

Berechnung von Schockspektren

Einführung

Die Berechnung von Schockspektren für die Eingabe in andere Simulationspakete ist eine häufige Aufgabenstellung. Z.B. geht es darum, wie sich elektronische Geräte unter Schockeinwirkung verhalten. Seine Ursprung hat die Schockspektrenanalyse in der Bewertung der Erdbebensicherheit von Gebäuden. Ziel dieses Beispieldokumentes ist zu zeigen, wie in Mathcad Anregungen in Differenzialgleichungen verwendet werden können, die nur als Datei vorliegen. Anwendungen, in denen Schockspektren in der Simulation verwendet werden, stellt Herr Dr. Roland Jakel in seinem Vortrag "Berechnung von Schockspektren und praktische Anwendung der dynamischen Stoßanalyse in Creo Elements / Pro Mechanica" [2] vor.

Das System

Es werden Ein-Massen-Schwinger betrachtet, die über die Parameter m (Masse) und Steifigkeit der Feder k beschrieben werden. Das System wird durch die Schwingungsdifferenzialgleichung

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + k \cdot x = R(t)$$

Zum Zeitpunkt $t_0 := 0$ werden homogene Anfangsdaten gewählt

$$x_0 := 0$$

$$\dot{x}_1 := 0$$

In $R(t)$ steckt die Anregung des Systems. Je nach Wahl wird dadurch eine

- Kraftanregung $R(t) = F(t)$
- Fußpunktanregung $R(t) = k \cdot u(t)$
- Fußpunktbeschleunigung $R(t) = m \cdot a(t)$

beschrieben. Wir betrachten hier Fußpunktbeschleunigungen, die aus gemessenen Daten aufbereitet werden.

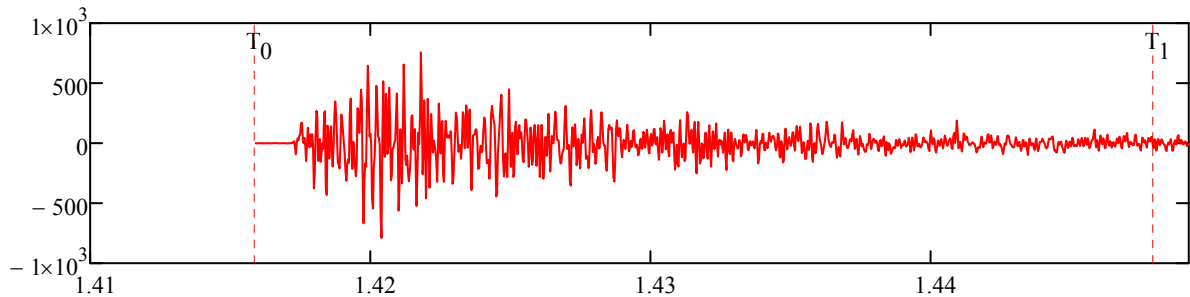
Die Anregung

Die Anregungsdaten liegen in einer Datei vor:

$$\text{datei} := \begin{pmatrix} \text{"SchockInput.xls"} \\ \text{"schock1.txt"} \\ \text{"schock2.txt"} \\ \text{"schock3.txt"} \\ \text{"schock4.txt"} \end{pmatrix} \quad \text{format} := \begin{pmatrix} \text{"excel"} \\ \text{"delimited"} \\ \text{"delimited"} \\ \text{"delimited"} \\ \text{"delimited"} \end{pmatrix} \quad j := 0$$

$$\text{anregungsDatenEin} := \text{READFILE}(\text{datei}_j, \text{format}_j)$$

Auswahl des Anregungsintervalls:

pos_{T0} :=pos_{T1} :=

$$T_0 = 1.416$$

$$T_1 = 1.448$$

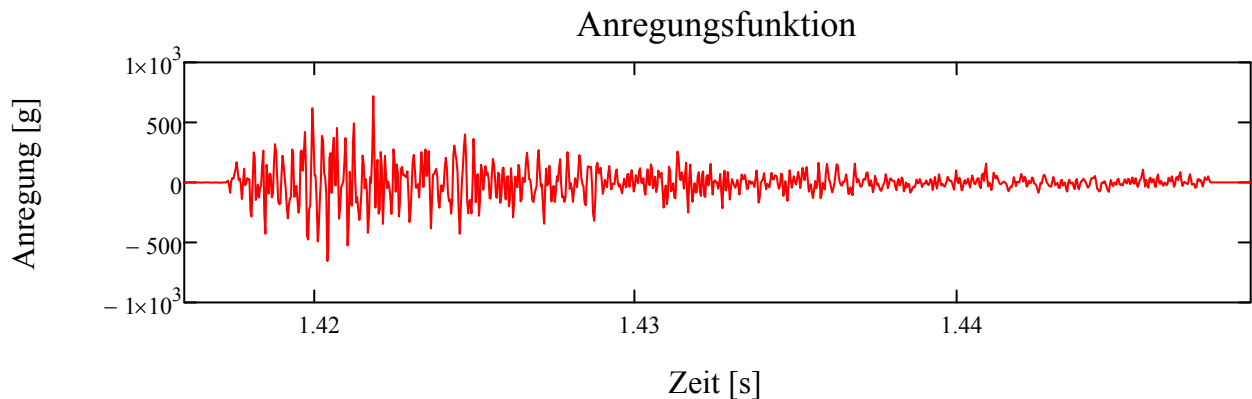
Länge des Anregung:

$$\Delta T := T_1 - T_0 = 31.982 \cdot 10^{-3}$$

Aus den eingelesenen Daten muss nun eine Anregungsfunktion $R(t)$ erzeugt werden.

$$R(t) := \begin{cases} \text{return linterp}(\text{anregungsDaten}^{\langle 0 \rangle}, \text{anregungsDaten}^{\langle 1 \rangle}, t) \cdot G & \text{if } t < T_1 \\ \text{return } 0 & \end{cases}$$

Die Anregung ist in g angegeben, demnach muss dies in der Funktion berücksichtigt werden.



Die Differenzialgleichung

Die Berechnung der Spektren erfolgt über die lineare Schwingungsdifferenzialgleichung mit Fußpunktbeschleunigung

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + k \cdot x = m \cdot R(t)$$

Dabei interessieren weder die Masse noch die Federsteifigkeit, sondern die Eigenfrequenz (bei sehr kleiner Dämpfung)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$$

Die Gleichung schreiben wir deshalb unter Ausnutzung von $2\xi\omega_0=c/m$ um in die Form

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{d}{dt} x(t) + x = \frac{1}{\omega_0^2} \cdot R(t)$$

Hier bei handelt es sich bereits um die Formulierung für eine Fußpunktbeschleunigung. Die Systemantwort $x(t)$ entspricht dann nicht der Absolutverschiebung, sondern nur der Relativverschiebung.

Sammeln der Daten

Anregungsdauer [ms] $\tau := \Delta T = 0.032$

Zeithorizont der Simulation $T_{\text{end}} := T_1 + 2\tau$

$N_{\text{step}} := 2000$

$\xi := 0.01$ 1% modale Dämpfung

Differenzialgleichung Given

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta x(t) + 2 \cdot \omega_0 \xi \frac{d}{dt} \delta x(t) + \omega_0^2 \cdot \delta x(t) = R(t)$$

$$\delta x(T_0) = x_0$$

$$\delta x'(T_0) = x_1$$

Die Idee ist nun die Differenzialgleichung in Abhängigkeit vom Frequenzparameter zu lösen, da dieser direkt aus der Eigenfrequenzanalyse abzulesen ist.

$$\text{erg}(\omega_0) := \text{Odesolve}(t, T_{\text{end}}, N_{\text{step}})$$



Problematisch ist, dass der Zeithorizont für die Simulation nicht von der Frequenz ω_0 abhängig ist, für die die Systemantwort berechnet wird. Deshalb ist eine Berechnung in zwei Schritten sinnvoll.

1. Simulation über die Dauer der Anregung $[T_0, T_1]$
2. Simulation über eine bestimmte Anzahl von Perioden bzgl. ω_0 , z.B. 5 Perioden. $[T_1, T_{\text{end}}]$

Die Anregung ist eine Fußpunktbeschleunigung. Die Antwortgröße ist die Relativverschiebung der betrachteten Masse.

Für die Berechnung wird eine der Kommandozeilenfunktionen von Mathcad verwendet. Dazu müssen die rechte Seite der Differenzialgleichung als Funktion f und die Jacobi-Matrix J von f bzgl. der Lösung x definiert werden:

$$f(t, x, \omega_0, \xi) := \begin{pmatrix} x_1 \\ -2 \cdot \xi \omega_0 x_1 - \omega_0^2 \cdot x_0 + R(t) \end{pmatrix} \quad J_{\omega_0}(t, x, \omega_0, \xi) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -(2 \cdot \xi \omega_0) \end{bmatrix}$$

Es muss als vor der Berechnung die Frequenz ω_0 und die Dämpfung ξ definiert werden. Die Dämpfung wird ebenfalls als Parameter in die Funktion zur Berechnung der Spektren aufgenommen.

Beispiel zur Lösung für eine feste Frequenz

Zunächst berechnen wir die Lösung für eine feste Frequenz und eine vorgegebene Dämpfung.

$$\omega_0 := 2\pi 150 \qquad N_{\text{step1}} := N_{\text{anregung}}$$

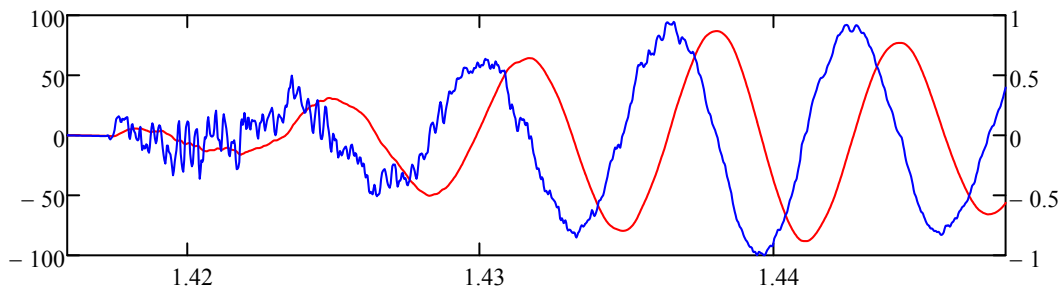
$$\xi := 0.01$$

Nun wird eine Funktion mit nur zwei Argumenten definiert, die von der Kommandozeilenfunktion akzeptiert wird.

$$D(t, y) := f(t, y, \omega_0, \xi) \qquad J(t, y) := J_{\omega_0}(t, y, \omega_0, \xi)$$

Lösung für den Zeitraum der Anregung

$$\text{lösung}_1 := \text{Radau} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T_0, T_1, N_{\text{step1}}, D, J \right]$$



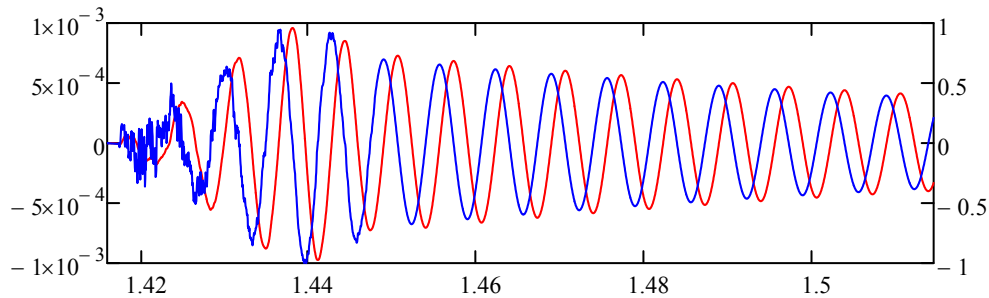
Lösung über den weiteren Verlauf

$$N_{\text{sim}} := 10 \qquad 10 \text{ Perioden sollen nach nach } T_1 \text{ berechnet werden.}$$

$$T_{\text{end}} := T_1 + N_{\text{sim}} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad T_{\text{end}} = 1.515$$

$$\text{lösung}_2 := \text{Radau} \left[\begin{pmatrix} \text{lösung}_1(N_{\text{step1}}, 1) \\ \text{lösung}_1(N_{\text{step1}}, 2) \end{pmatrix}, T_1, T_{\text{end}}, N_{\text{step}}, D, J \right]$$

$$\text{lösung} := \text{stack}(\text{submatrix}(\text{lösung}_1, 0, N_{\text{step1}} - 1, 0, 2), \text{lösung}_2)$$



Überlegungen zum Beschleunigungsspektrum

Die Problematik besteht nun darin, dass oft das Beschleunigungsspektrum gesucht wird. Hierzu verwenden wir die "spectra response relation" $a_{\max} := \omega_0^2 |x_{\max}|$. Diese Relation nehmen wir einfach an der entsprechenden Stelle in unsere Rechnung mit auf.

Die Ernte - Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse

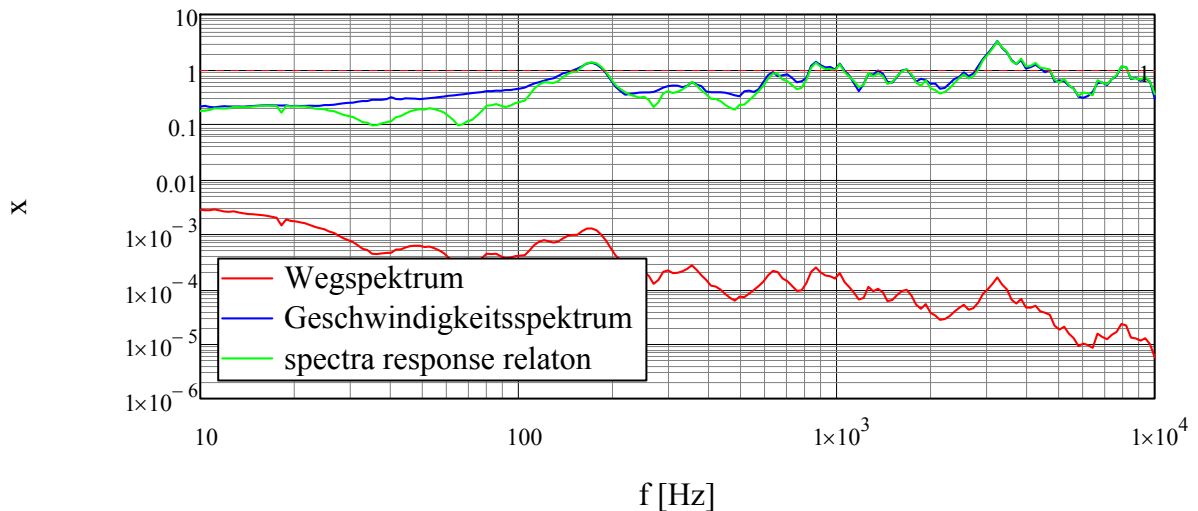
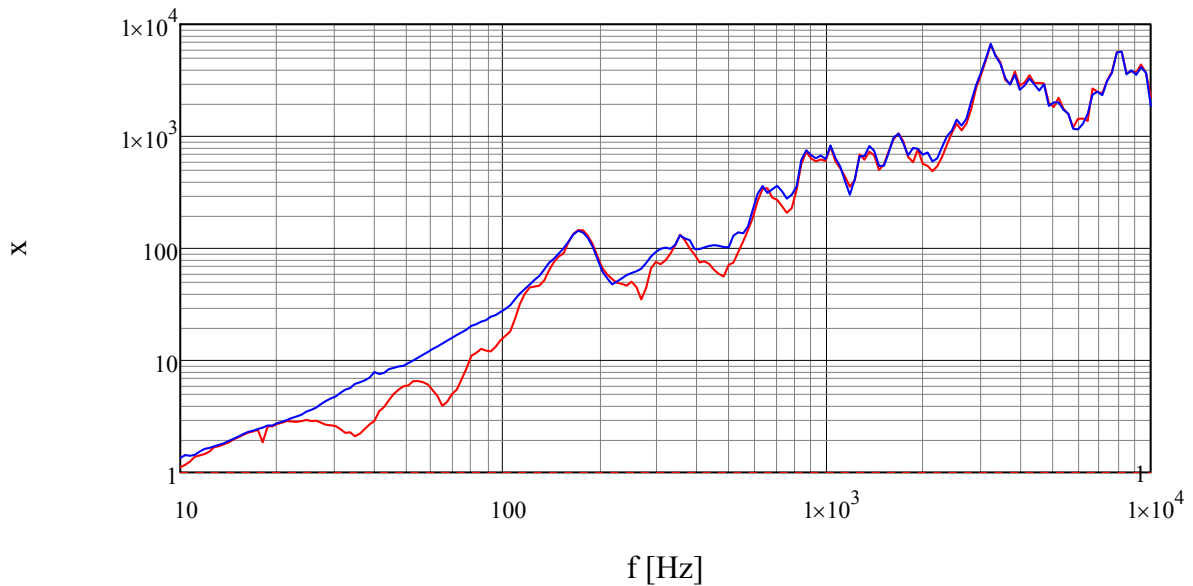
Einige internere Parameter werden von dem oberen Blatt übernommen: $T_0, T_1, T_{\text{end}}, N_{\text{step1}}, N_{\text{step}}$ und N_{sim} wurden vom obigen Arbeitsblatt übernommen

```
ShockResponsevx(f0, f1, Nf, xi) :=
  f ← logspace(f0, f1, Nf + 1)
  schockout_Nf ← 0
  for i ∈ 0 .. Nf
    "Frequenz bestimmen"
    "Schwingungsdauer"
    Ti ← 1 / fi
    ω0 ← 2π fi
    Tend ← T1 + Nsim · Ti
    trace("Frequenz (i={0}) f={1}", i, fi)
    "Funktionen für rechte Seite und Jacobische zuweisen"
    D(t, y) ← f[doc](t, y, ω0, xi)
    J(t, y) ← J_ω0(t, y, ω0, xi)
    "Lösung für die Anregungsdauer"
    lösung1 ← Radau([0; 0], T0, T1, Nstep1, D, J)
    lösung2 ← Radau([lösung1_Nstep1, 1; lösung1_Nstep1, 2], T1, Tend, Nstep, D, J)
    lösung ← stack(submatrix(lösung1, 0, Nstep1 - 1, 0, 2), lösung2)
  schockoutx. ← max(lösung <1>)
```

$$\begin{cases} \text{schockoutv}_i \leftarrow \max(\text{lösung}^{(2)}) \\ \text{schockouta}_i \leftarrow \omega_0^2 \cdot \text{schockoutx}_i \\ (\text{T schockoutx f schockoutv schockouta})^T \end{cases}$$

Nun wird die Schockantwort für den Frequenzbereich [5Hz,2000Hz] mit 100 Punkten berechnet. Die Dampfungsbetrag beträgt 1%. Dabei wird auch noch verglichen, inwieweit die gern verwendete "Fausformel", dass für das Geschwindigkeitsspektrum $v(\omega)=\omega x(\omega)$ und das Beschleunigungsspektrum $a(\omega)=\omega v(\omega)$ gelte, erfüllt ist

```
ShockResponse := ShockResponsevx(10, 10000, 200, 0.01)
```



Semianalytische Berechnung im ungedämpften Fall

Setzen wir nun die Lösung der Differentialgleichung analytisch an, so können wir das allgemeine Differenzialgleichungssystem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$y'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

betrachten. Für dieses System können wir die allgemeine Lösung mittels Variation der Konstanten aufschreiben. Für die homogene Gleichung erhalten wir die Fundamentalmatrix $X(t)$ und deren Inverse $X_{\text{inv}}(t)$

$$X(t) := \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 \cdot t) & \sin(\omega_0 \cdot t) \\ -(\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)) & \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \end{bmatrix}$$

$$X_{\text{inv}}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 \cdot t) & -\frac{\sin(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0} \\ \sin(\omega_0 \cdot t) & \frac{\cos(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0} \end{pmatrix} \quad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$$

Die Variation der Konstanten gibt uns nun die Möglichkeit, direkt die Koeffizientenfunktion aufzuschreiben:

$$b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix} \quad c'(t) = X_{\text{inv}}(t) b(t) \quad \text{bzw.} \quad c'(t) := \frac{1}{\omega_0} \begin{pmatrix} -\sin(\omega_0 \cdot t) \\ \cos(\omega_0 \cdot t) \end{pmatrix} R(t)$$

Damit erhalten wir

$$c_1(t) := \frac{-1}{\omega_0} \left(\int_{T_0}^t \sin(\omega_0 \cdot \tau) R(\tau) d\tau \right) \quad c_2(t) := \frac{1}{\omega_0} \left(\int_{T_0}^t \cos(\omega_0 \cdot \tau) R(\tau) d\tau \right)$$

Zur Vereinfachung vereinbaren wir an dieser Stelle, dass die Anregung immer erst zum Zeitpunkt $T_0 + \varepsilon$ einsetzt. Somit sind die Anfangsdaten und auch die Ableitungen der Lösung $x(t)$ immer 0 und es genügt, nur die spezielle Lösung zu betrachten. Darüber hinaus verschwindet die Ableitung von $c(t)$ in T_0 .

Für die allgemeine Lösung können wir zusammenfassen:

$$x(t) := c_1(t) \cos(\omega_0 \cdot t) + c_2(t) \sin(\omega_0 \cdot t)$$

$$v(t) := -\omega_0 \cdot c_1(t) \sin(\omega_0 \cdot t) + \omega_0 \cdot c_2(t) \cos(\omega_0 \cdot t)$$

Uns interessiert nun aber der Maximalwert der Beschleunigung $a(t)$ zu einem bestimmten Wert ω_0 . Eine Idee ist nun, $c_1(t)$ und $c_2(t)$ in Abhängigkeit von ω_0 zu tabellieren. Hier bietet es sich wieder an, in zwei Schritten zu arbeiten:

1. Stützpunkte aus der Anregung für das Intervall $[T_0, T_1]$,
2. Stützpunkte im Intervall $[T_1, T_{\text{end}}]$ in Abhängigkeit von ω_0 .

Die Zeitpunkte für die Anregung stehen in der 1. Spalte der Matrix `anregungsDaten`. Für die Anregung

nutzen wir die Funktion $R(t)$ oben im Blatt.

$$t_{\text{ex}} := \text{anregungsDaten}^{(0)} \quad R_{\text{tex}} := \overrightarrow{R(t_{\text{ex}})}$$

Es sollen wieder N_{sim} Perioden weitergerechnet werden.

$$T_{\text{end}} := T_1 + N_{\text{sim}} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$t_{\text{frei}} := \text{linspace}(T_1, T_{\text{end}}, 40 \cdot N_{\text{sim}})$$

$$R_{\text{frei}} := \overrightarrow{R(t_{\text{frei}})}$$

Die Informationen aus beiden Intervallen werden nun zusammengefügt, wobei der Zeitpunkt T_1 einmal gelöscht werden muss.

Auswertezeit $ts := \text{stack}(\text{submatrix}(t_{\text{ex}}, 0, \text{last}(t_{\text{ex}}) - 1, 0, 0), t_{\text{frei}})$

$$Rs := \text{stack}(\text{submatrix}(R_{\text{tex}}, 0, \text{last}(R_{\text{tex}}) - 1, 0, 0), R_{\text{frei}})$$

Die Intervalllänge erhalten wir aus: $h := \text{diff}(ts)$

Schleife über die Intervalle $i\text{Loop} := 1 .. \text{last}(ts)$

Initialisieren der Vektoren $c1\text{Wert}_{\text{last}(ts)} := 0$

$$c2\text{Wert}_{\text{last}(ts)} := 0$$

Speichern der Werte der Winkelfunktionen und des Integranden für Variation der Konstanten $\sin_{ts} := \sin(\omega_0 \cdot ts) \quad \cos_{ts} := \cos(\omega_0 \cdot ts)$

$$\sin R := \overrightarrow{(\sin_{ts} \cdot Rs)} \quad \cos R := \overrightarrow{(\cos_{ts} \cdot Rs)}$$

Das Integral wird zunächst nur auf den einzelnen Intervallen der Zeitschritte $[t_{\text{ex}_{i-1}}, t_{\text{ex}_i}]$ berechnet. Dazu wird das Integral

$$c1\text{Wert}_{i\text{Loop}} = -\frac{1}{\omega_0} \left(\int_{t_{\text{ex}_{i\text{Loop}-1}}}^{t_{\text{ex}_{i\text{Loop}}}} \sin(\omega_0 \cdot \tau) R(\tau) d\tau \right)$$

mittels der Trapezregel approximiert, wobei die Schleife über die Variable $i\text{Loop}$ läuft.

$$c1\text{Int}_{i\text{Loop}} := \frac{1}{2 \cdot \omega_0} h_{i\text{Loop}-1} \cdot (\sin R_{i\text{Loop}-1} + \sin R_{i\text{Loop}})$$

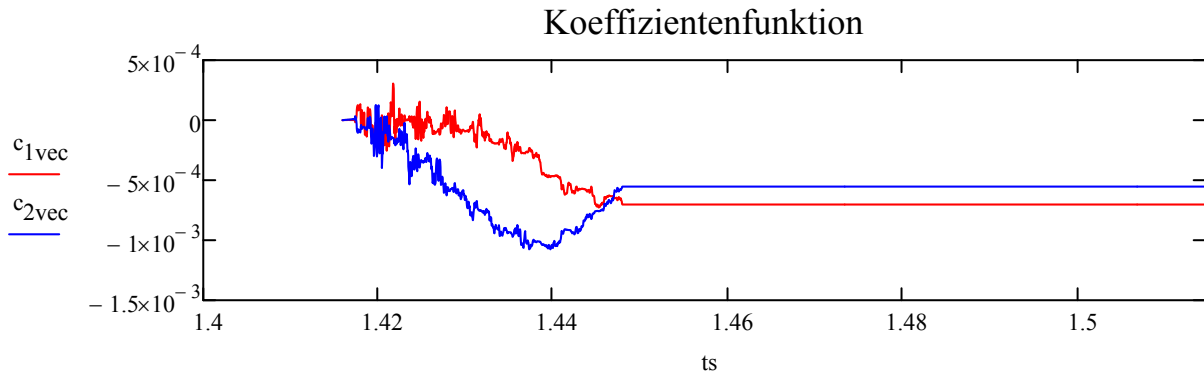
$$c2\text{Int}_{i\text{Loop}} := \frac{1}{2 \cdot \omega_0} h_{i\text{Loop}-1} \cdot (\cos R_{i\text{Loop}-1} + \cos R_{i\text{Loop}})$$

Durch Aufsummieren aller Elemente bis zum jeweils i -ten Element erhalten wir die gesuchten Integrale

$$\frac{1}{\omega_0} \left[\int_{T_0}^{t_i} -(\sin(\omega_0 \cdot \tau) R(\tau)) d\tau \right] = -\sum_{i=0}^i c_{1Int_i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\omega_0} \left(\int_{T_0}^{t_i} \cos(\omega_0 \cdot \tau) R(\tau) d\tau \right) = \sum_{i=0}^i c_{2Int_i}$$

$$c_{1vec} := -\text{cum}(c_{1Int})$$

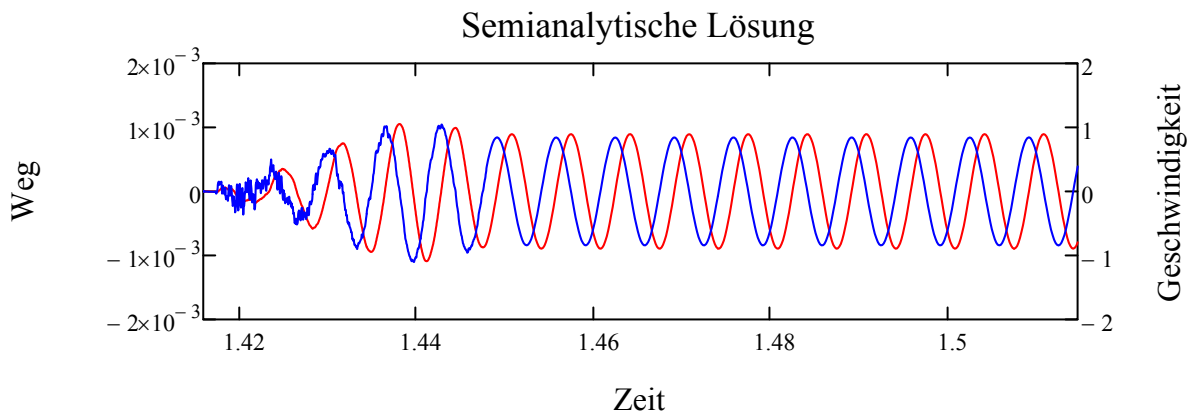
$$c_{2vec} := \text{cum}(c_{2Int})$$



Die Lösung der Differenzialgleichung lässt sich nun leicht aus den bereits gespeicherten Daten ermitteln:

$$x_{ts} := \overrightarrow{(c_{1vec} \cdot \cos_{ts} + c_{2vec} \cdot \sin_{ts})}$$

$$v_{ts} := \omega_0 \overrightarrow{[-(c_{1vec} \cdot \sin_{ts}) + c_{2vec} \cdot \cos_{ts}]}$$

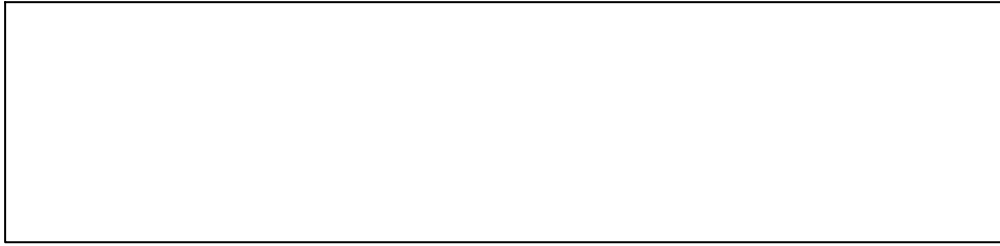


Überprüfung des bisherigen Resultates anhand der numerischen Lösung von oben:

Vergleich der transienten Lösungen (Weg)



Vergleich der transienten Lösungen (Geschwindigkeit)



Da wir oben mit Dämpfung gerechnet haben, bleibt in der Amplitude ein Unterschied. Die Behandlung der Dämpfung ist nicht Gegenstand dieses Berichts.

Die zweite Ernte

Fassen wir unsere Ergebnisse in einer neuen Funktion zusammen:

```
ShockResponseA(f0, f1, Nf) :=
  f ← logspace(f0, f1, Nf)
  "Sammeln der freq.-unabhaengigen Daten"
  tex ← submatrix(anregungsDaten(0), 0, last(anregungsDaten(0)) - 1, 0, 0)
  Rtex ← R(tex)
  "Schleife ueber die Frequenzen"
  for i ∈ 0 .. Nf - 1
    Ti ← 1 / fi
    Tend ← T1 + Nsim · Ti
    ω0 ← 2π · fi
    trace("i={0}", i)
    "Erzeugen des zweiten Zeitintervalls"
    tfrei ← linspace(T1, Tend, Nsim · 10)
    Rfrei ← R(tfrei)
    ts ← stack(tex, tfrei)
    Rs ← stack(Rtex, Rfrei)
    h ← diff(ts)
    sints ← sin(ω0 · ts)
    costs ← cos(ω0 · ts)
    sinR ← (sints · Rs)
```

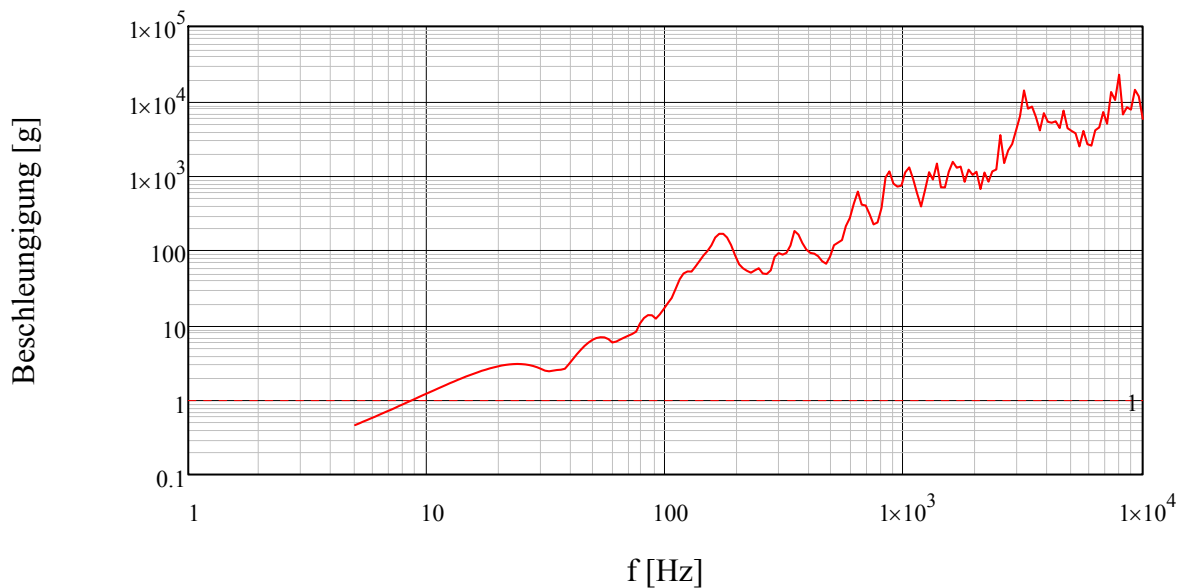
```

cosR ← (costs · Rs)
"Berechnung der Variation der Konstanten"
for iLoop ∈ 1 .. last(ts)
  c1Wertlast(ts) ← 0
  c2Wertlast(ts) ← 0
  c1IntiLoop ←  $\frac{1}{2\omega_0} h_{iLoop-1} \cdot (\sin R_{iLoop-1} + \sin R_{iLoop})$ 
  c2IntiLoop ←  $\frac{1}{2\omega_0} h_{iLoop-1} \cdot (\cos R_{iLoop-1} + \cos R_{iLoop})$ 
c1vec ← -cum(c1Int)
c2vec ← cum(c2Int)
xts ←  $\overrightarrow{(c1vec \cdot \cos_{ts} + c2vec \cdot \sin_{ts})}$ 
vts ←  $\omega_0 \overrightarrow{[-(c1vec \cdot \sin_{ts}) + c2vec \cdot \cos_{ts}]}$ 
schockoutxi ← max(|xts|)
schockoutvi ← max(|vts|)
schockoutai ←  $\omega_0^2 \cdot \text{schockoutx}_i$ 
"Ende Schleife ueber Frequenzen"
(T schockoutx f schockoutv schockouta)T

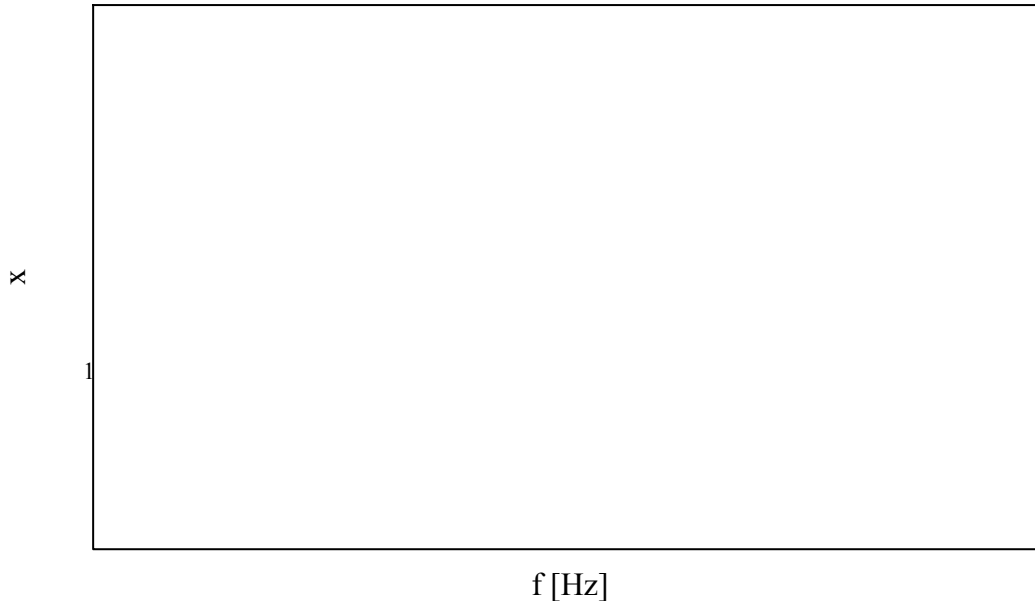
```

Wieder berechnen wir die Schockantwort für das Intervall [5Hz, 10000Hz].

```
ShockResponse2 := ShockResponseA(5, 10000, 200)
```



Vergleich der Ergebnisse



Der Vorteil in der semianalytischen Methode besteht darin, dass bei der Berechnung der Lösung auf die Struktur der Eingabedaten zurückgegriffen wird. Es wird die Annahme der stückweisen linearen Eingangsfunktionen in der Rechnung berücksichtigt. Der letzte Schritt bestünde jetzt darin, die berechneten Spektren für die Nutzung in anderen Softwarepaketen zu exportieren [2] und auch in der semianalytischen Lösung die kleine Dämpfungen zu berücksichtigen.

Anmerkung

Die auf dem Blatt verwendeten Funktionen `linspace`, `diff` und `cum`, sind separat auf dem Blatt definiert.

Literatur

- [1] Irvine, Tom: *AN INTRODUCTION TO THE SHOCK RESPONSE SPECTRUM*, Revision R, July 2010 http://www.vibrationdata.com/tutorials2/srs_intr.pdf
 [2] Jakel, Roand: *Berechnung von Schockspektren und praktische Anwendung der dynamischen Stoßanalyse in Creo Elements / Pro Mechanica*. Vortrag auf der SAXSIM 2011, TU Chemnitz, 19. April 2011

Autor

Dr. Wigand Rathmann
 Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
 Department Mathematik
 Lehrstuhl für Angewandte Mathematik 2
 Martensstr. 3
 91058 Erlangen

www.mso.math.uni-erlangen.de/rathmann

wigand.rathmann@am.uni-erlangen.de

+49 (0)9131 85-27418