4. Schwingungsmodelle mit einem Freiheitsgrad

4.1. Aufgabenstellung

Nur bei niedrigen Drehzahlen bewegen sich reale Mechanismen so, wie es die Kinematik der Mechanismenstruktur vorschreibt. Auch die Massenkräfte des kinetostatischen Modells stimmen mit der Wirklichkeit nur bei geringen Drehzahlen überein. Da die Amplituden der kinetostatischen Massenkräfte mit dem Quadrat der Drehzahl ansteigen, kann bei jedem Mechanismus die Situation entstehen, daß die Deformationen der Glieder nicht mehr vernachlässigbar sind und die Wechselwirkung zwischen Massenkräften und elastischen Kräften für das dynamische Verhalten wesentlich ist.

Infolge der Elastizität der realen Getriebeglieder werden die Mechanismen schwingungsfähige Systeme, die durch stoßartige Kräfte zu Eigenschwingungen oder durch periodische Kräfte zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Vor allem Resonanzen stören oft den ordnungsgemäßen Betriebszustand; es treten Bauteilbrüche auf, die technologisch geforderte Abtriebsbewegung wird verletzt, Lärm wird angeregt, und häufig wird die vom Konstrukteur angestrebte Maximaldrehzahl einer Maschine infolge gefährlicher Schwingungen nicht erreicht. Es gibt Fälle, bei denen man die Resonanz und die Eigenschwingungen bei Mechanismen ausnutzen kann, um erwünschte technische Effekte zu erzielen; z. B. ist erreichbar, daß die dynamischen Kräfte in elastischen Mechanismen auch kleiner als die kinetostatischen Kräfte werden können.

Es hat sich herausgestellt, daß viele Schwingungserscheinungen in Mechanismen schon durch ein Berechnungsmodell mit **einem** Freiheitsgrad erklärbar und berechenbar sind. Häufig ist die niedrigste Eigenfrequenz des elastischen Mechanismus, deren Größe von der Getriebestellung abhängt, zur Beschreibung der wesentlichen physikalischen Effekte ausreichend. Außerdem lassen sich oft Mechanismen mit mehreren Freiheitsgraden auf Systeme mit einem Freiheitsgrad reduzieren, so daß die für dieses einfache Modell gewonnenen Aussagen auf kompliziertere übertragen werden können, vgl. Abschnitt 5.4. Aus diesen Gründen wird zunächst das Schwingungsmodell mit einem Freiheitsgrad behandelt.

Der folgende Abschnitt baut auf bekannten Tatsachen aus der Schwingungslehre auf, und nur an solchen Stellen ist die Darstellung ausführlicher, wo die für Mecha-

nismenschwingungen typischen Erscheinungen auftreten. Charakteristisch für Mechanismenschwingungen sind z. B. die Begriffe des Kumulationsfaktors, des verallgemeinerten Sprunges, des Lagerspiels und der Lagefunktionen n-ter Ordnung. Mehrfach besteht ein enger Zusammenhang mit Begriffen aus den vorangegangenen Abschnitten, wenn auf Ergebnisse der kinematischen Analyse oder der kinetostatischen Analyse zurückgegriffen wird, z. B. bei den U-Funktionen, den verallgemeinerten Massen, dem Polardiagramm, der reduzierten Steifigkeit, dem reduzierten Spiel u. a.

Eine Besonderheit der Mechanismenschwingungen gegenüber anderen Schwingungen im Maschinenbau besteht auch darin, daß sie durch relativ viele Parameter durch den Konstrukteur beeinflußbar sind. Als solche Parameter treten sowohl geometrische Parameter auf, wie z. B. die Abmessungen der Getriebeglieder in Koppelgetrieben oder die Profile von Kurvengetrieben, als auch kinetostatische (Massen, Massenträgheitsmomente, Schwerpunktlage), „elastische" (Federkonstanten, Einflußzahlen), dissipative und solche, welche die Erregerkräfte beschreiben (Fourierkoeffizienten, Anlaufzeit, Erregerfrequenz). Die Festlegung der Parameterwerte ist eine wesentliche Aufgabe des Konstrukteurs. In Anbetracht der Wichtigkeit dieser Frage für die Ingenieurpraxis wird an vielen Stellen des folgenden Abschnittes auf die Wahl der bezüglich des Schwingungsverhaltens optimalen Parameter eingegangen, insbesondere in Abschnitt 4.6.

Die Frage der Dämpfungserfassung wird vom Standpunkt des Ingenieurs gelöst: Als wesentlich wird ein Modellelement betrachtet, welches den relativen Energieverzehr pro Schwingungsperiode erfaßt. Dazu eignet sich die Nenndämpfung ($\psi = 2\Lambda = 4\pi\vartheta$), die sowohl dem logarithmischen Dekrement Λ als auch dem Dämpfungsgrad ϑ proportional ist. Die Nenndämpfung ψ wird in den Rang eines ursprünglichen Parameters erhoben, der nicht erst durch die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung begründet zu werden braucht. Diese Abhängigkeit von der Dämpferkonstanten b ist zwar mathematisch formulierbar, aber praktisch unwesentlich. Letztlich pflanzt sich die Unsicherheit des unbekannten b bis zu einer Stelle fort, an der man gezwungen ist, einen Zahlenwert zu nennen, so daß man gleich diesen Zahlenwert für ψ als Parameterwert definieren kann. In den folgenden Aufgaben wird deshalb oft von Anfang an für das dissipative Element im Berechnungsmodell der Parameter ψ genannt (z. B. Tabelle 4.1).

Aus der Behandlung des Schwingungsmodells mit einem Freiheitsgrad werden allgemeine Aussagen gewonnen, die sich auf beliebige Mechanismen anwenden lassen. Dies betrifft sowohl zweckmäßige Berechnungsverfahren, z. B. fiktiver Oszillator, harmonische Synthese, Berücksichtigung von Sprüngen (Unstetigkeiten), als auch aus der Theorie gewonnene allgemeingültige, für die Ingenieurpraxis besonders geeignete Formeln, z. B. zur Berechnung von dynamischen Kräften und Ausgleichbewegungen oder der Kurvenprofile von Rastgetrieben. Oft interessiert nicht der vollständige Zeitablauf der Schwingungen, sondern nur der Einfluß bestimmter Parameter, wie z. B. Lagerelastizität, Lagerspiel, Stoß, Anlaufzeit, U-Funktion, Dämpfungsgrad u. a. auf Grenzzustände. Die Abschätzung der kinetischen Stabilitätsgrenzen, der möglichen Grenzdrehzahlen, der Maximalkräfte und der Resonanzamplituden gehören dazu.

Um dem Konstrukteur Brauchbarkeit und praktische Bedeutung der dargelegten

Theorie zu demonstrieren, wurden einige technische Beispiele aufgenommen, die Parameterwerte realer Maschinen berücksichtigen. An Hand der Mechanismen einer Schneidemaschine, einer Industrienähmaschine, eines Pressengetriebes, eines Transfermanipulators und einer Kettenwirkmaschine werden Beispiele aus der Industrie vorgestellt, bei denen dank der hier propagierten theoretischen Betrachtungsweise eine Klärung der realen mechanischen Erscheinungen möglich war und physikalisch begründete konstruktive Maßnahmen zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens der Maschinen führten.

4.2. Aufstellung der Bewegungsgleichung

4.2.1. Elastischer Mechanismus mit Endmasse

In Pressen und Schneidemaschinen werden ebene Koppelgetriebe zur Übertragung großer Kräfte eingesetzt. Die verwendeten Getriebetypen reichen vom einfachen Schubkurbelgetriebe bis zu vielgliedrigen Koppelgetrieben mit zwei Abtriebsgliedern. Die großen Umform- oder Schneidkräfte bewirken elastische Verformungen der Getriebeglieder, so daß die Abtriebsbewegung davon merklich beeinflußt wird. Die Aufgabe besteht zunächst darin, die reduzierte Nachgiebigkeit $d(\varphi)$ zu berechnen.

Grundlage zur Ermittlung von $d(\varphi)$ ist die Erfassung der Gliedelastizitäten durch die auf die gliedfesten Koordinatensysteme bezogenen Nachgiebigkeitsmatrizen $\boldsymbol{D}^{(i)}$ für alle Glieder ($i = 2, 3, \ldots, I$). Dazu wird in jedem Getriebeglied i die Deformation der Gelenkpunkte $\Delta\xi_{i,ij}$ und $\Delta\eta_{i,ij}$ im gliedfesten ξ_i,η_i-System berechnet, wobei der Koordinatenursprung in einem Bezugspunkt O_i liegt, vgl. Bild 4.1. Die Koordinaten dieses Bezugspunktes ändern sich in diesem gliedfesten System während der Bewegung des Mechanismus nicht. Es gilt dafür $\xi_{i,i0} = \eta_{i,i0} = 0$. Die übrigen Gelenkpunkte, die das Glied i mit seinen Nachbargliedern verbinden, erhalten die Doppelindizes $i1$, $i2$, ... Die Verschiebungen der Gelenkpunkte jedes Gliedes i werden zunächst auf das gliedfeste Bezugssystem i bezogen und im jeweiligen Verschiebungsvektor $\Delta\boldsymbol{q}^{(i)}$ zusammengefaßt:

$$\Delta\boldsymbol{q}^{(i)\mathrm{T}} = (\Delta\xi_{i,i1}, \Delta\eta_{i,i1}, \Delta\xi_{i,i2}, \Delta\eta_{i,i2}, \ldots). \tag{1}$$

Bild 4.1a illustriert die Beziehungen zwischen den Verschiebungen in den gliedfesten Bezugssystemen und dem raumfesten Bezugssystem.

Die Gelenkkräfte, die am Glied i wirken, beschreibt der Kraftvektor

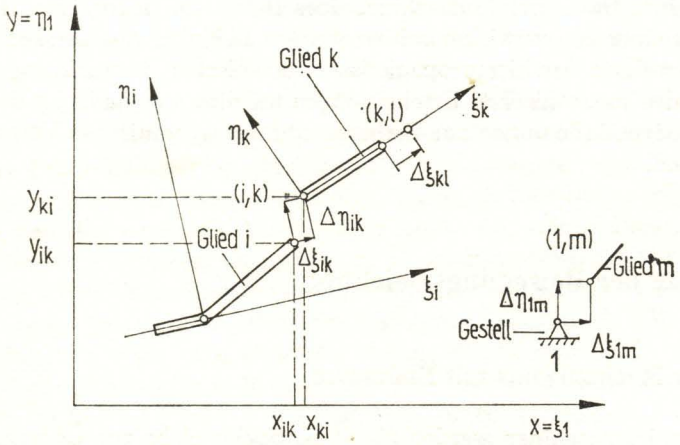
$$\boldsymbol{F}^{(i)\mathrm{T}} = (F_{\xi i,i1}, F_{\eta i,i1}, F_{\xi i,i2}, F_{\eta i,i2}, \ldots), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{F}^{(i)\mathrm{T}} = (F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, F_3^{(i)}, F_4^{(i)}, \ldots). \tag{3}$$

Es wird linear-elastisches Verhalten aller Getriebeglieder vorausgesetzt. Die Beziehungen zwischen Gelenkkräften und Deformationen an den Gelenkpunkten lauten

$$\Delta\boldsymbol{q}^{(i)}(\varphi) = \boldsymbol{D}^{(i)}\boldsymbol{F}^{(i)}(\varphi), \quad i = 1, 2, \ldots, I. \tag{4}$$

a)



b)

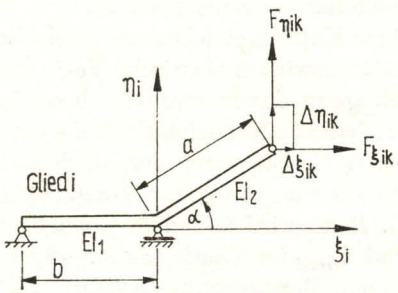


Bild 4.1 Deformationen elastischer Getriebeglieder
a) Allgemeine Beziehungen, b) Biegebalken

Dabei enthält die Nachgiebigkeitsmatrix $\boldsymbol{D}^{(i)}$ die Einflußzahlen $d_{kl}^{(i)}$ des Gliedes i, die aus einer Deformationsrechnung oder aus einer direkten Messung am konkreten Bauteil bestimmt werden müssen. Für einen einfachen Stab der Länge l_i, der durch eine Längskraft belastet wird, dessen ξ_i-Achse des Koordinatensystems in Stablängsrichtung verläuft, sind alle Einflußzahlen gleich 0 außer der Einflußzahl

$$d_{11}^{(i)} = \frac{l_i}{EA_i}. \tag{5}$$

Bei Getriebegliedern, welche die in Bild 4.1b gezeigte Gestalt haben, wird die wesentliche Verformung durch Biegung hervorgerufen. Nur bei sehr gedrungener Bauweise ist die Schubverformung von Bedeutung. Die Einflußzahlen, die sich mit elementaren Methoden berechnen lassen, ergeben sich für dieses Beispiel aus den Biegesteifigkeiten und geometrischen Parametern:

$$d_{11} = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{b^3}{3EI_1} + \frac{a^3}{3EI_2}\right] \sin^2 \alpha, \tag{6}$$

$$d_{21} = d_{12} = -\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{b^3}{3EI_1} + \frac{a^3}{3EI_2}\right] \sin\alpha \cos\alpha, \tag{7}$$

$$d_{22} = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{b^3}{3EI_1} + \frac{a^3}{3EI_2}\right] \cos^2\alpha. \tag{8}$$

In der Größenordnung der Deformationen durch Längskräfte liegen oft auch die Deformationen der elastischen Gelenke. Die Biegung des Bolzens oder die Nachgiebigkeit der Gleit- oder Wälzlager verursachen die Hauptanteile an der Gesamtdeformation eines Getriebes, wenn Biegeglieder fehlen.

Wirkt am Abtriebsglied I eine Kraft F_I, so betragen die Gelenkkräfte, wie in Abschnitt 2.2.1. mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit gezeigt wurde,

$$F_{\xi i,ij} = \frac{\partial s_I}{\partial \Delta\xi_{i,ij}} F_I, \quad F_{\eta i,ij} = \frac{\partial s_I}{\partial \Delta\eta_{i,ij}} F_I. \tag{9}$$

Dabei ist I die Nummer des Abtriebsgliedes und s_I die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft F_I in dieser Kraftrichtung. Die Gesamtheit der Gelenkkräfte an allen Getriebegliedern wird im Kraftvektor

$$\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{F}^{(1)\mathsf{T}}, \boldsymbol{F}^{(2)\mathsf{T}}, \ldots, \boldsymbol{F}^{(I)\mathsf{T}}) = (\boldsymbol{F}_1{}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{F}_2{}^{\mathsf{T}}, \ldots, \boldsymbol{F}_n{}^{\mathsf{T}}) \tag{10}$$

erfaßt. Dazu gehören auch die Lagerkräfte im Gestell ($i = 1$). Die Gesamtheit der Deformationen aller Gelenkpunkte beschreibt der Deformationsvektor

$$\Delta\boldsymbol{q}^{\mathsf{T}} = (\Delta\boldsymbol{q}^{(1)\mathsf{T}}, \Delta\boldsymbol{q}^{(2)\mathsf{T}}, \ldots, \Delta\boldsymbol{q}^{(I)\mathsf{T}}) = (\Delta\boldsymbol{q}_1{}^{\mathsf{T}}, \Delta\boldsymbol{q}_2{}^{\mathsf{T}}, \ldots, \Delta\boldsymbol{q}_n{}^{\mathsf{T}}). \tag{11}$$

Die durch (4) gegebenen Beziehungen zwischen Deformationen und Kräften an den Gelenken einzelner Glieder lauten zusammengefaßt für den gesamten Mechanismus:

$$\Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{F}. \tag{12}$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix $\boldsymbol{D}$ ergibt sich als direkte Summe aus den Nachgiebigkeitsmatrizen der einzelnen Glieder:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^{(1)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{D}^{(2)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{D}^{(3)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \boldsymbol{D}^{(I)} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Bei Einführung von Kraft- und Deformationsvektor für alle Gelenke gemäß (10) und (11) ist es zweckmäßig, eine neue durchlaufende Numerierung aller Komponenten vorzunehmen und die hochgestellten Indizes wegzulassen.

Im Sinne der linearen „Theorie erster Ordnung", wie sie auch in der Baustatik verwendet wird, werden die Verschiebungen der Gelenkpunkte als kleine Änderungen der Gelenkpunktkoordinaten betrachtet. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Verschiebungszustand die Kraftgrößen nicht beeinflußt. Diese Voraussetzung ist bei den meisten Mechanismen, die im Maschinenbau eingesetzt werden, erfüllt. Nur bei sehr

spitzen Winkeln zwischen zwei Getriebegliedern muß die nichtlineare „Theorie zweiter Ordnung" verwendet werden.

Die Verschiebung des Abtriebsgliedes läßt sich, wie bereits in (1.2.3./3) und bei der Behandlung der Gliedlängenänderungen dargestellt, in erster Näherung wie folgt berechnen:

$$\Delta s_I = \left(\frac{\partial s_I}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathsf{T}} \Delta \boldsymbol{q} = \frac{\partial s_I}{\partial q_1}\,\Delta q_1 + \frac{\partial s_I}{\partial q_2}\,\Delta q_2 + \frac{\partial s_I}{\partial q_3}\,\Delta q_3 + \dots \tag{14}$$

Dabei wurden die quadratischen und höheren Terme in (1.2.3./3) vernachlässigt.

Mit den nun eingeführten Bezeichnungen lautet (9) in Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial s_I}{\partial \boldsymbol{q}}\,F_I. \tag{15}$$

Aus (12) und (15) folgt die Verschiebung der einzelnen Gelenkpunkte:

$$\Delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}\,\frac{\partial s_I}{\partial \boldsymbol{q}}\,F_I. \tag{16}$$

Aus (14) und (16) ergibt sich schließlich die gesuchte Verschiebung des Kraftangriffspunktes am Abtriebsglied I:

$$\Delta s_I = \left(\frac{\partial s_I}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} \left(\frac{\partial s_I}{\partial \boldsymbol{q}}\right) F_I = d(\varphi)\,F_I. \tag{17}$$

Die von der Getriebestellung abhängige reduzierte Nachgiebigkeit $d(\varphi)$ und die Steifigkeit $c(\varphi) = 1/d(\varphi)$ sind somit durch folgendes Matrizenprodukt definiert, in welches nur die partiellen Ableitungen des Abtriebsweges und die von der Stellung unabhängigen Untermatrizen $\boldsymbol{D}^{(i)}$ eingehen:

$$d(\varphi) = \frac{1}{c(\varphi)} = \left(\frac{\partial s_I}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} \left(\frac{\partial s_I}{\partial \boldsymbol{q}}\right). \tag{18}$$

Die hier für eine Verschiebung eines Schubgliedes dargestellten Zusammenhänge lassen sich sinngemäß auf die Verdrehung eines drehbaren Abtriebsgliedes übertragen.

Einen Spezialfall stellen Mechanismen dar, bei denen die Gelenke wesentlich weicher sind als die Getriebeglieder. Falls die Lagersteifigkeit der Gelenke isotrop ist, was z. B. bei Wälzlagern annähernd zutrifft, lassen sich die Deformationen durch die Federkonstante c_{ik} ausdrücken, die für jedes Gelenk (mit den Indizes i, k) verschieden groß sein kann. Als Spezialfall von (4) ergibt sich

$$\Delta \xi_{i,k} = F_{\xi i,k}/c_{ik}, \quad \Delta \eta_{i,k} = F_{\eta i,k}/c_{ik}. \tag{19}$$

Die Untermatrizen der Nachgiebigkeitsmatrix bestehen dann nur aus Diagonalelementen, den reziproken Federkonstanten. Letzten Endes ergibt sich für die redu-

zierte Nachgiebigkeit gemäß (18) folgender Ausdruck:

$$d(\varphi) = \sum \frac{1}{c_{ik}} \left[\left(\frac{\partial s_I}{\partial \Delta \xi_{ik}} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_I}{\partial \Delta \eta_{ik}} \right)^2 \right]. \tag{20}$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle elastischen Gelenke.

Bei manchen Antrieben von Maschinen ist die Masse der Getriebeglieder innerhalb des Antriebsmechanismus vernachlässigbar klein gegenüber der Masse m_I des Abtriebsgliedes. In solchen Fällen bildet diese Masse gemeinsam mit der aus der Elastizität der Getriebeglieder resultierenden Nachgiebigkeit einen Schwinger mit einem Freiheitsgrad, vgl. Abschnitt 5.3.7. Die vom Konstrukteur beabsichtigte Bewegung $s_I(\varphi)$ des Abtriebsgliedes wird sich um die elastische Deformation $\Delta s_I(\varphi)$ unterscheiden, weil die Massenkraft

$$F = -m_I(s_I + \Delta s_I)'' \tag{21}$$

auftritt, die mit der Federkraft

$$F = \frac{\Delta s_I}{d(\varphi)} = c(\varphi) \Delta s_I \tag{22}$$

im Gleichgewicht steht. Aus (21) und (22) folgt dann die Bewegungsgleichung für die Zusatzbewegung des elastischen Getriebes, eine parametererregte und erzwungene Schwingung:

$$m_I \Delta \ddot{s}_I + \frac{1}{d(\varphi)} \Delta s_I = -m_I \ddot{s}_I. \tag{23}$$

Zur Veranschaulichung der allgemeinen Zusammenhänge wird das Beispiel einer Schneidemaschine betrachtet. Die Nachgiebigkeit des Messers interessiert hier einerseits in der Schnittstellung, um eine für den Schnittvorgang günstige Einstellbarkeit des Messerantriebs schon bei der Konstruktion der Maschine festlegen zu können. Andererseits ist der Verlauf der Nachgiebigkeit als Funktion des Kurbelwinkels ein Kriterium für die Schwingungsanfälligkeit des Getriebes im Leerlauf, vgl. Abschnitt 4.4.

Bild 4.2 zeigt das Getriebeschema in zwei Stellungen. In die Betrachtung wurden einbezogen:

- die Elastizität des isotropen Gelenks (1, 4),
- die Längselastizität der Koppel *3*, vgl. (5),
- die Biegeelastizität des Hebels *4*, vgl. (6) bis (8),
- die Längselastizität der Zugstange *5*, vgl. (5).

Die Nachgiebigkeiten aller nicht aufgeführten Glieder werden vernachlässigt.

Den Verlauf der partiellen Ableitungen der Lagefunktion y_6, der mit dem Programm DAM [2.6] berechnet wurde, zeigt Bild 4.3 a, vgl. Abschnitt 1.2.3. Daraus geht quantitativ hervor, wie empfindlich der Messerweg y_6 gegenüber den einzelnen Gliedlängenänderungen in der jeweiligen Getriebestellung ist. Bei intensivem Hinein-

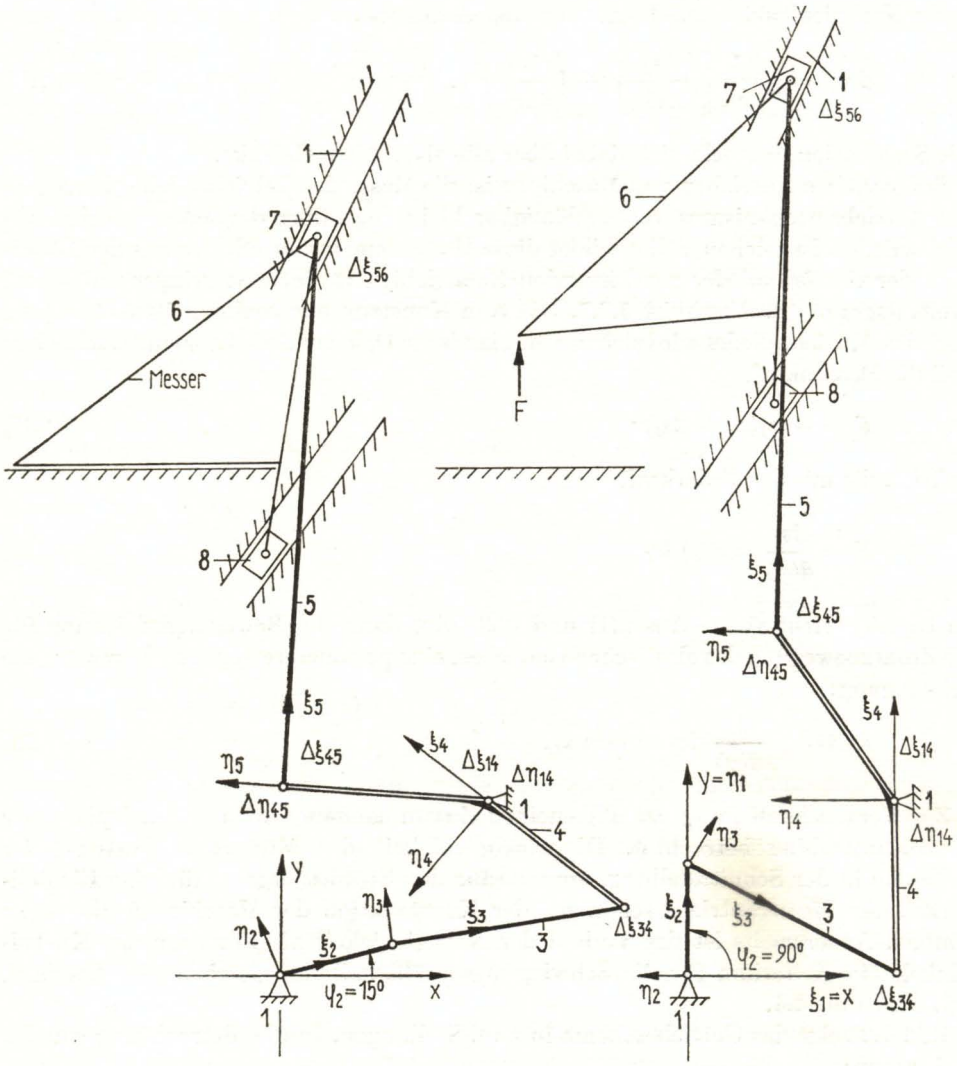


Bild 4.2 Deformationen und Kräfte an einem Schneidemaschinengetriebe

denken in die geometrischen Verhältnisse, wie sie Bild 4.2 zeigt, kann man sich auch anschaulich erklären, warum die Verläufe sich qualitativ derartig ändern. So wird z. B. verständlich, daß die Biegesteifigkeit des Gliedes *4* einen wesentlich größeren Einfluß auf die Abtriebsverschiebung Δy_6 in der Stellung $\varphi_2 = 15°$ hat als in der Stellung $\varphi_2 = 90°$. Die partiellen Ableitungen in diesen Stellungen, die ein Maß sowohl für die Gelenkkraft (vgl. (9) und (15)) als auch für den Einfluß auf die Abtriebsbewegung (vgl. (14)) sind, unterscheiden sich beträchtlich, so daß auch die reduzierte Nachgiebigkeit davon deutlich beeinflußt wird.

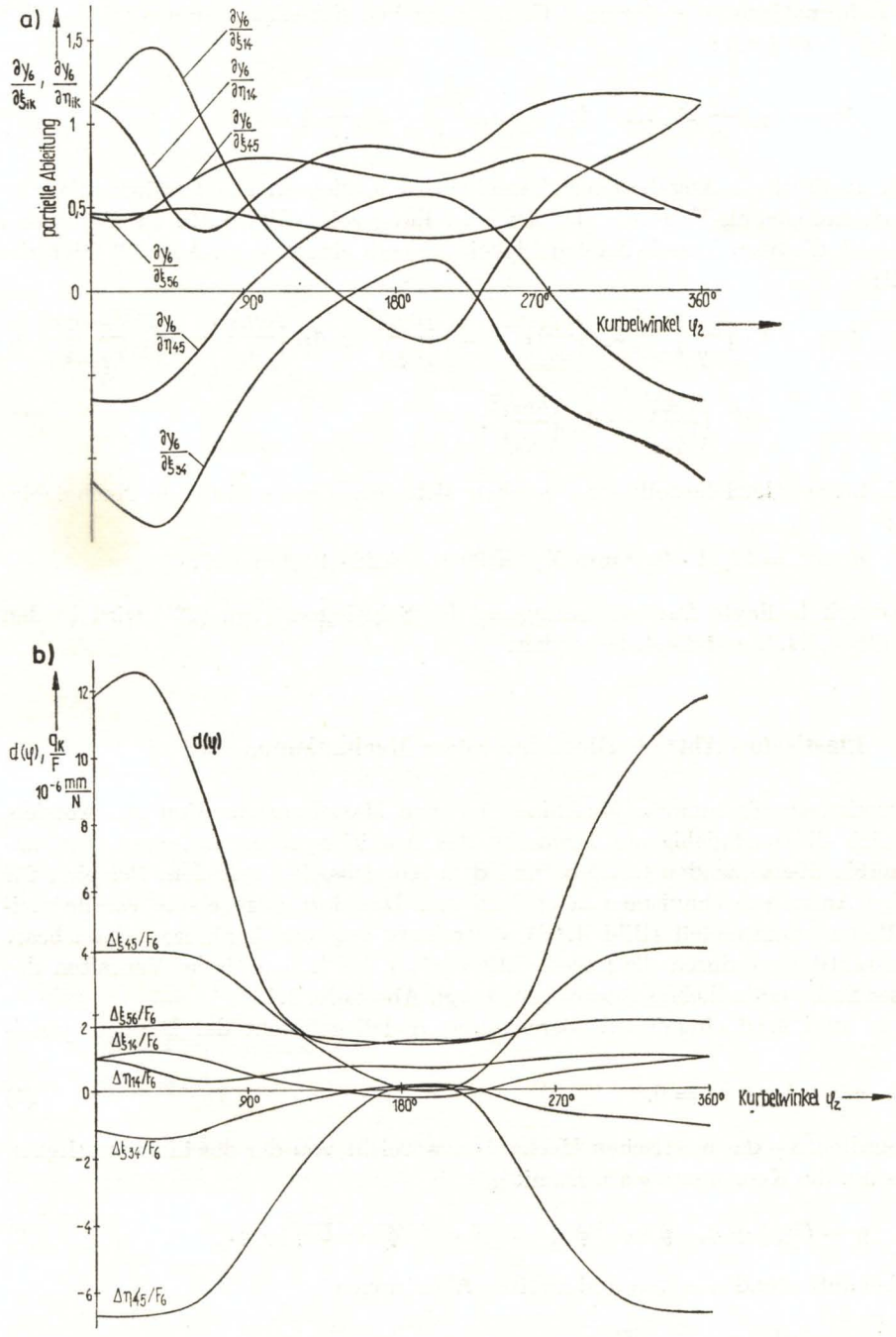


Bild 4.3 Partielle Ableitungen des Abtriebsweges und Nachgiebigkeit als Funktionen des Kurbelwinkels

Die Deformationen der einzelnen Gelenke ergeben sich allgemein aus (16), so daß z. B. hier speziell gilt:

$$\Delta q_1 = d_{11}\frac{\partial y_6}{\partial q_1}F_6, \ldots, \quad \Delta q_4 = \left(d_{44}\frac{\partial y_6}{\partial q_4} + d_{45}\frac{\partial y_6}{\partial q_5}\right)F_6. \tag{24}$$

Auf die ausführliche Angabe aller Formeln wird verzichtet. Die Verläufe aller Gelenkverformungen als Funktion der Kurbelstellung zeigt Bild 4.3b. In dieses Bild wurde auch die resultierende Nachgiebigkeit $d(\varphi)$ mit eingetragen. Aus (18) folgt hier speziell:

$$d(\varphi) = d_{11}\left(\frac{\partial y_6}{\partial q_1}\right)^2 + d_{22}\left(\frac{\partial y_6}{\partial q_2}\right)^2 + d_{33}\left(\frac{\partial y_6}{\partial q_3}\right)^2 + d_{44}\left(\frac{\partial y_6}{\partial q_4}\right)^2 + 2d_{45}\frac{\partial y_6}{\partial q_4}\frac{\partial y_6}{\partial q_5}$$
$$+ d_{55}\left(\frac{\partial y_6}{\partial q_5}\right)^2 + d_{66}\left(\frac{\partial y_6}{\partial q_6}\right)^2. \tag{25}$$

Für die beiden Getriebestellungen ergeben sich sehr unterschiedliche Nachgiebigkeiten:

$$d(15°) = 12{,}24 \cdot 10^{-6}\,\text{mm/N}, \quad d(90°) = 4{,}28 \cdot 10^{-6}\,\text{mm/N}.$$

Die dadurch bedingte Parametererregung des Schwingers (vgl. (23)) wird in den Abschnitten 4.4.3. und 4.4.4. behandelt.

4.2.2. Elastisches Abtriebsglied hinter dem Mechanismus

Charakteristisch für manche Maschinen ist eine Massekonzentration am Abtrieb, wobei sich die nachgiebigsten Elemente des Antriebssystems zwischen dem ungleichmäßig übersetzenden Getriebe und dem Abtriebsglied befinden. Beispiele für derartige Antriebsmechanismen zeigt Bild 4.4. Das dort angegebene verallgemeinerte Berechnungsmodell (Bild 4.4d) abstrahiert von der konkreten Getriebeart und charakterisiert durch die Lagefunktion $U(\varphi_0)$ das kinematische Verhalten des an dieser Stelle befindlichen Mechanismus, vgl. Abschnitt 1.1.

Das in Bild 4.4d eingeführte Berechnungsmodell gehorcht der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{y} + b\dot{q} + cq = 0. \tag{1}$$

Die Koordinate y des elastischen Mechanismus weicht von der des kinetostatischen Modells um die Koordinate q ab. Damit gilt

$$y = U(\varphi) + q, \quad \dot{y} = U'\dot{\varphi} + \dot{q}, \quad \ddot{y} = U''\dot{\varphi}^2 + U'\ddot{\varphi} + \ddot{q}. \tag{2}$$

Die dabei auftretenden ersten und zweiten Ableitungen

$$U' = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\varphi}, \quad U'' = \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\varphi^2} \tag{3}$$

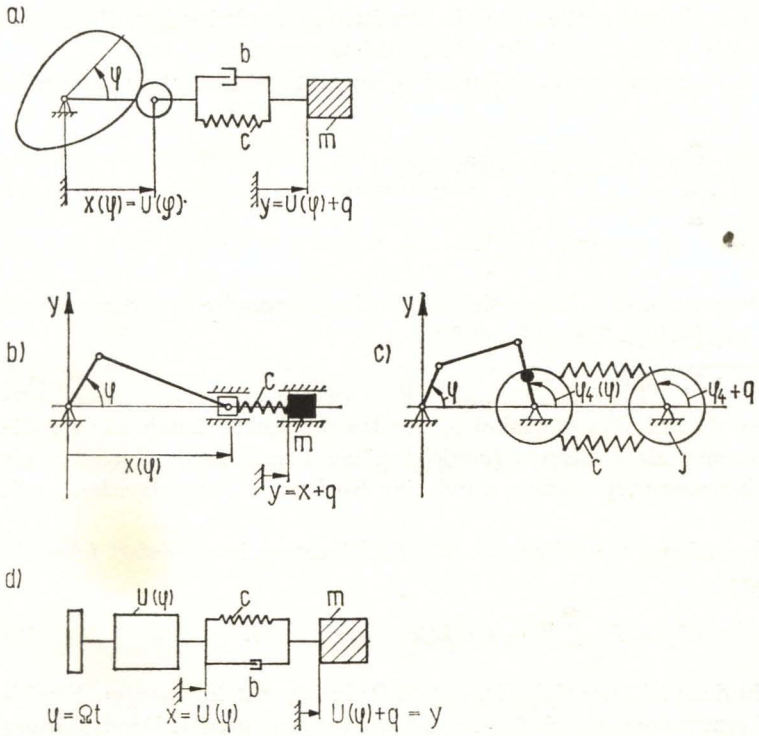


Bild 4.4 Mechanismen mit elastischem Abtrieb
a) Kurvengetriebe, b) und c) Koppelgetriebe, d) allgemeines Modell

werden als U-Funktionen erster und zweiter Ordnung bezeichnet. Bei einer gleichförmigen Antriebsbewegung

$$\varphi = \Omega t, \quad \dot{\varphi} = \Omega, \quad \ddot{\varphi} = 0 \tag{4}$$

ergeben sich aus (1) bis (4) folgende Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{q} + 2\vartheta\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = -\Omega^2 U'', \tag{5}$$

$$\ddot{y} + 2\vartheta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = 2\vartheta\omega_0\Omega U' + \omega_0^2 U. \tag{6}$$

Je nach Zweck wird die eine oder andere dieser Formen benutzt. Dabei ist $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers und

$$\vartheta = \frac{b}{2\sqrt{cm}} = \frac{\delta}{\omega_0} \tag{7}$$

sein Dämpfungsgrad. Die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Schwingers ist

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \vartheta^2} = 2\pi f. \tag{8}$$

Die Eigenkreisfrequenz ist wesentlich für die Ermittlung der kritischen Resonanzdrehzahlen des Antriebs, die in Abschnitt 4.3.4. ermittelt werden.

Ist die U-Funktion eine periodische Funktion, so läßt sie sich als Fourierreihe darstellen:

$$U(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t) \tag{9}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos (k\Omega t - \varphi_k). \tag{10}$$

Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k lassen sich durch eine harmonische Analyse aus U berechnen ([11], [4.28], [4.40]). Sie sind gemäß

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \sin \varphi_k = b_k/d_k, \quad \cos \varphi_k = a_k/d_k, \tag{11}$$

auch als Amplituden d_k und Phasenwinkel φ_k der Harmonischen beschreibbar. Die U-Funktionen zyklischer Mechanismen (ungleichmäßig übersetzende Getriebe mit periodischer Abtriebsbewegung) werden durch ihr Spektrum charakterisiert, vgl. Abschnitt 4.6.

Zweimaliges Differenzieren von U gemäß (9) und Einsetzen in (5) liefert folgende Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} + 2\vartheta\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = \Omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t). \tag{12}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wie sie bei erzwungenen periodischen Schwingungen auftritt. Deren Lösung wird in Abschnitt 4.3.1. ermittelt, vgl. auch Abschnitt 4.6.2. Es kann zweckmäßig sein, an Stelle der Fourierreihe mit einer abschnittweise gegebenen Erregerfunktion zu rechnen; vgl. Abschnitt 4.3.4. und [4.35], § 28.

4.2.3. Elastische Antriebswelle vor dem Mechanismus

Bei vielen Maschinen existiert eine Massekonzentration einerseits am (schnellaufenden) Antriebsmotor und andererseits am Abtrieb, und die dazwischen befindlichen Antriebswellen oder Kupplungen stellen die wesentliche Elastizität dar.

In der Literatur, z. B. [11], [27], [4.25], [4.31], wurde mehrfach das in Bild 4.5a dargestellte Modell behandelt. Es besteht aus dem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω umlaufendem Antriebsglied, der Antriebswelle mit der Torsionsfederkonstanten c_T und dem von der Stellung des Antriebs abhängigen Massenträgheitsmoment $J(\varphi)$. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht an der Antriebswelle mit den in Bild 4.5a angegebenen Koordinaten zu

$$J(\varphi)\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{2} J'(\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + c_T(\varphi - \varphi_0) = 0, \tag{1}$$

vgl. (2.2.1./12). Die Drehbewegung setzt sich aus einem Anteil mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und einer Relativverdrehung q zusammen. Es gilt

$$\varphi = \varphi_0 + q = \Omega t + q. \tag{2}$$

Damit wird aus (1)

$$J(\varphi)\,\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,J(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\,(\Omega + \dot{q})^2 + c_T q = 0. \tag{3}$$

Entwickelt man nun $J(\varphi)$ in eine Taylorreihe um φ_0, so findet man, wenn der Strich die Ableitung nach $\varphi_0 = \Omega t$ kennzeichnet,

$$J(\varphi) = J(\Omega t) + J'(\Omega t)\,q + \ldots, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varphi} = J'(\Omega t) + J''(\Omega t)\,q + \ldots \tag{5}$$

Werden diese Entwicklungen in (3) eingesetzt, so ergibt sich bei Vernachlässigung aller Terme der Ordnung $O(q^2)$ die Differentialgleichung

$$J\ddot{q} + J'\Omega\dot{q} + (c_T + J''\Omega^2/2)\,q = -\frac{1}{2}\,J'\Omega^2. \tag{6}$$

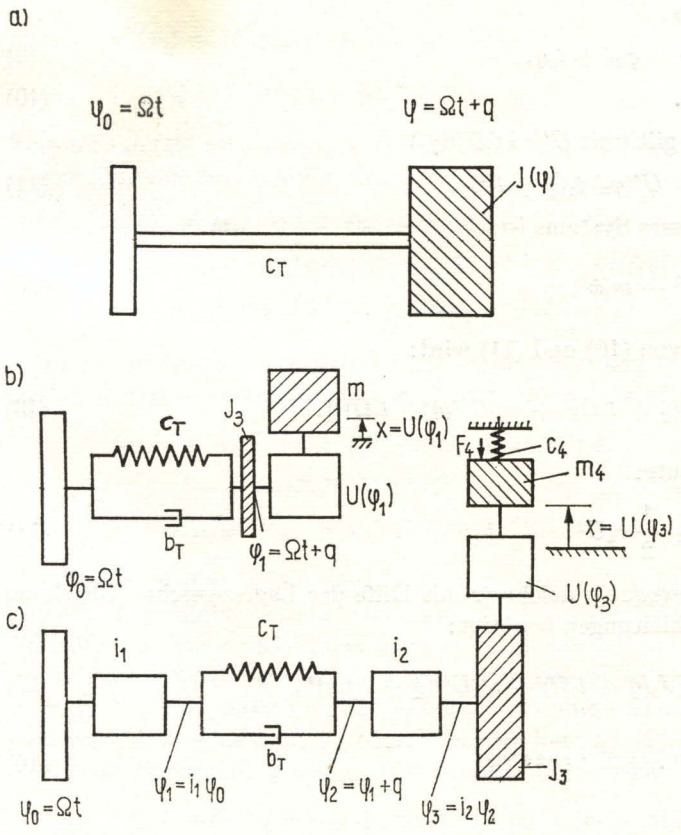


Bild 4.5 Berechnungsmodell für System mit elastischer Antriebswelle

Zur Illustration wird für ein praktisches Beispiel die ausführliche Form angegeben [4.42].

Das in Bild 4.5c dargestellte Modell erfaßt ausdrücklich ein in der Praxis oft vorkommendes gleichmäßig übersetzendes Getriebe (z. B. Zahnradgetriebe) vor und nach der elastischen Antriebswelle, und zwar durch die Übersetzungsverhältnisse i_1 und i_2. Die Dämpferkonstante b_T wird berücksichtigt. Am Abtrieb wird zwischen der konstanten Drehmasse J_3 und der Masse m_4 unterschieden, zwischen denen sich ein ungleichmäßig übersetzendes Getriebe befindet, dessen kinematische Eigenschaften die Lagefunktion $U(\varphi_3)$ beschreibt. Am Abtrieb werden außerdem eine Feder mit der Federkonstanten c_4 und eine Kraft F_4 berücksichtigt, die technologischen Kräften oder zusätzlich aufgebrachten Kompensationskräften entspricht.

Es gelten folgende kinematischen Zusammenhänge:

$$\varphi_1 = i_1\varphi_0, \quad \varphi_3 = i_2\varphi_2, \quad \varphi_{30} = i_1 i_2 \varphi_0. \tag{7}$$

Der Torsionswinkel der Antriebswelle wird mit q bezeichnet. Damit ist

$$q = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\varphi_3}{i_2} - i_1\varphi_0, \tag{8}$$

$$\varphi_3 = i_2(q + i_1\varphi_0) = \varphi_{30} + i_2 q, \tag{9}$$

$$\dot{\varphi}_3 = i_2(\dot{q} + i_1\Omega). \tag{10}$$

Für die Wegkoordinate x gilt (mit $U' = \mathrm{d}U/\mathrm{d}\varphi_3$)

$$x = U(\varphi_3), \quad \dot{x} = U'(\varphi_3)\, i_2(\dot{q} + i_1\Omega). \tag{11}$$

Die kinetische Energie dieses Systems ist

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\,(J_3\dot{\varphi}_3^2 + m_4\dot{x}^2), \tag{12}$$

woraus unter Benutzung von (10) und (11) wird:

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\, i_2^2[J_3(\dot{q} + i_1\Omega)^2 + m_4 U'^2(\dot{q} + i_1\Omega)^2]. \tag{13}$$

Die potentielle Energie lautet

$$W_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}\, c_T q^2 + \frac{1}{2}\, c_4 U^2. \tag{14}$$

Zur Formulierung der Bewegungsgleichung mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichung 2. Art werden folgende Ableitungen benötigt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial W_{\mathrm{kin}}}{\partial \dot{q}}\right) = i_2^2[J_3(\dot{q} + i_1\Omega) + m_4 U'^2(\dot{q} + i_1\Omega)]^{\bullet}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial W_{\mathrm{kin}}}{\partial q} = i_2^2 m_4 U' \cdot (\dot{q} + i_1\Omega)^2\, U'' i_2, \tag{16}$$

$$\frac{\partial W_{\mathrm{pot}}}{\partial q} = c_T q + c_4 U U' i_2. \tag{17}$$

Nach dem Einsetzen in die Lagrangesche Gleichung unter Berücksichtigung der Nichtpotentialkräfte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial W_{\mathrm{kin}}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial W_{\mathrm{kin}}}{\partial q} + \frac{\partial W_{\mathrm{pot}}}{\partial q} = F_q = -b_T\dot{q} - F_4 U' i_2 \tag{18}$$

folgt die nichtlineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &i_2^2[J_3\ddot{q} + m_4 U'^2\ddot{q} + m_4 U'(\dot{q} + i_1\Omega)^2\, U'' i_2] \\ &+ c_T q + c_4 U U' i_2 = -b_T\dot{q} - F_4 U' i_2 . \end{aligned} \tag{19}$$

Die Entwicklung der U-Funktion und ihrer Ableitungen in eine Taylorreihe in der Umgebung von φ_{30} ergibt mit

$$U' = \mathrm{d}U/\mathrm{d}\varphi_{30}, \quad U'' = \mathrm{d}^2U/\mathrm{d}\varphi_{30}^2, \quad U''' = \mathrm{d}^3U/\mathrm{d}\varphi_{30}^3, \tag{20}$$

die Näherungen

$$U(\varphi_3) = U(\varphi_{30}) + i_2 U' q + \ldots, \tag{21}$$

$$U'(\varphi_3) = U'(\varphi_{30}) + i_2 U'' q + \ldots, \tag{22}$$

$$U''(\varphi_3) = U''(\varphi_{30}) + i_2 U''' q + \ldots \tag{23}$$

Einsetzen in (19) und konsequente Linearisierung bezüglich q, $\dot{q}$ und $\ddot{q}$ ergibt folgende lineare Differentialgleichung, das Analogon zu (6):

$$\begin{aligned} &i_2^2(J_3 + m_4 U'^2)\,\ddot{q} + (b_T + 2m_4 i_1 i_2^3 \Omega U' U'')\,\dot{q} \\ &\quad + [c_T + m_4 i_1^2 i_2^4 \Omega^2 (U''^2 + U' U''') + c_4 i_2^2 (U U'' + U'^2)]\, q \\ &= -m_4 i_1^2 i_2^3 \Omega^2 U' U'' - c_4 U U' i_2 - F_4 U' i_2 . \end{aligned} \tag{24}$$

Interessant ist der Spezialfall $i_1 i_2 = 1$, welcher dem synchronen Lauf der Drehwinkel φ_0 und φ_3 entspricht, falls $q = 0$ ist. Dann vereinfacht sich (24) zu

$$\begin{aligned} &i_2^2(J_3 + m_4 U'^2)\,\ddot{q} + (b_T + 2m_4 \Omega U' U'' i_2^2)\,\dot{q} \\ &\quad + [c_T + m_4 i_2^2 \Omega^2 (U''^2 + U' U''') + c_4 i_2^2 (U U'' + U'^2)]\, q \\ &= -m_4 i_2 \Omega^2 U' U'' - c_4 U U' i_2 - F_4 U' i_2 . \end{aligned} \tag{25}$$

Der Unterschied zwischen den Fällen $i_1 = 1$ und $i_2 = 1$ gegenüber $i_1 i_2 = 1$ ist wesentlich. Der Einbau zusätzlicher Getriebe hat einen Einfluß auf das dynamische Verhalten des Antriebssystems. Dies ist technisch deshalb von Bedeutung, weil sich durch den gleichzeitigen Einbau eines Übersetzungs- und Untersetzungsgetriebes bei $i_2 = 1/i_1$ kinematisch an der Abtriebsbewegung nichts ändert, aber das Schwingungsverhalten wesentlich verbessert werden kann [4.42].

Für den Sonderfall $i_2 = 1$, $c_4 = 0$, $F_4 = 0$, $m_4 = m$ wird aus (25):

$$\begin{aligned} &(J_3 + mU'^2)\,\ddot{q} + (b_T + 2m\Omega U' U'')\,\dot{q} + [c_T + m\Omega^2 (U''^2 + U' U''')]\, q \\ &= -m\Omega^2 U' U'' . \end{aligned} \tag{26}$$

Sie stimmt mit (6) überein, wenn dort $b_T = 0$ und $J = J_3 + mU'^2$ gesetzt wird. Somit kann man Aufgaben, bei denen $J(\varphi)$ auftritt, durch eine fiktive U-Funktion

$$U_*' = \sqrt{J(\varphi)/m}, \quad U_* = \int_0^{\varphi} \sqrt{J(\xi)/m}\, \mathrm{d}\xi \qquad (27)$$

auf das Modell von Bild 4.5b reduzieren.

4.2.4. Elastisches Gelenk

In Abschnitt 2.2.3. sind die Bewegungsgleichungen für Mechanismen mit mehreren Antrieben aufgestellt worden. Während in (2.2.2./13) die Bewegungen q_k als bekannt vorausgesetzt wurden und **Gleichungen** zur Berechnung der Kräfte Q_p entstanden, wird hier eine Kraft $Q_2 = -c_2 q_2 - b_2 \dot{q}_2$ als Feder- und Dämpferkraft aufgefaßt, so daß eine **Differentialgleichung** für q_2 entsteht [4.7].

Im folgenden soll der Sonderfall $N = 2$ untersucht werden, wobei $q_1 = \varphi_0 = \Omega t$ die Antriebskoordinate (der gleichmäßig umlaufenden Antriebskurbel) und q_2 die Koordinate des Federweges sei (vgl. Bild 4.6). Damit ergibt sich folgende Gleichung, vgl. (2.2.2./20):

$$Q_2 = m_{22}\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{22,2}\dot{q}_2^2 + m_{22,1}\Omega\dot{q}_2 + \left(m_{12,1} - \frac{1}{2} m_{11,2}\right)\Omega^2 = -cq_2 - b\dot{q}_2. \qquad (1)$$

Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $q_2(t)$. Geht man von kleinen Schwingungen aus, so ändert sich die Lage der Schwerpunkte

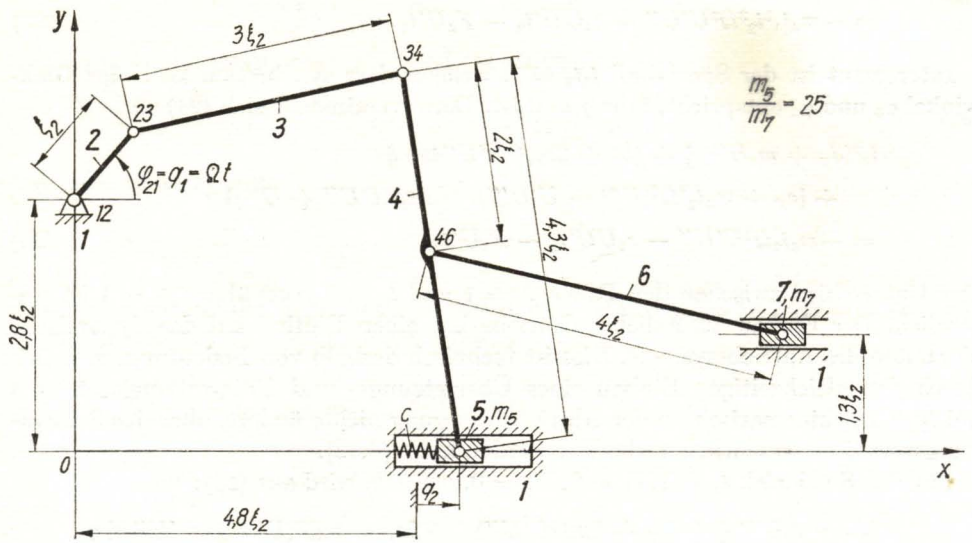


Bild 4.6 Koppelgetriebe mit elastischem Gelenk

und die Größe der Winkelverdrehungen vor allem mit φ_0 und nur wenig mit $q_2(t)$. Damit ist es möglich, die Verläufe der verallgemeinerten Massen in eine Taylorreihe an der Stelle $q_2 = q_{20}$ zu entwickeln:

$$m_{kp}(\Omega t, q_2) = \overline{m}_{kp} + \overline{m}_{kp,2} q_2 + \frac{1}{2} \overline{m}_{kp,22} q_2^2 + \ldots, \tag{2}$$

wobei die $\overline{m}_{kp}$ und deren Ableitungen nur noch von φ_0 abhängig sind.

Die Taylorreihe wird je nach Genauigkeitsanforderung abgebrochen. Es ergibt sich z. B. für die Differentialgleichung der Bewegung $q_2(t)$ bei Abbruch nach den quadratischen Termen als zweite Näherung:

$$\begin{aligned} &\overline{m}_{22}\ddot{q}_2 + \overline{m}_{22,1}\Omega\dot{q}_2 + \left(\overline{m}_{12,12} - \frac{1}{2}\overline{m}_{11,22}\right)\Omega^2 q_2 + c q_2 + b\dot{q}_2 \\ &\quad + \overline{m}_{22,2} q_2 \ddot{q}_2 + \overline{m}_{22,12}\Omega q_2 \dot{q}_2 + \left(\overline{m}_{12,122} - \frac{1}{2}\overline{m}_{11,222}\right)\Omega^2 q_2^2 + \frac{1}{2}\overline{m}_{22,2}\dot{q}_2^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\overline{m}_{11,2} - \overline{m}_{12,1}\right)\Omega^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Infolge dieser Reihenentwicklung ändern sich alle verallgemeinerten Massen periodisch mit $q_1 = \varphi_0$.

Die Verläufe der $\overline{m}_{kp}$ bzw. $\overline{m}_{kp,l}$ können im allgemeinen nur mit Hilfe einer EDVA numerisch ermittelt werden. Rechenprogramme wurden auf der Grundlage der in Abschnitt 2.2.3. angegebenen Algorithmen aufgestellt, z. B. [2.6], [4.16].

Die im weiteren behandelte Gleichung der 1. Näherung entsteht aus (3) durch Streichen der Glieder 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} &\overline{m}_{22}\ddot{q}_2 + (b + \overline{m}_{22,1}\Omega)\,\dot{q}_2 + \left[c + \left(\overline{m}_{12,12} - \frac{1}{2}\overline{m}_{11,22}\right)\Omega^2\right] q_2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\overline{m}_{11,2} - \overline{m}_{12,1}\right)\Omega^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Es treten im allgemeinen also erzwungene und parametererregte Schwingungen gekoppelt auf. Wenn man sich weit außerhalb der Zonen der Parametererregung befindet und

$$c \gg \left(\overline{m}_{12,12} - \frac{1}{2}\overline{m}_{11,22}\right)\Omega^2, \quad b \gg \overline{m}_{22,1}\Omega \tag{5}$$

gilt, so kann mit den Mittelwerten der Koeffizienten gerechnet werden. Es liegt dann als 0. Näherung eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vor:

$$\overline{\overline{m}}_{22}\ddot{q}_2 + b\dot{q}_2 + c q_2 = \left(\frac{1}{2}\overline{m}_{11,2} - \overline{m}_{12,1}\right)\Omega^2. \tag{6}$$

Dabei ist der Mittelwert zweckmäßig aus

$$\frac{1}{\overline{\overline{m}}_{22}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}q_1}{\overline{m}_{22}(q_1)} \tag{7}$$

zu berechnen, vgl. ([5], S. 358).

Bild 4.6 zeigt als Beispiel ein sechsgliedriges Koppelgetriebe mit einem elastischen Gelenk einschließlich der Daten ($l_2 = \xi_2$).

Die hier dargestellten Gleichungen (1) bis (6) treffen dafür zu. Die Glieder *2, 3, 4* und *6* wurden als masselos angenommen. Im Bild 4.7 sind die Verläufe für einige verallgemeinerte Massen dargestellt [4.7].

Die Lösung von (4) zur Berechnung der Zusatzbewegung $q_2(t)$ behandelt Abschnitt 4.4., während (6) gemäß der in Abschnitt 4.3. dargestellten Methoden lösbar ist. Nachdem $q_2(t)$ ermittelt wurde, sind die interessierenden raumfesten geometrischen Größen $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$ aller Gliedpunkte berechenbar, vgl. Bild 1.5 und (1.3.1./2). Bei kleinen Zusatzbewegungen lautet die lineare Näherung

$$z_k(\Omega t, q_2) = \overline{z}_k(\Omega t) + \overline{z}_{k,2} \cdot q_2 + \ldots, \tag{8}$$

$$\dot{z}_k(\Omega t, q_2, \dot{q}_2) = \dot{\overline{z}}_k(\Omega t) + \dot{\overline{z}}_{k,2} \cdot q_2 + \overline{z}_{k,2}\dot{q}_2 + \ldots, \tag{9}$$

$$\ddot{z}_k(\Omega t, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2) = \ddot{\overline{z}}_k + \ddot{\overline{z}}_{k,2}q_2 + 2\dot{\overline{z}}_{k,2}\dot{q}_2 + \overline{z}_{k,2}\ddot{q}_2 + \ldots \tag{10}$$

Analog die Winkel:

$$\varphi_i = \overline{\varphi}_i + \overline{\varphi}_{i,2}q_2 + \ldots, \quad \dot{\varphi}_i = \dot{\overline{\varphi}}_i + \dot{\overline{\varphi}}_{i,2}q_2 + \overline{\varphi}_{i,2}\dot{q}_2 + \ldots \tag{11}$$

Die Kräfte in den Lagern und Gelenken sind gemäß (2.2.2./18):

$$Q_p = \left(m_{p1,1} - \frac{1}{2}\, m_{11,p}\right) \Omega^2 + (m_{2p,1} + m_{p1,2} - m_{12,p})\, \Omega\dot{q}_2 + m_{2p}\ddot{q}_2 + \left(m_{2p,2} - \frac{1}{2}\, m_{22,p}\right) \dot{q}_2{}^2. \tag{12}$$

Speziell das Antriebsmoment ($q_p \triangleq q_1$) ergibt sich zu (2.2.2./21):

$$M_{\mathrm{an}} = \frac{1}{2}\, m_{11,1}\Omega^2 + m_{11,2}\Omega\dot{q}_2 + m_{21}\ddot{q}_2 + \left(m_{21,2} - \frac{1}{2}\, m_{22,1}\right) \dot{q}_2{}^2. \tag{13}$$

Wesentlich zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen erweist sich also die Berechnung der verallgemeinerten Massen und ihrer partiellen Ableitungen. Dazu dienen die in Abschnitt 2.2.2. vorgestellten Methoden.

4.2.5. Drehgelenk mit Lagerspiel

Bei der Berechnung der Gelenkkräfte wird mit allgemeinen davon ausgegangen, daß die kinematischen Paare sich relativ zueinander spielfrei bewegen. Bei Gleitlagern ist jedoch das Vorhandensein von Lagerspiel unvermeidlich. Infolge des Lagerspiels

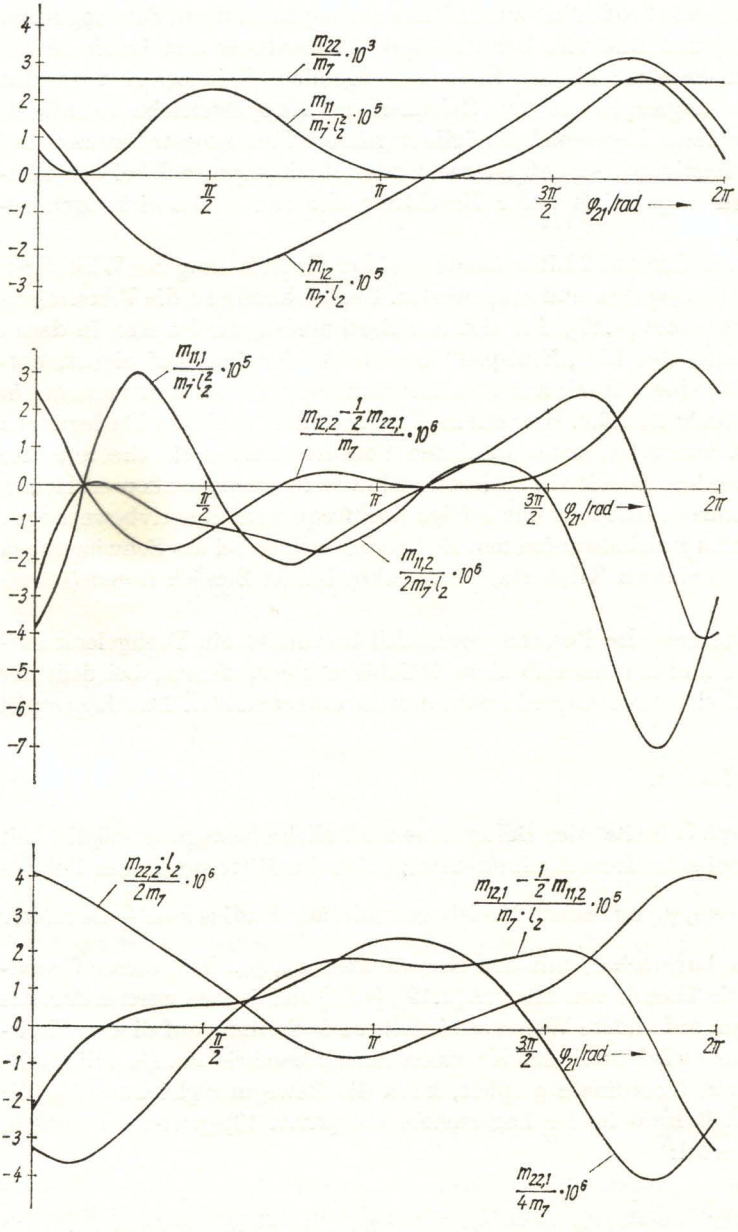


Bild 4.7 Verallgemeinerte Massen als Funktion des Kurbelwinkels

können Kontaktverlust und Anlagewechsel zwischen den Gelenkelementen auftreten. Der dabei entstehende Stoß führt zu erhöhten Beanspruchungen, Schwingungen und Lärm, vgl. [2.24] und Bild 2.5. Belastbarkeit, Lebensdauer und Laufruhe der Mechanismen, die für ihren technischen Einsatz maßgebliche Kriterien sind, werden durch die Größe des Lagerspiels in den Gelenken der Koppelgetriebe beeinflußt, vgl. Bild 2.5. Ein größeres Lagerspiel ermöglicht gröbere Fertigungstoleranzen und damit eine billigere Fertigung, so daß letzten Endes ein Kompromiß bei der Festlegung des optimalen Lagerspiels unter Beachtung der realen Auswirkungen getroffen werden muß.

In [4.20] wurden von HAINES 62 Literaturstellen über die Erfassung der Wirkungen von Spiel in Gelenken angegeben und ausgewertet. In Anlehnung an die Feststellung von FAWCETT und BURDESS [4.15], daß sich zur Bestimmung der Punkte, in denen Kontaktverlust auftritt, der für „Nullspiel" berechnete Kraftverlauf eignet, entwickelte HAINES [4.19] eine Theorie zur Vorausbestimmung des Kontaktverlustes in Drehgelenken, vgl. Abschnitt 2.2.2. Hier soll im Zusammenhang mit den Darlegungen der Abschnitte 2.2.2. und 2.4.1. unter ähnlichen Voraussetzungen ein theoretischer Ansatz vorgestellt werden. Damit sind Vibrationskräfte in Drehgelenken erklärbar, die schon bei ideal starren Gliedern nur infolge hochfrequenter Relativbewegungen zwischen Bolzen und Lagerschale auftreten. Es handelt sich dabei um Schwingungen mit Frequenzen bis zu einigen Kilohertz, die im akustischen Bereich liegen (Lärm) [3.5].

Das in Bild 4.8a dargestellte Berechnungsmodell beschreibt ein Drehgelenk zwischen den Gliedern i und k innerhalb eines beliebigen Mechanismus, bei dem der Bolzendurchmesser d sich vom Lagerdurchmesser D unterscheidet. Das Lagerspiel beträgt

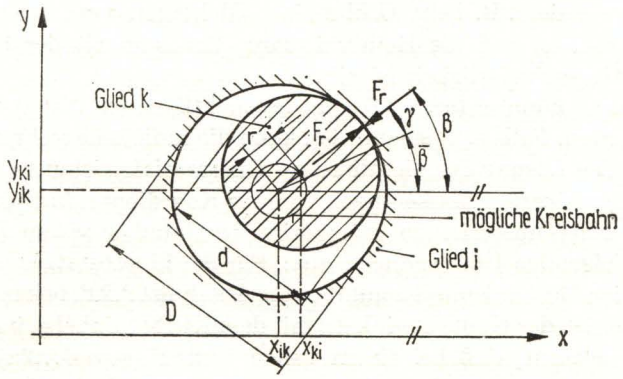
$$\Delta s = D - d = 2r. \tag{1}$$

Infolge dieses Lagerspiels besitzt der Bolzen eine zusätzliche Bewegungsmöglichkeit in der Lagerschale. Bei ständigem Kontakt bewegt sich der Mittelpunkt des Bolzens mit den Koordinaten x_{ki}, y_{ki} auf einem Kreisbogen mit dem Radius $r = \frac{1}{2}\Delta s$ relativ zum Mittelpunkt der Lagerschale mit den Koordinaten x_{ik}, y_{ik}. Von dieser Grundannahme geht auch die Theorie von HAINES [4.19], [4.20] aus, jedoch werden dort die Bewegungsgleichungen auf andere Weise vereinfacht. Die Stellung auf diesem Kreisbogen mit dem Radius r wird durch den Kontaktwinkel β beschrieben. Da β die Rolle einer verallgemeinerten Koordinate q spielt, kann die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung des Bolzens in der Lagerschale aus (2.2.2./19) gewonnen werden, indem $q = \beta$ gesetzt wird:

$$m_{\beta\beta}\ddot{\beta} + m_{\beta\beta,\varphi}\dot{\varphi}\dot{\beta} + \frac{1}{2}\, m_{\beta\beta,\beta}\dot{\beta}^2 + m_{\beta\varphi}\ddot{\varphi} + \left(m_{\varphi\beta,\varphi} - \frac{1}{2}\, m_{\varphi\varphi,\beta}\right)\dot{\varphi}^2 = Q_\beta. \tag{2}$$

Ein Kontaktverlust wird daran erkannt, ob die Radialkraft negativ wird. Die Formel der Radialkraft ergibt sich aus (2.2.2./19), wenn dort $q_p = r$, $q_2 = \varphi$ und $q_1 = \beta$ gesetzt wird. Sie lautet, da sich die Vorzeichen einer „Aktion" gegenüber der „Reak-

a)



b)

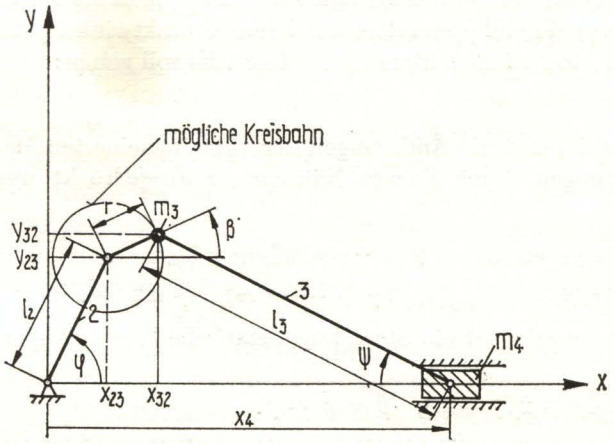


Bild 4.8 Zur Theorie des Lagerkontaktes
a) Drehgelenk mit Lagerspiel, b) Schubkurbelgetriebe mit Lagerspiel im Drehgelenk (2, 3)

tion" umkehren,

$$F_r = -m_{\varphi r}\ddot{\varphi} - \left(m_{\varphi r,\varphi} - \frac{1}{2}\, m_{\varphi\varphi,r}\right)\dot{\varphi}^2 - m_{\beta r}\ddot{\beta}$$

$$- \left(m_{\beta r,\varphi} + m_{\varphi r,\beta} - m_{\beta\varphi,r}\right)\dot{\varphi}\dot{\beta} - \left(m_{\beta r,\beta} - \frac{1}{2}\, m_{\beta\beta,r}\right)\dot{\beta}^2. \tag{3}$$

Die verallgemeinerten Massen $m_{\varphi r}$, $m_{\varphi\varphi}$, $m_{\beta r}$, $m_{\beta\varphi}$, $m_{\beta\beta}$ und deren partielle Ableitungen nach φ und β ergeben sich aus den Formeln (2.2.2./6) und (2.2.2./8).

Beim reibungsfreien Drehgelenk ist $Q_\beta = 0$. Wird die Lagerreibung berücksichtigt, so ist mit $v_{\mathrm{rel}} = \dfrac{d}{2}\,\dot{\varphi}_k - \dfrac{\beta}{2}\,\dot{\varphi}_i + r\dot{\beta}$

$$Q_\beta = rF_r[\mu + f(v_{\mathrm{rel}})]\ \mathrm{sign}\ (v_{\mathrm{rel}}). \tag{4}$$

Dabei ist μ der Reibwert und f eine Funktion, die die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibkraft ausdrückt, wie sie z. B. beim Ölfilm eines Gleitlagers vorhanden ist. Die Signumfunktion drückt aus, daß die Reibkraft ihre Richtung mit der Gleitrichtung ändert. Die Relativgeschwindigkeit ist v_{rel}.

Die Bewegung des Bolzens könnte durch Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2) berechnet werden. Falls $\beta(t)$ bekannt ist, kann die radiale Lagerkraft F_r aus (3) bestimmt werden. Die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (2) ist aufwendig, weil die verallgemeinerten Massen noch von der Koordinate β abhängen und nur schrittweise bei einer numerischen Integration bestimmbar wären. Eine Linearisierung geht von folgenden Überlegungen aus: Für die kinetostatische Belastung des starren spielfreien Mechanismus ist mit den aus Abschnitt 2.2.2. bekannten Methoden berechenbar, wie sich der Kontaktwinkel β mit dem Kurbelwinkel φ ändert. Aus Abschnitt 2.4.1. ist bekannt, daß bei einem vollen Umlauf ($\varphi = 0 \ldots 2\pi$) der Kontaktwinkel β ein- oder mehrmals umlaufen kann oder auch nur in bestimmten Winkelbereichen schwankt, wie dies die Polardiagramme in Bild 2.9 zeigen.

Es wird angenommen, daß sich bei Berücksichtigung des Lagerspiels der Kontaktwinkel β nur um einen kleinen Winkel γ von dem mittleren Kontaktwinkel $\overline{\beta}$ unterscheidet, wobei $\overline{\beta}$ aus der kinetostatischen Berechnung folgt. Es soll gelten:

$$\beta(t) = \overline{\beta}(t) + \gamma(t). \tag{5}$$

Der Winkel γ soll so klein sein, daß die Änderungen der verallgemeinerten Massen und ihrer partiellen Ableitungen durch lineare Näherungen ausgedrückt werden können, vgl. (4.2.4./2):

$$m_{kl}(\varphi, \beta) = m_{kl}(\varphi, \overline{\beta}) + m_{kl,\beta}(\varphi, \overline{\beta})\,\gamma + \cdots \approx m^*_{kl} + m^*_{kl,\beta}\gamma, \tag{6}$$

$$m_{kl,p}(\varphi, \beta) = m_{kl,p}(\varphi, \overline{\beta}) + m_{kl,p\beta}(\varphi, \overline{\beta})\,\gamma + \cdots \approx m^*_{kl,p} + m^*_{kl,p\beta}\gamma. \tag{7}$$

Wie in obigen Gleichungen kennzeichnet ein Stern kinetostatische Werte. Außerdem gilt

$$\dot{\beta} = \dot{\overline{\beta}} + \dot{\gamma}, \quad \dot{\beta}^2 = \dot{\overline{\beta}}^2 + 2\dot{\overline{\beta}}\dot{\gamma} + \dot{\gamma}^2, \quad \ddot{\beta} = \ddot{\overline{\beta}} + \ddot{\gamma}. \tag{8}$$

Unter Beachtung der Zusammenhänge (5) bis (8) kann (2) als Differentialgleichung bezüglich γ geschrieben werden:

$$m_\gamma\ddot{\gamma} + \frac{1}{2}\,m_{\gamma,\beta}\dot{\gamma}^2 + b_\gamma\dot{\gamma} + c_\gamma\gamma = Q_\gamma(t). \tag{9}$$

Dabei bedeuten:

$$m_\gamma = m^*_{\beta\beta} = m_{\beta\beta}(\varphi, \overline{\beta}), \tag{10}$$

$$b_\gamma = m^*_{\beta\beta,\beta}\dot{\overline{\beta}} + m^*_{\beta\beta,\varphi}\dot{\varphi}, \tag{11}$$

$$c_\gamma = m^*_{\beta\beta,\beta}\ddot{\overline{\beta}} + m^*_{\beta\beta,\varphi\beta}\dot{\varphi}\dot{\overline{\beta}} + \frac{1}{2}\,m^*_{\beta\beta,\beta\beta}\dot{\overline{\beta}}^2 + m^*_{\beta\varphi,\beta}\ddot{\varphi} + (m^*_{\varphi\beta,\varphi\beta} - m^*_{\varphi\varphi,\beta\beta}/2)\,\dot{\varphi}^2, \tag{12}$$

$$Q_\gamma = -m^*_{\beta\beta}\ddot{\overline{\beta}} - m^*_{\beta\beta,\varphi}\dot{\varphi}\dot{\overline{\beta}} - \frac{1}{2}\,m^*_{\beta\beta,\beta}\dot{\overline{\beta}}^2 - m^*_{\beta\varphi}\ddot{\varphi} - (m^*_{\varphi\beta,\varphi} - m^*_{\varphi\varphi,\beta}/2)\,\dot{\varphi}^2 + Q_\beta. \tag{13}$$

Einsetzen der Lösung von (9) in (8) ergibt den resultierenden Kontaktwinkel $\beta(t)$ mit seinen Zeitableitungen, die wiederum in (3) zur Bestimmung der Radialkraft benutzt werden. Die dargestellten Gleichungen sind gültig, solange $F_r > 0$ bleibt. Ansonsten dient (3) zur Kontrolle des Kontaktverlustes. Falls $F_r < 0$ wird, prallt nach dem „Durchfliegen" des Spiels der Bolzen wieder auf die Lagerschale auf, und es entstehen zusätzliche Stoßkräfte. Es kostet einen hohen Rechenaufwand, die mit dem Kontaktverlust verbundenen Etappen des Kontaktes und Fluges rechnerisch zu verfolgen [2.24], [4.21]. Der Einfluß der Reibung, der Lagersteifigkeit u. a. Parameter, die in weiten Bereichen streuen, ist dann zu berücksichtigen. Wellenverlagerungsbahnen, die für Radialgleitlager in Verbrennungsmotoren vorausberechenbar sind [3.14], können für beliebige Mechanismen nicht hinreichend genau bestimmt werden.

Ein Mechanismus arbeitet dynamisch besser, solange der Lagerkontakt erhalten bleibt, als wenn Kontaktverlust auftritt. Der Konstrukteur sollte versuchen, die Kraftschluß-Bedingung $F_r > 0$ zu erfüllen. Weiterhin kann der Spieleinfluß durch die in Abschnitt 4.3.3. angegebenen Methoden dynamisch bewertet werden.

Die hier angegebene Methode liefert einen systematischen Zugang zur Gewinnung der Differentialgleichungen für die Zusatzbewegungen und die dabei entstehende Gelenkkraft. Sie erlaubt, ausgehend von Ergebnissen der kinetostatischen Analyse der starren Mechanismen, den Spieleinfluß zu beurteilen.

Den Ausgangspunkt bildet die Berechnung der verallgemeinerten Massen. In diese geht die Größe des Spiels mit ein. Der kinetostatische Kontaktwinkel $\overline{\beta}$ und seine Zeitableitungen sind ebenso wie die verallgemeinerten Massen und deren Ableitungen dann nur noch von der Kurbelstellung φ und nicht von der Zusatzbewegung γ abhängig. Die Koeffizienten gemäß (10) bis (13) sind also bei einem gegebenen Mechanismus bekannte (bei zyklisch arbeitenden Mechanismen periodische) Zeitfunktionen, an Hand derer eine Beurteilung einzelner Drehgelenke erfolgen kann.

Für das in Bild 4.8 dargestellte Schubkurbelgetriebe mit Lagerspiel ergeben sich aus (2.2.2./6) z. B. die verallgemeinerten Massen für die hier gewählten Koordinaten (vgl. auch (2.4.1./16 bis 19)) zu

$$m_{\varphi\varphi} = m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 \sin^2\varphi(1 + \lambda\cos\varphi)^2 + m_4 l_2 r\lambda \sin 2\varphi(1 + \lambda\cos\varphi)\sin\beta, \tag{14}$$

$$m_{\varphi\beta} = \{m_3 l_2 \cos(\varphi - \beta) + m_4 l_2 \sin\varphi[\sin\beta + \lambda\sin(\varphi + \beta)]\}\, r, \tag{15}$$

$$m_{\varphi r} = m_3 l_2 \sin(\beta - \varphi) - m_4(l_2 \sin\varphi + l_2\lambda \sin\varphi\cos\varphi + r\lambda\cos\varphi\sin\beta)\cdot(\cos\beta - \lambda\sin\varphi\sin\beta), \tag{16}$$

$$m_{\beta\beta} = [m_3 + m_4(\sin\beta + \lambda\sin\varphi\cos\beta)^2]\, r^2, \tag{17}$$

$$m_{\beta r} = m_4 r(-\sin\beta\cos\beta - \lambda\sin\varphi\cos 2\beta). \tag{18}$$

Zur Vereinfachung wurde die Tatsache ausgenutzt, daß für das Kurbelverhältnis $\lambda = l_2/l_3 \ll 1$ gilt und $\varrho = r/l_2 \ll 1$ ist.

Der Kontaktwinkel $\overline{\beta}$ der kinetostatischen Gelenkkraft ergibt sich aus den beiden

in (2.4.2./2) auftretenden Kraftkomponenten (vgl. 2.4.1./25 und 26)

$$F_{x23} = -(m_3 + m_4 + m_4\lambda\cos\varphi)\, l_2 \sin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - [(m_3 + m_4)\cos\varphi + m_4\lambda\cos 2\varphi]\, l_2\dot{\varphi}^2, \tag{19}$$

$$F_{y23} = (m_3\cos\varphi + m_4\lambda\sin^2\varphi)\, l_2\ddot{\varphi} - (m_3\sin\varphi - (m_4/2)\,\lambda\sin 2\varphi)\, l_2\dot{\varphi}^2. \tag{20}$$

In Bild 4.9a ist das Polardiagramm der Gelenkkraft (2, 3) für die Parameter $\lambda = 0{,}1$ und $m_3/m_4 = 0{,}2$ dargestellt. Im Zusammenhang mit dem Verlauf der in Bild 4.9b angegebenen Größen kann aus (9) die im Lager auf Grund der Parametererregung auftretende Schwingung berechnet werden, vgl. Abschnitt 4.4.

Der Winkel γ ist aus der Lösung von Gleichung (21) zu bestimmen, die sich aus (9) für $\varrho \ll \lambda \to 0$ ergibt:

$$(m_3 + m_4\sin^2\overline{\beta})\, r^2\ddot{\gamma} + m_4\sin 2\overline{\beta} r\Omega\dot{\gamma} + [m_3\cos(\varphi - \overline{\beta}) + m_4\cos\varphi\cos\overline{\beta}]\, l_2 r\Omega^2\gamma = [m_3\sin(\varphi - \overline{\beta}) - m_4\cos\varphi\sin\overline{\beta}]\, l_2 r\Omega^2. \tag{21}$$

Für den Sonderfall $m_4 = 0$ wird aus der in Bild 4.8b dargestellten Koppel des Schubkurbelgetriebes ein mathematisches Pendel im Fliehkraftfeld, da der Schieber dann ohne Einfluß ist. Aus (21) ergibt sich für $m_4 = 0$

$$m_3 r^2\ddot{\gamma} + m_3\cos(\varphi - \overline{\beta})\, l_2 r\Omega^2\gamma = m_3 l_2 r\Omega^2\sin(\varphi - \overline{\beta}). \tag{22}$$

Der Kontaktwinkel ist dann $\overline{\beta} = \varphi$, und (22) vereinfacht sich zu

$$\ddot{\gamma} + \frac{l_2}{r}\cdot\Omega^2\gamma = 0. \tag{23}$$

Dies ist die bekannte Differentialgleichung für das Pendel im Fliehkraftfeld ([15], S. 337). Die theoretischen Voraussagen der hier dargelegten Theorie werden gestützt durch Ergebnisse experimenteller Untersuchungen [4.12], [4.13], [4.14], [4.15], [4.18].

4.2.6. Standardformen der Bewegungsgleichung

Die in den Abschnitten 4.2.1 bis 4.2.5. betrachteten Mechanismen stellen typische Fälle dar, die im Maschinenbau vorkommen. Die dabei entstehenden Bewegungsgleichungen haben, bedingt durch die zugrunde liegenden Gleichgewichtsbedingungen, nach der Linearisierung die einheitliche Form

$$m(t)\,\ddot{q} + b(t)\,\dot{q} + c(t)\,q = F(t). \tag{1}$$

Nach Division durch m wird daraus

$$\ddot{q} + 2\delta(t)\,\dot{q} + \omega_0^2(t)\,q = f(t) \tag{2}$$

mit

$$\delta(t) = \frac{b(t)}{2m(t)}, \quad \omega_0^2(t) = \frac{c(t)}{m(t)}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m(t)}. \tag{3}$$

Als zeitabhängige „Abklingkonstante“ $\delta(t)$ und „Eigenkreisfrequenz“ $\omega_0(t)$ lassen sich in Analogie zum Schwinger mit konstanten Parametern die dabei entstehenden Funktionen bezeichnen. Führt man als dimensionslosen Zeitmaßstab $\varphi = \Omega t$ ein,

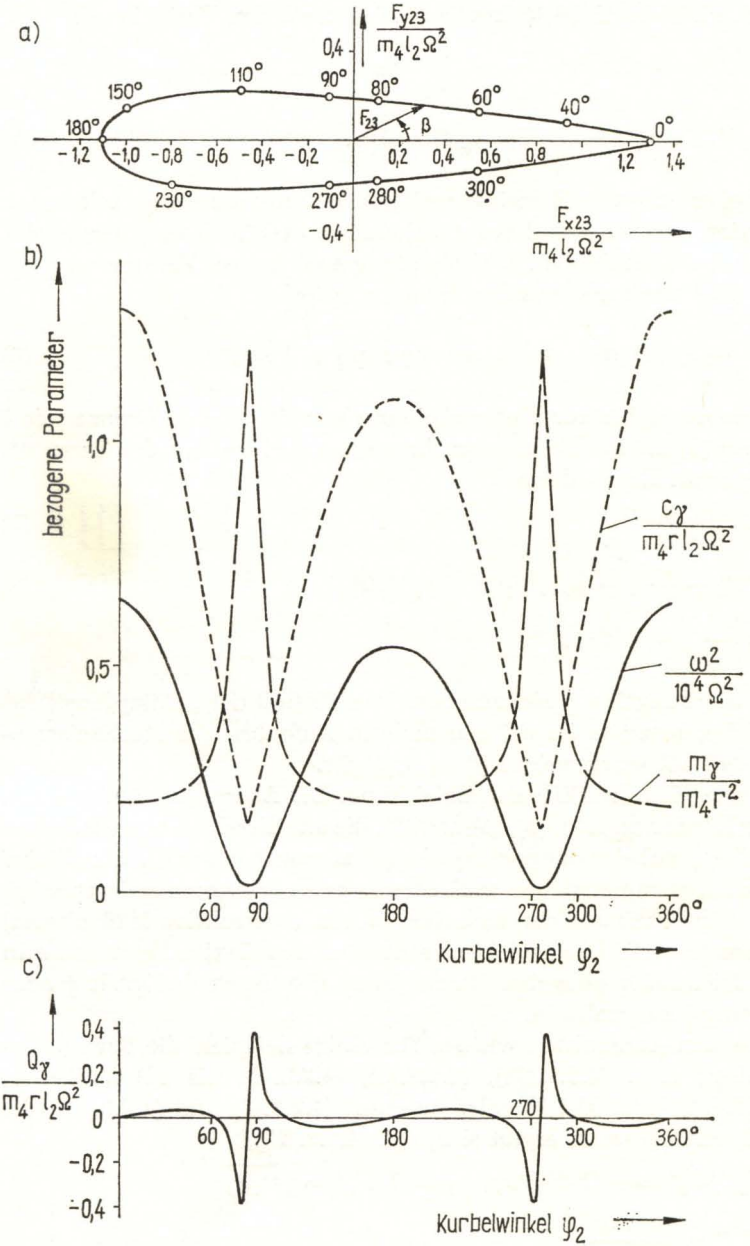


Bild 4.9 a) Polardiagramm des Kurbelgelenks im Schubkurbelgetriebe, b) Verlauf von bezogener Masse, Steifigkeit und Eigenkreisfrequenz für $\lambda = 0{,}1$ und $m_3/m_4 = 0{,}2$, c) Verlauf der bezogenen reduzierten Kraft

dann wird aus (2) eine Differentialgleichung bezüglich der neuen Variablen φ:

$$q'' + 2\vartheta N q' + N^2 q = f(\varphi)/\Omega^2 \tag{4}$$

mit

$$\frac{\mathrm{d}(\ )}{\mathrm{d}\varphi} = (\ )', \quad \vartheta = \delta/\omega_0, \quad N = \omega_0/\Omega = 1/\eta. \tag{5}$$

Damit ist eine Analogie zu den vom Schwinger mit konstanten Parametern bekannten Begriffen des Dämpfungsgrades ϑ und des Abstimmungsverhältnisses η hergestellt, die dimensionslos sind; ϑ erfaßt neben der Dämpfung auch andere Parameter.

Durch die schon von EULER angewandte Transformation

$$q = w \exp\left[-\int_0^t \delta(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right] \quad \text{bzw.} \quad w = q \exp\left[\int_0^t \delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right], \tag{6}$$

bei der die Integrationsvariable zur Unterscheidung von der oberen Grenze mit ξ bezeichnet wird, kann (2) in eine Form gebracht werden, bei welcher der Term mit der ersten Ableitung fehlt. Es gilt dann

$$\ddot{w} + \omega^2(t)\, w = y(t) \tag{7}$$

mit

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(t) - \delta^2(t) - \dot{\delta}(t), \quad y(t) = f(t)/\psi(t), \tag{8}$$
$$\psi(t) = \exp\left[-\int_0^t \delta(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right].$$

Es ist zweckmäßig, die Funktion ψ einzuführen. Der Einfluß der „Dämpfung" $\delta(t)$ auf die „Eigenkreisfrequenz" ω ist bei den meisten Aufgaben der Mechanismendynamik gering, so daß näherungsweise $\omega(t) = \omega_0(t)$ gilt.

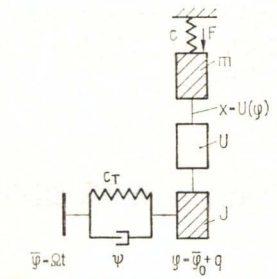
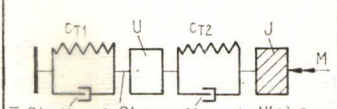
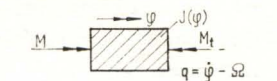
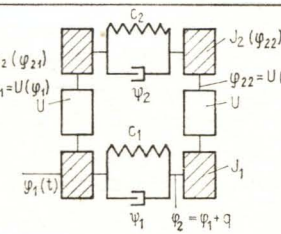
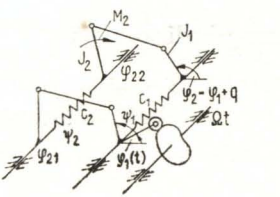
Gleichung (7) ist eine Hillsche Differentialgleichung. Die Abschnitte 4.3. und 4.4. befassen sich mit der Lösung von (1), (2), (4) und (7), die alle dieselben physikalischen Phänomene beschreiben, wobei vorzugsweise von (2) ausgegangen wird. Für die bei Mechanismen typischen parametrischen und erzwungenen Erregungen interessiert die Lösung $q(t)$ in Abhängigkeit von den technisch (durch konstruktive Maßnahmen) beeinflußbaren Parametern. Vielfach reicht es schon aus, den Maximalwert von q in einem bestimmten Zeitbereich oder den Maximalwert der Geschwindigkeit $\dot{q}$ oder den der Beschleunigung $\ddot{q}$ zu ermitteln.

In den vorhergehenden Abschnitten wurden für einige Beispiele die Bewegungsgleichungen hergeleitet, z. B. (4.2.1./23), (4.2.3./6), (4.2.3./24 bis 26), (4.2.4./4), (4.2.5./9 bis 12), (4.2.5./22 und 23). Wendet man auf (4.2.3./6) und (4.2.3./26) die Transformationen (3) und (8) an, so ergibt sich, vgl. (4.2.3./27),

$$f = -\Omega^2 U_*''/U_*' = -\Omega^2 J'/(2J), \quad \psi = 1/U_*' = \sqrt{m/J},$$
$$y = -\Omega^2 U_*'' = \frac{-\Omega^2 J'}{2\sqrt{Jm}},$$
$$\omega^2 = \frac{c_T + m\Omega^2 U_*''^2}{m U_*'^2} = \frac{c_T + \Omega^2 J'^2/(4J)}{J}. \tag{9}$$

Die zugehörige Hillsche Differentialgleichung (7) ist aus ([11], S. 388) bekannt.

Tabelle 4.1. Koeffizienten der Bewegungsgleichung des Schwingers mit einem Freiheitsgrad (U entspricht hier U_*)

Fall	Modell	Koeffizienten der Bewegungsgleichung (4.2.6./2)
1		$\delta = \frac{\omega_0}{1+f_1^2}\left(\frac{\psi}{4\pi}+\eta_0 f_1 f_2\right)$ (10) $\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1+f_1^2}\left[1+\eta_0^2(f_2^2+f_1f_3)+\gamma^2(f_1^2+f_0f_2)+\varepsilon f_2+\varepsilon' f_1\right]$ (11) $f = \frac{-\omega_0^2}{1+f_1^2}\left[\eta_0^2 f_1 f_2+\gamma^2 f_0 f_1+\varepsilon f_1\right]$ (12) mit $\omega_0=\sqrt{c_T/J}$, $\eta_0=\Omega/\omega_0$, $\omega_1=\sqrt{c/m}$, $\gamma=\omega_1/\omega_0$, $\varepsilon=\frac{F}{c_T}\sqrt{\frac{m}{J}}$, $f_i=\sqrt{\frac{m}{J}}\cdot U^{(i)}$ (13)
2	 $q = U' q_1 + q_2$	$\delta = \frac{\omega_0}{1+\xi U'^2}\left(\frac{\psi}{4\pi}+\xi\eta_0 U' U''\right)$ (14) $\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1+\xi U'^2}\left[1+\xi\eta_0^2(U'^2+U'U''')\right] = \frac{c_{T1}\,c_{T2}}{J(c_{T1}+c_{T2}U'^2)}$ (15) $f = \frac{-1}{1+\xi U'^2}\left(\frac{M}{J}+\Omega^2 U''\right)$ (16) $q_1 = \xi U' q_2$, $\psi = (\psi_1 \xi U'^2+\psi_2)/(1+\xi U'^2)$ $\omega_0=\sqrt{c_{T2}/J}$, $\eta_0=\frac{\Omega}{\omega_0}$, $\xi=\frac{c_{T2}}{c_{T1}}$ (17)
3	Starre Maschine  + dynamische Motorkennlinie: $q-\dot{\psi}-\Omega_0(1-\nu(M+\tau\dot{M}))$	$\delta = \frac{1}{2\tau}+\Omega\frac{J'}{J}$ (18) $\omega^2 = \frac{1}{J}\left[\frac{1}{\nu\tau\Omega}+\frac{J'\Omega}{\tau}+1{,}5\,\Omega^2 J''\right]$ (19) $f = -\frac{1}{J}\left[\frac{M_t}{\tau}+\dot{M}_t+\frac{\Omega^2 J'}{2\tau}+\frac{1}{2}J''\Omega^3\right]$ (20) $\Omega = \Omega_0(1-\nu M_t)$, $(\,)' = \frac{d(\,)}{d(\Omega t)}$ (21)
4	 	$\delta = \frac{\psi}{4\pi}\omega + \frac{U'U''J_2+0{,}5U'^3J_2'}{J_1+J_2U'^2}\dot{\varphi}_1$ (22) $\omega^2 = \frac{1}{J_1+J_2U'^2}\left\{c_1+c_2U'^2+\dot{\varphi}_1^2\left[J_2(U'U'''+U''^2)+1{,}5U'^2U''J_2'\right]+2\ddot{\varphi}_1U'U''J_2+M_2U''\right\}$ (23) $f = \frac{-1}{J_1+J_2U'^2}\left\{U'\left[J_2(U''\dot{\varphi}_1^2+U'\ddot{\varphi}_1)+0{,}5U'^2\dot{\varphi}_1^2J_2'+M_2\right]+J_1\ddot{\varphi}_1\right\}$ (24) $\omega^2 \approx \frac{c_1+c_2U'^2}{J_1+J_2U'^2}$ (25) $\psi = \frac{J_1\psi_1+J_2U'^2\psi_2}{J_1+J_2U'^2}$ (26)

In Tabelle 4.1 sind für weitere Beispiele die Koeffizienten der Bewegungsgleichung angegeben. Dazu wurden einige typische Probleme aus dem Maschinenbau ausgewählt. Sie sind in Anbetracht der dabei benutzten Begriffe der U-Funktion und des reduzierten Massenträgheitsmoments $J(\varphi)$ auf die verschiedenartigsten Mechanismen und Maschinen übertragbar. Im folgenden Abschnitt wird teilweise darauf zurückgegriffen. Mit diesen Beispielen ist der Anwendungsbereich der vorgestellten Berechnungsmethoden angedeutet, aber keineswegs erschöpft. Die Beispiele mögen als Anregung und zur Kontrolle eigener Untersuchungen dienen.