zwei Antrieben (Ausgleichsbewegung  $q_2$  zum Ausgleich [2.3])

wird, dann drücken (19) und (20) aus, wie eine Kraftgröße  $Q_p$  (14) durch eine Ausgleichbewegung  $q_2$  beeinflußt werden kann. Mit solchen gesteuerten Ausgleichbewegungen kann jede Gelenkkraft in einem Mechanismus mit einem zusätzlichen Kraftverlauf überlagert werden, was sich sowohl zur Verstärkung gewünschter Kräfte als auch zum dynamischen Ausgleich ausnutzen läßt, vgl. Abschnitt 3.5.4. und Bild 2.2.

Die Funktionen, die als Faktoren bei  $\ddot{q}_2$ ,  $\dot{q}_1\dot{q}_2$  und  $\dot{q}_2^2$  stehen, bewerten den dynamischen Einfluß der Ausgleichbewegung. Die Frage, ob und durch welche Bewegungen z. B. ein dynamischer Ausgleich möglich ist, kann man damit während der Projektierungsphase eines Mechanismus beantworten, indem mehrere denkbare Varianten von Zusatzantrieben miteinander verglichen werden. Auf die Anwendung solcher Ausgleichgetriebe hat DIZIOGLU [2.3], [2.4] hingewiesen. Bild 2.2 zeigt vier Varianten eines Mechanismus mit zwei Antrieben (Laufgrad  $F = 2$ ).

Die Betrachtungen werden hier mit der Ermittlung der Kraftgrößen der Gelenke und Antriebe abgebrochen, weil die weiteren Schritte, die der Konstrukteur bei der Auslegung und Dimensionierung eines Mechanismus zu gehen hat, mit den aus der Technischen Mechanik [2.11] oder Konstruktionstechnik bekannten Methoden erfolgen können, z. B. die Dimensionierung der Gleit- oder Wälzlager, der Gelenkbolzen, die Festigkeitsberechnung der Glieder u. a.

### 2.2.3. Gelenkkräfte in Dyadenmechanismen

Mit den in Abschnitt 2.2.1. und 2.2.2. beschriebenen Methoden lassen sich die Gelenkkräfte berechnen, nachdem entweder nach dem Gliedergruppenkonzept (Abschnitt 1.2.3.) oder nach dem Maschenkonzept (Abschnitt 1.3.4.) die partiellen Ableitungen ermittelt wurden.

Die folgende einfache Methode gilt nur für Dyadenmechanismen. Sie setzt die Berechnung der Beschleunigungen der Schwerpunkte und der Drehwinkel voraus, und sie liefert schrittweise Formeln für die Gelenkkräfte, indem die Ergebnisse des vorhergehenden Schrittes als Eingangsgrößen beim nächsten Schritt benutzt werden.

Der Algorithmus baut auf Formeln auf, welche für die einzelnen Dyaden gelten. Dazu werden für die aus Bild 1.1 bekannte Dyade mit Drehgelenken die Gleichungen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt, vgl. Bild 2.3. Das Glied  $j$  ist dasjenige, auf welches eingeprägte Kraftgrößen wirken.

Für die skizzierte Dyade seien die Koordinaten der Gelenkpunkte ( $x_{ij}, y_{ij}, x_{jk} = x_{kj}, y_{jk} = y_{kj}, x_{kl}, y_{kl}, x_{jm}, y_{jm}$ ) und der Schwerpunkte ( $x_{sj}, y_{sj}, x_{sk}, y_{sk}$ ) aus einer vorausgegangenen kinematischen Analyse bekannt. Im Gelenkpunkt ( $j, m$ ) greift die vom benachbarten Getriebeglied  $m$  (vgl. Bild 1.1) wirkende Gelenkkraft ( $F_{xjm}, F_{yjm}$ ) und das Moment  $M_{jm}$  an. Die Gelenkkräfte werden in systematischer Weise bezeichnet, indem der erste Index der Nummer des Gliedes entspricht, auf welches die Kraft wirkt, und der zweite Index die Nummer des Gliedes angibt, woher die Kraft kommt. Die Kraftkomponenten sind positiv in Richtung der positiven Koordinatenachsen. Es gilt für alle  $j$  und  $k$

$$F_{xjk} + F_{xkj} = 0, \quad F_{yjk} + F_{ykj} = 0. \tag{1}$$

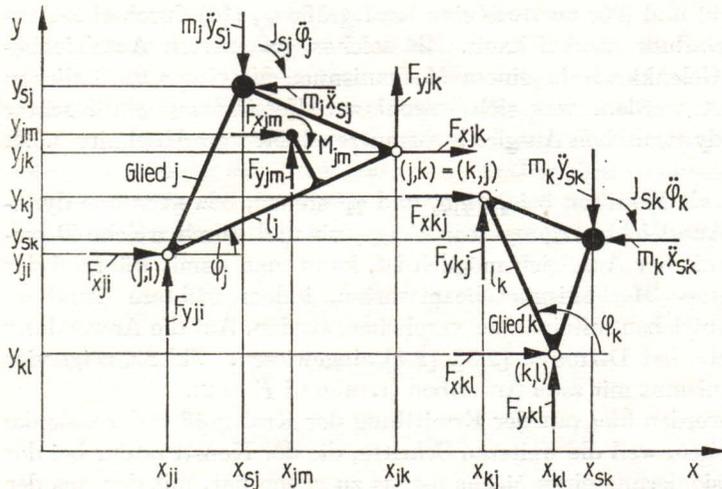


Bild 2.3 Zur Berechnung der Gelenkkräfte in einer Dyade mit Drehgelenken

Aus dem Momentengleichgewicht um das Drehgelenk  $(j, i)$  und um das Drehgelenk  $(k, l)$  ergeben sich folgende Gleichungen, vgl. Bild 2.3:

$$-F_{xjk}(y_{jk} - y_{ji}) + F_{yjk}(x_{jk} - x_{ji}) = F_{xjm}(y_{jm} - y_{ji}) - F_{yjm}(x_{jm} - x_{ji}) + M_{jm} + m_j \ddot{y}_{sj}(x_{sj} - x_{ji}) - m_j \ddot{x}_{sj}(y_{sj} - y_{ji}) + J_{sj} \ddot{\varphi}_j, \quad (2)$$

$$-F_{xkj}(y_{kj} - y_{kl}) + F_{ykj}(x_{kj} - x_{kl}) = m_k \ddot{y}_{sk}(x_{sk} - x_{kl}) - m_k \ddot{x}_{sk}(y_{sk} - y_{kl}) + J_{sk} \ddot{\varphi}_k. \quad (3)$$

Mit (1) bis (3) liegen vier Gleichungen für vier Unbekannte vor. Deren Lösungen ergeben Formeln zur Berechnung der Gelenkraft im Innern der Dyade. Mit

$$\Delta = (x_{jk} - x_{ji})(y_{kj} - y_{kl}) - (x_{kj} - x_{kl})(y_{jk} - y_{ji}) \quad (4)$$

ergibt sich

$$F_{xjk} = -F_{xkj} = \frac{1}{\Delta} \{ [F_{xjm}(y_{jm} - y_{ji}) - F_{yjm}(x_{jm} - x_{ji}) + M_{jm}] (x_{kj} - x_{kl}) + [m_j \ddot{y}_{sj}(x_{sj} - x_{ji}) - m_j \ddot{x}_{sj}(y_{sj} - y_{ji}) + J_{sj} \ddot{\varphi}_j] (x_{kj} - x_{kl}) + [m_k \ddot{y}_{sk}(x_{sk} - x_{kl}) - m_k \ddot{x}_{sk}(y_{sk} - y_{kl}) + J_{sk} \ddot{\varphi}_k] (x_{jk} - x_{ji}) \}, \quad (5)$$

$$F_{yjk} = -F_{ykj} = \frac{1}{\Delta} \{ [F_{xjm}(y_{jm} - y_{ji}) - F_{yjm}(x_{jm} - x_{ji}) + M_{jm}] (y_{kj} - y_{kl}) + [m_j \ddot{y}_{sj}(x_{sj} - x_{ji}) - m_j \ddot{x}_{sj}(y_{sj} - y_{ji}) + J_{sj} \ddot{\varphi}_j] (y_{kj} - y_{kl}) + [m_k \ddot{y}_{sk}(x_{sk} - x_{kl}) - m_k \ddot{x}_{sk}(y_{sk} - y_{kl}) + J_{sk} \ddot{\varphi}_k] (y_{jk} - y_{ji}) \}. \quad (6)$$

Es werden die Gleichgewichtsbedingungen benutzt, um mit (5) und (6) die weiteren interessierenden Gelenkkräfte zu bestimmen:

$$F_{xji} = m_j \ddot{x}_{Sj} - F_{xjk} - F_{xjm}, \quad F_{yji} = m_j \ddot{y}_{Sj} - F_{yjk} - F_{yjm}, \quad (7)$$

$$F_{xkl} = m_k \ddot{x}_{Sk} - F_{xkj}, \quad F_{ykl} = m_k \ddot{y}_{Sk} - F_{ykl}. \quad (8)$$

Mit den Gleichungen (5) bis (8) können schrittweise die Gelenkkräfte in Mechanismen berechnet werden, welche aus Dyaden mit Drehgelenken bestehen. Das Durchrechnen kettenförmig angeordneter Dyaden erfolgt bei der kinetischen Analyse in umgekehrter Reihenfolge wie bei der kinematischen Analyse. Bei dem in Bild 1.3 dargestellten sechsgliedrigen Koppelgetriebe, bei dem z. B. in Abschnitt 1.2.2. zur Berechnung von  $x_{57}$  und  $y_{57}$  der Punkt (3, 5) aus (2, 3) und (1, 4) zu berechnen war, werden zunächst die Gelenkkräfte  $F_{56}$ ,  $F_{16}$  und  $F_{35}$  berechnet und danach  $F_{34}$ ,  $F_{23}$  und  $F_{14}$ , indem die Dyade 56 mit der Dyade 34 am Punkt  $jm = 35$  verbunden wird.

Man kann einen Algorithmus formulieren, der unter Benutzung der in Abschnitt 1.2.2. eingeführten Indexfolge die Abarbeitung der Formeln zur kinematischen und kinetischen Analyse auf einem Computer festlegt. In Tabelle 2.1 sind die Grundformeln für die Berechnung der Gelenkkräfte für die bereits in Tabelle 1.1 angegebenen Dyaden zusammengestellt. Damit können etwa 90% der im Maschinenbau vorkommenden Mechanismen berechnet werden, darunter die in Bild 1.2 genannten. Diese Formeln können auch mit solchen räumlicher Gliedergruppen kombiniert werden, welche im Bedarfsfall aufzustellen sind.

Die Betrachtung der Aufteilung in Gliedergruppen läßt noch interessante physikalische Schlußfolgerungen zu. Aus den Formeln (5) bis (8) folgt, daß bei vorgegebener kinematischer Bewegung die Gelenkkräfte in der Dyade ( $j, k$ ) nur von den Masseparametern dieser Dyade und den Kräften der „dahinter“ befindlichen Dyaden abhängen. Die Masseparameter der Dyade ( $j, k$ ) sind  $m_j, m_k, J_{Sj}, J_{Sk}$  und die körperfesten Schwerpunktkoordinaten ( $\xi_{Sj}, \eta_{Sj}, \xi_{Sk}, \eta_{Sk}$ ). Somit sind die Kräfte im Gelenk (1, 6), (5, 6) und (3, 5) im erwähnten Beispiel (Bild 1.3) also nur von  $m_5, m_6, J_{S5}, J_{S6}, \xi_{S6}, \eta_{S6}, \xi_{S5}$  und  $\eta_{S5}$  abhängig, folglich nicht von den Masseparametern der Glieder 2, 3 und 4. Wenn beim dynamischen Ausgleich die Frage nach der Beeinflussung der Polardiagramme dieser Gelenkkräfte steht, so kann man sich also auf diese wenigen Parameter beschränken. Solche qualitativen Überlegungen helfen dem Konstrukteur in manchen Fällen auch, Lösungen zur Reduzierung der Gelenkkräfte zu finden.

#### 2.2.4. Gelenkkräfte eines binären Getriebegliedes

Die Gelenkkräfte in einem einzelnen binären Getriebeglied lassen sich exakt nicht dadurch berechnen, daß nur dieses Glied isoliert betrachtet wird, weil an den Schnittstellen vier unbekannte Gelenkkraftkomponenten auftreten und nur drei unabhängige Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen. Es können allerdings die senkrecht zur Gliedachse auftretenden Komponenten und die Summe der beiden anderen Komponenten berechnet werden.

Gegeben seien die Beschleunigungen der Gelenkpunkte eines Gliedes sowie dessen Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  und -beschleunigung  $\ddot{\varphi}$ , vgl. Bild 2.4.

Tabelle 2.1. Gelenkkräfte in Dyaden

Fall	Skizze der Dyade	Gelenkreaktionen
1		$F_{xjk} = -F_{xkj} = \left[ M_{eji} + M_{sji} \right] (x_{kj} - x_{kl}) + \left[ M_{ekl} + M_{skl} \right] (x_{jk} - x_{ji}) / \Delta_1$ $F_{yjk} = -F_{ykj} = \left[ M_{eji} + M_{sji} \right] (y_{kj} - y_{kl}) + \left[ M_{ekl} + M_{skl} \right] (y_{jk} - y_{ji}) / \Delta_1$ $F_{xji} = +m_j \ddot{x}_j - F_{xjk} - F_{xjm} \quad , \quad F_{yji} = +m_j \ddot{y}_j - F_{yjk} - F_{yjm}$ $F_{xkl} = +m_k \ddot{x}_k - F_{xkj} - F_{xkn} \quad , \quad F_{ykl} = +m_k \ddot{y}_k - F_{ykj} - F_{ykn}$ <p>Abkürzungen: <math>M_{eji} = F_{xjm}(y_{jm} - y_{ji}) - F_{yjm}(x_{jm} - x_{ji}) + M_{jm}</math>,  <math>M_{sji} = m_j \ddot{y}_{sj}(x_{sj} - x_{ji}) - m_j \ddot{x}_{sj}(y_{sj} - y_{ji}) + J_{sj} \ddot{\varphi}_j</math></p> $\Delta_1 = (x_{jk} - x_{ji})(y_{kj} - y_{kl}) - (x_{kj} - x_{kl})(y_{jk} - y_{ji})$ $M_{ekl}, M_{skl} \text{ vgl. Fall 2}$
2		$F_{Nkl} = \left[ M_{eji} + M_{sji} - (m_k \ddot{x}_{sk} - F_{xjm})(y_{jk} - y_{ji}) + (m_k \ddot{y}_{sk} + F_{yjm})(x_{jk} - x_{ji}) \right] / \Delta_2$ $F_{xjk} = -F_{xkj} = -m_k \ddot{x}_{sk} + F_{xjm} + F_N \cos \varphi_k$ $F_{yjk} = -F_{ykj} = -m_k \ddot{y}_{sk} + F_{yjm} + F_N \sin \varphi_k$ $M_{kl} = F_{Nkl} \eta_{kl} - M_{ekl} - M_{skl}$ $F_{xji} = +m_j \ddot{x}_j - F_{xjk} - F_{xjm} \quad , \quad F_{yji} = +m_j \ddot{y}_j - F_{yjk} - F_{yjm}$ <p>Abkürzungen: <math>M_{ekl} = F_{xkn}(y_{kn} - y_{kl}) - F_{ykn}(x_{kn} - x_{kl}) + M_{kn}</math>  <math>M_{skl} = m_k \ddot{y}_{sk}(x_{sk} - x_{kl}) - m_k \ddot{x}_{sk}(y_{sk} - y_{kl}) + J_{sk} \ddot{\varphi}_k</math></p> $\Delta_2 = (x_{jk} - x_{ji}) \sin \varphi_k - (y_{jk} - y_{ji}) \cos \varphi_k$ $M_{eji}, M_{sji} \text{ vgl. Fall 1}$

Wenn man die Gelenkkräfte, die infolge der Massenkräfte entstehen, nicht durch die Beschleunigung des Schwerpunktes ( $\ddot{x}_S, \ddot{y}_S$ ) ausdrückt, sondern durch die aus der kinematischen Analyse bekannten Größen der Gelenkpunkte, hat man den Vorteil, daß der Einfluß der Masseparameter ( $m, J_S, \xi_S, \eta_S$ ) leichter überschaubar wird.

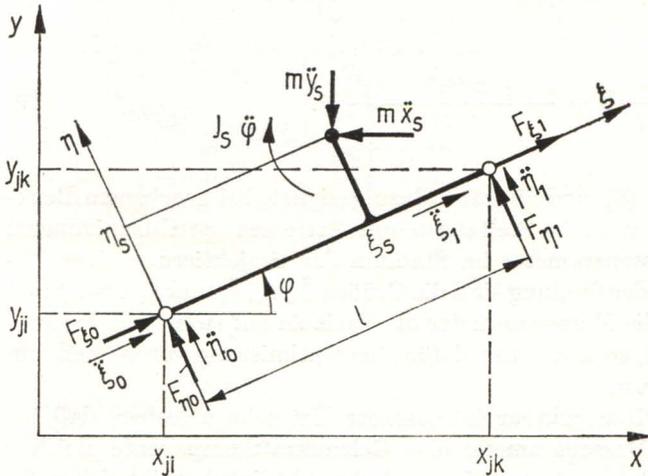


Bild 2.4 Vereinfachtes Modell zur Abschätzung der Gelenkkräfte

Drückt man die Schwerpunktbeschleunigungen durch  $\ddot{x}_{ji}, \ddot{y}_{ji}, \ddot{x}_{jk}, \ddot{y}_{jk}, \dot{\varphi}$  und  $\dot{\varphi}$  aus und berechnet mit den Gleichgewichtsbedingungen die Gelenkkräfte, dann findet man für die Summe in  $\xi$ -Richtung

$$F_{\xi_0} + F_{\xi_1} = m[\ddot{\xi}_0 - \ddot{\varphi}\eta_S - \dot{\varphi}^2\xi_S] \quad (1)$$

und erhält die einzelnen Komponenten in  $\eta$ -Richtung:

$$F_{\eta_0} = m \frac{\eta_S}{l} \ddot{\xi}_1 + \frac{J_S + m[(l - \xi_S)^2 + \eta_S^2]}{l^2} \ddot{\eta}_0 - \frac{J_S + m(\xi_S^2 + \eta_S^2 - l\xi_S)}{l^2} \ddot{\eta}_1, \quad (2)$$

$$F_{\eta_1} = -m \frac{\eta_S}{l} \ddot{\xi}_0 - \frac{J_S + m(\xi_S^2 + \eta_S^2 - l\xi_S)}{l^2} \ddot{\eta}_0 + \frac{J_S + m(\xi_S^2 + \eta_S^2)}{l^2} \ddot{\eta}_1. \quad (3)$$

Dabei wurden die Beschleunigungen bezüglich des raumfesten Bezugssystems auf das körperfeste Bezugssystem transformiert, vgl. Bild 2.4:

$$\ddot{\xi}_0 = \ddot{x}_{ji} \cos \varphi + \ddot{y}_{ji} \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\ddot{\xi}_1 = \ddot{x}_{jk} \cos \varphi + \ddot{y}_{jk} \sin \varphi, \quad (5)$$

$$\ddot{\eta}_0 = -\ddot{x}_{ji} \sin \varphi + \ddot{y}_{ji} \cos \varphi, \quad (6)$$

$$\ddot{\eta}_1 = -\ddot{x}_{jk} \sin \varphi + \ddot{y}_{jk} \cos \varphi. \quad (7)$$

Anstelle der Beschleunigungen beider Gelenkpunkte, die in (1) bis (3) eingehen, kann man auch von den kinematischen Größen eines einzigen Gelenkpunktes ausgehen. Es ergibt sich dann

$$F_{\eta_0} = m \left( 1 - \frac{\xi_S}{l} \right) \ddot{\eta}_0 + m \frac{\eta_S}{l} \ddot{\xi}_0 - \frac{J_S + m(\xi_S^2 + \eta_S^2 - l\xi_S)}{l} \ddot{\varphi} - m\eta_S \dot{\varphi}^2, \quad (8)$$

$$F_{\eta_1} = m \frac{\xi_S}{l} \ddot{\eta}_0 - m \frac{\eta_S}{l} \ddot{\xi}_0 + \frac{J_S + m(\xi_S^2 + \eta_S^2)}{l} \ddot{\varphi}. \quad (9)$$

Die Formeln (1) bis (3) oder (8) und (9) sind dazu geeignet, bei gegebenem Bewegungszustand eines Gliedes, z. B. in Stellungen mit extremen Beschleunigungen, günstige Relationen der Masseparameter im Stadium der Projektierung eines Mechanismus zu ermitteln. In jeder Stellung sind die Größen  $\ddot{\xi}_0$ ,  $\ddot{\eta}_0$ ,  $\ddot{\xi}_1$  und  $\ddot{\eta}_1$  bzw.  $\ddot{\varphi}$  und  $\dot{\varphi}$  gegeben. Faßt man dann die Masseparameter als Variable auf (wie es in der Projektierungsphase der Fall ist), so kann man dafür eine Optimierung vornehmen, um die Gelenkkräfte zu verkleinern.

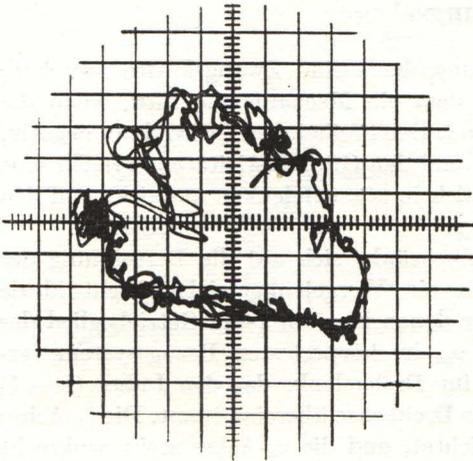
So ist z. B. die für den Konstrukteur interessante Tatsache ablesbar, daß bei bestimmten Relationen der Masseparameter eine Gelenkkraftkomponente gleich 0 sein kann. Für den Sonderfall  $\ddot{\xi}_0 = \ddot{\eta}_0 = 0$  (fester Drehpunkt links) ergibt sich z. B., daß  $F_{\eta_0} = 0$  wird, wenn der Stab rechts im Stoßmittelpunkt [2.11] gelagert wird, wobei  $\eta_S = 0$  und

$$J_S = m l \xi_S - m(\xi_S^2 + \eta_S^2) = m \xi_S (l - \xi_S) \quad (10)$$

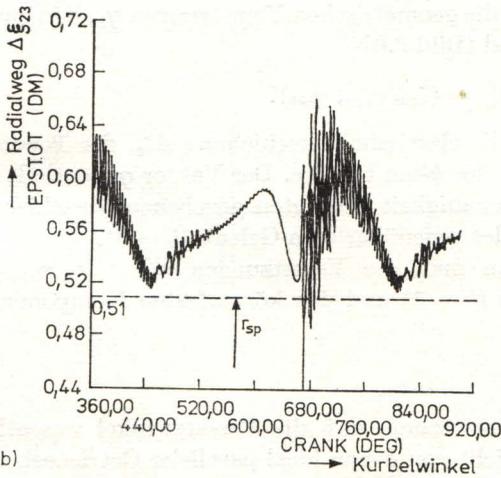
beträgt. Dieser Zusammenhang kann z. B. für die Minimierung der Gelenkkraft in der Umkehrlage von im Gestell gelagerten Gliedern ausgenutzt werden. In der Konstruktionspraxis gelingt es, die Maximalkräfte zu vermindern, indem man mit den obigen Formeln die Masseparameter festlegt, vgl. Abschnitt 2.4.2.

In der Praxis wird häufig bei Messungen festgestellt, daß die wirklich auftretenden Gelenkkräfte bedeutend von den berechneten kinetostatischen Kräften abweichen, z. B. [3.38], [4.18], [4.43]. Bild 2.5a zeigt ein typisches Beispiel für ein Meßergebnis. Berechnet man die Gelenkkräfte und -bewegungen mit Modellen, welche Elastizität und Spiel berücksichtigen, so zeigt sich, daß dem kinetostatischen Kraftverlauf Schwingungen überlagert sind. Rechenergebnisse von TANUWIDJAJA [2.24] für ein Schubkurbelgetriebe zeigen Bild 2.5b und 2.5c. Der scheinbar chaotische Verlauf in Bild 2.5c ergibt sich aus einer einzigen angeregten Eigenschwingung, die aus Bild 2.5b erkennbar ist, vgl. dazu Abschnitt 4.2.5.

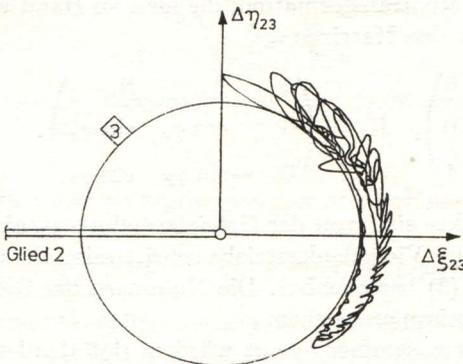
Es kommt in der weiteren Forschung weniger auf die Vervollkommnung der Rechenprogramme, sondern vor allem darauf an, die für die Schwingungserregung wesentlichen mechanischen Bedingungen überschaubarer zu formulieren, damit der Konstrukteur Parameter leichter beurteilen und schon bei der Projektierung eines Mechanismus unerwünschte Schwingungen mit konstruktiven Maßnahmen vermindern kann (Lärm), vgl. auch Abschnitt 4.2.2. und 4.3.3.



a)



b)



c)

Bild 2.5 Einfluß von Elastizität und Spiel

- a) Meßergebnis: Gelenkraftverlauf in einer Nähmaschine (Polardiagramm)
- b) Rechenergebnis: Radialverformung  $\Delta\xi_{23}$  im Drehgelenk eines Schubkurbeltriebes [2.24], vgl. Bild 2.8
- c) Rechenergebnis: Spielkreis und Bahn des Gelenkpunktes (3, 2) im gliedfesten Bezugs-system [2.24]

### 2.3. Kraftgrößen quer zur Bewegungsebene

Eine Ursache für Kräfte quer zur Bewegungsebene sind Zwangskräfte innerhalb des statisch unbestimmten Tragwerks, zu dem ein Mechanismus wird, wenn die Achsen seiner Gelenke nicht ideal parallel sind. Der Freiheitsgrad wird dann negativ, und in Abhängigkeit von den Versetzungen und den Gliedelastizitäten herrscht eine Vorspannung im Gesamtmechanismus, die sich in allen Gelenken auswirkt und den kinetostatischen Kraftverlauf verändert.

Die folgende einführende Betrachtung beschränkt sich auf die Berechnung der Belastungen quer zur Bewegungsebene für ein Viergelenkgetriebe. Nicht ideale Einbaumaße führen zu Versetzungen, unter denen hier am  $k$ -ten Getriebeglied der Versatzweg  $\zeta_k$  und die Versatzwinkel  $\psi_{\xi k}$ ,  $\psi_{\eta k}$  im körperfesten Bezugssystem verstanden werden. Das  $\xi_k, \eta_k, \zeta_k$ -System wird im Drehgelenk, das den Index  $(k - 1)$  erhält, so orientiert, daß die  $\zeta_k$ -Achse mit der Drehachse übereinstimmt. Die  $\xi_k$ -Achse ist vom Gelenk  $(k - 1)$  zum Gelenk  $k$  gerichtet, und die  $\eta_k$ -Achse steht senkrecht darauf, so daß ein Rechtssystem zustandekommt (Bild 2.6a).

Das  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ -System ist im Drehgelenk (1, 2) gelegen, wobei die  $\zeta_2$ -Achse mit der  $z$ -Achse übereinstimmt. Die körperfesten Koordinaten des Gelenks  $k$  werden durch die elastischen Verformungen  $\Delta \mathbf{q}_k$  und die geometrischen Versetzungen  $\mathbf{q}_{k0}$  bestimmt. Die Komponenten dieser Vektoren sind (Bild 2.6b)

$$\Delta \mathbf{q}_k^T = (\Delta \zeta_k, \Delta \psi_{\xi k}, \Delta \psi_{\eta k}), \quad \mathbf{q}_{k0}^T = (\zeta_{k0}, \psi_{\xi k0}, \psi_{\eta k0}). \quad (1)$$

Im Deformationsvektor  $\Delta \mathbf{q}_k$  stecken die elastische Verschiebung  $\Delta \zeta_k$ , der Torsionswinkel  $\Delta \psi_{\xi k}$  und der Biegewinkel  $\Delta \psi_{\eta k}$  des  $k$ -ten Gliedes. Der Vektor  $\mathbf{q}_{k0}$  enthält die praktisch durch endliche Fertigungsgenauigkeit bedingten gegebenen Verschiebungen und Verdrehungen des  $k$ -ten Gliedes gegenüber dem Gelenk  $(k - 1)$ .

Im raumfesten Bezugssystem kann man die Versetzungen  $\mathbf{s}_k^T = (z_k, \psi_{xk}, \psi_{yk})$  am Gelenk  $(k)$  aus denen des Gelenks  $(k - 1)$  und den körperfesten Komponenten berechnen ( $k = 2, 3, 4$ ):

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{T}_k^T \mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{K}_k^T \cdot \mathbf{q}_{k0}. \quad (2)$$

Diese Beziehung gilt unter der Voraussetzung, daß die Versatzwinkel wesentlich kleiner als 1 sind, so daß sich die  $\varphi_k$  nicht von denen ideal paralleler Getriebeebenen unterscheiden. Aus einer Koordinatentransformation, die man an Hand von Bild 2.6 nachvollziehen kann, folgt (2) mit den Matrizen

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_k \cdot \sin \varphi_k & 1 & 0 \\ -l_k \cdot \cos \varphi_k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_k & \sin \varphi_k \\ 0 & -\sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Die Versetzungen der Gelenkpunkte sind von der Getriebebestellung  $\varphi_2$  abhängig. Sie sind für das in Bild 2.7 dargestellte Viergelenkgetriebe schrittweise aus den körperfesten Versetzungen aus (2) und (3) berechenbar. Die Nummern der Gelenkpunkte sind in Bild 2.7 innerhalb von Kreisen angegeben.

Falls die Getriebeglieder derart zusammengesetzt würden, daß das letzte Gelenk

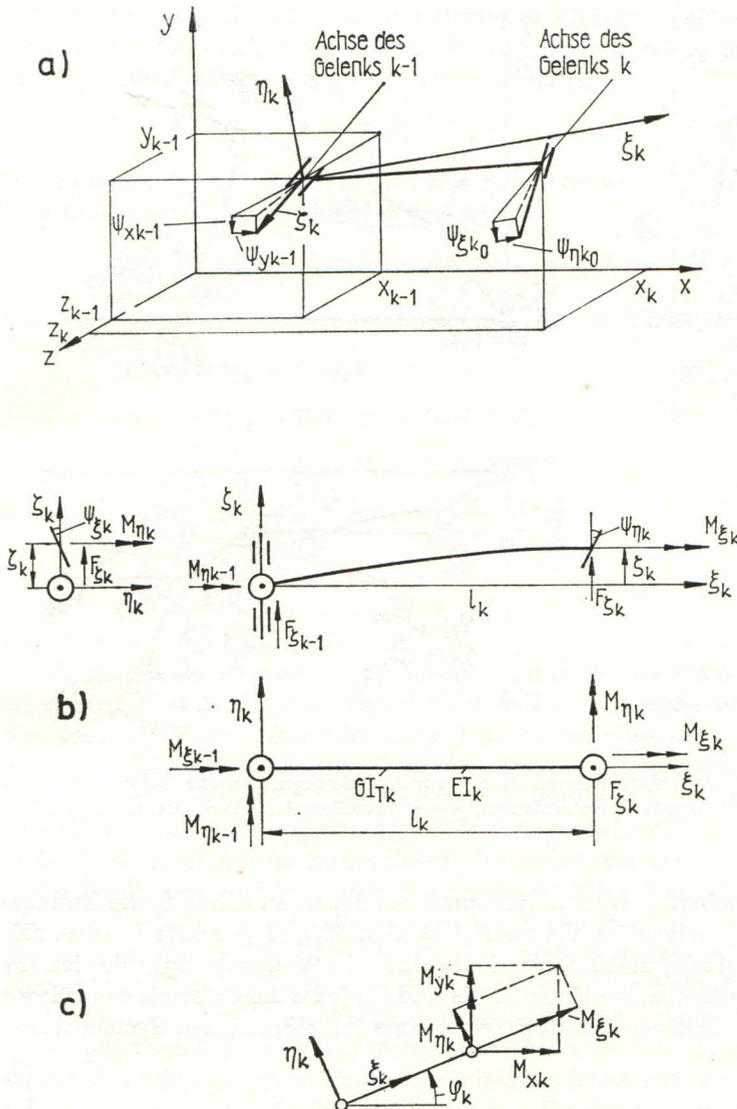


Bild 2.6 Kraft- und Deformationsgrößen an einem quer zur Bewegungsebene belasteten binären Getriebeglied

( $k = 4$ ) frei wäre, so ergibt sich aus wiederholter Anwendung von (2) der Versetzungsvektor zu

$$\mathbf{s}_4 = \mathbf{T}_4^T \mathbf{T}_3^T \mathbf{K}_2^T \mathbf{q}_{20} + \mathbf{T}_4^T \mathbf{K}_3^T \mathbf{q}_{30} + \mathbf{K}_4^T \mathbf{q}_{40}. \quad (4)$$

Das Lager des Gestellpunktes (1, 4) besitzt im raumfesten System Versetzungen der Größe  $\mathbf{s}_{10} = (z_{10}, \psi_{x10}, \psi_{y10})$ , so daß das Gelenk (4) an dieser Stelle an die Versetzung

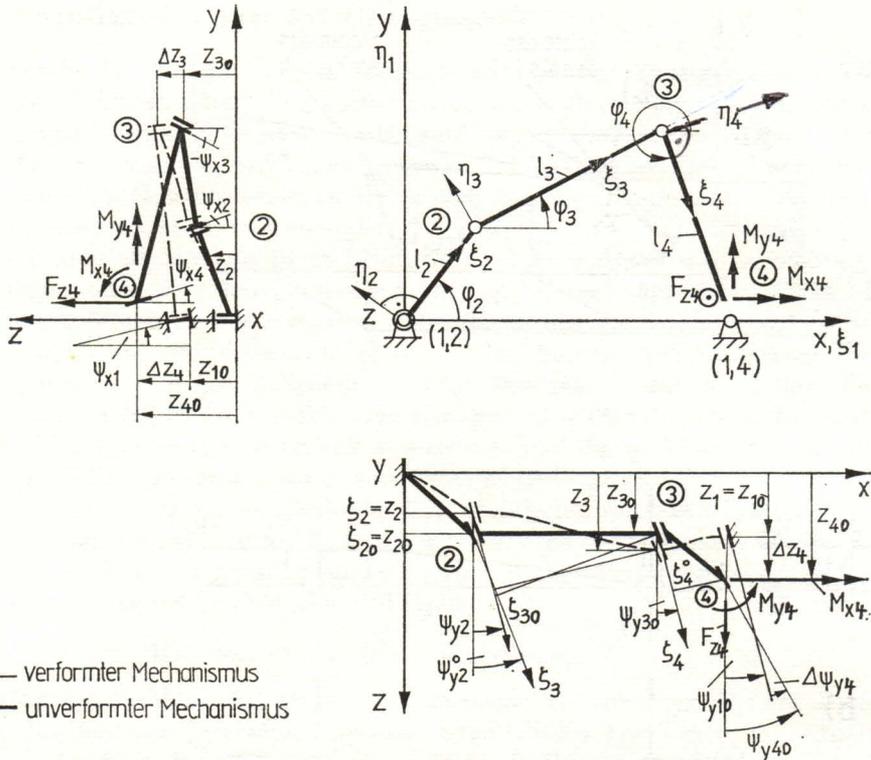


Bild 2.7 Bezeichnung der Deformationen eines quer zur Bewegungsebene belasteten Viergelenkgetriebes (----- verformter Mechanismus, ——— unverformter Mechanismus mit nicht idealen Einbaumaßen)

$\Delta \mathbf{s}_4 = \mathbf{s}_4 - \mathbf{s}_1$  eingezwängt werden muß. Damit entstehen an dieser Stelle Zwangskräfte und -momente, welche im Vektor  $\mathbf{F}_4^T = (F_{z4}, M_{x4}, M_{y4})$  erfaßt werden. Die Aufgabe besteht nun darin, die Deformationsgrößen der Vektoren  $\Delta \mathbf{q}_k$ , die sich für  $k = 2, 3, 4$  aus  $\Delta \mathbf{s}_4$  ergeben, zu bestimmen. Sie sind für jedes der deformierten Glieder auf Grund des linear elastischen Materialverhaltens im körperfesten System durch

$$\Delta \mathbf{q}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{Q}_k \tag{5}$$

bestimmt. Dabei ist  $\mathbf{Q}_k^T = (F_{zk}, M_{\xi k}, M_{\eta k})$  der Kraftvektor, der am Gelenk ( $k$ ) im Bezugssystem des  $k$ -ten Gliedes wirkt (Bild 2.6), und

$$\mathbf{D}_k = \begin{pmatrix} l_k^3/3EI_k & 0 & -l_k^2/2EI_k \\ 0 & l_k/GI_{Tk} & 0 \\ -l_k^2/2EI_k & 0 & -l_k/EI_k \end{pmatrix} \tag{6}$$

ist die Nachgiebigkeitsmatrix eines auf Torsion und Biegung belasteten Stabes bzw. Balkens. In ihr sind die Torsionssteifigkeit  $GI_{Tk}$ , die Biegesteifigkeit  $EI_k$  und die Länge  $l_k$  bekannt.

Die Lagerelastizität könnte in der Matrix  $D_k$  ebenfalls berücksichtigt werden. Zur Berechnung der Kraftvektoren kann man folgende Rekursionsformel an Hand der Gleichgewichtsbedingungen aus Bild 2.6 c herleiten:

$$\mathbf{F}_{k-1} = \mathbf{T}_k \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_k \mathbf{F}_k. \quad (7)$$

Die Matrizen  $\mathbf{T}_k$  und  $\mathbf{K}_k$  sind aus (3) schon bekannt. Die aus (4) bereits bekannte Beziehung gilt analog für die Versetzungen:

$$\Delta \mathbf{s}_4 = \mathbf{T}_4^\top \mathbf{T}_3^\top \mathbf{T}_2^\top \Delta \mathbf{q}_2 + \mathbf{T}_4^\top \mathbf{K}_3^\top \Delta \mathbf{q}_3 + \mathbf{K}_4^\top \Delta \mathbf{q}_4. \quad (8)$$

Die gliedbezogenen Versetzungen folgen aus (5) und (7) zu

$$\Delta \mathbf{q}_4 = \mathbf{D}_4 \mathbf{Q}_4 = \mathbf{D}_4 \mathbf{K}_4 \mathbf{F}_4, \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{q}_3 = \mathbf{D}_3 \mathbf{Q}_3 = \mathbf{D}_3 \mathbf{K}_3 \mathbf{F}_3 = \mathbf{D}_3 \mathbf{K}_3 \mathbf{T}_4 \mathbf{F}_4, \quad (10)$$

$$\Delta \mathbf{q}_2 = \mathbf{D}_2 \mathbf{Q}_2 = \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_2 \mathbf{F}_2 = \mathbf{D}_2 \mathbf{K}_2 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_4 \mathbf{F}_4. \quad (11)$$

Einsetzen in (8) ergibt die Beziehung

$$\Delta \mathbf{s}_4 = \left( \sum_{k=2}^4 \mathbf{A}_k^\top \mathbf{D}_k \mathbf{A}_k \right) \mathbf{F}_4, \quad (12)$$

mit  $\mathbf{A}_4 = \mathbf{K}_4$ ,  $\mathbf{A}_3 = \mathbf{K}_3 \mathbf{T}_4$ ,  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_4$ .

Die  $\mathbf{A}_k$  beschreiben im Grunde genommen nur die von der Getriebestellung abhängigen geometrischen Verhältnisse, d. h., diese Matrizen sind nach einer kinematischen Analyse leicht berechenbar. Gleichung (12) stellt ein lineares ( $3 \times 3$ )-Gleichungssystem dar, aus welchem bei bekanntem  $\Delta \mathbf{s}_4$  der Kraftvektor  $\mathbf{F}_4$  folgt. Falls  $\mathbf{F}_4$  bekannt ist, können schrittweise aus (7) die Vektoren  $\mathbf{F}_1$  bis  $\mathbf{F}_3$  und die im körperfesten System wirkenden Kraftgrößen  $\mathbf{Q}_1$  bis  $\mathbf{Q}_4$ , d. h. die statischen Zusatzkräfte und Momente in den Lagern infolge der Zwangskräfte berechnet werden.

Die Kraftverteilung innerhalb jedes Lagers läßt sich aus den Zwangskräften  $F_{ck}$  und -momenten  $M_{ik}$ ,  $M_{\eta k}$  berechnen, wenn die konkrete Bauform (Lagerbreite) bekannt ist, indem die statischen Gleichgewichtsbedingungen angewendet werden. Daraus folgt dann die Verteilung der Flächenpressung längs der Lagerbreite.

Die hier für das Viergelenkgetriebe dargestellten Zusammenhänge lassen sich sinngemäß auch für mehrgliedrige Mechanismen ermitteln. Pro Masche tritt dann im allgemeinen eine dreifache statische Unbestimmtheit auf. Aus der Anzahl der Unbekannten (fünf pro Gelenk) und den zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen (sechs pro Getriebeglied) ergibt sich bei räumlicher Betrachtung der Grad der statischen Unbestimmtheit. Ein zwangsläufiges Getriebe mit  $I$  Gliedern, das  $(3I - 4)/2$  Drehgelenke besitzt, ist z. B. ein  $(3I - 6)/2$ fach statisch unbestimmtes Tragwerk.

Man wird in der Praxis selten die hier genannten Zusatzkräfte genau berechnen. Der Konstrukteur kann durch geeignete Querschnittsform der Glieder, die quer zur Bewegungsebene biegeweich sind, durch torsionsweiche Gestaltung oder auch durch zusätzliche Gelenke mit Freiheiten senkrecht zur Bewegungsebene die Zwangskräfte und -momente bedeutend vermindern und damit Überlastungen und Schäden



Zur Vereinfachung der Beschreibung wurden folgende Koordinaten „umgetauft“:  $x_4 = s_{14}$ ,  $l_2 = \xi_{23}$ ,  $l_3 = \xi_{34}$ ,  $\varphi = \varphi_2$ . Mit der Bezeichnungsweise von (1.3.3./2) sind in diesem Beispiel  $\Phi_1 = \varphi_3$  und  $\Phi_2 = x_4$  die Lagekoordinaten und  $q_1 = \varphi_2 = \varphi$  die Antriebskoordinate. Die Gleichungen (1) und (2) sind leicht geschlossen lösbar. Man erhält für  $\eta_{23} = 0$  ( $\eta_{23}$  wurde nur in (1) und (2) eingeführt, um die Ableitungen nach dieser Variablen bilden zu können):

$$\sin \varphi_3 = -\frac{l_2}{l_3} \sin \varphi, \quad \cos \varphi_3 = +\sqrt{1 - \left(\frac{l_2}{l_3}\right)^2 \sin^2 \varphi}, \quad (3)$$

$$x_4 = l_2 \cos \varphi + l_3 \cos \varphi_3. \quad (4)$$

Die partiellen Ableitungen von  $\varphi_3$  und  $x_4$  nach den Parametern, die im weiteren gebraucht werden, könnte man bei diesem einfachen Beispiel direkt aus (3) und (4) gewinnen. Es soll hier aber der in Abschnitt 1.3.4. gezeigte allgemeine Weg, der die Berechnung der Jacobimatrix  $\mathbf{A}$  verlangt, gegangen werden, vgl. (1.3.4./12 bis 14). Die geometrischen Parameter  $w_p$  sind, bezogen auf die vorliegende Aufgabenstellung, vgl. (1.3.4./2):

$$w_1 = q_1 = \varphi, \quad w_2 = \xi_{23} = l_2, \quad w_3 = \eta_{23}. \quad (5)$$

Damit folgen aus den Zwangsbedingungen (1) und (2) wegen  $\Phi_1 = \varphi_3$  und  $\Phi_2 = x_4$  laut (1.3.3./5) die Jacobimatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial \Phi_1 & \partial f_1 / \partial \Phi_2 \\ \partial f_2 / \partial \Phi_1 & \partial f_2 / \partial \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_3 \sin \varphi_3 & -1 \\ l_3 \cos \varphi_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

und laut (1.3.4./13) die Vektoren der rechten Seite von (1.3.4./12)

$$\mathbf{f}_{,1} = \begin{pmatrix} -l_2 \sin \varphi \\ +l_2 \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_{,2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_{,3} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Die ersten Ableitungen von  $\varphi_3$  und  $x_4$  können mit (6) und (7) berechnet werden. Um die partiellen Ableitungen zu ermitteln, die für (2.2.1./9) oder (2.2.2./14) aus (2.2.2./15 und 16) benötigt werden, müssen die Schwerpunktkoordinaten zunächst analytisch ausgedrückt werden. Aus Bild 2.8 folgt

$$x_{S2} = \xi_{S2} \cos \varphi, \quad (8)$$

$$x_{S3} = l_2 \cos \varphi - \eta_{23} \sin \varphi + \xi_{S3} \cos \varphi_3,$$

$$x_{S4} = l_2 \cos \varphi - \eta_{23} \sin \varphi + l_3 \cos \varphi_3,$$

$$y_{S2} = \xi_{S2} \sin \varphi,$$

$$y_{S3} = l_2 \sin \varphi + \eta_{23} \cos \varphi + \xi_{S3} \sin \varphi_3, \quad (9)$$

$$y_{S4} = 0.$$

Die Ableitungen dieser Funktionen sind gemeinsam mit denen von  $\varphi_3$  und  $x_4$  in Tabelle 2.2 angegeben. Die zweiten Ableitungen, die allerdings nur bezüglich der

Tabelle 2.2. Partielle Ableitungen von Koordinaten eines Schubkurbelgetriebes, vgl. Bild 2.8

$\frac{d(\quad)}{d\varphi_2} = (\quad)' = (\quad)_{,1}$	$\frac{d(\quad)}{d\xi_{23}} = (\quad)_{,2}$	$\frac{d(\quad)}{d\eta_{23}} = (\quad)_{,3}$	$\frac{d^2(\quad)}{d\varphi^2} = (\quad)_{,11} = (\quad)''$
$\varphi_3' = \frac{-l_2 \cos \varphi}{l_3 \cos \varphi_3}$	$\varphi_{3,2} = \frac{-\sin \varphi}{l_3 \cos \varphi_3}$	$\varphi_{3,3} = \frac{-\cos \varphi}{l_3 \cos \varphi_3}$	$\varphi_3'' = \frac{l_2 \sin \varphi + l_3 \sin \varphi_3 \varphi_3'^2}{l_3 \cos \varphi_3}$
$x_{S2}' = -\xi_{S2} \sin \varphi$	$x_{S2,2} = 0$	$x_{S2,3} = 0$	$x_{S2}'' = -\xi_{S2} \cos \varphi$
$y_{S2}' = \xi_{S2} \cos \varphi$	$y_{S2,2} = 0$	$y_{S2,3} = 0$	$y_{S2}'' = -\xi_{S2} \sin \varphi$
$x_{S3}' = -l_2 \sin \varphi - \xi_{S3} \sin \varphi_3 \cdot \varphi_3'$	$x_{S3,2} = \cos \varphi - \xi_{S3} \sin \varphi_3 \varphi_{3,2}$	$x_{S3,3} = -\sin \varphi - \xi_{S3} \sin \varphi_3 \varphi_{3,3}$	$x_{S3}'' = -l_2 \cos \varphi - \xi_{S3} (\cos \varphi_3 \varphi_3'^2 + \sin \varphi_3 \varphi_3'')$
$y_{S3}' = l_2 \cos \varphi + \xi_{S3} \cos \varphi_3 \cdot \varphi_3'$	$y_{S3,2} = \sin \varphi + \xi_{S3} \cos \varphi_3 \varphi_{3,2}$	$y_{S3,3} = \cos \varphi + \xi_{S3} \cos \varphi_3 \varphi_{3,3}$	$y_{S3}'' = -l_2 \sin \varphi + \xi_{S3} (-\sin \varphi_3 \varphi_3'^2 + \cos \varphi_3 \varphi_3'')$
$x_{S4}' = -l_2 \sin \varphi - l_3 \sin \varphi_3 \cdot \varphi_3'$	$x_{S4,2} = \cos \varphi - l_3 \sin \varphi_3 \varphi_{3,2}$	$x_{S4,3} = -\sin \varphi - l_3 \sin \varphi_3 \varphi_{3,3}$	$x_{S4}'' = -l_2 \cos \varphi - l_3 (\cos \varphi_3 \varphi_3'^2 + \sin \varphi_3 \varphi_3'')$

Antriebskoordinate  $q_1 = \varphi$  zu bilden sind, folgen aus (1.3.4./14). Für  $p = q = 1$  ergeben sich mit den aus (6) und (7) folgenden Ableitungen die beiden linearen Gleichungen

$$-l_3 \sin \varphi_3 \cdot \varphi_{3,11} - x_{4,11} = l_2 \cos \varphi + l_3 \cos \varphi_3 \cdot (\varphi_{3,1})^2, \quad (10)$$

$$+l_3 \cos \varphi_3 \cdot \varphi_{3,11} = l_2 \sin \varphi + l_3 \sin \varphi_3 \cdot (\varphi_{3,1})^2. \quad (11)$$

Ihre Lösungen sind in der vierten Spalte der Tabelle 2.2 aufgeführt. Um das Antriebsmoment  $Q_1 = M_{\text{an}}$  und die körperfesten Gelenkkraftkomponenten  $Q_2 = F_{\xi_{23}}$  und  $Q_3 = F_{\eta_{23}}$  zu berechnen, werden die verallgemeinerten Massen und deren partielle Ableitungen gebraucht, vgl. (2.2.2./14). Aus (2.2.2./15 und 18) folgt für  $I = 4$

$$m_{11} = m_2(x_{S_2}'^2 + y_{S_2}'^2) + J_{S_2} + m_3(x_{S_3}'^2 + y_{S_3}'^2) + J_{S_3}\varphi_3'^2 + m_4x_{S_4}'^2, \quad (12)$$

$$m_{111} = 2[m_3(x_{S_3}'x_{S_3}'' + y_{S_3}'y_{S_3}'') + J_{S_3}\varphi_3'\varphi_3'' + m_4x_{S_4}'x_{S_4}'']. \quad (13)$$

Weil die partiellen Ableitungen  $x_{S_2,p}$  und  $y_{S_2,p}$  für  $p = 2$  und  $p = 3$  gleich 0 sind (Tabelle 2.2), gilt

$$m_{p1} = m_3(x_{S_3,p}x_{S_3}' + y_{S_3,p}y_{S_3}') + J_{S_3}\varphi_3,p\varphi_3' + m_4x_{S_4,p}x_{S_4}', \quad (14)$$

$$m_{11p} = 2[m_3(x_{S_3,p}x_{S_3}'' + y_{S_3,p}y_{S_3}'') + J_{S_3}\varphi_3,p\varphi_3'' + m_4x_{S_4,p}x_{S_4}'']. \quad (15)$$

Setzt man die in Tabelle 2.2 angegebenen Funktionen ein, so entstehen schon für dieses einfache Beispiel relativ lange Ausdrücke. Deshalb soll nur ein Spezialfall weiterverfolgt werden, für den  $\xi_{S_3} = 0$  (Schwerpunkt des Gliedes 3 liegt im Gelenkpunkt (2, 3)) und  $J_{S_3} = 0$  gilt. In der Praxis wird bei der Berechnung der Schubkurbelgetriebe oft die Masse des Gliedes 3 durch so eine Aufteilung auf die beiden Gelenkpunkte (2, 3) und (3, 4) berücksichtigt. In der Ersatzmasse  $m_4$  ist dann ein Anteil der Gliedmasse 3 enthalten [7], [11].

Weiterhin wird angenommen, daß die Kurbel wesentlich kürzer als die Koppel ist, so daß  $\lambda = l_2/l_3 \ll 1$  gilt und  $\lambda^2$  gegenüber 1 vernachlässigt werden kann. Für diesen Spezialfall erhält man aus (12) bis (14) mit den Funktionen aus Tabelle 2.2 nach kurzen Umformungen für die auf die Parameter (5) bezogenen Massen

$$m_{11} = m_2\xi_{S_2}^2 + J_{S_2} + m_3l_2^2 + m_4l_2^2 \sin^2 \varphi (1 + 2\lambda \cos \varphi), \quad (16)$$

$$m_{111} = 2m_4l_2^2 \sin \varphi [\cos \varphi + \lambda(2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)], \quad (17)$$

$$m_{21} = -m_4l_2 \sin \varphi [\cos \varphi + \lambda(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)], \quad (18)$$

$$m_{31} = m_3l_2 + m_4l_2 \sin^2 \varphi (1 + 2\lambda \cos \varphi), \quad (19)$$

$$m_{112} = -2m_3l_2 - 2m_4l_2 \cos \varphi [\cos \varphi + \lambda(\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi)], \quad (20)$$

$$m_{113} = 2m_4l_2 \sin \varphi [\cos \varphi + \lambda(2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)]. \quad (21)$$

Gemäß (2.2.2./14) beträgt das Antriebsmoment mit (16) und (17)

$$Q_1 = M_{\text{an}} = m_{11}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_{111}\dot{q}_1^2, \quad (22)$$

und die körperfesten Gelenkkraftkomponenten sind mit (18) bis (21)

$$Q_2 = m_{21}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_{112}\dot{q}_1^2 = -F_{\xi 23}, \quad (23)$$

$$Q_3 = m_{31}\ddot{q}_1 + \frac{1}{2} m_{113}\dot{q}_1^2 = -F_{\eta 23}.$$

Bezüglich des raumfesten Bezugssystems ergeben sich die Gelenkkraftkomponenten aus der Transformation

$$F_{x23} = F_{\xi 23} \cos \varphi - F_{\eta 23} \sin \varphi, \quad F_{y23} = F_{\xi 23} \sin \varphi + F_{\eta 23} \cos \varphi. \quad (24)$$

Unter Benutzung von (18) bis (21), (23) und (24) folgt schließlich mit  $q_1 = \varphi$

$$F_{x23} = +[m_3 + m_4(1 + \lambda \cos \varphi)] l_2 \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} + [(m_3 + m_4) \cos \varphi + m_4 \lambda \cos 2\varphi] l_2 \dot{\varphi}^2, \quad (25)$$

$$F_{y23} = -(m_3 \cos \varphi + m_4 \lambda \sin^2 \varphi) l_2 \ddot{\varphi} + (m_3 - m_4 \lambda \cos \varphi) l_2 \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (26)$$

In Abschnitt 4.2.5. wird auf diese Ergebnisse zurückgegriffen.

#### 2.4.2. Polardiagramm einer Gelenkkraft

Gelenkkräfte liefern wichtige Aussagen bezüglich der Auslegung der Gleit- oder Wälzlager, wobei der Konstrukteur z. B. bei Gleitlagern die Abmessungen der Bolzen (Festigkeit), des Lagers (Flächenpressung), die Lage von Ölzuführungsstellen (Druckverteilung), den Lagerwerkstoff, das zulässige Lagerspiel u. a. Parameter festlegen muß. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, die Gelenkkräfte eines Mechanismus in Polardiagrammen darzustellen und durch Variation der geometrischen und mechanischen Parameter diese Verläufe bereits beim Entwurf eines Mechanismus im gewünschten Sinne zu beeinflussen [2.5], [2.6], [3.41].

Aus dem Polardiagramm lassen sich nicht nur die beiden Kraftkomponenten  $F_{xik}$  und  $F_{yik}$  ablesen, sondern auch die resultierende Gelenkkraft

$$F_{ik} = \sqrt{F_{xik}^2 + F_{yik}^2} = \sqrt{F_{\xi ik}^2 + F_{\eta ik}^2} = \sqrt{F_{\xi ki}^2 + F_{\eta ki}^2} \quad (1)$$

und deren Wirkungsrichtung, welche der Kontaktwinkel  $\beta$  angibt, der sich aus folgenden Größen bestimmt:

$$\sin \beta = F_{yik}/F_{ik}, \quad \cos \beta = F_{xik}/F_{ik}. \quad (2)$$

Die periodisch veränderliche Kraft in einem Drehgelenk, der Kontaktwinkel  $\beta$  und die relative Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_{ik} = \dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k$  stellen z. B. Eingangsgrößen bei der Berechnung der Wellenverlagerungsbahn von Gleitlagern dar. Vor allem im Motorenbau werden solche Wellenverlagerungsbahnen berechnet und zur Auslegung der Gleitlager benutzt [3.14].

Bild 2.9a zeigt als Beispiel das Getriebeschema eines Fadengebergetriebes einer Nähmaschine, dessen Geometrie dadurch bestimmt wird, daß die Technologie vom

Koppelpunkt  $P$  eine Bahn mit vorgegebenen Endlagen fordert. Bei der Konstruktion ist man an einer möglichst kleinen Lagerkraft  $F_{14}$  interessiert, um die Schwingungserregung des Gestells zu vermindern (Lärm).

Bild 2.9b zeigt das Polardiagramm der Lagerkraft  $F_{14}$  eines ersten konstruktiven Entwurfs. Der Konstrukteur erreichte mit einer Verkleinerung des Kurbelradius von  $l_2 = 14$  mm auf 13 mm und eine geringfügige Änderung der Abmessungen des Gliedes 3 (bei Erfüllung der geometrischen Forderungen an die Bahn des Koppelpunktes  $P$ ) eine beachtliche Verminderung der Kraftspitzen von 110 N auf 85 N (Bild 2.9c).

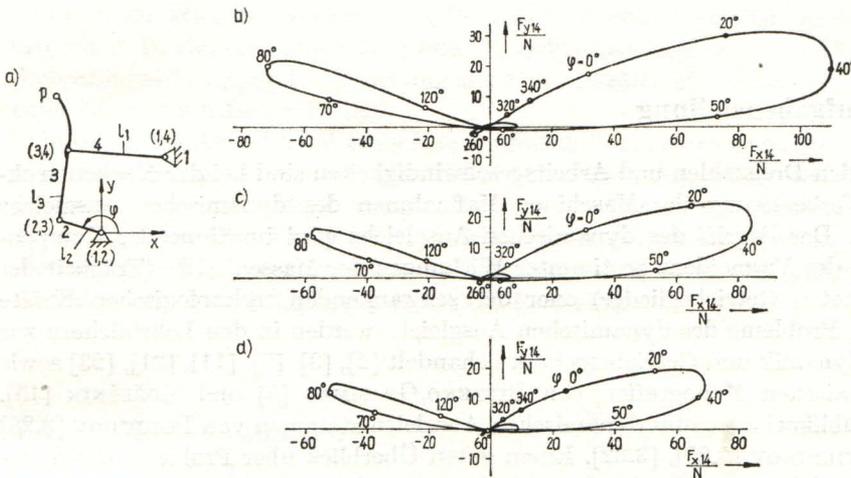


Bild 2.9 Polardiagramme der Gelenkkraft  $F_{14}$  des Fadengebergetriebes einer Nähmaschine  
a) Getriebeschema, b) ursprünglicher Zustand, c) bei veränderter Geometrie, d)  $m_3$  und  $J_{S_3}$  vermindert

Die Maximalkraft ließ sich sogar auf etwa 70 N vermindern, indem das Gelenk (2, 3) konstruktiv neu gestaltet wurde (Bild 2.9d). Während ursprünglich die äußere Lagerschale zum Glied 3 gehörte, wurde bei der neuen Variante die Lagerschale im Glied 2 ausgebildet.

Wenn der Bolzen am Glied 3 fest ist, können Masse und Massenträgheitsmoment des Gliedes 3 und dadurch die Kraft  $F_{14}$  vermindert werden. Die Masseerhöhung durch die Lagerschale am Glied 2 wirkte sich nicht nachteilig aus, da an diesem rotierenden Glied die Lagerkraft  $F_{12}$  mit einer Ausgleichmasse ausbalanciert werden kann.

Falls ein Polardiagramm im körperfesten  $\xi_j, \eta_j$ -Bezugssystem interessiert, benötigt man die Komponenten

$$F'_{\xi jk} = + F_{xjk} \cos \varphi_j + F_{yjk} \sin \varphi_j, \quad (3)$$

$$F'_{\eta jk} = - F_{xjk} \sin \varphi_j + F_{yjk} \cos \varphi_j. \quad (4)$$