Carsten Schubert

Quantengraphen mit zufälligem Potential



TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Universitätsverlag Chemnitz
2012

Impressum

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Zugl.: Chemnitz, Techn. Univ., Diss., 2011

Technische Universität Chemnitz/Universitätsbibliothek
Universitätsverlag Chemnitz
09107 Chemnitz
http://www.bibliothek.tu-chemnitz.de/UniVerlag/

Herstellung und Auslieferung
Verlagshaus Monsenstein und Vannerdat OHG
Am Hawerkamp 31
48155 Münster
http://www.mv-verlag.de

ISBN 978-3-941003-54-5

http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:ch1-qucosa-83614

Quantengraphen mit zufälligem Potential

von der
Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Chemnitz
genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt von

Dipl.-Math. Carsten Schubert

geboren am 24. März 1981 in Marienberg

Tag der Einreichung:	30. Juni 2011
Gutachter:	Prof. Dr. Peter Stollmann
	Prof. Dr. Daniel Lenz
	Prof. Dr. Peter Müller
Tag der öffentlichen Prüfung:	13. Dezember 2011

Referat

Ein metrischer Graph mit einem selbstadjungierten, negativen Laplace-Operator wird Quantengraph genannt. Üblicherweise werden Charakterisierungen von selbstadjungierten Versionen über Knoten-Randbedingungen betrachtet. Es wird angegeben, dass ein negativer Laplace-Operator mit Knoten-Randbedingungen genau dann selbstadjungiert ist, wenn in jedem Knoten ein Lagrange'scher Unterraum für die Randbedingungen ausgewählt wurde. Dabei ist die einzige Einschränkung an den Graphen, dass die Kantenlänge nach unten gleichmäßig beschränkt sein soll. Unendlich lange Kanten und unendlicher Knotengrad sind dabei erlaubt.

Es wird eine Parametrisierung der Randbedingungen mithilfe einer Familie von Projektion und einer Familie von Operatoren angegeben, welche immer einen Lagrange'schen Unterraum bilden und im Fall endlichen Knotengrades sogar alle Lagrange'schen Unterräume. Unter diesen Parametrisierungen werden alle identifiziert, die einen nach unten beschränkten Operator liefern und damit eine assoziierte, nach unten beschränkte Sesquilinearform besitzen.

Im Weiteren wird die Multiskalenanalyse von stetigen Modellen auf $\mathbb{R}^d$ auf metrische Graphen angepasst. Dazu wird eine Überdeckung der metrischen Graphen benötigt, welche durch die Einschränkung auf metrische Graphen mit gleichmäßig nach oben beschränkten Kantenlängen und gleichmäßig polynomiellem Wachstum ermöglicht wird. Als Hilfsmittel für die Multiskalenanalyse werden eine Combes-Thomas-Abschätzung und eine Geometrische Resolventenungleichung bewiesen. Zusammen mit der Wegner-Abschätzung aus [GHV08] und der Existenz von verallgemeinerten Eigenfunktionen aus [LSS08] wird mittels der modifizierten Multiskalenanalyse spektrale Lokalisierung (d.h. reines Punktspektrum) mit polynomiell fallenden Eigenfunktionen am unteren Rand des Spektrums für negative Laplace-Operatoren mit zufälligem Potential geschlossen. Dabei sind alle Randbedingungen, die eine nach unten beschränkte quadratische Form liefern, wählbar.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Knoten-Randbedingungen für Quantengraphen **9**
1.1 Metrische Graphen 9
1.2 Erweiterte Randbedingungen 17
1.3 Randbedingungen und unbeschränkter Knotengrad 26
1.4 Quadratische Form und halbbeschränkter Operator 30
1.5 Lagrange'sche Unterräume und lineare Relationen 38
1.6 Kantenlänge gegen Null 43

2 Vorbereitende Abschätzungen **45**
2.1 Die zufällige Operatorfamilie 45
2.2 Deterministisches Spektrum 48
2.3 Induzierte Teilgraphen 50
2.4 Wachstum, Geometrie und Überdeckung von Graphen 56
2.5 Combes-Thomas-Abschätzung 64
2.6 Geometrische Resolventenungleichung 72
2.7 Eigenwertzählfunktion und Weyl-Asymptotik 82
2.8 Anfangslängen- und Wegner-Abschätzung 87
2.9 Existenz von verallgemeinerten Eigenfunktionen 89

3 Die Multiskalenanalyse **95**
3.1 Der Induktionsprozess 96
3.2 Spektrale Lokalisierung 113
3.3 Erläuterungen und Verallgemeinerungen 121

Literatur **127**

Thesen **133**

Einleitung

In vielen wissenschaftlichen Gebieten wird der Transport in unterschiedlichsten Medien untersucht, zum Beispiel die Elektronenbewegung, die Wellenausbreitung oder Diffusion von Flüssigkeiten. In der Praxis ist es relevant festzustellen, ob Transport in einem System möglich ist oder nicht. Zum Beispiel werden so in der Elektronenbewegung Isolatoren von Leitern unterschieden. Partielle Differentialgleichungen, die den Transport beschreiben, verwenden oft den Laplace-Operator, so auch die Schrödinger-Gleichung zur Beschreibung mikroskopischer sowie die Wellen- und die Wärmeleitungsgleichung zur Beschreibung makroskopischer Systeme.

Was mathematisch untersucht werden muss, um herauszufinden welche Art von Transport möglich bzw. vorhanden ist, soll nun kurz anhand der Schrödinger-Gleichung vorgestellt werden: Diese beschreibt die zeitliche Entwicklung einer Wellenfunktion ψ, die von der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und vom Ort $x \in X$ (meist gilt $X = \mathbb{R}^d$) abhängt:

$$i\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = -\Delta\psi(t,x) + V(x)\psi(t,x).$$

Mit der Definition des Schrödinger-Operators als $H = -\Delta + V$ kann für einen normierten Anfangszustand $\psi(0,\cdot)$ mit $\|\psi(0,\cdot)\|_{L^2(X)} = 1$ die zeitabhängige Lösung der Schrödinger-Gleichung ψ mittels der unitären Gruppe angegeben werden:

$$\psi(t,x) = e^{-iHt}\psi(0,x).$$

In der Quantenmechanik wird $\rho_t = |\psi(t,\cdot)|^2$ als Ortsaufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens zur Zeit t interpretiert. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen bzw. eine Welle zur Zeit t in einer Menge $K \subset X$ befindet, berechnet sich dann durch

$$\mathbb{P}\{\text{Teilchen/Welle ist in } K\} = \int_K |\psi(t,x)|^2 \, dx.$$

Dabei gewährt die Normierung des Anfangszustandes, dass das Teilchen bzw. die Welle sich mit Wahrscheinlichkeit eins irgendwo im gesamten Raum aufhalten muss. Weiterhin bleibt die Normierung der Lösung im Laufe der Zeit erhalten, da die Halbgruppe unitär ist.

Wenn sich die Lösung nicht aus einem Kompaktum bewegt, dann wird der Anfangszustand $\psi(0,x) \in L^2(X)$ als gebundener Zustand bezeichnet:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ R > 0 : \sup_t \int\limits_{B_R{}^c} |\psi(t,x)|^2\, dx \leq \varepsilon.$$

Das Teilchen oder die Welle ist dann in einer bestimmten Menge $K \subset X$ gefangen, es findet also kein Transport durch das Medium statt. Eine andere Ausdrucksweise dafür ist: Das Teilchen bzw. die Welle ist lokalisiert.

Bei allen anderen Arten von Zuständen wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in jeder kompakten Menge beliebig klein – oder zumindest im zeitlichen Mittel beliebig klein. Es findet also Transport durch das Medium statt und es wird von Streuzuständen gesprochen.

Es gilt nun herauszufinden welche Arten von Zuständen in bestimmten Energiebereichen auftreten können. Am Wichtigsten ist dabei die Umgebung des Grundzustandes, d.h. des energieärmsten Zustandes des Systems, wohin jedes physikalische System automatisch strebt.

Der wichtigste mathematische Satz dazu ist das RAGE-Theorem. Es charakterisiert die Menge aller gebundenen Zustände wie folgt: Die Menge aller gebundenen Zustände entspricht dem Abschluss der linearen Hülle aller Eigenfunktionen des Schrödinger-Operators $H = -\Delta + V$.

Es ist also ausreichend den Schrödinger-Operator H zu untersuchen, um herauszufinden, ob Transport in diesem System zu bestimmten Energieniveaus möglich ist oder nicht. Die Hauptaussage dieser Arbeit wird sein, dass in einem kleinen Intervall um das Energieniveau des Grundzustandes eines Systems – welches später noch genauer beschrieben wird – nur Punktspektrum existiert. In diesem Energiebereich gibt es also nur Eigenfunktionen und somit gebundene Zustände und keinen Transport durch dieses Medium. Es gibt in diesem Energieintervall nur lokalisierte Teilchen/Wellen, weshalb dieser Effekt Lokalisierung genannt wird.

In vielen wissenschaftlichen Gebieten wird der Transport in graphenähnlichen Medien untersucht, zum Beispiel die Elektronenbewegung oder Wellenausbreitung in Drahtgeflechten und Netzwerken oder der Blutfluss in der Lunge. Eine mathematische Annäherung daran ist eine Beschreibung von Transport auf eindimensionalen Strukturen – auf Graphen.

Der erste Schritt zur Charakterisierung des Transportes ist die Beschreibung und Untersuchung des Laplace-Operators auf Graphen, über welchen dann auch weitere Schrödinger-Operatoren definiert werden. Dazu sind kontinuierliche Graphen, sogenannte metrische Graphen notwendig. Der wichtigste Unterschied zu kombinatorischen Graphen ist, dass nicht mehr die Knoten, sondern die Kanten die wichtigste Rolle einnehmen. Die Kanten werden als Intervalle angesehen, entlang welcher der Transport stattfinden kann. Die Knoten sind dann Verteilungspunkte, an denen entschieden wird auf welchen

Kanten der Transport fortgesetzt wird. Dabei ist es wichtig, wie in den Knoten verfahren werden soll. Dies geschieht durch die Wahl von Randbedingungen. Anhand dieser kann angegeben werden, ob der zu untersuchende Operator eine wichtige Eigenschaft – die Selbstadjungiertheit – besitzt.

Kostrykin und Schrader zeigten in [KS99] wie für einen Sterngraph mit n unendlich langen Kanten alle selbstadjungierten Versionen des negativen Laplace-Operators über Lagrange'sche Unterräume charakterisiert werden können. Kuchment gab in [Kuc04] eine Beschreibung für allgemeinere metrische Graphen über Sesquilinearformen an. Dabei erfolgt die Parametrisierung der Randbedingungen mit einer Familie von Projektionen und einer Familie von Operatoren. Dies ergibt selbstadjungierte, nach unten beschränkte Operatoren. Jede dieser Parametrisierungen bildet in jedem Knoten wieder einen Lagrange'schen Unterraum, die Umkehrung gilt aber nicht.

Diese unnatürliche Lücke wird geschlossen und gezeigt, wie eine Charakterisierung aller selbstadjungierter Operatoren mittels Lagrange'scher Unterräume entsteht. Dabei wird die Einschränkung an den Knotengrad aus [Kuc04] aufgehoben. Weiterhin wird gezeigt, dass die Parametrisierungen mittels Projektion und Operator auch ohne die Beschränkungen aus [Kuc04] – die Beschränkung des Knotengrades und die gleichmäßige Beschränkung der Normen der Operatoren in den Parametrisierungen – einen Lagrange'schen Unterraum bilden und somit einen selbstadjungierten negativen Laplace-Operator liefern. Für endlichen Knotengrad liefern sie sogar alle Lagrange'schen Unterräume. Unter diesen Parametrisierungen werden alle identifiziert, die eine assoziierte nach unten beschränkte Sesquilinearform besitzen.

Beim Betrachten von Systemen, die durch selbstadjungierte Schrödinger-Operatoren beschrieben werden, wurde folgende Feststellung gemacht: Beim Transport in periodischen Strukturen (zum Beispiel in reinen Kristallen) gibt es nur Streuzustände. Sind in den Strukturen Störungen oder Abwandlungen von den periodischen Mustern zu finden, dann geht diese Eigenschaft verloren und es gibt oft nur gebundene Zustände und keinen Transport durch diese Medien.

Viele verschiedene Störungen in Transport-Modellen werden durch zufällige Operatoren modelliert und seit längerem in der Physik und Mathematik untersucht. Erste Aussagen über zufällige Schrödinger-Operatoren in $\mathbb{Z}^d$ und das Auftreten von Isolatoreigenschaften für niedrige Energien wurden in der theoretischen Physik in [And58] aufgeführt. Für Modelle in Räumen mit Dimension größer eins ($\mathbb{Z}^d$ und $\mathbb{R}^d$) gibt es zwei gängige Methoden, mit denen Lokalisierung, d.h. Abwesenheit von stetigem Spektrum und somit Isolatoreigenschaften, nachgewiesen werden können.

Die erste Methode ist die Multiskalenanalyse (MSA), sie wurde publiziert von Fröhlich und Spencer in [FS83] und weiterentwickelt von Fröhlich, Martinelli, Scopola und Spencer in [Frö+85] sowie von von Dreifus und Klein in [DK89] und behandelte in allen Fällen diskrete Schrödinger-Operatoren

auf $\mathbb{Z}^d$ mit zufälligem Potential. Darauffolgend wurden einige andere Modelle behandelt und Modifikationen an der Methode vorgenommen. Eine Variante mit allen benötigten Abschätzungen und Werkzeugen zur Lokalisierung für mehrere stetige Modelle, die sich leicht auf andere Modelle übertragen lässt, wurde von Stollmann in [Sto01] niedergeschrieben. Dabei ist das Vorgehen grob in folgende Schritte einzuteilen:

① : Es gibt eine Entwicklung des Operators in verallgemeinerte Eigenfunktionen, welche höchstens polynomiell wachsen.

② : Für ein bestimmtes Energieintervall sind die lokalen Resolventen fallend, d.h. was die Resolvente des Operators auf endlichen Gebieten vom Inneren zum Rand des Gebietes überträgt, fällt exponentiell/polynomiell mit der Größe der Gebiete.

③ : ① und ② ergeben exponentielles/polynomielles Fallen der verallgemeinerten Eigenfunktionen. Somit sind diese Eigenfunktionen und das Spektrum in dem Energiebereich aus ② reines Punktspektrum.

Punkt ② entspricht der eigentlichen Multiskalenanalyse, in der von einer Anfangslängenskala per Induktion Abfall der lokalen Resolventen für eine größere Längenskala geschlossen wird.

Die zweite Methode wurde von Aizenman und Molchanov 1993 in [AM93] publiziert und zeigt, dass der Erwartungswert gebrochener Momente der lokalen Resolventen in allen Längenskalen gleichmäßig fallend ist. Sie wird mit der Abkürzung FMM bezeichnet, was für „fractional moment method“ steht. Aus der Aussage über das Fallen von lokalen Resolventen wird wieder Lokalisierung geschlussfolgert. Dafür gibt es verschiedene Varianten, welche zum Beispiel auf einem Kriterium von Simon und Wolff, dem RAGE-Theorem oder anderen beruhen. Damit liefert diese Methode für diskrete Modelle eine elegantere, einfachere Möglichkeit Lokalisierung zu schließen. Für stetige Modelle wird dies viel komplexer und verliert die Eleganz und Einfachheit – siehe zum Beispiel [Aiz+06] oder auch [Mon+06].

Unabhängig von der Methode gibt es verschiedene Aussagen über bzw. Qualitäten von Lokalisierung, welche gewonnen werden können:

- Spektrale Lokalisierung, das heißt reines Punktspektrum (oft verbunden mit exponentiellem/polynomiellem Fallen der Eigenfunktionen).

- Dynamische Lokalisierung: Unter dynamischer Lokalisierung werden in der Literatur verschiedene Formulierungen angegeben, welche meist Abschwächungen/Verschärfungen voneinander sind. Die Aussage ist: Für einen Anfangszustand, der in Raum und Energie lokalisiert ist, wird im Lauf der Zeit nichts nach unendlich transportiert (d.h. durch das

Medium). Die Unterschiede in der Definition entstehen, wenn diese Aussage mit oder ohne Erwartungswert oder im zeitlichen Mittel definiert wird.

Dabei folgt aus dynamischer die spektrale Lokalisierung. Die bisherigen Ergebnisse über Abwesenheit von Transport bei negativen Laplace-Operatoren auf metrischen Graphen sind:

1. Aizenman, Sims und Warzel zeigten in [ASW06]: Für den negativen Laplace-Operator mit Kirchhoff-Randbedingungen auf einem verwurzeltem Baum („rooted tree graph“), d.h. einem Baum mit konstanter Verzweigungszahl (außer an der Wurzel), mit zufälligen Kantenlängen ist das absolutstetige Spektrum stabil (d.h. vorhanden) unter schwacher Unordnung.

2. Hingegen zeigten Hislop und Post in [HP09], dass für radiale Quantenbäume (d.h. Bäume bei denen in jeder Generation Knotengrad, Kantenlänge und Randbedingungen konstant sind) sowohl für zufällige Kantenlängen, als auch für zufällige Kirchhoff-Randbedingungen (d.h. zufällige Kopplungskonstanten in jeder Generation) spektrale Lokalisierung mit exponentiell fallenden Eigenfunktionen für alle Energien vorliegt. Bewiesen wird dies durch die Reduzierung auf linienartige Quantengraphen.

3. Exner, Helm und Stollmann beschrieben in [EHS07] für den negativen Laplace-Operator mit Kirchhoff-Randbedingungen auf dem metrischen Graphen über $\mathbb{Z}^d$ mit zufälligem Potential spektrale Lokalisierung mit exponentiell fallenden Eigenfunktionen und dynamische Lokalisierung nahe dem Grundzustand. Benutzt wurde dazu die Multiskalenanalyse aus der Dissertation [Hel07].

4. Klopp und Pankrashkin zeigten in [KP08] für den negativen Laplace-Operator mit Kirchhoff-Randbedingungen (δ-Randbedingungen) mit zufälliger Kopplungskonstante in jedem Knoten über $\mathbb{Z}^d$ spektrale Lokalisierung für hohe Unordnung und an Bandkanten mittels FMM.

5. Für den negativen Laplace-Operator mit δ-Randbedingungen und fester Kopplungskonstante in jedem Knoten über $\mathbb{Z}^d$ mit zufälligen Kantenlängen bewiesen Klopp und Pankrashkin in [KP09] spektrale Lokalisierung mit exponentiell fallenden Eigenfunktionen nahe dem Grundzustand mithilfe der MSA aus 3.

Die Beweismethoden unter 1., 2. und 4. hängen stark von der Geometrie der Graphen oder den speziellen Randbedingungen ab und sind nicht auf allgemeine Randbedingungen oder allgemeine metrische Graphen zu verallgemeinern.

Dies ist nur mit der Multiskalenanalyse möglich, die in 3. und 5. genutzt wurde.

Um für eine größere Klasse an Graphen und Randbedingungen Lokalisierung zu schließen, wird in der vorliegenden Arbeit die Multiskalenanalyse benutzt. Die bewiesenen Resultate verlassen Bäume und den $\mathbb{Z}^d$ bzw. $\mathbb{R}^d$ – allgemeine metrische Graphen müssen in keinen dieser Räume einbettbar sein. Eine notwendige Einschränkung an den metrischen Graphen ist eine Wachstumsschranke. Der Graph darf nicht zu schnell wachsen und soll ein gleichmäßig polynomielles Wachstum erfüllen, um eine gleichmäßige Überdeckung des Graphen zu ermöglichen. Das einzige Modell unter den fünf Vorarbeiten, bei welchem der Graph per se kein polynomielles Wachstum besitzt, liefert auch als einziges die Abwesenheit von Lokalisierung.

Weiter sind auch alle Randbedingungen, die einen nach unten beschränkten Operator liefern – also einen Operator mit endlichem unteren Ende des Spektrums – behandelbar (bisher wurden in allen Arbeiten höchstens δ-Randbedingungen behandelt). Als Zufälligkeit wird ein Legierungspotential in das Modell integriert.

Der Hauptbestandteil dieser Arbeit sind die Beweise notwendiger vorbereitender Abschätzungen und der Beweis der auf metrische Graphen angepassten Multiskalenanalyse.

Es wird also spektrale Lokalisierung für eine neue große Klasse an Graphen/Modellen mit neuen Randbedingungen bewiesen (die Ergebnisse schließen alle bisher behandelten Operatoren mit zufälligem Potential ein).

Allerdings liefert die Multiskalenanalyse durch die allgemeineren Graphen keine exponentiell fallenden Eigenfunktionen und keine dynamische Lokalisierung mehr. Woran das liegt und wie die MSA eventuell modifiziert werden kann, um dies dennoch zu erreichen, wird später diskutiert.

Das erste Kapitel gibt eine Einführung in metrische Graphen und eine Charakterisierung von selbstadjungierten negativen Laplace-Operatoren mit Knoten-Randbedingungen auf metrischen Graphen mit gleichmäßig nach unten beschränkten Kantenlängen. Darunter werden alle Randbedingungen identifiziert, welche einen nach unten beschränkten Operator und damit auch gleichzeitig eine assoziierte Form liefern. Zur Charakterisierung werden Lagrange'sche Unterräume genutzt, wobei durch eine geeignete Parametrisierung die assoziierte Form leicht zu finden ist.

Kapitel 2 beinhaltet das hier behandelte zufällige Modell und alle vorbereitenden Abschätzungen zur Multiskalenanalyse. Dabei wird im ersten Abschnitt das zufällige Potential angegeben und im nächsten Abschnitt darauf verwiesen, dass die hier verwendete zufällige Operatorfamilie im Allgemeinen nicht mehr ergodisch ist. Der dritte Abschnitt enthält die Definition der Einschränkungen des Operators auf endliche Teilgraphen, welche ein sehr wichtiges Hilfsmittel sind. Wie eine Überdeckung von metrischen Graphen zu erreichen ist, wird im folgenden Abschnitt angegeben. Dazu ist es notwendig Anforderungen an

den Graphen zu stellen – gleichmäßig polynomielles Wachstum zeigt sich als gute Wahl.

In den folgenden Abschnitten werden alle Abschätzungen über die Einschränkungen auf endliche Teilgraphen bewiesen oder zitiert, welche in der Multiskalenanalyse benötigt werden. Als letzter Abschnitt des zweiten Kapitels folgt die Zitierung der Entwicklung in verallgemeinerte Eigenfunktionen.

Im Kapitel 3 wird dann die Multiskalenanalyse und der Schluss auf spektrale Lokalisierung aus [Sto01] an die metrischen Graphen angepasst. Die Überdeckung des Graphen ist nicht mehr so präzise kontrollierbar wie im Gitterfall, weswegen nur noch polynomieller Abfall der lokalen Resolventen (Abschnitt 3.1) und spektrale Lokalisierung, d.h. reines Punktspektrum nahe dem Grundzustand, also dem unterem Ende des Spektrums der zufälligen Operatorfamilie, gezeigt werden kann. Im letzten Abschnitt werden Erläuterungen und Verallgemeinerungsmöglichkeiten zur Lokalisierung angegeben.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind bisher unveröffentlicht, werden aber zur Veröffentlichung vorbereitet: die Ergebnisse aus Kapitel 1 sollen in [LSV] und die Ergebnisse aus den Kapiteln 2 und 3 in [Sch] veröffentlicht werden. Die Entwicklung der Operatoren in verallgemeinerte Eigenfunktionen, welche in Abschnitt 2.9 zitiert wird, wurde in [LSS08] veröffentlicht.

1 Knoten-Randbedingungen für Quantengraphen

Das Studium von Differentialoperatoren auf metrischen Graphen dient als Approximation von realen Transportvorgängen. Sie finden in vielen Bereichen Anwendung, so zum Beispiel in der Quantenmechanik, Nanotechnologie, bei neuronalen Netzwerken oder Molekülstrukturen. Als Quelle sei auf das Tagungsband [Ber+06] der Konferenz „Quantum graphs and their applications“ verwiesen, welche sich ausschließlich mit Quantengraphen und deren Anwendung beschäftigte.

In diesem Kapitel werden metrische Graphen definiert und erklärt wie Knoten-Randbedingungen für den negativen Laplace-Operator gewählt werden können. Danach werden alle Knoten-Randbedingungen identifiziert, die einen selbstadjungierten Operator liefern. Da Lokalisierung nur am unteren Ende des Spektrums gezeigt werden kann, werden unter den selbstadjungierten Operatoren alle nach unten beschränkten herausgefiltert.

1.1 Metrische Graphen

Der größte Unterschied zwischen metrischen und kombinatorischen Graphen besteht darin, dass auf metrischen Graphen Funktionen nicht auf den Knoten sondern auf den Kanten definiert werden. Dazu wird jeder Kante eine Länge zugewiesen und diese mit einem entsprechend langem Intervall identifiziert.

Definition 1.1.1. Ein metrischer Graph ist ein Tupel $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ bestehend aus höchstens abzählbaren Mengen E der Kanten und V der Knoten, einer Funktion $l : E \to (0, \infty]$, die jeder Kante e eine Länge $l(e)$ zuordnet, einer Funktion $i : E \to V$, wobei $i(e)$ der Anfangspunkt einer Kante genannt wird und einer Funktion $j : \{e \in E \text{ mit } l(e) < \infty\} \to V$, die jeder Kante endlicher Länge einen Endpunkt zuordnet. Weiterhin seien mit $I_e = (0, l(e))$ die zu den Kanten gehörigen offenen Intervalle bezeichnet. Ist v ein Anfangs- oder Endknoten einer Kante e, so heißen v und e adjazent und es wird $e \sim v$ geschrieben.

Mehrfache Kanten und Schleifen sind erlaubt. Dabei sind Schleifen Kanten, für die der Anfangsknoten dem Endknoten entspricht. Mehrfache Kanten sind Kanten, bei denen Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.

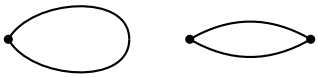


Abbildung 1.1: Schleife und mehrfache Kanten.

Die Intervalle I_e bilden das Definitionsgebiet der Funktionen auf metrische Graphen:

$$X_E := \bigcup_{e \in E} \{e\} \times I_e.$$

Für eine Funktion $f : X_E \to \mathbb{C}$ wird $f_e(t)$ statt $f(e,t)$ geschrieben. Um die metrischen Graphen als metrische Räume zu betrachten, ist der Raum X_E nicht ausreichend, denn es fehlen die Verknüpfungspunkte der Kanten – die Knoten. Dazu wird folgende Menge definiert:

$$X_\Gamma = V \cup X_E.$$

Eine Metrik für X_Γ wird später angegeben.

Sei $E_v := \{(e,0) \text{ mit } v = i(e)\} \cup \{(e,l(e)) \text{ mit } v = j(e)\}$ die Menge der ausgehenden und eingehenden Kanten adjazent zu v. Der Grad eines Knotens ist definiert als

$$d_v := |\{(e,0) \text{ mit } v = i(e)\} \cup \{(e,l(e)) \text{ mit } v = j(e)\}| = |E_v|.$$

Isolierte Knoten – also Knoten mit Knotengrad null – spielen für Funktionen $f : X_E \to \mathbb{C}$ keine Rolle und sollen ausgeschlossen werden. Weiterhin sei der metrische Graph als zusammenhängend angenommen. Ist er dies nicht, kann sämtliche hier angegebene Theorie auf den jeweiligen Zusammenhangskomponenten angewendet werden.

Ein metrischer Graph heißt unendlich, wenn seine Kantenmenge E unendlich ist. Daraus folgt, dass für einen endlichen Graphen, die Menge der Kanten und die Menge der Knoten endlich ist. Für einen unendlichen metrischen Graphen muss die Menge der Knoten nicht unendlich sein. Die Knotenmenge eines unendlichen metrischen Graphen ist unendlich, wenn der Knotengrad eines jeden Knotens beschränkt ist.

Der Grundraum der Funktionen auf einem metrischen Graphen Γ ist

$$L^2(X_E) := \bigoplus_{e \in E} L^2(I_e) = \{f = (f_e)_{e \in E} \text{ mit } f_e \in L^2(I_e), \sum_{e \in E} \|f_e\|^2_{L^2(I_e)} < \infty\}.$$

Die dazugehörigen Sobolevräume

$$W^{1,2}(X_E) := \bigoplus_{e \in E} W^{1,2}(I_e), \qquad W^{2,2}(X_E) := \bigoplus_{e \in E} W^{2,2}(I_e)$$

werden als maximale oder entkoppelte Sobolevräume bezeichnet, da sie der ℓ^2-Summe der Sobolev-Räume über den Kanten entsprechen. Eine andere Definition fordert zusätzlich, dass die Funktionen in den Knoten stetig sein müssen. Dies ist eine zu restriktive Wahl und nur dann sinnvoll, wenn lediglich Randbedingungen betrachtet werden sollen, die auch Stetigkeitsanforderungen der Funktionen in den Knoten besitzen.

Der Sobolev-Einbettungssatz (siehe zum Beispiel Theorem 4.12 in [AF03]) besagt, dass für jede Funktion aus $W^{j+1,2}(0,l)$ ein j-mal stetig differenzierbarer Repräsentant gefunden werden kann, dessen Ableitungen bis zur Ordnung j stetig in den Rand fortgesetzt werden können. Für eine Funktion $f \in W^{1,2}(I_e)$ existieren somit die Grenzwerte

$$f(0) := \lim_{t\to 0} f(t) \qquad \text{und} \qquad f(l(e)) := \lim_{t\to l(e)} f(t).$$

Dies berechtigt von Randwerten der Sobolev-Funktionen zu sprechen. Analog existieren für eine Funktion $f \in W^{2,2}(I_e)$ die sogenannten ausgehenden Ableitungen

$$f'(0) := \lim_{t\to 0} f'(t) \qquad \text{und} \qquad f'(l(e)) := -\lim_{t\to l(e)} f'(t).$$

Mit der Wahl des Vorzeichens bei Endpunkten einer Kante ist die Richtung einer Kante belanglos. Denn es ergeben sich dieselben Randwerte und Ableitungen einer Funktion, egal in welche Richtung die Kante zeigt. Es gibt keine Verbote eine Kante entgegen ihrer Richtung zu durchlaufen, weshalb auch nicht von einem gerichteten metrischen Graphen gesprochen wird.

Wird für eine Funktion $f \in W^{1,2}(0,l)$ der stetige Repräsentant betrachtet, dann können die Beträge der Funktionswerte durch die Sobolev-Norm der Funktion abgeschätzt werden. Wichtig ist dies vor allem für die Randwerte dieser Funktionen, für welche der folgende Satz bewiesen werden kann:

Satz 1.1.2. *Für jede Funktion $f \in W^{1,2}(0,l)$ und a mit $0 < a \leq l$ gilt:*

$$|f(0)|^2 \leq \frac{2}{a}\|f\|^2_{L^2(0,l)} + a\|f'\|^2_{L^2(0,l)}. \tag{1.1}$$

Beweis. Dieser Satz kann durch elementare Rechnung nur durch Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung bewiesen werden und ist auch als Lemma 8 in [Kuc04] oder als Hilfssatz 3.3.1 in [Sch06] zu finden. Es gilt:

$$f(0) \quad = \quad f(x) - \int_0^x f'(t)dt \qquad \text{für alle } x \in [0,l].$$

Beträge setzen, quadrieren und integrieren von 0 bis a liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(0)|^2 dx &\leq 2\int_0^a |f(x)|^2 dx + 2\int_0^a \left|\int_0^l \mathbb{1}_{[0,x]} f'(t)dt\right|^2 dx \\ a|f(0)|^2 &\underset{\text{CS Ungl.}}{\leq} 2\|f\|^2_{L^2(0,a)} + 2\int_0^a \|\mathbb{1}_{[0,x]}\|^2_{L^2(0,l)}\|f'\|^2_{L^2(0,l)}dx \\ &\leq 2\|f\|^2_{L^2(0,l)} + 2\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\|f'\|^2_{L^2(0,l)}.\end{aligned}$$

□

Der Satz ist von großer Bedeutung, denn wenn er gleichmäßig auf dem ganzen metrischen Graphen angewendet werden kann, liefert er Endlichkeit für viele wichtige Beziehungen. Er ist die wichtigste Zutat für fast alle Resultate des ersten Kapitels. Ist er nicht mehr gleichmäßig anwendbar, dann gibt es kaum noch vergleichbare Aussagen – siehe dazu auch Abschnitt 1.6. Seine erste Anwendung besteht darin zu zeigen, dass alle Randwerte einer Funktion ℓ^2-summierbar sind:

Für eine Funktion $f = (f_e)_{e\in E} \in W^{1,2}(X_E)$ und jeden Knoten $v \in V$ werden die Randwerte von (f_e) über alle Kanten e, die in v enden oder beginnen, in dem Vektor $f(v)$ gesammelt

$$f(v) := (f_e(t))_{(e,t)\in E_v}.$$

Analog wird für $f \in W^{2,2}(X_E)$ der Vektor $f'(v) = (f'_e(t))_{(e,t)\in E_v}$ der ausgehenden Ableitungen gesetzt. Gibt es für alle zu v adjazenten Kanten eine Mindestlänge u_v, dann kann durch (1.1) die ℓ^2-Norm der Vektoren $f(v)$ und $f'(v)$ nach oben durch die Sobolev-Norm von f abgeschätzt werden und es folgt $f(v), f'(v) \in \ell^2(E_v;\mathbb{C})$. Weiter werden die Vektoren $f(v)$ und der Ableitung $f'(v)$, in Vektoren der Randwerte einer Funktion auf dem ganzen Graphen gesammelt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(f) &= (f(v))_{v\in V} = \big((f_e(t))_{(e,t)\in E_v}\big)_{v\in V}, \\ \operatorname{tr}(f') &= (f'(v))_{v\in V} = \big((f'_e(t))_{(e,t)\in E_v}\big)_{v\in V}.\end{aligned}$$

Gibt es eine Kantenlängenbeschränkung nach unten für alle Kanten, dann sind auch diese Vektoren ℓ^2-summierbar.

Als nächstes soll der Raum, der auf den Knoten („dem Rand“) verschwindenden, Sobolev-Funktionen definiert werden. Der Funktionenraum $W^{k,p}_0(X_E)$ ist der Abschluss von $C^\infty_0(X_E) = \prod_{e\in E} C^\infty_0(I_E) \cap W^{k,p}(X_E)$ in $W^{k,p}(X_E)$. Es ergeben sich

$$\begin{aligned}W^{1,2}_0(X_E) &= \{f \in W^{1,2}(X_E) \text{ mit } f(v) = 0 \text{ für alle } v \in V\}, \\ W^{2,2}_0(X_E) &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v) = f'(v) = 0 \text{ für alle } v \in V\}.\end{aligned}$$

Diese Räume sind für bestimmte Situationen wichtig – zum Beispiel für die Definition von minimalen und maximalen Operatoren und zum Studium von selbstadjungierten Erweiterungen bzw. Einschränkungen dieser. Ein verwandter Raum ist der Raum aller Sobolev-Funktionen mit kompaktem Träger, welcher üblicherweise im Raum der auf dem Rand verschwindenden Sobolev-Funktionen enthalten ist. Da die Zusammenhangskomponenten des kompakten Trägers mehrere Kanten enthalten dürfen, ist das hier nicht mehr der Fall, denn eine Funktion mit kompaktem Träger muss in einem Knoten nicht verschwinden. Die genaue Definition der Räume $W^{k,p}_{\mathrm{komp}}(X_E)$ wird in Abschnitt 2.3 vorgestellt.

Anhand der Randvektoren $f(v)$ und $f'(v)$ können nun Randbedingungen festgelegt werden, um selbstadjungierte Differentialoperatoren zu bestimmen. Die Randbedingungen sind nötig, denn der Laplace-Operator Δ ist auf $W^{2,2}_0(X_E)$ nicht selbstadjungiert, sondern nur symmetrisch und sein adjungierter Operator ist auf $W^{2,2}(X_E)$ definiert.

Weiterhin soll der selbstadjungierte Laplace-Operator möglichst nach unten beschränkt sein, weswegen immer vom „negativen“ Laplace-Operator $-\Delta$ ausgegangen wird. Dieser kann nach unten beschränkt sein, was am einfachsten durch partielle Integration sichtbar wird:

$$\langle -\Delta f, f\rangle = \langle f', f'\rangle + \sum_{e\in E} -f'_e(t)f_e(t)\Big|_0^{l(e)} \qquad \text{für alle } f \in W^{2,2}(X_E).$$

Die Summe auf der rechten Seite kann endlich sein – sie wird ausführlich im weiteren Verlauf dieses Kapitels studiert – wohingegen das Skalarprodukt $\langle f', f'\rangle$ nicht durch $\langle f, f\rangle$ beschränkt werden kann.

Definition 1.1.3. Ein metrischer Graph Γ mit einem selbstadjungierten Differentialoperator heißt Quantengraph.

Die im Folgenden untersuchten Quantengraphen haben oft gewisse Einschränkungen. Meist werden bestimmte Eigenschaften der metrischen Graphen vorausgesetzt und eine spezielle Wahl der Parametrisierung der Randbedingungen gefordert. Deswegen wird nur von metrischen Graphen mit selbstadjungiertem negativem Laplace-Operator die Rede sein, obwohl diese Quantengraphen sind.

Als nächstes wird die wichtigste Art der Parametrisierung der Randbedingungen vorgestellt.

Definition 1.1.4. Sei Γ ein metrischer Graph mit einer gleichmäßigen Beschränkung der Kantenlänge nach unten. Eine Randbedingung der Form (RB:P,L) besteht aus einem Paar (P, L), bestehend aus einer Familie $P = (P_v)_{v\in V}$ von orthogonalen Projektionen $P_v : \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \longrightarrow \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ auf abgeschlossene Unterräume von $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$ und einer Familie $L = ((L_v, \mathrm{D}(L_v)))_{v\in V}$

selbstadjungierter Operatoren $L_v : \mathrm{D}(L_v) \subset (1-P_v)\left(\ell^2(E_v;\mathbb{C})\right) \longrightarrow (1-P_v)\left(\ell^2(E_v;\mathbb{C})\right)$.

Der negative Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L) ist definiert durch:

$$\begin{aligned} H^{P,L} f &= -f'', \\ \mathrm{D}(H^{P,L}) &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } \forall\, v \in V : f(v) \in \mathrm{D}(L_v), \\ &\qquad\qquad L_v f(v) + (1-P_v) f'(v) = 0\}. \end{aligned}$$

Der positive Teil L_v^+ von L_v sei für alle $x \in \mathrm{D}(L_v)$ folgendermaßen definiert:

$$L_v^+ x := L_v P_{[0,\infty)}(L_v) x,$$

wobei $P_{[0,\infty)}$ die Spektralprojektion auf das Intervall $[0,\infty)$ darstellt. Analog sei der negative Teil L_v^- definiert. Dann sind L_v^+ und $-L_v^-$ nicht-negative selbstadjungierte Operatoren die $\mathrm{D}(L_v)$ auf $\mathrm{D}(L_v)$ abbilden. Für L_v gilt die Zerlegung

$$L_v x = L_v^+ x + L_v^- x \text{ für alle } x \in \mathrm{D}(L_v).$$

In der Literatur wurden schon einige Fälle von Parametrisierungen von Randbedingungen und wichtige Eigenschaften metrischer Graphen studiert:

Bemerkung 1.1.5.

1. Kostrykin und Schrader bewiesen 1999 in [KS99] auf einem Sterngraphen, d.h. einem Knoten mit n unendlich langen Kanten: Für $n \times n$-Matrizen A und B mit $\operatorname{rank}(A,B) = n$ ist der negative Laplace-Operator $H^{(A,B)}$ mit dem Definitionsbereich $D(H^{(A,B)}) = \{f \in W^{2,2}(X_E)$ mit $Af(v) + Bf'(v) = 0\}$ und $H^{(A,B)} f = -f''$ genau dann selbstadjungiert, wenn AB^* selbstadjungiert ist.

2. Peter Kuchment bewies 2004 in [Kuc04], dass sich die Randbedingungen aus 1. für endlichen Knotengrad umschreiben lassen in die Form (RB:P,L). Dabei ist P die orthogonale Projektion auf $\ker B$ und $L : (1-P)\left(\mathbb{C}^{E_v}\right) \to (1-P)\left(\mathbb{C}^{E_v}\right)$ mit $L = B^{-1}A(1-P)$ ein selbstadjungierter Operator. Weiter wurde gezeigt: Der Operator $H^{P,L}$ mit

   $$\begin{aligned} \mathrm{D}(H^{P,L}) &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } \forall\, v \in V : P_v f(v) = 0, \\ &\qquad\qquad L_v f(v) + (1-P_v) f'(v) = 0\} \\ H^{P,L} f &= -f'' \end{aligned}$$

   ist selbstadjungiert unter drei Einschränkungen an den metrischen Graphen Γ und die Randbedingungen der Form (RB:P,L):

   a) Es gibt eine gleichmäßige Beschränkung der Kantenlänge nach unten durch $l(e) \geq u > 0$ für alle Kanten $e \in E$,

b) der Knotengrad in jedem Knoten ist endlich: $d_v < \infty$ für alle $v \in V$,

c) und die Norm des Operators L_v aus den Randbedingungen ist gleichmäßig beschränkt durch $\|L_v\| \leq S$ für alle $v \in V$.

3. Enorm wichtig ist der Sobolev-Satz 1.1.2, welcher nur dann sinnvoll, d.h. gleichzeitig auf dem ganzen metrischen Graphen, ausgenutzt werden kann, wenn es eine gleichmäßige Beschränkung der Kantenlängen nach unten gibt:

$$\exists\ u > 0 \text{ mit } l(e) \geq u \text{ für alle } e \in E. \qquad \text{(geom:}u\text{)}$$

Aus dem Sobolevsatz folgt für $h \in W^{1,2}(X_E)$ und jedes ε mit $0 < \varepsilon \leq u$:

$$|h_e(0)|^2 \leq \frac{2}{\varepsilon}\|h_e\|^2_{L^2(I_e)} + \varepsilon\|h'_e\|^2_{L^2(I_e)}. \tag{1.2}$$

Wird über alle Anfänge/Enden von Kanten summiert, für die $(e,t) \in E_v$ gilt, dann ergibt sich:

$$\sum_{(e,t)\in E_v} |h_e(t)|^2 = |h(v)|^2 \leq 2 \cdot \sum_{e\sim v} \left(\frac{2}{\varepsilon}\|h_e\|^2_{L^2(I_e)} + \varepsilon\|h'_e\|^2_{L^2(I_e)} \right). \tag{1.3}$$

Das Summieren von (1.3) über alle Knoten v aus V liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{v\in V} \sum_{(e,t)\in E_v} |h_e(t)|^2 &= \sum_{v\in V} |h(v)|^2 \\ &\leq 2 \sum_{e\in E} \left(\frac{2}{\varepsilon}\|h_e\|^2_{L^2(I_e)} + \varepsilon\|h'_e\|^2_{L^2(I_e)} \right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Für die Halb-Beschränktheit des negativen Laplace-Operators wird folgende Eigenschaft der Familie (L_v) eine wichtige Rolle spielen:

$$\exists\ S > 0 \text{ mit } \langle L_v^+ x, x\rangle \leq S\langle x, x\rangle \text{ für alle } x \in \mathrm{D}(L_v) \text{ und } v \in V. \qquad \text{(RB:}S\text{)}$$

Definition 1.1.6. Sei Γ ein metrischer Graph und Randbedingungen der Form (RB:P,L) gegeben, welche Annahme (RB:S) erfüllen. Dann werden diese Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) genannt.

Bemerkung 1.1.7. Für einen metrischen Graphen mit einer Kantenlängenbeschränkung nach unten in jedem Knoten, d.h. es gibt ein $u_v > 0$ mit $l(e) \geq u_v$ für alle Kanten e, die in v beginnen oder enden, ist $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$ der richtige Raum. Das heißt, es gilt:

(i) Für jede Funktion $f \in W^{1,2}(X_E)$ ist $f(v) \in \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ für alle $v \in V$. Damit gilt auch $f \in W^{2,2}(X_E) \Rightarrow f'(v) \in \ell^2(E_v;\mathbb{C})$.

(ii) Für alle $x,\ y \in \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ gibt es eine Funktion $f \in W^{2,2}(X_E)$ mit $f(v) = x$ und $f'(v) = y$.

Beweis. (i) gilt wegen (1.3).

(ii) Für beliebiges $x,\ y \in \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ wird eine Funktion f folgendermaßen gewählt: f_e wird auf einer Kante e mit $(e,t) \in E_v$ so gesetzt, dass f_e auf dem Intervall der Länge $\frac{u_v}{2}$ mit Randpunkt t dem Polynom dritten Grades mit Funktionswert $x_{(e,t)}$ und Ableitung $y_{(e,t)}$ in t und Funktionswert und Ableitung Null am anderen Randpunkt des Intervalls entspricht. Auf noch nicht festgelegten Kanten und Teilen von Kanten wird $f_e(x)$ gleich Null gesetzt.

Die Norm $\|f_e\|_{W^{2,2}(0,l)}$ kann dann mit $c(u_v)(|x_{(e,t)}|^2 + |y_{(e,t)}|^2)$ abgeschätzt werden, wobei $c(u_v)$ eine Konstante ist, die nur von u_v abhängt. Damit folgt aus der ℓ^2-Summierbarkeit von $\big(x_{(e,t)}\big)_{(e,t)\in E_v}$ und $\big(y_{(e,t)}\big)_{(e,t)\in E_v}$ die Endlichkeit der $W^{2,2}(X_E)$-Norm von f. □

Als letzte Grundlage für metrische Graphen wird nun noch eine Metrik auf diesen eingeführt.

Definition 1.1.8. Sei Γ ein metrischer Graph. Die Abbildung $\mathfrak{d} : X_\Gamma \times X_\Gamma \to [0,\infty)$ wird definiert durch

$$\mathfrak{d}(x,y) := \inf\{|p(x,y)| \text{ mit } p(x,y) \text{ ist Pfad von } x \text{ nach } y\},$$

wobei $|p(x,y)|$ die Länge des Pfades von x nach y darstellt und mit dem Lebesgue-Maß berechnet werden kann.

Die Abbildung $\mathfrak{d}$ ist eine Halbmetrik auf X_Γ und für metrische Graphen mit einer gleichmäßigen Kantenlängenbeschränkung nach unten, d.h. (geom:u), eine Metrik. Dies kann in Abschnitt 2.2 in [Sch06] nachgelesen werden.

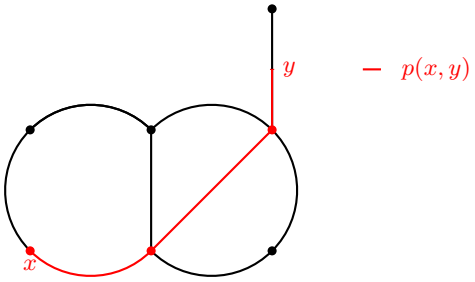


Abbildung 1.2: Kürzester Pfad von x nach y.

Definition 1.1.9. Eine abgeschlossene Umgebung eines Punktes x_0 aus X_Γ mit Radius r ist die Menge aller Punkte aus X_Γ die höchstens Abstand r zu x_0 haben und diese wird mit $B_r(x_0)$ bezeichnet:

$$B_r(x_0) = \{x \in X_\Gamma \text{ mit } \mathfrak{d}(x_0, x) \leq r\}.$$

Für einen metrischen Graphen muss keine Einbettung in den Raum $\mathbb{R}^d$ existieren. Wenn diese existiert, dann hängt der Abstand zweier Punkte x und y auf dem metrischen Graphen $\mathfrak{d}(x, y)$ nicht vom euklidischen Abstand – $\|x - y\|$ – im $\mathbb{R}^d$ ab. Deshalb sind einige der folgenden Abbildungen von metrischen Graphen und Umgebungen von Knoten nur zur Veranschaulichung gedacht und so wie sie dargestellt sind mathematisch falsch. Allerdings tragen sie zum Verständnis des jeweiligen Sachverhaltes bei, was bei einer mathematisch korrekten Darstellung von Umgebungen auf metrischen Graphen nicht der Fall ist.

In den folgenden Abschnitten wird noch ein weiterer Abstand notwendig.

Definition 1.1.10. Der Abstand zweier Teilmengen A, B eines metrischen Raumes (X, d) sei definiert als

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Dies ist keine Halbmetrik, denn es gilt keine Dreiecksungleichung. Allerdings gilt für zwei Mengen A, $B \subset X$ und einen einzelnen Punkt $\lambda \in X$:

$$\operatorname{dist}(A, B) \leq \operatorname{dist}(A, \{\lambda\}) + \operatorname{dist}(\{\lambda\}, B). \tag{1.5}$$

1.2 Erweiterte Randbedingungen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der negative Laplace-Operator mit den Randbedingungen der Form (RB:P,L) auf einem metrischen Graphen mit (geom:u) selbstadjungiert ist.

Ein wichtiger Hilfssatz über Funktionen aus $W^{2,2}(X_E)$, der mit Hilfe der Kantenlängenbeschränkung nach unten und der Sobolevabschätzung (1.1) gewonnen wird, ist der folgende:

Hilfssatz 1.2.1. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u). *Für alle f, $g \in W^{2,2}(X_E)$ gilt:*

$$\langle f, -g'' \rangle - \langle -f'', g \rangle = \sum_{v \in V} \langle f(v), g'(v) \rangle - \sum_{v \in V} \langle f'(v), g(v) \rangle.$$

Beweis. Zweimalige partielle Integration von $\langle f, -g'' \rangle$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\langle f, -g'' \rangle_{L^2(X_E)} &= \sum_{e \in E} \int_{I_e} -f_e(x)\overline{g_e''(x)}\, dx \\
&= \sum_{e \in E} -f_e(x)\overline{g_e'(x)}\Big|_0^{l(e)} - \sum_{e \in E} \int_0^{l(e)} -f_e'(x)\overline{g_e'(x)}\, dx \\
&= \sum_{e \in E} -f_e(x)\overline{g_e'(x)}\Big|_0^{l(e)} + \sum_{e \in E} f_e'(x)\overline{g_e(x)}\Big|_0^{l(e)} \\
&\qquad - \sum_{e \in E} \int_0^{l(e)} f_e''(x)\overline{g_e(x)}\, dx \\
&= \sum_{e \in E} -f_e(x)\overline{g_e'(x)}\Big|_0^{l(e)} + \sum_{e \in E} f_e'(x)\overline{g_e(x)}\Big|_0^{l(e)} + \langle -f'', g \rangle.
\end{aligned}$$

Die Summen

$$\sum_{e \in E} -f_e(x)\overline{g_e'(x)}\Big|_0^{l(e)} + \sum_{e \in E} f_e'(x)\overline{g_e(x)}\Big|_0^{l(e)} \tag{1.6}$$

sollen zu

$$\sum_{v \in V} \langle f(v), g'(v) \rangle - \sum_{v \in V} \langle f'(v), g(v) \rangle$$

umsortiert werden. Dies stimmt nur, wenn die Summen in (1.6) absolut konvergent sind. Aus (1.2) folgt für $\varepsilon = u$:

$$|f_e(0)|^2 \leq \left(\frac{2}{u} + u \right) \|f_e\|^2_{W^{1,2}(I_e)} \leq c \|f_e\|^2_{W^{2,2}(I_e)}.$$

Analog kann dieselbe Abschätzung für $|f_e(l(e))|^2$, $|f_e'(0)|^2$ und $|f_e'(l(e))|^2$ aus (1.2) gewonnen werden. Also folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in E} |f_e(x)\overline{g_e'(x)}\Big|_0^{l(e)}| &\leq \sum_{e \in E} \left(|f_e(l(e))||\overline{g_e'(l(e))}| + |f_e(0)||\overline{g_e'(0)}| \right) \\
&\leq \sum_{e \in E} \sqrt{c}\, \|f_e\|_{W^{2,2}(I_e)} \sqrt{c}\, \|\overline{g_e}\|_{W^{2,2}(I_e)} \\
&\qquad + \sqrt{c}\, \|f_e\|_{W^{2,2}(I_e)} \sqrt{c}\, \|\overline{g_e}\|_{W^{2,2}(I_e)} \\
&\leq 2c \sum_{e \in E} \|f_e\|_{W^{2,2}(I_e)} \|g_e\|_{W^{2,2}(I_e)} \\
&\leq c \sum_{e \in E} \left(\|f_e\|^2_{W^{2,2}(I_e)} + \|g_e\|^2_{W^{2,2}(I_e)} \right) \\
&= c \left(\|f\|^2_{W^{2,2}(X_E)} + \|g\|^2_{W^{2,2}(X_E)} \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Für die zweite Summe kann dies analog ausgeführt werden. Somit folgt mit der Notation von ausgehenden Ableitungen:

$$\sum_{e\in E} -f_e(x)\overline{g'_e(x)}\big|_0^{l(e)} = \sum_{v\in V}\langle f(v), g'(v)\rangle \quad \text{und}$$
$$\sum_{e\in E} f'_e(x)\overline{g_e(x)}\big|_0^{l(e)} = -\sum_{v\in V}\langle f'(v), g(v)\rangle. \qquad \square$$

Mit diesem Hilfssatz kann bewiesen werden, dass auf einem metrischen Graphen mit (geom:u) alle Randbedingungen der Form (RB:P,L) einen selbstadjungierten negativen Laplace-Operator liefern.

Satz 1.2.2. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u) *und eine Randbedingung der Form (RB:P,L) gegeben. Dann ist der negative Laplace-Operator $H^{P,L}$ mit*

$$\mathrm{D}(H^{P,L}) = \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v) \in \mathrm{D}(L_v),$$
$$L_v(1-P_v)f(v) + (1-P_v)f'(v) = 0 \ \forall\ v \in V\},$$
$$H^{P,L}f = -f''$$

selbstadjungiert.

Bemerkung 1.2.3. Es gilt:

- Aus $f(v) \in \mathrm{D}(L_v)$ folgt die übliche Eigenschaft $P_v f(v) = 0$.
- Für $\|L_v\| < \infty$ gilt $P_v(f(v)) = 0 \Leftrightarrow f(v) \in \mathrm{D}(L_v)$.

Beweis. • Zuerst wird gezeigt, dass $H^{P,L}$ symmetrisch ist. Seien f, $g \in \mathrm{D}(H^{P,L})$. Aus Hilfssatz 1.2.1 folgt:

$$\langle f, H^{P,L}g\rangle_{L^2(X_E)} - \langle H^{P,L}f, g\rangle = \sum_{v\in V}\langle f(v), g'(v)\rangle - \sum_{v\in V}\langle f'(v), g(v)\rangle. \tag{1.7}$$

Damit Symmetrie gilt, müssen die beiden Summen auf der rechten Seite sich zu Null ergänzen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn in jedem Knoten die Skalarprodukte $\langle f(v), g'(v)\rangle$ und $\langle f'(v), g(v)\rangle$ übereinstimmen. Dies ist in der Tat so: Laut Voraussetzung gilt $f(v) \in \mathrm{D}(L_v)$, d.h. $f(v) = q_1$ mit $q_1 \in \mathrm{D}(L_v)$ und $L_v(1-P_v)f(v) + (1-P_v)f'(v) = 0$, d.h. $f'(v) = -L_v q_1 + p_1$ mit $p_1 \in P(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$. Analog gilt für g: $g(v) = q_2$, $g'(v) = -L_v q_2 + p_2$ mit $q_2 \in \mathrm{D}(L_v)$ und $p_2 \in P(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$. Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle q_1, -L_v q_2\rangle - \langle -L_v q_1, q_2\rangle && \text{(da } L_v \text{ selbstadjungiert)} \\ &= \langle q_1, -Lq_2 + p_2\rangle - \langle -L_v q_1 + p_1, q_2\rangle && \text{(da } \langle q., p.\rangle = 0) \\ &= \langle f(v), g'(v)\rangle - \langle f'(v), g(v)\rangle. \end{aligned}$$

- Sei $H^* = H^{P,L^*}$. Nun wird $\mathrm{D}(H^{P,L}) \supset \mathrm{D}(H^*)$ gezeigt. Sei $f \in \mathrm{D}(H^*)$. Dann gibt es eine Funktion $h \in L^2(X_E)$ mit

$$\langle H^{P,L} g, f\rangle = \langle g, h\rangle \;\forall\; g \in \mathrm{D}(H^{P,L}). \tag{1.8}$$

Also liegt f in $W^{2,2}(X_E)$, da obige Gleichung für alle Testfunktionen auf einzelnen Intervallen I_e erfüllt ist (diese liegen im Definitionsbereich von $H^{P,L}$) und die zweite schwache Ableitung von f ist $-h$.

Es bleibt zu zeigen, dass f die Randbedingungen von $H^{P,L}$ erfüllt: Laut Hilfssatz 1.2.1 und Beziehung (1.8) gilt für alle $g \in \mathrm{D}(H^{P,L})$

$$\begin{aligned}\langle H^{P,L} g, f\rangle = \langle -g'', f\rangle &= \sum_{v\in V} \langle g'(v), f(v)\rangle - \sum_{v\in V} \langle g(v), f'(v)\rangle + \langle g, -f''\rangle \\ &= \langle g, h\rangle.\end{aligned}$$

Aus $-f'' = h$ folgt für alle $g \in \mathrm{D}(H^{P,L})$:

$$\sum_{v\in V} \langle g'(v), f(v)\rangle - \sum_{v\in V} \langle g(v), f'(v)\rangle = 0. \tag{1.9}$$

In (1.9) werden Funktionen g gewählt, die nur ungleich Null auf einer kleinen Umgebung eines beliebigen Knotens v sind (mir Radius kleiner als u), so dass $g(w) = 0$ und $g'(w) = 0$ für alle $w \in V$ mit $w \neq v$. Dann gilt

$$\langle g'(v), f(v)\rangle = \langle g(v), f'(v)\rangle. \tag{1.10}$$

Für beliebig wählbare $q_1 \in \mathrm{D}(L_v)$ und $p_1 \in P_v(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$ gibt es – laut Bemerkung 1.1.7 – Funktionen g mit $g(v) = q_1$ und $g'(v) = -L_v q_1 + p_1$. Laut (1.10) gilt:

$$\begin{aligned}\langle -L_v q_1 + p_1, f(v)\rangle &= \langle q_1, f'(v)\rangle \qquad \text{bzw.} \\ \langle -L_v q_1, f(v)\rangle + \langle p_1, f(v)\rangle &= \langle q_1, f'(v)\rangle.\end{aligned}$$

Die Wahl von $q_1 = 0$ ergibt, dass $\langle p_1, f(v)\rangle = 0$, also $f(v)$ senkrecht auf dem von P_v aufgespanntem Unterraum von $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$ steht, dies entspricht $P_v f(v) = 0$. Da $q_1 \in \mathrm{D}(L_v)$ beliebig ist, gilt nun

$$\langle -L_v q_1, f(v)\rangle = \langle q_1, f'(v)\rangle,$$

was $f(v) \in \mathrm{D}(L_v^*) = \mathrm{D}(L_v)$ entspricht und den zweiten Teil der Randbedingung ($(1 - P_v)f'(v) + L_v f(v) = 0$) liefert. □

Die Umkehrung dieses Satzes kann nicht bewiesen werden. In Abschnitt 1.5 wird gezeigt, dass jeder negative Laplace-Operator mit Knoten-Randbedingungen genau dann selbstadjungiert ist, wenn in jedem Knoten ein Lagrange'scher Unterraum für die Randbedingungen gewählt wurde. Allerdings bilden die Parametrisierungen der Randbedingungen der Form (RB:P,L) nur transversale Lagrange'sche Unterräume, welche in endlichen Randwerträumen mit den Lagrange'schen Unterräumen übereinstimmen. Ob es einen nicht transversalen Lagrange'schen Unterraum gibt ist bisher unklar. Weitere Zusammenhänge zwischen Lagrange'schen Unterräumen – welche der ursprünglichen Idee für Sterngraphen in [KS99] entsprechen – und selbstadjungierten linearen Relationen, die für Rand-Triplets – wie zum Beispiel in [BGP08] – verwendet werden, werden im Abschnitt 1.5 behandelt.

Bemerkung 1.2.4. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u) und $H^{P,L}$ ein negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L). Dann gilt die allgemeine Darstellung

$$\begin{aligned}\langle H^{P,L} f, g\rangle &= \sum_{v\in V}\langle f'(v), g(v)\rangle + \sum_{e\in E}\int_{I_e} f_e'(x)\overline{g_e'(x)}dx \\ &= -\sum_{v\in V}\langle L_v f(v), g(v)\rangle + \langle f', g'\rangle\end{aligned}$$

für alle $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$ und alle $g \in \{h \in W^{1,2}(X_E) \text{ mit } P_v h(v) = 0 \;\forall\; v \in V\}$.

Beweis. Im Beweis des Hilfssatzes 1.2.1 wurde die erste Zeile durch einmaliges partielles Integrieren gewonnen (dafür ist $g \in W^{1,2}(X_E)$ ausreichend). Im Beweis des Satzes 1.2.2 wurde mit Hilfe der Randbedingungen gezeigt, dass die Skalarprodukte $\langle f'(v), g(v)\rangle$ den Skalarprodukten $\langle -L_v f(v), g(v)\rangle$ entsprechen, dabei wurde für g nur $P_v g(v) = 0$ benutzt. □

Bemerkung 1.2.5. Gilt $d_v < \infty$ in jedem Knoten, dann ist L_v beschränkt und der Raum $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$ vereinfacht sich zu $\mathbb{C}^{E_v}$. Für $d_v = \infty$ ergeben sich einige Änderungen gegenüber dem endlichen Fall. Beispiele und Erläuterungen dazu folgen in Abschnitt 1.3.

Weiter kann für metrische Graphen mit (geom:u) und endlichem Knotengrad gezeigt werden, dass die Einschränkung der selbstadjungierten Operatoren $H^{P,L}$ auf Funktionen f, die aus glatten Funktionen f_e bestehen, die nur auf endlich vielen Kanten nicht verschwinden und die Randbedingungen von $H^{P,L}$ erfüllen, wesentlich selbstadjungiert ist. Dazu ist folgender Hilfssatz notwendig:

Hilfssatz 1.2.6. *Für jede Funktion $f \in W^{2,2}(I)$, I ein Intervall der Form $(0, l)$ mit $l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, gibt es eine Funktion aus $C^\infty(I)$ mit den gleichen Randwerten (Funktionswerte und Ableitungen), die f beliebig nahe kommt – im $W^{2,2}$-Sinn.*

Beweis. Der Beweis orientiert sich an dem Beweis von Theorem 3.17 in [AF03] und zeigt zusätzlich zu: Für jedes $\varepsilon > 0$ und jede Funktion $f \in W^{2,2}(I)$ gibt es eine Funktion $\phi \in C^\infty(I)$ mit $\|f - \phi\|_{W^{2,2}(I)} \leq \varepsilon$, so dass ϕ zusätzlich dieselben Randwerte wie f besitzt, d.h. $\phi(0) = f(0)$ und $\phi'(0) = f'(0)$ bzw. $\phi(l) = f(l)$ und $\phi'(l) = f'(l)$ gilt.

Sei also $f \in W^{2,2}(0,l)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wird $\Omega_k = \left(\frac{1}{k}, \min\{k, l - \frac{1}{k}\}\right)$, $\Omega_{-1} = \Omega_0 = \varnothing$ gesetzt. Mit der Notation von $U_k = \Omega_{k+1} \cap \overline{\Omega_{k-1}}^c$ ergibt sich ein System offener Mengen (U_k), die $(0,l)$ überdecken. Demnach existiert eine Zerlegung der Eins für dieses System: Ψ. Seien ψ_k die Summen von endlich vielen Funktionen $\psi \in \Psi$, deren Träger in U_k enthalten sind, dann gilt $\psi \in C_0^\infty(U_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = 1$ für alle $x \in (0,l)$.

Sei J_ε der übliche Glättungskern (d.h. $\operatorname{supp} J_\varepsilon \subset U_\varepsilon(0)$), dann wird $\varepsilon_k > 0$ zu $V_k = \Omega_{k+2} \cap \overline{\Omega_{k-2}}^c$ folgendermaßen gewählt:

$$\varepsilon_k < \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \tag{1.11}$$

$$\|J_{\varepsilon_k} * (\psi_k f) - \psi_k f\|_{W^{2,2}(0,l)} = \|J_{\varepsilon_k} * (\psi_k f) - \psi_k f\|_{W^{2,2}(V_k)} < \frac{\varepsilon}{2^k}, \tag{1.12}$$

$$|J_{\varepsilon_k} * (\psi_k f)(t) - \psi_k f(t)| < \frac{1}{4(k+1)} \ \forall\ t \in V_k. \tag{1.13}$$

Wobei Beziehung (1.12) laut 3.16 in [AF03] erfüllt werden kann und (1.13) laut 2.29(e) in [AF03]. Dabei besagt

- 3.16 unter anderem, dass für $g \in W^{2,2}(0,l)$ und Ω' Teilgebiet mit $\overline{\Omega'}$ kompakt und enthalten in $(0,l)$, gilt: $\lim_{\varepsilon \searrow 0} J_\varepsilon * g = g$ in $W^{2,2}(\Omega')$.

- 2.29(e): Für $g \in C(\overline{\Omega})$ gilt $\lim_{\varepsilon \searrow 0} J_\varepsilon * g(x) = g(x)$ gleichmäßig auf Ω.

  Für (1.13) ist Voraussetzung, dass die Funktion $\psi_k f$ in $C[0,l]$ liegt. Dies gilt für jede Funktion $g \in W^{2,2}(0,l)$ und demnach für $\psi_k f$, da ψ_k Träger in $U_k \Subset (0,l)$ hat.

Aus (1.11) folgt: $J_{\varepsilon_k} * (\psi_k f)$ hat Träger in $V_k \supset U_k$, denn es gilt $\frac{1}{k+2} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Es wird $\phi = \sum_{k=1}^{\infty} J_{\varepsilon_k} * (\psi_k f)$ gesetzt. Dann sind auf allen Mengen $\Omega' \Subset (0,l)$ nur endlich viele Terme der Summe ungleich Null und somit $\phi \in C^\infty(\Omega')$ (da $f \in W^{2,2}(0,l)$ ist f beschränkt und somit $\psi_k f$ in $L^1_{\mathrm{lok}}(0,l)$, laut 2.29(a) in [AF03] ist dann $J_\varepsilon * (\psi_k f) \in C^\infty(\mathbb{R})$).

Für $x \in \Omega_k$ gilt $f(x) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(x) f(x)$ und $\phi(x) = \sum_{j=1}^{k+2} J_{\varepsilon_j} * (\psi_j f)(x)$.

Demnach folgt:

$$\begin{aligned}\|f-\phi\|_{W^{2,2}(\Omega_k)} &= \left\|\sum_{j=1}^{k+2}\psi_j f-\sum_{j=1}^{k+2}J_{\varepsilon_j}*(\psi_j f)\right\|_{W^{2,2}(0,l)}\\ &\leq \sum_{j=1}^{k+2}\|J_{\varepsilon_j}*(\psi_j f)-\psi_j f\|_{W^{2,2}(0,l)}\\ &\underset{(1.12)}{<} \varepsilon.\end{aligned}$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert dann $\|f-\phi\|_{W^{2,2}(0,l)}\leq\varepsilon$.

Sei $t\in\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$, dann gilt $\psi_n(t)\neq 0$ höchstens für $n=k$ und $n=k+1$ und $J_{\varepsilon_n}*(\psi_n f)(t)\neq 0$ höchstens für $n=k-1$, $n=k$, $n=k+1$ und $n=k+2$. f und ϕ sind stetige Funktionen/Repräsentanten:

$$\begin{aligned}|\phi(t)-f(t)| &= \left|\sum_{j=k-1}^{k+2}J_{\varepsilon_j}*(\psi_j f)(t)-\sum_{j=k}^{k+1}\psi_j f(t)\right|\\ &\leq \sum_{j=k-1}^{k+2}\left|J_{\varepsilon_j}*(\psi_j f)(t)-\psi_j f(t)\right|\\ &\underset{(1.13)}{\leq} \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\lim\limits_{t\searrow 0}\phi(t)=\lim\limits_{t\searrow 0}f(t)$.

Die Ableitungsregel für die Faltung besagt $D(g*h)=Dg*h=g*Dh$. Daraus folgt $D\phi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}J_{\varepsilon_k}*D(\psi_k f)$, da für jedes x nur endlich viele Summanden ungleich Null sind. Weiter ist für jedes $x\in\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$: $f(x)=\psi_k(x)f(x)+\psi_{k+1}(x)f(x)$ und somit $Df=\sum\limits_{k=1}^{\infty}D(\psi_k f)$. Wie f ist auch $Df\in C[0,l]$. Mit derselben Argumentation und Wahl von ε_k folgt laut 2.29(e) aus [AF03] mit

$$\left|J_{\varepsilon_k}*(\psi_k f)'(t)-(\psi_k f)'(t)\right|<\frac{1}{4(k+1)}$$

jetzt $|\phi'(t)-f'(t)|<\frac{1}{k}$ und auch $\lim\limits_{t\searrow 0}\phi'(t)=\lim\limits_{t\searrow 0}f'(t)$.

Analog funktioniert dies auch für den Endpunkt des Intervalls, sollte dieser existieren.

Damit wurde zu jeder Funktion f eine Funktion ϕ konstruiert, die sich in der $W^{2,2}(0,l)$-Norm höchstens um ein vorgegebenes ε von f unterscheidet und dieselben Randwerte in Funktion und Ableitung in Anfangs- und Endpunkt hat wie f. □

Dieser Beweis ist recht allgemein und kann mit der Definition der Mengen $\Omega_k = \left\{x \in \Omega \text{ mit } |x| < k \text{ und } \operatorname{dist}(\{x\}, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\right\}$ auf kompliziertere, höherdimensionale Gebiete erweitert werden.

Ein zweiter, einfacherer Beweis, der benutzt, dass jede Funktion aus $W^{2,2}(I)$ beliebig gut mit einer $C^\infty(I)$ Funktion genähert werden kann, ist folgender:

Zweiter Beweis. Sei $f \in W^{2,2}(0,l)$ und $\varepsilon > 0$. Sei $\phi \in C^\infty(0,l)$ eine Funktion für die $\|f-\phi\|_{W^{2,2}(0,l)} \leq \delta$ gilt – diese existiert laut letztem Beweis oder dem Beweis von 3.17 in [AF03], wobei δ später noch festgelegt wird. Dann gilt laut (1.2) für die Randwerte von $(f-\phi)$

$$|f(0)-\phi(0)|^2 \leq \left(\frac{2}{l}+l\right)\delta^2.$$

Mit den Bezeichnungen $a = f(0)-\phi(0)$, $b = f'(0)-\phi'(0)$ und bei Existenz $c = f(l)-\phi(l)$, $d = f'(l)-\phi'(l)$ ergibt sich das Polynom dritten Grades $p(x)$ mit $p(0) = a$, $p'(0) = b$, $p(l) = c$ und $p'(l) = d$ zu:

$$p(x) = a + bx - \left(\frac{2b+d}{l} + \frac{3(a-c)}{l^2}\right)x^2 + \left(\frac{2(a-c)}{l^3} + \frac{b+d}{l^2}\right)x^3.$$

Für eine Kante unendlicher Länge gilt $c = d = 0$ und l kann beliebig aus $\mathbb{R}^+$ gewählt werden.

Die $W^{2,2}$-Norm von p lässt sich abschätzen durch

$$\|p(x)\|^2_{W^{2,2}(0,l)} \leq \delta^2 \frac{q(l)}{l^4},$$

wobei $q(l)$ ein Polynom mit nicht-negativen Koeffizienten, die nicht von δ abhängen, ist.

Die Wahl von $\delta > 0$ so, dass $\delta + \delta\frac{\sqrt{q(l)}}{l^2} \leq \varepsilon$ gilt, liefert

$$\begin{aligned}\|f-(\phi+p)\|_{W^{2,2}(0,l)} &\leq \|f-\phi\|_{W^{2,2}(0,l)} + \|p\|_{W^{2,2}(0,l)} \\ &\leq \delta + \delta\frac{\sqrt{q(l)}}{l^2} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist $(\phi - p)$ eine glatte Funktion, die f auf ε genau approximiert mit denselben Randwerten wie f. □

Satz 1.2.7. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u) *und $d_v < \infty$ in jedem Knoten. Die Einschränkung des Operators $H^{P,L}$ auf $C^\infty_{\text{fin}}(H) = \{f \in \mathrm{D}(H^{P,L}) \cap C^\infty(X_E)$ mit $f_e \not\equiv 0$ auf höchstens endlich vielen Kanten$\}$ ist wesentlich selbstadjungiert.*

Dabei ist $C^\infty(X_E) = \{(f_e)_{e\in E} \text{ mit } f_e \in C^\infty(0, l(e))\}$.

Beweis. Sei $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$. Der Index $k(n) \in \mathbb{N}$ wird so gewählt, dass

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \|f_{e_j}\|^2_{W^{2,2}(I_{e_j})} \geq \|f\|^2_{W^{2,2}(X_E)} - \frac{1}{2n}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{j=k(n)+1}^{\infty} \|f_{e_j}\|^2_{L^2(I_{e_j})}, \sum_{j=k(n)+1}^{\infty} \|f'_{e_j}\|^2_{L^2(I_{e_j})}, \sum_{j=k(n)+1}^{\infty} \|f''_{e_j}\|^2_{L^2(I_{e_j})} \leq \frac{1}{2n}. \tag{1.14}$$

Sei $V_n := \{i(e_m) \,|\, m \in \{1, 2, \dots k(n)\}\} \cup \{j(e_m) \,|\, \in \mathrm{D}(j) \cap \{1, 2, \dots k(n)\}\}$ und $\psi(x)$ eine glatte Funktion die das Intervall $(0, u)$ auf $[0, 1]$ abbildet, die identisch zu eins in einer Umgebung von Null und identisch zu null in einer Umgebung von u ist. Die Abschneidefunktionen $\psi_n(x)$ werden folgendermaßen konstruiert:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \begin{cases} \psi(x) \text{ auf } (0, u) \\ \equiv 0 \text{ auf } [u, l(e)) \end{cases} & e \in E \mid i(e) \in V_n \wedge j(e) \notin V_n \\ \begin{cases} \psi(l(e) - x) \text{ auf } (l(e) - u, l(e)) \\ \equiv 0 \text{ auf } (0, l(e) - u] \end{cases} & e \in E \mid j(e) \in V_n \wedge i(e) \notin V_n \\ \equiv 0 & e \in E \mid i(e) \notin V_n \wedge j(e) \notin V_n \\ \equiv 0 & e \in E \mid i(e) \notin V_n \wedge l(e) = \infty \\ \equiv 1 & \text{auf allen restlichen Kanten.} \end{cases}$$

Es werden auf allen Kanten approximierende Funktionen $\varphi_{n,e}$ laut Hilfssatz 1.2.6 gewählt, so dass $\|f_e - \varphi_{n,e}\|^2_{W^{2,2}(I_e)} \leq \frac{1}{2n \cdot k(n)}$. Dann sind die Funktionen $f_n := \varphi_n \psi_n$ glatte Funktionen aus $C^\infty_{\mathrm{fin}}(H)$, da ψ_n nur auf endlich vielen Kanten getragen ist, mit

$$\|f_n - f\|^2_{L^2(X_E)} \leq \frac{1}{n}$$

und es folgt $f_n \xrightarrow{L^2(X_E)} f$ und analog $-\varphi''_n \psi_n \xrightarrow{L^2(X_E)} -f''$.

Also ist f_n eine glatte Funktion, die die Randbedingungen (P, L) erfüllt, da φ_n diese erfüllt. Die Funktionen ψ', ψ'' sind gleichmäßig beschränkt und somit sind auch ψ'_n und ψ''_n gleichmäßig beschränkt auf X_E und in n. Seien ψ'_n und ψ''_n gleichmäßig beschränkt durch c. Dann gilt mit Beziehung (1.14)

$$\|\varphi'_n \psi'_n\|^2_{L^2(X_E)} \leq \frac{c}{2n},$$
$$\|\varphi_n \psi''_n\|^2_{L^2(X_E)} \leq \frac{c}{2n}.$$

Zusammen folgt:

$$H^{P,L} f_n = -f''_n = -\varphi_n \psi''_n - 2\varphi'_n \psi'_n - \varphi''_n \psi_n \to -f'' = H^{P,L} f. \qquad \square$$

Es kann auch bewiesen werden, dass die Einschränkung des Operators $H^{P,L}$ auf einen metrischen Graphen mit $d_v < \infty$ in jedem Knoten auf

$$\{f \in \mathrm{D}(H^{P,L}) \cap C^\infty(X_E) \text{ mit } f \text{ hat kompakten Träger}\}$$

wesentlich selbstadjungiert ist. Dies gelingt mit approximierenden Funktionen laut Hilfssatz 1.2.6 und Abschneidefunktionen wie in Theorem 17 in [Kuc04] oder in Lemma 2.4 in [LSS08]. Für die korrekte Definition von Funktionen mit kompaktem Träger auf metrischen Graphen sei auf Abschnitt 2.3 verwiesen.

1.3 Randbedingungen und unbeschränkter Knotengrad

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele für Operatoren auf metrischen Graphen mit unbeschränktem Knotengrad gegeben. In manchen Fällen gibt es keine Änderungen gegenüber dem beschränkten Fall, in anderen jedoch gravierende Änderungen.

Begonnen wird mit den wohlbekannten Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen.

Beispiel 1.3.1. Sei ein metrischer Graph mit einem Knoten $v \in V$ mit $d_v = \infty$ gegeben.

1. Dirichlet: Für die Wahl von $A_v = Id$ und $B_v = 0$ oder $P_v = Id$ und $L_v = 0$ in der (P, L)-Notation ist der zugehörige negative Laplace-Operator $H^{(A,B)} = H^{P,L}$ offensichtlich selbstadjungiert, da alle nötigen Voraussetzungen laut Satz 1.2.2 erfüllt sind. Der Definitionsbereich enthält Funktionen die im Knoten v folgende äquivalente Randbedingung erfüllen:

$$\begin{aligned} D(H_\mathrm{D}) &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } A_v f(v) = B_v f'(v)\} \\ &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v) \in \mathrm{D}(L_v) \text{ und} \\ &\qquad\qquad L_v f(v) + (1 - P_v) f'(v) = 0\} \\ &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v) = 0\}. \end{aligned}$$

2. Neumann: Für die Wahl von $A_v = 0$ und $B_v = Id$ oder $P_v = 0$ und $L_v = 0$ in der (P, L)-Notation ist der zugehörige negative Laplace-Operator offensichtlich selbstadjungiert. Für den Definitionsbereich ergibt sich:

$$\begin{aligned} D(H_\mathrm{N}) &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } A_v f(v) = B_v f'(v)\} \\ &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v) \in \mathrm{D}(L_v) \text{ und} \\ &\qquad\qquad L_v f(v) + (1 - P_v) f'(v) = 0\} \\ &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f'(v) = 0\}. \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist der unendliche Knotengrad nicht von Bedeutung, da der Graph in den Knoten entkoppelt wird – die Randwerte einer Funktion auf einer Kante sind also unabhängig von den Randwerten der Funktion auf benachbarten Kanten.

Für gewisse Randbedingungen ist $d_v = \infty$ eine Einschränkung. Zum Beispiel liefern die δ-Randbedingungen keinen selbstadjungierten Operator mehr:

Beispiel 1.3.2. Der negative Laplace-Operator mit δ-Randbedingungen in einem Knoten v enthält alle Funktionen in seinem Definitionsbereich, die in diesem Knoten stetig sind und deren Summe aller ausgehenden Ableitungen im Knoten gleich α_v mal dem Randwert der Funktion in diesem Knoten entspricht. In Formeln ausgedrückt ergibt dies:

$$f(v) = (c, c, \ldots)^T, \qquad \sum_{(e,t)\in E_v} f_e'(t) = \alpha_v \cdot c, \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{C}.$$

In einer Gleichung könnte dies auch durch

$$\sum_{(e,t)\in E_v} f_e'(t) = \alpha_v \cdot f_e(t) \qquad \text{für alle } (e,t) \in E_v$$

ausgedrückt werden.

- Für einen Knoten mit endlichem Knotengrad kann die konkrete Form für die Darstellung mit A und B der Arbeit [Kuc04] entnommen werden. Als Projektion $1 - P_v$ ergibt sich gerade die eindimensionale Projektion auf alle Vektoren mit gleichen Komponenten. Damit ergibt sich für P_v in der üblichen Basis die Matrixdarstellung:

$$P_v = \frac{1}{d_v} \begin{pmatrix} d_v - 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & d_v - 1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & d_v - 1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & d_v - 1 \end{pmatrix}$$

  Der Operator L_v entspricht gerade der Multiplikation mit der Zahl $\frac{\alpha_v}{d_v}$, welcher genau dann selbstadjungiert ist, wenn α_v reell ist.

  Im Spezialfall $\alpha_v = 0$ entstehen die Kirchhoff-Randbedingungen, welche auch freie Randbedingungen genannt werden. Dies ist motiviert durch den Fall $d_v = 2$, für den sich aus den Randbedingungen ergibt, dass die Funktion in diesem Knoten stetig differenzierbar sein muss (also quasi keine Randbedingungen existieren). In der Literatur sind auch noch weitere Namen für diese Randbedingungen zu finden, hier sollen sie aber immer Kirchhoff-Randbedingungen genannt werden.

- In einem Knoten mit Knotengrad unendlich gilt für alle Funktionen, die die δ-Randbedingungen erfüllen, dass diese in dem Knoten gleich Null sind ($f(v) \equiv 0$). Sonst wäre $f(v) \notin \ell^2(E_v;\mathbb{C})$. Damit ergibt sich als Bedingung an die Funktionen

$$f(v) = (0,0,\ldots)^T, \qquad \sum_{(e,t)\in E_v} f_e'(t) = \alpha_v \cdot 0,$$

es fallen also alle δ-Randbedingungen und die Kirchhoff-Randbedingungen zusammen.

Der Versuch eine Parametrisierung der Form (RB:P,L) zu konstruieren, liefert für P die identische Abbildung und $1-P$ bildet demnach alles auf Null ab. Es würden sich also Dirichlet-Randbedingungen ergeben. Das es keine Operatoren P, L mit den geforderten Eigenschaften gibt und was dies mit den Dirichlet-Randbedingungen zu tun hat, wird im folgenden Satz gezeigt:

Satz 1.3.3. *Sei ein metrischer Graph Γ mit* (geom:u) *und mindestens einem Knoten $v_0 \in V$ gegeben, der unendlichen Knotengrad hat. Der negative Laplace-Operator mit Kirchhoff-Randbedingungen in v_0 und Randbedingungen die selbstadjungierte Operatoren liefern in allen anderen Knoten, ist nicht selbstadjungiert. Der Operator ist nicht abgeschlossen und als Abschluss ergibt sich der Operator mit Dirichlet-Randbedingungen in v_0.*

Beweis. Der zu betrachtende Operator wird mit H_{K} bezeichnet, wirkt als negativer Laplace-Operator und ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{D}(H_{\mathrm{K}}) = \{W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v) \in \mathrm{D}(L_v),\ f(v_0) \equiv 0 \text{ und } \sum_{(e,t)\in E_{v_0}} f_e'(t) = 0,$$
$$L_v f'(v) + (1-P_v)f(v) = 0 \text{ in allen Knoten } v \neq v_0\}.$$

Laut Beweis des Satzes 1.2.2 Gleichung (1.7) ist H_{K} symmetrisch, wenn

$$\sum_{v\in V} \langle f(v), g'(v)\rangle - \sum_{v\in V} \langle f'(v), g(v)\rangle = 0$$

gilt. In allen Knoten $v \neq v_0$ stimmen die beiden Skalarprodukte überein, da dort Randbedingungen der Form (RB:P,L) gewählt wurden und in v_0 ist dies offensichtlich auch der Fall, da dort $f(v_0) = g(v_0) \equiv 0$ gilt.

Sei $f \in \mathrm{D}(H_{\mathrm{K}}^*)$. Dann gilt analog zum Beweis von Satz 1.2.2, dass $f \in W^{2,2}(X_E)$ und $H_{\mathrm{K}}^* f = -f''$. Analog gilt auch Gleichung (1.9) für alle $g \in \mathrm{D}(H_{\mathrm{K}})$, wobei alle Skalarprodukte einzeln in allen Knoten $v \neq v_0$ übereinstimmen. Übrig bleibt also im Knoten v_0 mit $g(v_0) \equiv 0$:

$$\langle g'(v_0), f(v_0)\rangle = 0 \qquad \text{für alle } g \in \mathrm{D}(H_{\mathrm{K}}).$$

Für die Einträge aus $g'(v_0)$ gilt, dass ihre Summe Null ergeben muss, was für die Vektoren $(-1,1,0,0,\ldots)^T$, $(0,-1,1,0,\ldots)^T$, $(0,0,-1,1,0,\ldots)^T$ usw. erfüllt ist. Das Einsetzen aller dieser in obiger Gleichung liefert, dass $f(v_0) = c\cdot(1,1,1,\ldots)^T$ und damit automatisch $f(v_0)\equiv 0$, da $d_v=\infty$. Es gilt also $f\in \mathrm{D}(H_\mathrm{K}^*) \Rightarrow f\in W^{2,2}(X_E)$ und $f(v_0)\equiv 0$.

Umgekehrt erfüllen alle Funktionen $f\in W^{2,2}(X_E)$ mit $f(v_0)\equiv 0$, f erfüllt in $v\neq v_0$ die gegebenen Randbedingungen und alle $g\in \mathrm{D}(H_\mathrm{K})$ laut Hilfssatz 1.2.1:

$$\langle H_\mathrm{K} g, f\rangle = \langle g, -f''\rangle + \sum_{v\in V}\langle g'(v), f(v)\rangle - \sum_{v\in V}\langle g(v), f'(v)\rangle.$$

Da in allen Knoten $v\neq v_0$ selbstadjungierte Randbedingungen gewählt wurden und in v_0 die Gleichheit $f(v_0)=g(v_0)\equiv 0$ gilt, gilt in jedem Knoten $\langle g'(v), f(v)\rangle = \langle g(v), f'(v)\rangle$ und insgesamt:

$$\langle H_\mathrm{K} g, f\rangle = \langle g, -f''\rangle \qquad \text{für alle } g\in \mathrm{D}(H_\mathrm{K}).$$

Also ist

$$\mathrm{D}(H_\mathrm{K}^*) = \{f\in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v)\in \mathrm{D}(L_v),\ f(v_0)=0, \\ L_v f(v) + (1-P_v)f'(v) = 0\ \forall\ v\neq v_0\}.$$

Der Operator H_K^* entspricht also dem Operator H_D mit Dirichlet-Randbedingungen bei v_0, welcher selbstadjungiert und abgeschlossen ist. Nun folgt

$$\overline{H_\mathrm{K}} = H_\mathrm{K}^{**} = (H_\mathrm{D})^* = H_\mathrm{D}. \qquad \square$$

Analoges gilt für δ'-Randbedingungen, bei denen die Rollen von f und f' vertauscht sind, d.h. es liegen alle Funktionen im Definitionsbereich, die

$$\sum_{(e,t)\in E_v} f_e(t) = \alpha\cdot f_e'(t) \qquad \text{für alle } (e,t)\in E_v$$

erfüllen. Für einen Knoten mit Knotengrad unendlich ergeben sich – in Analogie zum Fall von δ-Randbedingungen – im Abschluss Neumann-Knotenrandbedingungen.

Es gibt metrische Graphen und Randbedingungen für die $d_v=\infty$ keine trivialen Randbedingungen und auch keine Entkopplung des Graphen bedeutet:

Beispiel 1.3.4. Für einen metrischen Graphen mit (geom:u) und wenigstens einem Knoten v mit $d_v=\infty$ werden – in diesem Knoten – die folgenden

Randbedingungen betrachtet:

$$Px = 0 \qquad \text{für alle } x \in \ell^2(E_v, \mathbb{C}),$$

$$Lx = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots & \frac{1}{2^n} & \cdots \\ \frac{1}{4} & & & & & \\ \frac{1}{8} & & & & & \\ \cdots & & & 0 & & \\ \frac{1}{2^n} & & & & & \\ \cdots & & & & & \end{pmatrix} x.$$

Dann gilt: L ist beschränkt, da

$$\begin{aligned} \|Lx\|_{\ell^2(E_v,\mathbb{C})} &= \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_k \right)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} x_1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{8} x_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|x\| \end{aligned}$$

und L ist offensichtlich selbstadjungiert.

Dann gibt es für beliebiges $x \in \ell^2(E_v; \mathbb{C})$ und $y = -Lx$ laut Bemerkung 1.1.7 eine Funktion $f \in W^{2,2}(X_E)$ mit $f(v) = x$ und $f'(v) = y$. Die Struktur des Graphen geht nicht verloren, da in die erste Komponente von $y = f'(v)$ alle Einträge aus $x = f(v)$ eingehen. Da $x \in \ell^2(E_v; \mathbb{C})$ beliebig wählbar ist, treten Funktionen f auf, für die sowohl der Vektor $f(v)$ als auch der Vektor $f'(v)$ nicht trivial ist, d.h. unendlich viele Komponenten sind ungleich Null. Es können sogar alle Einträge ungleich Null sein (z.B. für $x_n = \frac{1}{n}$).

1.4 Quadratische Form und halbbeschränkter Operator

In [Kuc04] wurde gezeigt, dass $H^{P,L}$ selbstadjungiert ist, indem eine assoziierte quadratische Form zu $H^{P,L}$ gefunden wurde. Die Voraussetzungen waren, dass $d_v < \infty$ in allen Knoten und $\|L_v\|$ gleichmäßig beschränkt ist. Im Folgenden wird charakterisiert, wann genau der selbstadjungierte Operator $H^{P,L}$ aus Satz 1.2.2 eine assoziierte quadratische Form besitzt, d.h. nach unten beschränkt ist, und diese angegeben.

Satz 1.4.1. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u)*. Sei $H^{P,L}$ der negative Laplace-Operator mit einer Randbedingung der Form (RB:P,L) aus Satz 1.2.2. Der Operator $H^{P,L}$ ist genau dann nach unten beschränkt, wenn L_v^+ gleichmäßig nach oben beschränkt ist, d.h. wenn die Randbedingungen die Form (RB:P,L,S) haben.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei $H^{P,L}$ nach unten beschränkt. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\langle H^{P,L} f, f\rangle \geq c\|f\|^2$ für alle $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$. Laut Bemerkung 1.2.4 gilt

$$\begin{aligned}\langle H^{P,L} f, f\rangle_{L^2(X_E)} &= \sum_{v\in V} \langle -L_v f(v), f(v)\rangle_{\ell^2(E_v;\mathbb{C})} + \|f'\|^2_{L^2(X_E)} \\ &\geq c\|f\|^2_{L^2(X_E)}.\end{aligned}$$

Mit $L_v f(v) = L_v^+ f(v) + L_v^- f(v)$ ergibt dies:

$$\sum_{v\in V} \langle L_v^+ f(v), f(v)\rangle \leq -c\|f\|^2_{L^2(X_E)} + \|f'\|^2_{L^2(X_E)} - \sum_{v\in V} \langle L_v^- f(v), f(v)\rangle. \tag{1.15}$$

Zu zeigen ist, dass L_v^+ gleichmäßig nach oben beschränkt ist, d.h.

$$\forall\ v \in V \text{ gilt } \langle L_v^+ x, x\rangle_{\ell^2(E_v;\mathbb{C})} \leq \mathcal{C}\|x\|_{\ell^2(E_v;\mathbb{C})}\ \forall\ x \in \mathrm{D}(L_v) \tag{1.16}$$

für ein $\mathcal{C} \geq 0$, das nicht von v abhängt. Nun gilt für $x \in \mathrm{D}(L_v)$, dass $x = x_+ + x_-$ mit $x_+ = \tilde{P}x$, $x_- = (I - \tilde{P}x)$ und damit $\langle L_v^+ x, x\rangle = \langle L_v^+ x_+, x_+\rangle$.

Es reicht also aus alle $x \in \tilde{P}(\mathrm{D}(L_v))$ in Gleichung (1.16) zu betrachten. Für alle Funktionen $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$, die nur um einen Knoten v getragen sind, so dass $f(v) \in \tilde{P}(\mathrm{D}(L_v))$ gilt, folgt aus (1.15) mit $L_v^- f(v) = 0$

$$\langle L_v^+ f(v), f(v)\rangle \leq \sum_{e\sim v} \left(-c\|f\|^2_{L^2(I_e)} + \|f'\|^2_{L^2(I_e)}\right). \tag{1.17}$$

Sei $x \in \tilde{P}(\mathrm{D}(L_v))$ beliebig: Es wird eine Funktion f konstruiert, die obige Eigenschaften erfüllt und deren Normen $\|f\|_{L^2(X_E)}$, $\|f'\|_{L^2(X_E)}$ sich leicht mit $\|x\|$ abschätzen lassen.

Für eine Kante mit Anfangspunkt v und Endpunkt ungleich v ist: f_e von $t = 0$ bis $t = \delta$, mit $0 < \delta < \frac{u}{4}$, linear mit $f(0) = x_{(0,e)}$ und $f_e'(0) = (-L_v x)_{(0,e)}$, damit f im Definitionsbereich von $H^{P,L}$ liegt. Ab $t = \delta$ wird stetig ein zweites lineares Teilstück angesetzt, so dass $f_e(\frac{u}{2}) = 0$ gilt. Danach ($t > \frac{u}{2}$) wird f_e identisch zu Null fortgesetzt.

Für eine Kante mit Endpunkt v und Anfangspunkt ungleich v wird dieselbe Konstruktion vorgenommen, beginnend vom Ende der Kante, für eine Schleife am Knoten v am Anfang und am Ende. Auf allen Kanten nicht adjazent zu v wird f_e identisch zu Null gewählt. Für eine solche Funktion f gilt nun zum Beispiel für eine Kante e mit $i(e) = v$, $j(e) \neq v$, $x_{(0,e)} = f_e(0) = a$ und $(-L_v x)_{(0,e)} = f_e'(0) = b$:

$$f_e(x) = \begin{cases} bx + a, & 0 < x \leq \delta \\ -\frac{b\delta + a}{\frac{u}{2} - \delta} x + \frac{b\delta + a}{\frac{u}{2} - \delta}\delta + b\delta + a, & \delta < x \leq \frac{u}{2} \\ 0, & \frac{u}{2} < x < l(e). \end{cases}$$

Für die Wahl von δ mit $0 < \delta < \min\left\{\frac{u}{4}, \left|\frac{a}{b}\right|, \frac{|a|^2}{|b|^2}\right\}$ können die $L^2(I_e)$-Normen von f_e und f_e' abgeschätzt werden durch

$$\|f\|^2_{L^2(X_E)} = \sum_{e\sim v} \int_0^{l(e)} |f_e(x)|^2 dx \leq \frac{5}{3} u \|f(v)\|^2,$$

$$\|f'\|^2_{L^2(X_E)} = \sum_{e\sim v} \int_0^{l(e)} |f_e'(x)|^2 dx \leq \left(1 + \frac{24}{u}\right) \|f(v)\|^2.$$

Insbesondere gilt mit Beziehung (1.17):

$$\begin{aligned}\langle L_v^+ f(v), f(v)\rangle &\leq \sum_{e\sim v} \left(-c\|f\|^2_{L^2(I_e)} + \|f'\|^2_{L^2(I_e)}\right) \\ &= -\tfrac{5}{3}cu\|f(v)\|^2 + \left(1 + \frac{24}{u}\right)\|f(v)\|^2 \\ &= \left(1 + \frac{24}{u} - \tfrac{5}{3}cu\right)\|f(v)\|^2 \leq d\|f(v)\|^2,\end{aligned}$$

wobei d nur von c und von u abhängt, also der unteren Schranke des Operators $H^{P,L}$ und der unteren Schranke der Kantenlängen, nicht aber vom Knoten (oder Knotengrad).

Einziges Manko der Funktion f ist, dass sie nicht in $\mathrm{D}(H^{P,L})$ liegt, sie erfüllt zwar die Randbedingungen, ist aber keine einmal stetig differenzierbare Funktion und damit nicht in $W^{2,2}(X_E)$. Dies kann durch Glättung der Funktion an den nicht-differenzierbaren Stellen $t = \delta$ und $t = \frac{u}{2}$ bzw. $t = l(e) - \delta$ und $t = l(e) - \frac{u}{2}$, z.B. durch einsetzen einer quadratischen Parabel, ermöglicht werden.

$\Longleftarrow$: Sei $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$. Dann gilt nach Bemerkung 1.2.4

$$\begin{aligned}\langle H^{P,L} f, f\rangle &= -\sum_{v\in V}\langle L_v f(v), f(v)\rangle + \sum_{e\in E}\int_{I_e} f_e'(x)\overline{f_e'(x)}dx \\ &= -\sum_{v\in V}\langle L_v^+ f(v), f(v)\rangle - \sum_{v\in V}\langle L_v^- f(v), f(v)\rangle + \|f'\|^2_{L^2(X_E)} \\ &\geq -\sum_{v\in V}\langle L_v^+ f(v), f(v)\rangle + \|f'\|^2_{L^2(X_E)} \\ &\geq -S\sum_{v\in V}\|f(v)\|^2 + \|f'\|^2_{L^2(X_E)}.\end{aligned}$$

Mit Gleichung (1.4) ergibt dies:

$$\langle H^{P,L} f, f\rangle \geq -2S\left(\frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2}(X_E) + \varepsilon\|f'\|^2_{L^2}(X_E)\right) + \|f'\|^2_{L^2(X_E)}$$

für $\varepsilon \leq u$. Die Wahl von ε mit $1 - 2S\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ liefert

$$\langle H^{P,L} f, f\rangle \geq -\frac{4S}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2}(X_E) + \frac{1}{2}\|f'\|^2_{L^2(X_E)} \geq -\frac{4S}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2}(X_E). \quad \square$$

Damit wurde gezeigt, dass jeder selbstadjungierte Operator $H^{P,L}$ aus Satz 1.2.2, der Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) erfüllt, eine assoziierte quadratische Form besitzt. Im Folgenden wird eine Form definiert, für die Bemerkung 1.2.4 vermuten lässt, dass dies die zu $H^{P,L}$ assoziierte Form ist. Diese stimmt, unter den Voraussetzungen in [Kuc04], auch mit der dort angegebenen Form überein.

Definition 1.4.2. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u). Sei $(L_v)_{v\in V}$ eine Familie von selbstadjungierten Operatoren in $(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))_{v\in V}$, die (RB:$S$) erfüllen. Die direkte Summe der Operatoren L_v wird mit L bezeichnet, so dass $L = \bigoplus L_v$ mit

$$\mathrm{D}(L) = \Bigg\{ x = (x_v)_{v\in V} \in \bigoplus_{v\in V} \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \text{ mit } x_v \in \mathrm{D}(L_v) \text{ und } \sum_{v\in V} \|L_v x_v\|^2 < \infty \Bigg\}.$$

Bemerkung 1.4.3. Es gilt

- Der Operator $-L$ ist ein in $\bigoplus(1-P_v)(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$ dicht definierter selbstadjungierter, nach unten beschränkter Operator mit einer assoziierten Form, die mit s_L, $\mathrm{D}(s_L) = \mathrm{D}(L^{\frac{1}{2}}) \subset \bigoplus(1-P_v)(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$ bezeichnet wird und es gilt

$$s_L[x,y] = -\langle Lx, y\rangle = -\sum_{v\in V}\langle L_v x_v, y_v\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathrm{D}(L), y \in \mathrm{D}(s_L).$$

- Der Operator L und damit auch die Form s_L sind nach unten beschränkt, mit derselben größten unteren Schranke $-S$.

Definition 1.4.4. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u). Zu einer Knoten-Randbedingung der Form (RB:P,L,S) wird eine quadratische Form $\mathfrak{h}_L$ definiert:

$$\mathrm{D}(\mathfrak{h}_L) = \{f \in W^{1,2}(X_E) \text{ mit } \mathrm{tr}(f) \in \mathrm{D}(s_L)\},$$
$$\mathfrak{h}_L[f] = \|f'\|^2_{L^2(X_E)} + s_L[\mathrm{tr}(f)].$$

Bemerkung 1.4.5. • Ist L beschränkt (genau dann wenn (L_v) gleichmäßig beschränkt ist), dann gilt $\mathrm{D}(L) = \mathrm{D}(s_L) = \bigoplus(1 - P_v)(\ell^2(E_v; \mathbb{C}))$ und es gilt

$$\begin{aligned} \langle -Lx, x\rangle = s_L[x] &= \sum_{v\in V} \langle -L_v x_v, x_v\rangle, \qquad (1.18)\\ \mathfrak{h}_L[f] &= \|f'\|^2_{L^2(X_E)} + \sum_{v\in V} \langle -L_v f(v), f(v)\rangle,\\ \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L) &= \{f \in W^{1,2}(X_E) \text{ mit } P_v f(v) = 0\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die bisher bekannte Form. Die Beziehung (1.18) gilt natürlich auch für $x = \mathrm{tr}(f) \in \mathrm{D}(L)$, wenn L nicht beschränkt ist.

- Offensichtlich ist die zugehörige Sesquilinearform:

$$\mathfrak{h}_L[f, g] = \langle f', g'\rangle + s_L[\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g)] \qquad f, g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L).$$

- Sei $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$. Dann liefern alle Eigenschaften der Randbedingungen und die Sobolevungleichung:

$$\begin{aligned} \sum_{v\in V} \|L_v f(v)\|^2 = \sum_{v\in V} \|(1 - P_v)f'(v)\|^2 &\le \sum_{v\in V} \|f'(v)\|^2\\ &\le 2\left(\frac{2}{u} + u\right)\|f'\|^2_{W^{1,2}(X_E)} < \infty. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$f \in \mathrm{D}(H^{P,L}) \Rightarrow \mathrm{tr}(f) \in \mathrm{D}(L). \qquad (1.19)$$

Für die spätere Anwendungen – z.B. die Multiplikation mit Abschneide- oder Gewichtsfunktionen – ist der folgende Hilfssatz wichtig. Dieser zeigt, dass der Definitionsbereich der Form $\mathfrak{h}_L$ stabil unter Multiplikation mit in den Knoten stetigen Funktionen aus $W^{1,2}(X_E)$ ist.

Hilfssatz 1.4.6. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u) *und eine Randbedingung der Form (RB:P,L,S) gegeben. Dann gilt für jede Funktion $\varphi \in W^{1,2}(X_E)$, welche stetig in jedem Knoten $v \in V$ ist, $\varphi f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$ für alle $f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\varphi f \in W^{1,2}(X_E)$. Für die Randwerte von φf gilt:

$$(\varphi f)(v) = \varphi(v)f(v) = c_v \cdot f(v),$$

für die komplexe Konstante c_v mit $\varphi(v) = (c_v, c_v, \ldots)^T$. Damit bleibt die Randbedingung $\varphi f(v) = c_v \cdot f(v) \in \mathrm{D}(L_v)$ erfüllt. □

Auch die Quadratische Form $\mathfrak{h}_L$ ist nach unten beschränkt, wenn die Operatoren L_v^+ gleichmäßig nach oben beschränkt sind:

Hilfssatz 1.4.7. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u) *und $\mathfrak{h}_L$ die quadratische Form zu einer Randbedingung der Form (RB:P,L,S). Dann ist $\mathfrak{h}_L$ nach unten beschränkt.*

Beweis. Laut Bemerkung 1.4.3 gilt für alle $f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$

$$\begin{aligned} s_L[\mathrm{tr}(f)] &\geq -S\|\,\mathrm{tr}(f)\|^2 = -S\sum_{v\in V}\|f(v)\|^2_{\ell^2(E_v;\mathbb{C})}, \\ &\underset{(1.4)}{\geq} -2S\left(\frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(X_E)} + \varepsilon\|f'\|^2_{L^2(X_E)}\right). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Beziehungsweise umgestellt:

$$2S\varepsilon\|f'\|^2_{L^2(X_E)} + s_L[\mathrm{tr}(f)]\rangle \geq -\frac{4S}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(X_E)}.$$

Für $\varepsilon = \min\{u, \frac{1}{2S}\}$ gilt nun:

$$\mathfrak{h}_L[f] = \|f'\|^2_{L^2(X_E)} + s_L[\mathrm{tr}(f)] \geq -\frac{4S}{\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(X_E)}. \qquad \square$$

Die Abgeschlossenheit der Form $\mathfrak{h}_L$ lässt sich nicht mehr so leicht zeigen, da die durch die nach unten beschränkte Form induzierten Normen $\sqrt{\mathfrak{h}_{L,\alpha}}$ nicht mehr äquivalent zur $W^{1,2}$-Norm sind.

Hilfssatz 1.4.8. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u) *und $\mathfrak{h}_L$ die quadratische Form zu einer Randbedingung der Form (RB:P,L,S). Dann ist $\mathfrak{h}_L$ eine dicht definierte, abgeschlossene Form.*

Beweis. Der Definitionsbereich $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$ ist dicht in $L^2(X_E)$, da schon alle Funktionen aus $\oplus_{e\in E}C^\infty_{\mathrm{komp}}(I_e)$, die nur auf endlich vielen Kanten nicht identisch zu Null sind, dicht in $L^2(X_E)$ liegen, aber gleichzeitig Teilmenge von $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$ sind.

Für die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{h}_L$ muss gezeigt werden, dass $(\mathrm{D}(\mathfrak{h}_L), \sqrt{\mathfrak{h}_{L,\alpha}})$ für ein α vollständig ist, wobei:

$$\mathfrak{h}_{L,\alpha}[f] := \mathfrak{h}_L[f] + \alpha\|f\|^2 = \|f'\|^2_{L^2(X_E)} + s_L[\mathrm{tr}(f)] + \alpha\|f\|^2_{L^2(X_E)}$$

für ein α, das größer ist als die untere Schranke von $\mathfrak{h}_L$. Aus Ungleichung (1.20) folgt durch Addieren von $\|f'\|^2 + \alpha\|f\|^2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{L,\alpha}[f] &= \|f'\|^2 + s_L[\mathrm{tr}(f)] + \alpha\|f\|^2 \\ &\geq \left(-\frac{4S}{\varepsilon} + \alpha\right)\|f\|^2_{L^2(X_E)} + (-2S\varepsilon + 1)\,\|f'\|^2_{L^2(X_E)} \end{aligned}$$

für alle $\varepsilon \leq u$. Die Wahl von ε, so dass $-2S\varepsilon + 1 \geq \frac{1}{2}$ (d.h. $\varepsilon \leq \frac{1}{4S}$) und α mit $-\frac{4S}{\varepsilon} + \alpha \geq \frac{1}{2}$ liefert:

$$\mathfrak{h}_{L,\alpha}[f] \geq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(X_E)} + \frac{1}{2}\|f'\|^2_{L^2(X_E)} = \frac{1}{2}\|f\|^2_{W^{1,2}(X_E)}.$$

Die Norm $\sqrt{\mathfrak{h}_{L,\alpha}[\cdot]}$ lässt sich also nach unten mit der $W^{1,2}$-Norm für alle Funktionen $f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$ abschätzen.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\sqrt{\mathfrak{h}_{L,\alpha}}$-Cauchyfolge in $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_{L,\alpha})$, dann konvergiert diese Folge in der $W^{1,2}$-Norm in $W^{1,2}(X_E)$, laut obiger Abschätzung und der Vollständigkeit von $W^{1,2}(X_E)$. Es gibt also eine Funktion $f \in W^{1,2}(X_E)$ mit $f_n \xrightarrow{W^{1,2}} f$. Es bleibt noch zu zeigen, dass auch $f_n \xrightarrow{\sqrt{\mathfrak{h}_{L,\alpha}}} f$ gilt (d.h. zuerst ist $f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$ zu zeigen).

- Aus der Konvergenz der Folge (f_n) in $W^{1,2}(X_E)$ und (1.2) folgt, dass $f_{n,e}(t) \to f_e(t)$ für alle $(e,t) \in E_v$ und alle $v \in V$, mehr noch: Mit den Beziehungen (1.3) und (1.4) ergeben sich die Konvergenzen von $f_n(v)$ gegen $f(v)$ und $\mathrm{tr}(f_n)$ gegen $\mathrm{tr}(f)$.

- f_n ist $\sqrt{\mathfrak{h}_{L,\alpha}}$-Cauchyfolge, d.h. es gilt $\sqrt{\mathfrak{h}_{L,\alpha}[f_n - f_m]} \to 0$ für $n,\, m \to \infty$ und

  $$\mathfrak{h}_{L,\alpha}[f_n - f_m] = \|f_n' - f_m'\|^2 + s_L[\mathrm{tr}(f_n - f_m)] + \alpha\|f_n - f_m\|^2.$$

  Offensichtlich konvergiert auch $\sqrt{s_L[\mathrm{tr}(f_n - f_m)]}$ gegen 0 für $n,\, m \to \infty$. Somit ist $(\mathrm{tr}(f_n))$ Cauchyfolge in der von s_L erzeugten Norm. Da s_L eine abgeschlossene Form ist, konvergiert $\mathrm{tr}(f_n)$ gegen ein $x \in \mathrm{D}(s_L)$:

  $$\sqrt{s_L[\mathrm{tr}(f_n) - x] + \beta\|f_n - x\|} \to 0.$$

  Da $\sqrt{s_{L,\beta}[\cdot]} \geq \|\cdot\|$, gilt also $\|\mathrm{tr}(f_n) - x\| \to 0$. Weil aber $\mathrm{tr}(f_n)$ in der ℓ^2-Norm schon gegen $\mathrm{tr}(f)$ konvergiert, folgt $x = \mathrm{tr}(f)$ und somit $f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$. □

Satz 1.4.9. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u) *und $\mathfrak{h}_L$ die quadratische Form zu einer Randbedingung der Form (RB:P,L,S). Dann besitzt $\mathfrak{h}_L$ einen assoziierten, selbstadjungierten Operator $H^{P,L}$, der dem Operator aus Satz 1.2.2 entspricht:*

$$\mathrm{D}(H^{P,L}) = \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } f(v) \in \mathrm{D}(L_v),\\ L_v f(v) + (1 - P_v)f'(v) = 0 \ \forall\ v \in V\},$$
$$H^{P,L} f = -f''.$$

Der Beweis verläuft genau so wie die Beweise in [Kuc04] und [Sch06] unter den zusätzlichen Voraussetzungen $d_v < \infty$ und $\|L_v\| \leq S$ in allen Knoten $v \in V$. Das einzige was darüber hinaus noch gezeigt werden muss, ist $f \in \mathrm{D}(H^{P,L}) \Rightarrow \sum\limits_{v\in V} \|L_v f(v)\|^2 < \infty$.

Beweis. Laut dem letzten Hilfssatz hat $\mathfrak{h}_L$ einen assoziierten selbstadjungierten Operator M_L.

- Zuerst wird $\mathrm{D}(H^{P,L}) \subset \mathrm{D}(M_L)$ gezeigt. Sei $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$, dann gilt $f \in W^{1,2}(X_E)$ und $f(v) \in \mathrm{D}(L_v)$ für alle Knoten $v \in V$. Beziehung (1.19) liefert
$$\mathrm{tr}(f) \in \mathrm{D}(L) \subset \mathrm{D}(s_L) \Rightarrow f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L).$$
Es gilt
$$\mathrm{D}(M_L) = \{h \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L) \text{ mit } \exists\, g \in L^2(X_E) \text{ mit } \langle g, \phi\rangle = \mathfrak{h}_L[h,\phi] \text{ für alle } \phi \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)\}.$$
Wird $g = H^{P,L} f = -f''$ gesetzt, dann gilt laut Bemerkung 1.2.4 und (1.18)
$$\langle -f'', \phi\rangle = \langle f', \phi'\rangle - \sum_{v\in V} \langle L_v f(v), \phi(v)\rangle \overset{\mathrm{tr}(f)\in \mathrm{D}(L)}{=} \mathfrak{h}_L[f,\phi],$$
also liegt f in $\mathrm{D}(M_L)$.

- Sei $f \in \mathrm{D}(M_L)$, d.h. es gilt für alle $g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$:
$$\mathfrak{h}_L[f,g] = \langle M_L f, g\rangle = \langle f', g'\rangle + s_L[\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g)]. \tag{1.21}$$
Für Testfunktionen $\phi \in C^\infty_{\mathrm{komp}}(I_e)$ gilt $\mathbb{1}_{I_e}\phi \in \mathrm{D}(H^{P,L})$ und somit ergibt sich $s_L[\mathrm{tr}(\phi), \mathrm{tr}(f)] = 0 = s_L[\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(\phi)]$, woraus $\langle M_L f, \mathbb{1}_{I_e}\phi\rangle = \langle (M_L f)_e, \phi\rangle = -\langle f'_e, \phi'\rangle$ folgt, was bedeutet, dass f'_e eine schwache Ableitung besitzt, bzw. insgesamt $f \in W^{2,2}(X_E)$ gilt.

  Also kann in Gleichung (1.21) partiell integriert werden:
$$\langle M_L f, g\rangle = -\langle f'', g\rangle + s_L[\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g)] + \sum_{e\in E} f'(x)\overline{g(x)}|_0^{l(e)}$$
$$\langle M_L f, g\rangle = -\langle f'', g\rangle + s_L[\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g)] - \sum_{v\in V} \langle f'(v), g(v)\rangle \tag{1.22}$$
für alle Funktionen $g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$. Für diese Funktionen g gibt es eine Folge $g_n \in \prod C^\infty_{\mathrm{komp}}(I_e) \cap L^2(X_E)$ mit $g_n \to g$ in $L^2(X_E)$. Für die

Funktionen $(g - g_n)$ gilt $(g - g_n) \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$, da $g_n(v) = g_n'(v) \equiv 0$, also auch $\mathrm{tr}(g_n) \equiv 0 \in \mathrm{D}(s_L)$. Dies ergibt in (1.22) eingesetzt

$$\langle M_L f, g - g_n\rangle + \langle f'', g - g_n\rangle = s_L[\mathrm{tr}(f), \mathrm{tr}(g)] - \sum_{v\in V} \langle f'(v), g(v)\rangle.$$

Die Skalarprodukte auf der linken Seite konvergieren gegen Null, rechts folgt durch komplexes konjugieren:

$$0 = s_L[\mathrm{tr}(g), \mathrm{tr}(f)] - \sum_{v\in V} \langle g(v), f'(v)\rangle.$$

Alle Funktionen $g \in W^{1,2}(X_E)$ mit $g(v) \in \mathrm{D}(L_v)$, die nur um einen Knoten v getragen sind, liegen in $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$ und $\mathrm{tr}(g)$ ist Element von $\mathrm{D}(s_L)$, d.h. es gilt:

$$0 = \langle -L_v g(v), f(v)\rangle - \langle g(v), f'(v)\rangle,$$

was zeigt, dass $f(v) \in \mathrm{D}(L_v^*) = \mathrm{D}(L_v)$ und somit die zweite Randbedingung liefert, da

$$0 = \langle g(v), L_v f(v) + f'(v)\rangle$$

für alle $g(v) \in \mathrm{D}(L_v)$ – einer dichten Teilmenge von $(1 - P_v)(\ell^2(E_v; \mathbb{C}))$ – gilt. □

1.5 Lagrange'sche Unterräume und lineare Relationen

In diesem Abschnitt sollen nun die schon angekündigten und bisher noch nicht aufgetauchten Zusammenhänge zwischen den Randbedingungen der Form (RB:P,L) und Lagrange'schen Unterräumen angegeben werden. Es zeigt sich, dass Lagrange'sche Unterräume und selbstadjungierte lineare Relationen ein und dieselben Objekte sind. Je nach Anwendungsgebiet werden beide benutzt. Weiter wird gezeigt, dass mit diesen alle selbstadjungierten Knoten-Randbedingungen beschrieben werden.

Definition 1.5.1. Sei $(\mathcal{G}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum.

1. Die Abbildung $\Omega : (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}) \times (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}) \to \mathbb{K}$ mit

$$\Omega(x, y) = \Omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \langle x_2, y_1\rangle - \langle x_1, y_2\rangle$$

ist eine hermitesche symplektische Form. Sei S die Abbildung $S : \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \to \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$ mit $S(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$. Damit gilt $\Omega(x, y) = \langle Sx, y\rangle = \langle x_2, y_1\rangle + \langle -x_1, y_2\rangle$.

2. Ein Unterraum G der direkten Summe $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$ heißt lineare Relation. Der Unterraum

$$G^* := \{(x_1, x_2) \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \text{ mit } \langle x_1, y_2\rangle = \langle x_2, y_1\rangle \text{ für alle } (y_1, y_2) \in G\}$$

heißt adjungierte Relation zu G. Gilt $G \subset G^*$, dann heißt G symmetrisch und bei $G = G^*$ selbstadjungiert.

Mit der symplektischen Form ergibt sich $G^* = \{x \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \text{ mit } \Omega(x, y) = 0 \ \forall\ y \in G\}$.

3. Eine lineare Relation $G \subset \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$ heißt Lagrange'scher Unterraum, wenn $(SG)^\perp = G$ gilt.

Üblicherweise werden Lagrange'sche Unterräume auf eine andere Art definiert, die aber keine Verallgemeinerung auf unendlichdimensionale Hilberträume $\mathcal{G}$ erlaubt. Im Fall eines endlichdimensionalen Hilbertraumes stimmen beide Definitionen aber überein:

Hilfssatz 1.5.2. *Sei $\mathcal{G}$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum, d.h.* $\dim \mathcal{G} = d$. *Ein Unterraum $G \subset \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$ ist ein Lagrange'scher Unterraum genau dann, wenn* $\dim G{=}d$ *und $\Omega(x, y) = 0$ für alle x, $y \in \mathcal{G}$ gilt.*

Beweis. Sei G Lagrange'scher Unterraum. Dann ergibt sich aus der Gleichung $(SG)^\perp = G$ für G die Darstellung $G = \{(x_1, x_2) \text{ mit } \langle x_1, y_2\rangle + \langle x_2, -y_1\rangle = 0 \ \forall\ (y_1, y_2) \in G\}$, woraus $\Omega(x, y) = 0$ für alle x, $y \in G$ folgt. Offensichtlich gilt: $\dim SG = \dim G$ und $\dim(SG)^\perp = 2d - \dim(SG) = \dim G$, woraus $\dim G = d$ folgt.

Die Beziehung $\Omega(x, y) = 0$ für alle x, $y \in G$ liefert $\langle Sx, y\rangle = 0$ für alle x, $y \in G$ und somit $SG \subset G^\perp$. Da $\dim G = d$, ist auch $\dim G^\perp = d$ und da aus $\dim G = d$ auch $\dim SG = d$ folgt, stimmen SG und $G^\perp$ bzw. $(SG)^\perp$ und G überein. □

Hilfssatz 1.5.3. *Die Menge G ist ein Lagrange'scher Unterraum genau dann, wenn G eine selbstadjungierte lineare Relation ist.*

Beweis.

$$\begin{aligned}(SG)^\perp &= \{(x_1, x_2) \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \text{ mit } \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = 0 \ \forall\ (y_1, y_2) \in SG\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \text{ mit } \langle x_1, y_2\rangle = \langle x_2, y_1\rangle \ \forall\ (y_1, y_2) \in G\} \\ &= G^*\end{aligned}$$

Damit gilt $G^* = (SG)^\perp = G$ in beiden Fällen. □

Definition 1.5.4. Ein Lagrange'scher Unterraum $G \subset \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$ heißt transversal, wenn die Projektion auf die erste Komponente des Unterraumes injektiv ist, d.h.

$$G \cap (\{0\} \oplus Q(\mathcal{G})) = \{0\},$$

wobei Q die Projektion auf den Abschluss des Unterraumes $\{x \in \mathcal{G}$ mit $\exists\, y \in \mathcal{G} : (x, y) \in G\}$ von $\mathcal{G}$ ist.

Bemerkung 1.5.5.
1. Jeder endlichdimensionale Lagrange'sche Unterraum ist transversal. Dies entspricht Arnolds Lemma (Lemma 3.5.1 in [Arn67]).
2. Es ist unklar, ob es einen nicht transversalen unendlichdimensionalen Lagrange'schen Unterraum gibt.

Satz 1.5.6. *Sei Γ ein metrischer Graph. G ist ein transversaler Lagrange'scher Unterraum von $\ell^2(E_v;\mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ genau dann, wenn*

$$G = \{(q, Lq + p) \in \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \text{ mit } Pp = p \text{ und } q \in \mathrm{D}(L)\},$$

wobei P orthogonale Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum von $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$ ist und $L : \mathrm{D}(L) \subset (1-P)(\ell^2(E_v;\mathbb{C})) \to (1-P)(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$ ein (dicht definierter) selbstadjungierter Operator.

Beweis. $\Leftarrow$ Seien eine orthogonale Projektion $P : \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \to \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ und ein selbstadjungierter Operator $L : \mathrm{D}(L) \subset ((1-P)\ell^2(E_v;\mathbb{C})) \to ((1-P)\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$ gegeben. Der Unterraum aller Randvektoren, die durch die Randbedingungen gegeben werden, kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$G = \{(q, Lq + p) \in \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \text{ mit } q \in \mathrm{D}(L), (1-P)p = 0\}.$$

Zu betrachten ist $(SG)^\perp$.

$$\begin{aligned}(SG)^\perp = \{&(x, y) \text{ mit } \langle x, Lq + p\rangle - \langle y, q\rangle = 0 \\ &\text{für alle } q, p \text{ mit } q \in \mathrm{D}(L) \text{ und } (1-P)p = 0\}\end{aligned}$$

Die Darstellung von x, y über P und $1-P$, also $x = x_Q + x_P$, $y = y_Q + y_P$, liefert:

$$\begin{aligned}&= \{(x, y) \text{ mit } \langle x_Q, Lq\rangle + \langle x_P, p\rangle - \langle y_Q, q\rangle = 0 \\ &\qquad \text{für alle } q, p \text{ mit } q \in \mathrm{D}(L) \text{ und } (1-P)p = 0\} \\ &= \{(x, y) \text{ mit } \langle x_P, p\rangle = 0 \text{ und } \langle x_Q, Lq\rangle - \langle y_Q, q\rangle = 0 \\ &\qquad \text{für alle } q, p \text{ mit } q \in \mathrm{D}(L) \text{ und } (1-P)p = 0\}.\end{aligned}$$

Aus dem zweiten Teil folgt $x_Q \in \mathrm{D}(L^*) = \mathrm{D}(L)$ und damit

$$\begin{aligned}&= \{(x_Q + x_P, y_Q + y_P) \text{ mit } x_P = 0 \text{ und } Lx_Q - y_Q = 0\} \\ &= G.\end{aligned}$$

⇒ Sei G ein Lagrange'scher Unterraum von $\ell^2(E_v;\mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v;\mathbb{C})$. Dann ist $G_1 := \{x_1 \in \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \text{ mit } \exists\, x_2 \in \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \text{ so dass } (x_1,x_2) \in G\}$ ein Unterraum von $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$. Allerdings ist G_1 im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

Die orthogonale Projektion von $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$ auf $G_1^\perp$ wird mit P bezeichnet, $1-P$ ist dann die orthogonale Projektion auf $\overline{G_1}$, den Abschluss von G_1.

$G = (SG)^\perp = \{(x_1,x_2) \text{ mit } \langle x_1,y_2\rangle - \langle x_2,y_1\rangle = 0 \text{ für alle } (y_1,y_2) \in G\}$ kann mithilfe der Projektionen P und $1-P$ geschrieben werden als: $G = \{(q_1, \tilde{q_1}+p_1) \text{ mit } \langle q_1, \tilde{q_2}+p_2\rangle - \langle \tilde{q_1}+p_1, q_2\rangle = 0 \text{ für alle } (q_2,\tilde{q_2}+p_2) \in G\}$. Da G transversal ist, ist $T : G_1 \to \overline{G_1}$ mit $Tq = \tilde{q}$ eine Abbildung. Mit $\langle p_\cdot, q_\cdot\rangle = 0$ kann G geschrieben werden als $G = \{(q_1, Tq_1+p_1) \text{ mit } \langle q_1, Tq_2\rangle - \langle Tq_1, q_2\rangle = 0 \;\forall\; (q_2, Tq_2+p_2) \in G, p_1 \in P(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))\}$. Alle Tupel (q_1, Tq_1+p_1) in G erfüllen also

$$\langle q_1, Tq_2\rangle = \langle Tq_1, q_2\rangle \qquad \text{für alle } q_1,q_2 \in G_1. \tag{1.23}$$

T ist linear, da G ein Unterraum ist und laut (1.23) offensichtlich selbstadjungiert und auf ganz G_1 definiert. Damit gilt $T : G_1 \to \overline{G_1} = (1-P)(\ell^2(E_v;\mathbb{C}))$. Die Menge G besteht somit aus allen Elementen $(q, Tq+p)$ mit $q \in G_1$ und $(1-P)p = 0$ für eine Projektion P und einen selbstadjungierten Operator T mit den geforderten Eigenschaften. □

Nun kann die propagierte Charakterisierung aller selbstadjungierten Knoten-Randbedingungen bewiesen werden. Der folgende Satz zeigt: Werden in allen Knoten Randbedingungen gewählt, dann liefern diese genau dann einen selbstadjungierten Operator, wenn in jedem Knoten Lagrange'sche Unterräume gewählt wurden. Satz 1.5.6 liefert dann die Charakterisierung in der Form (RB:P,L) und damit auch die Umkehrung zu Satz 1.2.2 für alle transversalen Lagrange'schen Unterräume.

Satz 1.5.7. *Sei* Γ *ein metrischer Graph mit* (geom:u)*. Genau dann, wenn in jedem Knoten eines metrischen Graphen eine selbstadjungierte lineare Relation* $G_v \subset \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ *gegeben ist, ist* H_G *selbstadjungiert, wobei*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(H_G) &= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } (f(v), f'(v)) \in G_v \;\forall\; v \in V\}, \\ H_G f &= -f''. \end{aligned}$$

Der Beweis folgt dem Beweis von Satz 1.2.2:

Beweis. ⇒: Da G_v selbstadjungiert ist, gilt für alle Tupel $(f(v), f'(v))$, $(g(v), g'(v)) \in G_v$, dass $\langle f(v), g'(v)\rangle - \langle f'(v), g(v)\rangle = 0$. Damit ist Gleichung (1.7) offensichtlich erfüllt und H_G symmetrisch.

Sei $f \in \mathrm{D}(H_G^*)$. Dann gilt – analog zum Beweis von Satz 1.2.2 – $f \in W^{2,2}(X_E)$ und Gleichung (1.9) für alle $g \in \mathrm{D}(H_G)$. Und bei Wahl von Funktionen $g \in \mathrm{D}(H_G)$ die nur in einer Umgebung um einen Knoten getragen sind, ergibt sich

$$\langle g'(v), f(v)\rangle = \langle g(v), f'(v)\rangle \qquad \text{für alle } (g(v), g'(v)) \in G_v.$$

Dies entspricht gerade der Definition für $f \in G_v^*$ und da G_v selbstadjungiert ist, folgt $(f(v), f'(v)) \in G_v$ und damit $f \in \mathrm{D}(H_G)$.

$\Leftarrow$: Sei in einem Knoten eine Teilmenge $G_v \subset \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ für die Randbedingungen gegeben, die keine selbstadjungierte lineare Relation ist. Dann existiert entweder ein $x \in G_v$ mit $x \notin G_v^*$ oder ein $x \in G_v^*$ mit $x \notin G_v$.

Sei $x \in G_v$ und $x \notin G_v^*$. Das heißt, es gibt ein $y \in G_v$ mit $\langle x_1, y_2\rangle \neq \langle x_2, y_1\rangle$. Laut Bemerkung 1.1.7 gibt es Funktionen f und $g \in W^{2,2}(X_E)$ die nur um diesen Knoten getragen sind und deren Randwerte gerade $(f(v), f'(v)) = (x_1, x_2)$ und $(g(v), g'(v)) = (y_1, y_2)$ entsprechen und die in $\mathrm{D}(H_G)$ liegen. Nun gilt aber laut Gleichung (1.7) die Beziehung

$$\langle H_G f, g\rangle - \langle f, H_G g\rangle = \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle \neq 0.$$

H_G ist also nicht symmetrisch und damit auch nicht selbstadjungiert.

Sei $x \in G_v^*$ und $x \notin G_v$. Dann gilt $\langle x_1, y_2\rangle = \langle x_2, y_1\rangle$ für alle $(y_1, y_2) \in G_v$. Es wird wieder eine Funktion $f \in W^{2,2}(X_E)$ gewählt, die nur um v getragen ist und die Randwerte $(f(v), f'(v)) = (x_1, x_2)$ hat. Dann gilt $f \notin \mathrm{D}(H_G)$, aber

$$\langle H_G g, f\rangle = \langle g, -f''\rangle \qquad \text{für alle } g \in \mathrm{D}(H_G),$$

d.h. $f \in \mathrm{D}(H_G^*)$. □

Zum Abschluss der Charakterisierung von selbstadjungierten Laplace-Operatoren auf metrischen Graphen über Knoten-Randbedingungen wird noch die folgende Bemerkung über weitere bekannte Varianten der Parametrisierung der Randbedingung angegeben. Dabei ist diese Bemerkung eine Erweiterung von Theorem 5 in [Kuc08] für metrische Graphen mit endlich vielen Kanten.

Bemerkung 1.5.8. Es gibt noch weitere, wichtige Parametrisierungen von Randbedingungen.

1. Theorem 1.2 in [BGP08] besagt:

   Eine lineare Relation G ist selbstadjungiert genau dann, wenn ein unitärer Operator U in $\ell^2(E_v;\mathbb{C})$ existiert, für den $G = \{(x_1, x_2) \in \ell^2(E_v;\mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v;\mathbb{C})$ mit $i(I+U)x_1 = (I-U)x_2\}$ gilt.

   Dies entspricht auch den Randbedingungen in [Har00] und in [KS00].

2. Proposition 1.5 in [BGP08] und Proposition 4(b) in [Pan06] liefern: G ist eine selbstadjungierte lineare Relation genau dann, wenn es beschränkte lineare Operatoren A und B gibt mit AB^* ist selbstadjungiert, $0 \in \varrho \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ und $G = \{(x_1, x_2) \in \ell^2(E_v; \mathbb{C}) \oplus \ell^2(E_v; \mathbb{C}) \text{ mit } Ax_1 = Bx_2\}$.

3. Die Randbedingungen der Form (RB:P,L) können noch etwas verfeinert werden, um besser unterscheiden zu können, wann die Randbedingungen in einem Knoten koppeln oder entkoppeln. Dies wurde in Theorem 2 in [FKW07] getan, wo der Kern der Operatoren L_v herausgefiltert wurde: Seien P_v und Q_v orthogonale Projektionen auf abgeschlossene Unterräume von $\ell^2(E_v; \mathbb{C})$, die selbst orthogonal zueinander sind und L_v ein beschränkter invertierbarer selbstadjungierter Operator $L_v : (1 - P_v - Q_v) \to (1 - P_v - Q_v)$. Dann lassen sich Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen, beschreiben durch: $P_v f(v) = 0$, $Q_v f'(v) = 0$ und $L_v(1 - P_v - Q_v)f(v) + (1 - P_v - Q_v)f'(v) = 0$ in allen Knoten. In [Kuc08] werden diese drei Teile Dirichlet-, Neumann- und Robin-Anteil genannt.

1.6 Kantenlänge gegen Null

Die einzige Einschränkung an metrische Graphen, welche bisher noch nicht analysiert wurde, ist die Kantenlängenbeschränkung nach unten. Ist die Kantenlänge nicht mehr gleichmäßig nach unten beschränkt, dann gilt Hilfssatz 1.2.1 nicht mehr, welcher Grundlage für sämtliche obige Betrachtungen war.

In diesem Fall gibt es nur noch triviale Beispiele um mit obigen Methoden selbstadjungierte Laplace-Operatoren zu finden:

1. Es gibt eine Entkopplung wie bei Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen auf beliebigen metrischen Graphen. Hier ist der negative Laplace-Operator selbstadjungiert auf jeder einzelnen Kante und der Definitionsbereich des Operators auf dem ganzen Graphen ergibt sich als ℓ^2-Summe der Definitionsbereiche der Einschränkung des Operators auf die Kanten.

2. Es werden triviale Randbedingungen für zusammenhängende metrische Graphen mit Knotengrad zwei in jedem Knoten (außer für gegebenenfalls Anfangs- und Endkanten mit endlicher Kantenlänge und einem Knoten mit Knotengrad eins), d.h. $f(v) =$ konstant und eingehender gleich ausgehender Ableitung, gesetzt. Dies ergibt triviale, bzw. keine Randbedingungen (die in diesem Fall mit den Kirchhoff-Randbedingungen übereinstimmen) und der metrische Graph könnte mit der reellen Achse oder einem Teil dieser identifiziert werden.

Bisher gibt es nur wenige Arbeiten in denen die Kantenlänge eines metrischen Graphen gegen Null gehen darf. Diese betrachten den Laplace-Operator auf der reellen Achse, Halbachse oder auf Teilmengen dieser, mit Punktwechselwirkungen auf einer diskreten Menge. (Das heißt einen metrischen Graphen, der in die reelle Achse eingebettet werden kann.)

3. Buschmann, Stolz und Weidmann zeigen in [BSW95], dass die δ'-Randbedingungen auf einer diskreten Menge $M \subset \mathbb{R}$ einen selbstadjungierten Operator für beliebige Kopplungskonstanten bilden. Es werden Randbedingungen über die Darstellung mit unitärem Operator, äquivalent zu denen in Bemerkung 1.5.8 Punkt 1 angegebenen, aber in einer anderen Notation verwendet.

4. In [KM10] betrachten Kostenko und Malamud Laplace-Operatoren mit δ und δ'-Randbedingungen auf einer diskreten Teilmenge der reellen Achse, Halbachse oder Teilmengen dieser. Sie geben an, für welche Beziehungen zwischen den Kopplungskonstanten α_n bzw. β_n für δ- bzw. δ'-Randbedingungen und den Kantenlängen l_n die zugehörigen Laplace-Operatoren selbstadjungiert sind.

2 Vorbereitende Abschätzungen

Im letzten Kapitel wurden ausführlich metrische Graphen und selbstadjungierte negative Laplace-Operatoren auf diesen definiert und untersucht. Nun kann der Zufall in das Modell integriert werden, was durch die Definition eines zufälligen Potentials geschehen soll.

Werden in zufälligen Modellen mit sehr symmetrischen Strukturen die Randbedingungen und Kantenlängen in jeder Dimension bzw. Richtung gleich gewählt oder nach einem bestimmten Muster, dann ist es möglich, dass das Spektrum einer zufälligen Operatorfamilie fast sicher konstant ist – dies geschieht wenn die Operatorfamilie ergodisch ist. Für allgemeine metrische Graphen ist das nicht der Fall, da zugrundeliegende Symmetrien (zum Beispiel eine Gruppenstruktur) nicht mehr vorhanden sind. Nach der Beschreibung der Potentiale in Abschnitt 2.1 wird dies genauer erläutert.

Anschließend folgt ein Abschnitt über Einschränkungen des negativen Laplace-Operators auf endliche Teilgraphen. Dieser enthält die zugehörige Definition und soll veranschaulichen, was die größten Änderungen gegenüber den bisher in der Literatur behandelten Modellen sind. Im Wesentlichen entstehen diese, durch die zusätzlichen „Randbedingungen“ im Inneren des endlichen Teilgraphen, welche ergänzend zu den neu zu setzenden Bedingungen auf dem Rand des Teilgraphen zu erfüllen sind. Dadurch entstehen kompliziertere assoziierte quadratische Formen bzw. kompliziertere Definitionsbereiche als üblich, welche in den vorbereitenden Abschätzungen zu beachten sind.

Im Abschnitt 2.4 wird aus einem gleichmäßig polynomiellen Wachstum der metrischen Graphen eine Überdeckung dieser gewonnen.

Die weiteren Abschnitte dieses Kapitels enthalten alle vorbereitenden Abschätzungen und Aussagen über die zufälligen Operatoren – bzw. Einschränkungen dieser –, welche in der Multiskalenanalyse in Kapitel 3 benötigt werden.

2.1 Die zufällige Operatorfamilie

Als zufällige Größe im Modell wird ein zufälliges Potential eingeführt. Es gibt mehrere Arten von zufälligen Potentialen, wobei hier das aus der Quantenmechanik stammende Legierungspotential („alloy type potential“) verwendet wird. Die Idee hinter diesem Potential ist die Folgende: In einer Legierung gibt es mehrere Arten von Atomen. In der Physik werden diese Atome durch ihr zugehöriges Coulomb-Potential dargestellt. Das heißt für ein Medium im

Raum X (meist gilt $X = \mathbb{R}^3$) bestehend aus zwei Atomsorten A und B gibt es zwei unterschiedliche Potentiale u_A und u_B. Die Menge aller Punkte, an denen sich ein Atom der Sorte A befindet, wird mit $P_\mathrm{A} \subset X$ bezeichnet, bzw. $P_\mathrm{B} \subset X$ für die Atome B. Das gesamte Potential ergibt sich dann zu

$$V(x) = \sum_{k \in P_\mathrm{A}} u_\mathrm{A}(x-k) + \sum_{k \in P_\mathrm{B}} u_\mathrm{B}(x-k).$$

Unter der Annahme, dass sich das Potential u_B durch Multiplikation mit einer Konstante λ aus dem Potential u_A berechnen lässt, ergibt sich:

$$V(x) = \sum_{k \in P_\mathrm{A} \cup P_\mathrm{B}} \omega_k \cdot u_\mathrm{A}(x-k), \qquad \text{mit } \omega_k = \begin{cases} 1, & k \in P_\mathrm{A} \\ \lambda, & k \in P_\mathrm{B}. \end{cases}$$

Eine weitere Verallgemeinerung dieses Potentials ist

$$V(x) = \sum_{k \in P} \omega_k \cdot u_k(x),$$

wobei ω_k meist unabhängige identisch verteilte stetige Zufallsgrößen sind, da diskrete Zufallsgrößen viel schwieriger zu behandeln sind. Dabei werden die Größen ω_k Kopplungskonstanten und u_k Einzelplatzpotentiale genannt.

Für einen metrischen Graphen wird ein zufälliges Potential definiert, indem auf jeder Kante eine zufällige Kopplungskonstante ω_e und ein Einzelplatzpotential ν_e gewählt wird. Die Menge P aus obiger Darstellung entspricht also der Menge der Kanten. Zur Definition der Kopplungskonstante wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$ mit der σ-Algebra der Borelmengen benötigt. Dieses und die Einzelplatzpotentiale sollen folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Das Wahrscheinlichkeitsmaß hat als Träger ein Intervall $\operatorname{supp}\mu = [q_-, q_+]$, wobei $-\infty < q_- < q_+ < \infty$. Weiter hat das Maß μ eine beschränkte Dichte $\varrho_\mu \in L^\infty[q_-, q_+]$ mit $\|\varrho_\mu\|_{L^\infty[q_-,q_+]} =: c_\varrho$.

   (pot:dichte)

2. Es gibt reelle, positive Konstanten c_- und c_+ mit $c_- \leq c_+$, so dass auf jeder Kante für die Einzelplatzpotentiale $\nu_e : I_e \to \mathbb{R}$ mit $\nu_e \in L^\infty(I_e)$ gilt

   $$c_- \mathbb{1}_{I_e} \leq \nu_e \leq c_+ \mathbb{1}_{I_e}. \qquad \text{(pot:char)}$$

Die Einschränkung der Einzelplatzpotentiale ν_e auf das Intervall I_e gewährleistet, dass zu zwei unterschiedlichen Kanten e_1 und e_2 die jeweiligen Anteile $\omega_{e_1}\nu_{e_1}$ und $\omega_{e_2}\nu_{e_2}$ des Potentials unabhängig sind. Werden Potentiale definiert, welche einen größeren Träger haben, dann können diese durch obige Potentiale nach unten abgeschätzt werden, womit gegebenenfalls immer noch Lokalisierung geschlussfolgert werden kann.

Weiter sollen die Einzelplatzpotentiale zwischen zwei charakteristischen Funktionen liegen, wobei $c_- > 0$ gewährt, dass überhaupt eine Verschiebung des Spektrums erzielt werden kann. Für $c_- = 0$ kann es sein, dass keine Störung des Operators stattfindet und die zufälligen Kopplungskonstanten gar keinen Einfluss haben. Bei Potentialen mit wechselnden Vorzeichen ($c_- < 0$) ist gar nicht klar, ob und in welche Richtung das Spektrum verschoben wird. Diese Potentiale heißen nicht-monotone Legierungspotentiale und werden aktuell für stetige Modelle in $\mathbb{Z}^d$ in [PTV11] behandelt.

Sei $\Omega := [q_-, q_+]^E$ und $\mathbb{P} := \bigotimes_{e\in E} \mu$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Die Funktion $q_e : \Omega \to \mathbb{R}$ liefert für jede Kante eine zugehörige Kopplungskonstante $q_e(\omega) := \omega_e$. Zu jeder Konfiguration $\omega \in \Omega$ wird ein Potential definiert durch

$$\mathcal{V}_\omega := (q_e(\omega)\nu_e)_{e\in E}\,, \qquad \text{(pot:char,dichte)}$$

welches auf $L^2(X_E)$ als Multiplikationsoperator fungiert. Für jede Funktion $f \in L^2(X_E)$ gilt

$$\begin{aligned}\|\mathcal{V}_\omega f\|^2_{L^2(X_E)} &= \|\,(q_e(\omega)\nu_e f_e)_{e\in E}\,\|^2_{L^2(X_E)}\\ &\le \sum_{e\in E} \left(\max\{|q_-|,|q_+|\}\right)^2 c_+^2 \int_0^{l(e)} |\mathbb{1}_{I_e}(x) f_e(x)|^2\,dx\\ &\le \left(\max\{|q_-|,|q_+|\}\right)^2 \cdot c_+^2 \|f\|^2_{L^2(X_E)}.\end{aligned}$$

Mit der Konstanten $C_\mathcal{V} := \max\{|q_-|,|q_+|\}\cdot c_+$ ergibt sich die Abschätzung

$$\|\mathcal{V}_\omega f\|_{L^2(X_E)} \le C_\mathcal{V} \|f\|_{L^2(X_E)}. \tag{2.1}$$

Das Potential ist also ein stetiger Multiplikationsoperator. Für einige vorbereitende Abschätzungen reicht die Stetigkeit als einzige Anforderung an das Potential aus – dort wird darauf hingewiesen, dass die konkrete Form des Potentials nicht entscheidend ist.

Nun kann mit diesem zufälligen Potential eine zufällige Operatorfamilie auf einem metrischen Graphen definiert werden.

Definition 2.1.1. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u), $\mathcal{V}_\omega$ ein zufälliges Potential nach (pot:char,dichte) und eine Randbedingung der Form (RB:P,L,S) gegeben. Dann werden für alle $\omega \in \Omega$ zufällige Operatoren $H^{P,L}(\omega)$ und Sesquilinearformen $\mathfrak{h}_\omega$ definiert durch:

$$\begin{aligned} H^{P,L}(\omega) &= H^{P,L} + \mathcal{V}_\omega & \mathrm{D}(H^{P,L}(\omega)) &= \mathrm{D}(H^{P,L}),\\ \mathfrak{h}_\omega[f,g] &= \langle f', g'\rangle - \sum_{v\in V} \langle L_v f(v), g(v)\rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, g\rangle & \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega) &= \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L).\end{aligned}$$

Dann ist $H^{P,L}(\omega)$ selbstadjungiert und nach unten beschränkt, $\mathfrak{h}_\omega$ ist abgeschlossen und nach unten beschränkt und laut Satz 1.4.9 sind beide zueinander assoziiert.

2.2 Deterministisches Spektrum

Die Hauptaussage über die zufälligen Operatoren $(H^{P,L}(\omega))$ ist, dass diese in einem Intervall um die Grundzustandsenergie nur reines Punktspektrum besitzen. Unklar ist dabei wie viele der Realisierungen überhaupt Spektrum in diesem Intervall haben.

Wenn die zufälligen Operatoren messbar und ergodisch sind, dann hängt das Spektrum nicht vom Zufall ab, sondern ist, mit Wahrscheinlichkeit eins, eine Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}$. In diesem Fall wird das Spektrum deterministisch genannt, da es vorherbestimmt ist. Weiterhin ist für diese Operatoren auch die Aussage der Lokalisierung sehr stark, da fast alle Operatoren Spektrum im Lokalisierungsintervall besitzen – meist ist das ganze Intervall im Spektrum enthalten.

Satz 2.2.1. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $H : \Omega \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$ messbar und ergodisch. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}$, so dass*

$$\sigma(H(\omega)) = \Sigma \qquad \text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

Dabei ist $\mathcal{S}(H)$ die Menge aller selbstadjungierten Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Entsprechende Aussagen gelten auch für folgende Teile des Spektrums: Das absolutstetige Spektrum $\sigma_{ac}(H(\omega))$, das singulärstetige Spektrum $\sigma_{ac}(H(\omega))$ und das Punktspektrum $\sigma_{pp}(H(\omega))$. Dieser Satz wurde von Kirsch und Martinelli in [KM82] bewiesen und ist auch in [Sto01] als Theorem 1.2.5 zu finden.

Für die Operatoren $H^{P,L}(\omega)$ müssen also nur zwei Eigenschaften – Messbarkeit und Ergodizität – nachgewiesen werden. Ohne genauer zu erläutern was Messbarkeit für Operatoren bedeutet, wird eine einfache Variante diese über assoziierte Formen zu beweisen, angegeben:

Hilfssatz 2.2.2. *Sei $(\mathfrak{h}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ eine Familie dicht definierter, nach unten beschränkter, abgeschlossener Formen mit Definitionsgebieten $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$, die nicht von ω abhängen (d.h. $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega) = \mathrm{D}(\mathfrak{h})$). Wenn es Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta, M > 0$ und eine abgeschlossene Form $\mathfrak{k} \geq 1$ mit Definitionsgebiet $\mathrm{D}(\mathfrak{k}) = \mathrm{D}(\mathfrak{h})$ gibt, so dass*

$$\eta \cdot \mathfrak{k}[f,f] \leq \mathfrak{h}_\omega[f,f] + \gamma\|f\|^2 \leq M \cdot \mathfrak{k}[f,f] \qquad \text{für alle } f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h})$$

gilt und für alle $f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h})$ die Abbildung $\omega \mapsto \mathfrak{h}_\omega[f,f]$ messbar ist, dann ist für die Familie $(H(\omega))$, der zu $(\mathfrak{h}_\omega)$ assoziierten selbstadjungierten Operatoren, die Abbildung $\omega \mapsto H(\omega)$ messbar.

Auch dieser Satz findet sich mit Beweis in [Sto01], als Proposition 1.2.7, wieder.

Hilfssatz 2.2.3. *Sei $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ ein metrischer Graph, der die Annahme* (geom:*u*) *erfüllt und $H^{P,L}(\omega)$ der negative Laplace-Operator mit Knoten-Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential mit* (pot:char,dichte)*. Dann ist die Operatorfamilie $(H^{P,L}(\omega))$ messbar.*

Beweis. Die zu $(H^{P,L}(\omega))$ assoziierten Formen sind $(\mathfrak{h}_\omega)$ und deren Definitionsbereiche hängen nicht von ω ab. Sei κ die größte untere Schranke der ungestörten Form $\mathfrak{h}_L$, dann ist die Form

$$\mathfrak{k}[f,g] := \mathfrak{h}_L[f,g] + (\kappa+1)\langle f, g\rangle, \qquad \mathrm{D}(\mathfrak{k}) = \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$$

offensichtlich größer gleich eins und abgeschlossen, da $\mathfrak{h}_L$ abgeschlossen ist. Mit (2.1) folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_\omega[f,f] + (\kappa+1+C_\mathcal{V})\langle f,f\rangle &= \mathfrak{h}_L[f,f] + (\kappa+1)\langle f,f\rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, f\rangle + C_\mathcal{V}\langle f,f\rangle \\ &\geq \mathfrak{k}[f,f] \\ (1+2C_\mathcal{V})\cdot\mathfrak{k}[f,f] &\geq \mathfrak{h}_\omega[f,f] + (\kappa+1+C_\mathcal{V})\langle f,f\rangle.\end{aligned}$$

Also sind die nötigen Abschätzungen aus Hilfssatz 2.2.2 für die Konstanten $\gamma = \kappa + 1 + C_\mathcal{V}$, $\eta = 1$ und $M = 2C_\mathcal{V} + 1$ offenbar erfüllt.

Offensichtlich ist die Abbildung $\omega \mapsto h_w[f,f]$ für alle $f \in \mathrm{D}(h_\omega)$ messbar. Hilfssatz 2.2.2 liefert dann die Messbarkeit von $\omega \mapsto H^{P,L}(\omega)$. □

Nun kann die Ergodizität der Operatoren betrachtet werden.

Definition 2.2.4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $H : \Omega \to \mathcal{S}(\mathcal{H})$ sei messbar. Die Abbildung $\omega \mapsto H(\omega)$ heißt ergodisch, wenn es eine ergodische Familie $(T_\iota)_{\iota\in I}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Familie unitärer Operatoren $(U_\iota)_{\iota\in I}$ auf $\mathcal{H}$ gibt, so dass die Kovarianz-Bedingung

$$H(T_\iota(\omega)) = U_\iota^* H(\omega) U_\iota$$

erfüllt ist. Dabei heißt ein Operator $T : \Omega \to \Omega$ ergodisch, wenn er maßerhaltend ist und

$$\forall\ F \in \mathcal{F} \text{ mit } T^{-1}(F) = F \text{ gilt } \mathbb{P}(F) = 0 \text{ oder } \mathbb{P}(F) = 1.$$

Für Potentiale die auf Gittern (z.B. $\mathbb{Z}^d$) oder sehr symmetrischen Strukturen definiert sind, kann gezeigt werden, dass bestimmte zufällige Familien zugehöriger Differentialoperatoren ergodisch sind. Für allgemeine metrische Graphen ist dies nicht mehr möglich, da diese keine Gruppenstruktur oder Translationsinvarianz, welche über T_ι ausgedrückt werden kann, aufweisen.

Im Allgemeinen ist also kein deterministisches Spektrum zu erwarten. Lokalisierung nahe dem Grundzustand, d.h. nahe der unteren Schranke des Spektrums, liefert nur noch eine Aussage für gewisse $\omega \in \Omega$. Dabei ist unklar, welches Maß diese Menge hat. Es gibt dennoch einige metrische Graphen,

für die deterministisches Spektrum gezeigt werden kann, zum Beispiel für Cayleygraphen – siehe dazu auch Abschnitt 3.3.

Eine weitere Arbeit über Lokalisierung mittels Multiskalenanalyse für nichtergodische Operatorfamilien wird zurzeit in [RM] niedergeschrieben. Dort geht es um Delone-Mengen im $\mathbb{R}^d$, welche diskrete Mengen sind, die einen Mindest- und einen Maximalabstand zwischen den Punkten aufweisen. Diese ähneln den Beschränkungen der Kantenlängen nach unten und nach oben, welche hier verwendet werden und ergeben ähnliche Anzahlen an Punkten bzw. Knoten in Überdeckungsmengen.

2.3 Induzierte Teilgraphen

Ein wichtiges Hilfsmittel wird sein, den negativen Laplace-Operator auf endliche Teilgraphen einzuschränken und aus Eigenschaften dieser Einschränkungen Eigenschaften des Ausgangsoperators zu schlussfolgern. Üblicherweise werden als Gebiete, auf die der Operator eingeschränkt wird, Würfel (im $\mathbb{Z}^d$ oder $\mathbb{R}^d$) gewählt. Mit diesen ist eine Überdeckung – beziehungsweise Pflasterung – des gesamten Gebietes oder bestimmter Würfel in unterschiedlichen Längenskalen der Würfel einfach möglich. Im Fall eines allgemeinen metrischen Graphen gibt es keine analoge Definition von Würfeln mit ähnlichen Eigenschaften.

Statt dessen gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten Mengen zur Überdeckung anzugeben, die beide auf der Idee des Überdeckungssatzes von Vitali basieren: In eine zu überdeckende Menge werden zuerst so viele disjunkte Umgebungen eines festen Radius gelegt wie maximal möglich. Durch Vergrößerung dieser Mengen kann eine Überdeckung gewonnen werden.

Eine Art diese zu Vergrößern liefern die dyadischen Würfel – siehe zum Beispiel Theorem 11 in [Chr90]. Dabei wird der Zwischenraum zwischen den disjunkten Mengen aufgeteilt und jeweils einer dieser Mengen zugeordnet, so dass eine disjunkte Überdeckung möglich ist. Diese Würfel haben einen minimalen und einen maximalen Radius, die aber relativ weit auseinanderliegen können.

Die zweite Art ist Umgebungen mit etwa dem dreifachen Radius der disjunkten Umgebungen zum Überdecken zu wählen, wobei Mengen mit einem festen Radius entstehen, die intuitiv gut vorstellbar sind und deshalb hier verwendet werden. Allerdings sind die Überdeckungen dann nicht mehr disjunkt möglich, was auch nicht notwendig sein wird. Ein Vorteil gegenüber Würfeln auf Gittergraphen ist dagegen, dass Umgebungen zu allen Radien existieren und kein Augenmerk auf besondere Längenskalen gelegt werden muss.

Die Definitionen von Teilgraphen, Einschränkungen der Operatoren auf diese, den Umgebungen zur Überdeckung sowie die dafür benötigte Notation werden in diesem Abschnitt eingeführt. Die Überdeckungen und eine dafür nötige Eigenschaft des metrischen Graphen folgen im nächsten Abschnitt.

Definition 2.3.1. Sei $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ ein metrischer Graph. Sei $E_1 \subset E$ eine Teilmenge der Kantenmenge.

Sei V_{E_1} die Menge aller Anfangs- bzw. Endknoten der Kanten aus E_1:

$$V_{E_1} := \{v \in V \text{ mit } \exists\, e \in E_1 \text{ mit } v = i(e) \text{ oder } v = j(e)\}.$$

Weiter seien die Funktionen $l_{E_1} = l|_{E_1}$, $i_{E_1} = i|_{E_1}$ und $j_{E_1} = l|_{E_1}$ die Einschränkungen der Funktionen des Ausgangsgraphen auf die Kantenmenge E_1. Dann gilt $V_{E_1} = i_{E_1}(E_1) \cup j_{E_1}(E_1)$. Der Teilgraph $(E_1, V_{E_1}, l_{E_1}, i_{E_1}, j_{E_1})$ ist wieder ein metrischer Graph und wird der durch E_1 induzierte Teilgraph von Γ genannt und mit Γ_{E_1} bezeichnet.

Analog werden auch die Einschränkungen von X_E und X_Γ auf eine Kantenmenge E_1 definiert:

$$X_{E_1} = \bigcup_{e \in E_1} \{e\} \times I_e \qquad X_{\Gamma_{E_1}} = X_{E_1} \cup V_{E_1}.$$

Die Menge der inneren Knoten eines induzierten Teilgraphen $\Gamma_{E_1} \subset \Gamma$ wird mit $V_{E_1,\mathrm{int}}$, die Menge der Randknoten mit $V_{E_1,\partial}$ bezeichnet, dabei gilt:

$$v \in V_{E_1,\mathrm{int}} \Leftrightarrow \text{für } v \text{ gilt } \{e \in E \text{ mit } e \sim v\} \subset E_1,$$
$$v \in V_{E_1,\partial} \Leftrightarrow \exists\, e_1 \in E_1 \text{ und } e_2 \in E \setminus E_1 \text{ mit } e_1 \sim v, e_2 \sim v.$$

Dies entspricht nicht der üblichen Vorstellung, dass der Randknoten am Rand von Γ_{E_1} liegt (d.h. am Rand von Γ_{E_1} bezüglich einer Einbettung in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{Z}^d$), sondern er ist Randknoten bezüglich seiner Einbettung in den ganzen Graphen Γ.

Definition 2.3.2. Zwei induzierte Teilgraphen Γ_{E_1}, Γ_{E_2} heißen disjunkt, wenn E_1 und E_2 disjunkt sind. Inklusionen von Teilgraphen beziehen sich ebenso auf die Kantenmengen, die die Teilgraphen induzieren: Es gilt

$$\Gamma_{E_1} \subset \Gamma_{E_2} \Leftrightarrow E_1 \subset E_2.$$

Bemerkung 2.3.3. Offensichtlich gilt:

- V_{E_1} ist disjunkte Vereinigung von $V_{E_1,\partial}$ und $V_{E_1,\mathrm{int}}$.
- Zwei disjunkte Teilgraphen haben keine gemeinsame Kante, können aber einen gemeinsamen Knoten besitzen – dies ist dann aber zwangsweise ein Randknoten bei beiden Teilgraphen.
- Zwei disjunkte induzierte Teilgraphen liefern zwei unabhängige Einschränkungen des negativen Laplace-Operators (welche später noch explizit angegeben wird), da die zufälligen Kopplungskonstanten auf den Kanten definiert sind.

Im Folgenden werden induzierte Teilgraphen definiert, welche Umgebungen um einen Wurzelknoten – oder Zentrum – mit Radius r entsprechen und im Weiteren ausgiebig genutzt werden. Damit diese Definitionen sinnvoll sind, wird eine Annahme an die metrischen Graphen getroffen: Jeder metrische Graph soll eine gleichmäßig nach oben beschränkte Kantenlänge besitzen. Da für den negativen Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) auch eine gleichmäßige Beschränkung nach unten nötig ist – d.h. (geom:u) gilt, werden beide Annahmen im Folgenden immer vorausgesetzt:

Annahme 2.3.4. *Es gibt eine gleichmäßige Beschränkung der Kantenlänge eines metrischen Graphen nach oben und nach unten, d.h. es gibt u, U mit $0 < u \leq U < \infty$, so dass*

$$\forall\ e \in E \text{ gilt} \qquad u \leq l(e) \leq U. \qquad \text{(geom:}u,U\text{)}$$

Definition 2.3.5. Für einen metrischen Graphen Γ der (geom:u,U) erfüllt, sei mit $\Lambda_r(v_0) \subset \Gamma$ der durch $E(v_0, r)$ induzierte Teilgraph $\Gamma_{E(v_0,r)}$ bezeichnet, wobei:

$$E(v_0, r) = \{e \in E \text{ mit } \exists\ t \in I_e, \text{ so dass } (e, t) \in B_r(v_0)\}.$$

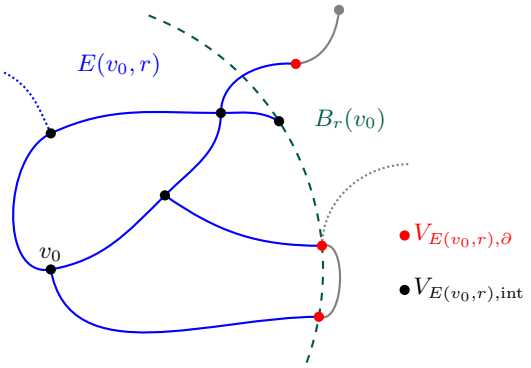


Abbildung 2.1: Induzierter Teilgraph – Innere und Randknoten.

Weil Umgebungen mit Radius r induzierte Teilgraphen sein sollen, das heißt ganze Kanten enthalten und nicht Kanten zerschneiden und so neue Knoten und Randbedingungen hinzufügen, ist die gleichmäßige Beschränkung der Kantenlänge notwendig, welche gewährleistet, dass alle Punkte in $\Lambda_r(v_0)$ einen Abstand kleiner als $r + U$ zu v_0 haben. Dies bedeutet: $X_{\Lambda_r(v_0)} \subset B_{r+U}(v_0)$.

Wenn der Knotengrad eines jeden Knoten in V endlich ist, enthält für jeden Radius $r \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ die Umgebung mit Radius r um einen Knoten v endlich viele Kanten und ist damit ein endlicher metrischer Graph.

Ein zentraler Punkt der späteren Untersuchung wird sein, was die Resolvente des Operators $H^{P,L}$ vom Inneren einer Umgebung mit Radius r auf den Rand einer solchen Umgebung überträgt. Was unter diesen Gebieten zu verstehen ist, wird nun definiert:

Definition 2.3.6. Als das Innere einer Umgebung $\Lambda_r(v)$ wird die Umgebung mit Radius $\frac{r}{3}$ definiert:

$$\Lambda_r^{\text{int}}(v) := \Lambda_{\frac{r}{3}}(v),$$

das Äußere einer solchen Umgebung wird die Differenz

$$\Lambda_r^{\text{out}}(v) := \Lambda_r(v) \setminus \Lambda_{r-3U}(v)$$

genannt.

$\Lambda_r^{\text{int}}(v)$ und $\Lambda_r^{\text{out}}(v)$ sind wieder induzierte Teilgraphen und werden induziert durch die Kantenmengen $E\left(v, \frac{r}{3}\right)$ und $E(v,r) \setminus E(v, r-3U)$.

Definition 2.3.7. Der Abstand zweier Teilmengen A und B von X_E ist definiert als

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} \mathfrak{d}(a,b)\right).$$

Der Abstand zweier induzierter Teilgraphen Γ_{E_1} und Γ_{E_2} wird definiert als

$$\operatorname{dist}(\Gamma_{E_1}, \Gamma_{E_2}) := \operatorname{dist}(X_{E_1}, X_{E_2}).$$

Zwei disjunkte, induzierte Teilgraphen Γ_{E_1} und Γ_{E_2} haben nicht notwendigerweise einen positiven Abstand. Wenn aber die Mengen $X_{\Gamma_{E_1}}$ und $X_{\Gamma_{E_2}}$ disjunkt sind, dann schon.

Für den Abstand des Inneren zum Äußeren einer Umgebung mit Radius r gilt:

$$\operatorname{dist}(\Lambda_r^{\text{int}}(v), \Lambda_r^{\text{out}}(v)) > (r-3U) - \left(\tfrac{r}{3} + U\right) = \tfrac{2}{3}r - 4U,$$

mit einem $r \geq 24U$ folgt:

$$\operatorname{dist}(\Lambda_r^{\text{int}}(v), \Lambda_r^{\text{out}}(v)) > \frac{r}{2}. \tag{2.2}$$

Nun werden die Einschränkungen von Operatoren und Formen auf induzierte Teilgraphen angegeben:

Für einen zufälligen selbstadjungierten Operator $H^{P,L}(\omega)$ mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential (pot:char,dichte), sei die Einschränkung auf den induzierten Teilgraphen $\Gamma_{E_1} = (E_1, V_{E_1}, l_{E_1}, i_{E_1}, j_{E_1})$,

folgendermaßen definiert:

$$H^{\Gamma_{E_1}}(\omega)f := H^{\Gamma_{E_1},P,L}(\omega)f = (-f_e'')_{e\in E_1} + (q_e(\omega)\nu_e f_e)_{e\in E_1},$$
$$\mathrm{D}(H^{\Gamma_{E_1}}(\omega)) = \{f \in \bigoplus_{e\in E_1} W^{2,2}(I_e) \text{ mit } f \text{ erfüllt } (P_v, L_v) \text{ RB von } H^{P,L} \text{ auf } V_{E_1,\mathrm{int}}, f(v) \equiv 0 \text{ auf } V_{E_1,\partial}\}.$$

Damit erfüllt der eingeschränkte Operator die ursprünglichen Randbedingungen im Innern von Γ_{E_1} und auf dem Rand die Dirichlet-Randbedingungen. Insbesondere ist $H^{\Gamma_{E_1}}(\omega)$ wieder selbstadjungiert und nach unten beschränkt. Die assoziierte quadratische Form $\mathfrak{h}_\omega^{\Gamma_{E_1}}$ ergibt sich zu:

$$\mathfrak{h}_\omega^{\Gamma_{E_1}}[f,f] = \langle f', f'\rangle_{L^2(X_{E_1})} - \sum_{v\in V_{E_1,\mathrm{int}}} \langle L_v f(v), f(v)\rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, g\rangle_{L^2(X_{E_1})},$$
$$\mathrm{D}\left(\mathfrak{h}_\omega^{\Gamma_{E_1}}\right) = \{f \in \bigoplus_{e\in E_1} W^{1,2}(I_e) \text{ mit } f(v) \in \mathrm{D}(L_v) \text{ auf } V_{E_1,\mathrm{int}} \text{ und } f(v) \equiv 0 \text{ auf } V_{E_1,\partial}\}.$$

Bemerkung 2.3.8. Für $\Gamma_{E_1} \subset \Gamma_{E_2}$ gilt dann $\mathrm{D}(\mathfrak{h}^{\Gamma_{E_1}}) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{h}^{\Gamma_{E_2}})$, da $f(v) \equiv 0$ immer in $\mathrm{D}(L_v)$ enthalten ist.

Für die Einschränkung der Operatoren und Formen sind auch Einschränkungen der Funktionenräume $L^2(X_E)$ (bzw. der zugehörigen Sobolevräume) auf $L^2(X_{E_1})$ notwendig. Dazu werden auch charakteristische Funktionen $\mathbb{1}_{X_{E_1}}$ benutzt. Weil später vor allem induzierte Teilgraphen in der Form von Umgebungen $\Lambda_r(v)$ mit Radius r, bzw. das Innere und das Äußere solcher Umgebungen, benutzt werden, sollen auch die charakteristischen Funktionen in dieser Form notiert werden:

$$\mathbb{1}_{\Lambda_r(v)} := \mathbb{1}_{X_{E(v,r)}}, \quad \mathbb{1}_{\Lambda_r^{\mathrm{int}}(v)} := \mathbb{1}_{X_{E(v,\frac{r}{3})}}, \quad \mathbb{1}_{\Lambda_r^{\mathrm{out}}(v)} := \mathbb{1}_{X_{E(v,r)\setminus E(v,r-3U)}}.$$

Definition 2.3.9. Ein Träger einer L^2-Funktion auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, dx)$ ist das Komplement von der Vereinigung

$$\bigcup\{G \in \mathcal{B} \text{ mit } G \text{ offen}, f(x) = 0 \text{ für } dx\text{-fast alle } x \in G\}.$$

In der Theorie der quadratintegrierbaren Funktionen und der Sobolevräume treten an vielen Stellen glatte Funktionen mit kompaktem Träger und L^2-Funktionen mit kompaktem Träger auf. Bei metrischen Graphen ist nicht eindeutig, welche Funktionen damit gemeint sein sollen.

Kompakte Mengen in $(X_E, \mathfrak{d})$ sind nicht geeignet als Träger solcher Funktionen, denn es würden sich als Abschluss in $W^{1,2}(X_E)$ oder $W^{2,2}(X_E)$ die

Räume $W_0^{1,2}(X_E)$ und $W_0^{2,2}(X_E)$ mit Funktionen ergeben, deren Randwerte in den Knoten gleich null sind.

Für $\tilde{E} \subset E$ sei $\mathcal{K}_{\tilde{E}}$ die Menge aller Mengen, die als Träger kompakter Funktionen auf $X_{\tilde{E}}$ angesehen werden sollen:

$$\mathcal{K}_{\tilde{E}} = \Big\{ K \subset X_{\tilde{E}} \text{ mit } \forall\, v \in V_{\tilde{E},\partial}\, \exists\, r > 0 : B_r(v) \cap K = \varnothing, \\ K \cup V_{\tilde{E},\mathrm{int}} \text{ ist kompakt in } \left(X_{\Gamma_{\tilde{E}}}, \mathfrak{d}\right) \Big\}.$$

Dies garantiert, dass für einen induzierten Teilgraphen die Inneren Knoten keinen „Rand“ darstellen, sondern nur die Randknoten des Teilgraphen. Als Obermenge aller Träger von Funktionen mit kompakten Träger ergibt sich somit:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{\tilde{E} \subset E \text{ endl.}} \mathcal{K}_{\tilde{E}}.$$

Definition 2.3.10. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u). Die Mengen von Funktionen mit kompaktem Träger in X_E seien für alle $j \in \mathbb{N}$ definiert durch:

$$C^\infty_{\mathrm{komp}}(X_E) = \{ f = (f_e)_{e\in E} \text{ mit } f_e \in C^\infty(I_e), \mathrm{supp}(f) \in \mathcal{K} \}, \\ L^2_{\mathrm{komp}}(X_E) = \left\{ f = (f_e)_{e\in E} \text{ mit } f_e \in L^2(I_e), \mathrm{supp}(f) \in \mathcal{K} \right\}, \\ W^{j,2}_{\mathrm{komp}}(X_E) = \left\{ f = (f_e)_{e\in E} \text{ mit } f_e \in W^{j,2}(I_e), \mathrm{supp}(f) \in \mathcal{K} \right\}.$$

Mit dieser Definition von kompakt getragenen Funktionen können auch Funktionen definiert werden, die nur lokal in $L^2(X_E)$ liegen:

Definition 2.3.11. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u). Als Menge der Funktionen die lokal in Funktionenräumen liegen, ergeben sich für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$L^2_{\mathrm{lok}}(X_E) = \{ (f_e)_{e\in E} \text{ mit } f_e \in L^2_{\mathrm{lok}}(I_e), \text{ für alle } K \in \mathcal{K} : \mathbb{1}_K f \in L^2(X_E) \}, \\ W^{j,2}_{\mathrm{lok}}(X_E) = \{ (f_e)_{e\in E} \text{ mit } f_e \in W^{j,2}_{\mathrm{lok}}(I_e), \text{ für alle } K \in \mathcal{K} : \\ \mathbb{1}_K f^{(n)} \in L^2(X_E), n = 0, \dots, j \}.$$

Dann ist das Produkt einer kompakt getragenen Funktion $f \in L^2_{\mathrm{komp}}(X_E)$ und einer lokalen Funktion $g \in L^2_{\mathrm{lok}}(X_E)$ in $L^1(X_E)$. Für das Integral kann – ähnlich zum Skalarprodukt – eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : L^2_{\mathrm{komp}}(X_E) \times L^2_{\mathrm{lok}}(X_E) \to \mathbb{C}$ definiert werden, welche den Wert des Integrals, also eine endliche, komplexe Zahl liefert:

$$\langle f | g \rangle := \sum_{e\in E} \int_{I_e} f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Offensichtlich ist $\langle\cdot|\cdot\rangle$ wieder sesquilinear. Die Abbildung von $L^2_{\mathrm{lok}} \times L^2_{\mathrm{komp}} \to \mathbb{C}$, die gerade das komplex konjugierte Ergebnis zu $\langle\cdot|\cdot\rangle$ liefert, wird wieder mit $\langle\cdot|\cdot\rangle$ bezeichnet: Sei $f \in L^2_{\mathrm{lok}}(X_E)$, $g \in L^2_{\mathrm{komp}}(X_E)$, dann ist

$$\sum_{e\in E} \int_{I_e} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \overline{\sum_{e\in E} \int_{I_e} g(x)\overline{f(x)}\,dx} = \overline{\langle g|f\rangle} := \langle f|g\rangle.$$

Damit können auch analoge Abbildungen zu Sesquilinearformen $(\mathfrak{h}_\omega, \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega))$ zu einer Randbedingung der Form (RB:P,L,S) und mit Potential der Form (pot:char,dichte) gebildet werden: $\mathfrak{h}^\star_\omega : \mathrm{D}_{\mathrm{komp}}(\mathfrak{h}_\omega) \times \mathrm{D}_{\mathrm{lok}}(\mathfrak{h}_\omega) \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\mathrm{komp}}(\mathfrak{h}_\omega) &:= \{f = (f_e)_{e\in E} \text{ mit } f \in W^{1,2}_{\mathrm{komp}}(X_E),\ \forall\, v \in V : f(v) \in \mathrm{D}(L_v)\},\\
\mathrm{D}_{\mathrm{lok}}(\mathfrak{h}_\omega) &:= \{f = (f_e)_{e\in E} \mid \forall\, e \in E : f_e \in W^{1,2}(I_e),\\
&\qquad\qquad \forall\, v \in V : f(v) \in \mathrm{D}(L_v)\},\\
\mathfrak{h}^\star_\omega[f,g] &:= \langle f'|g'\rangle - \sum_{v\in V} \langle L_v f(v), g(v)\rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f|g\rangle.
\end{aligned}$$

Ofensichtlich gilt für $g \in \mathrm{D}_{\mathrm{lok}}(\mathfrak{h}_\omega)$ und $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{komp}}(\mathfrak{h}_\omega)$:

$$\langle g'|f'\rangle - \sum_{v\in V} \langle L_v g(v), f(v)\rangle + \langle \mathcal{V}_\omega g|f\rangle = \overline{\mathfrak{h}^\star_\omega[f,g]} =: \mathfrak{h}^\star_\omega[g,f].$$

Bemerkung 2.3.12. Offensichtlich ist $\mathrm{D}_{\mathrm{komp}}(\mathfrak{h}_L) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$. Gilt für eine Funktion $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{komp}}(\mathfrak{h}_L)$ zusätzlich $g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{lok}}(\mathfrak{h}_L)$, dann folgt:

$$\mathfrak{h}^\star_\omega[f,g] = \mathfrak{h}_L[f,g] = \mathfrak{h}^{\Gamma_{\tilde{E}}}[f,g],$$

für jede Kantenmenge $\tilde{E} \subset E$ mit $\operatorname{supp} f \subset X_{\tilde{E}}$.

Das Konzept der lokalen Funktionen wird vorrangig für die verallgemeinerten Eigenfunktionen benutzt. Diese werden im Abschnitt 2.9 definiert und mit Hilfe dieser und der Verallgemeinerungen der Skalarprodukte und Sesquilinearformen wird im Abschnitt 3.2 spektrale Lokalisierung geschlussfolgert.

2.4 Wachstum, Geometrie und Überdeckung von Graphen

Für die Multiskalenanalyse ist die Überdeckung des Graphen und die Abschätzung von Anzahlen gewisser Umgebungs-/Überdeckungsmengen nötig, wobei die Anzahl der Überdeckungsmengen polynomiell in der Längenskala wachsen soll.

Gleichmäßige Überdeckungen können aus gleichmäßigem Wachstum gewonnen werden. Wie dies für gleichmäßig polynomielles Wachstum des Graphen funktioniert, wird in diesem Abschnitt angegeben. Es folgen einige Hilfssätze für spezielle, in der Multiskalenanalyse benötigte, Überdeckungen.

Definition 2.4.1. Das Volumen eines metrischen Graphen $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ sei die Summe der Kantenlängen aller Kanten in E:

$$\mathrm{vol}(\Gamma_E) := \sum_{e \in E} l(e).$$

Für endliche Graphen ist das Volumen genau dann endlich, wenn es keine Kanten unendlicher Länge gibt. Aus der Annahme (geom:u) – der Kantenlängenbeschränkung nach unten – folgt, dass das Volumen eines unendlichen Graphen unendlich ist.

Definition 2.4.2. Ein metrischer Graph Γ wird gleichmäßig polynomiell wachsend genannt, wenn es zwei Konstanten $0 < c_1 \leq c_2 \in \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl d gibt, so dass

$$\forall\ v \in V \text{ und } r \geq u \qquad c_1 \cdot r^d \leq \mathrm{vol}(\Lambda_r(v)) \leq c_2 \cdot r^d. \qquad \text{(geom:poly)}$$

Ist zusätzlich die Annahme (geom:u,U) erfüllt, wird ein solcher metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) bezeichnet.

Auch für kombinatorische Graphen kann gleichmäßig polynomielles Wachstum definiert werden. Bei diesen Graphen ist üblicherweise der Abstand von zwei durch eine Kante verbundenen Knoten gleich eins. Zu einem metrischen Graphen $\Gamma = (E, V, l, i, j)$, gibt es einen kombinatorischen Graphen $\Gamma_{\mathrm{K}} = (E, V, 1, i, j)$, der aus Γ entsteht, indem jede Kante die Länge eins zugewiesen bekommt.

Definition 2.4.3. Ein kombinatorischer Graph $\Gamma_{\mathrm{K}} = (E, V, 1, i, j)$ heißt gleichmäßig polynomiell wachsend, wenn die Anzahl der Knoten in einer Umgebung mit Radius r um jeden Knoten gleichmäßig polynomiell nach oben und nach unten beschränkt ist:

$$\forall\ v \in V \text{ und } r \geq 1: \qquad c_{1,\mathrm{K}} \cdot r^d \leq \mathrm{vol}_{\mathrm{K}}(B_r(v)) \leq c_{2,\mathrm{K}} \cdot r^d,$$

mit $0 < c_{1,\mathrm{K}} \leq c_{2,\mathrm{K}}$, $d > 0$. Dabei ist $B_r(v)$ die abgeschlossene Umgebung mir Radius r um einen Knoten v in der neu entstandenen Metrik $\mathfrak{d}_{\mathrm{K}}$ (adjazente Knoten haben Abstand eins) und das Volumen ist definiert als die Anzahl enthaltener Knoten:

$$B_r(v_0) = \{v \in V \text{ mit } \mathfrak{d}_{\mathrm{K}}(v, v_0) \leq r\}, \qquad \mathrm{vol}_{\mathrm{K}}(A) = |A| \text{ für } A \subset V.$$

Es zeigt sich, dass die beiden Arten von gleichmäßig polynomiellem Wachstum äquivalent sind:

Hilfssatz 2.4.4. *1. Aus gleichmäßig polynomiellem Wachstum folgt eine gleichmäßige Beschränkung des Knotengrades.*

2. *Für einen gleichmäßig polynomiell wachsenden kombinatorischen Graphen* $\Gamma_K = (E, V, 1, i, j)$ *ist jeder metrische Graph* $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ *dessen Kantenlängenfunktion* l *die Annahme* (geom:u,U) *erfüllt, gleichmäßig polynomiell wachsend vom gleichen Grad.*

3. *Sei* $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ *ein gleichmäßig polynomiell wachsender metrischer Graph, der die Annahme* (geom:u,U) *erfüllt, dann ist der zugehörige kombinatorische Graph* $\Gamma_K = (E, V, 1, i, j)$ *auch vom gleichen Grad gleichmäßig polynomiell wachsend.*

Beweis. 1. Für einen metrischen Graphen, der keine gleichmäßige Beschränkung des Knotengrades aufweist, gibt es eine Folge von Knoten (v_n), deren Knotengrad gegen unendlich konvergiert. Das heißt, es gibt eine Teilfolge der natürlichen Zahlen mit $d_{v_{n_k}} \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathrm{vol}(\Lambda_r(v_{n_k})) \geq u \cdot k$, dem Produkt aus der kürzesten Kantenlänge mit der Anzahl der Kanten in v_{n_k}, für alle $r > 0$. Dies wird beliebig groß und überschreitet für k groß genug nicht nur jedes polynomielle, sondern auch jedes exponentielle Wachstum. Damit haben Graphen die polynomiell oder sogar exponentiell wachsen eine gleichmäßige Beschränkung des Knotengrades. Analog folgt dies auch für kombinatorische Graphen.

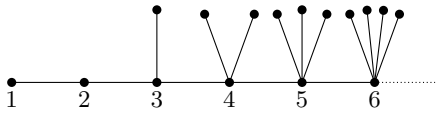


Abbildung 2.2: Graph mit $V = \mathbb{N}$ und $d_n = n$.

2. Laut erstem Teil gibt es einen maximalen Knotengrad $d_{\max}$ des kombinatorischen Graphen. Die Umgebung mit Radius $r \cdot U$ um einen Knoten v_0 des kombinatorischen Graphen enthält alle inneren Punkte von $\Lambda_r(v_0)$, wobei jeder Knoten zu maximal $d_{\max}$ Kanten inzident ist und die Kanten maximal Länge U haben. Andersherum ist die Umgebung $B_{u \cdot r}(v_0)$ immer in den inneren Knoten von $\Lambda_r(v_0)$ enthalten und pro Knoten gibt es mindestens eine halbe Kante, die mindestens Länge u hat:

$$\mathrm{vol}(\Lambda_r(v_0)) \leq d_{\max} \cdot \mathrm{vol}_K(B_{U \cdot r}(v_0)) \cdot U \leq \underbrace{c_{2,K} \cdot d_{\max} \cdot U^{d+1}}_{=:c_2} r^d,$$

$$\mathrm{vol}(\Lambda_r(v_0)) \geq \frac{1}{2} \cdot \mathrm{vol}_K(B_{u \cdot r}(v_0)) \cdot u \geq \underbrace{c_{1,K} \cdot \frac{u^{d+1}}{2}}_{=:c_1} r^d.$$

3. Laut erstem Teil gibt es für den metrischen Graphen einen maximalen Knotengrad $d_{\max}$. Alle inneren Knoten von $\Lambda_{\frac{r}{U}}(v_0)$ liegen in $B_r(v_0)$ des kombinatorischen Graphen und für $d_{\max}$ Kanten gibt es mindestens einen Knoten in dieser Umgebung. Umgekehrt liegen alle Knoten von $B_r(v_0)$ in $\Lambda_{\frac{r}{u}}(v_0)$ und für jede Kante gibt es maximal zwei Knoten:

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{K}}(B_r(v_0)) \geq \mathrm{vol}\left(\Lambda_{\frac{r}{U}}(v_0)\right) \frac{1}{d_{\max} \cdot U} \geq \underbrace{\frac{c_1}{d_{\max} \cdot U^{d+1}}}_{=:c_{1,K}} \cdot r^d,$$

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{K}}(B_r(v_0)) \leq \frac{2}{u} \mathrm{vol}\left(\Lambda_{\frac{r}{u}}(v_0)\right) \leq \underbrace{\frac{2}{u^{d+1}}}_{=:c_{2,K}} \cdot r^d. \qquad \square$$

Bemerkung 2.4.5. 1. Die Annahme der Gleichmäßigkeit des polynomiellen Wachstums nach unten und nach oben ist notwendig: Es gibt Graphen, für die Gleichung (geom:poly) nicht gleichmäßig für alle Knoten, sondern in jedem Knoten mit nicht gleichmäßiger Konstante $c_1(v)$ erfüllt ist.

2. Es gibt polynomiell wachsende Graphen zu Exponenten $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

3. Es gibt Graphen mit maximalem Knotengrad von drei, die nicht mehr polynomiell, sondern exponentiell wachsen.

Beweis. 1. Der Graph $\mathbb{Z}^d$ bei dem in Null noch der Graph $\mathbb{N}$ angehängt wird, wächst offensichtlich maximal mit gleichmäßiger polynomieller Beschränkung vom Grad d. Werden auf $\mathbb{N}$ Umgebungen mit Radius n im Knoten n gewählt, dann gilt $\mathrm{vol}(\Lambda_n(n))) = 2n$. Um ein Wachstum nach unten vom Grad d zu erhalten, muss $c_1(n) \sim \frac{1}{n^{d-1}}$ gewählt werden, was für n gegen Unendlich gegen null konvergiert. Das heißt, der Graph wächst nach unten gleichmäßig polynomiell vom Grad eins.

2. Sei Γ der metrische Graph, der aus dem Sierpinski-Dreieck mit fester Kantenlänge entsteht (siehe auch Abbildung 2.3). Dann haben Umgebungen des Wurzelknotens des kombinatorischen Graphen die folgenden Volumen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(B_{2^0}(0)) = 3\\
&\mathrm{vol}(B_{2^1}(0)) = 3 \cdot \mathrm{vol}(B_{2^0}(0)) - 3 = 6\\
&\mathrm{vol}(B_{2^2}(0)) = 3 \cdot \mathrm{vol}(B_{2^1}(0)) - 3 = 15\\
&\mathrm{vol}(B_{2^3}(0)) = 3 \cdot \mathrm{vol}(B_{2^2}(0)) - 3 = 42\\
&\qquad\vdots\\
&\mathrm{vol}(B_{2^n}(0)) = 3 \cdot \mathrm{vol}(B_{2^{n-1}}(0)) - 3 = 3^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{3(3^n+1)}{2}
\end{aligned}$$

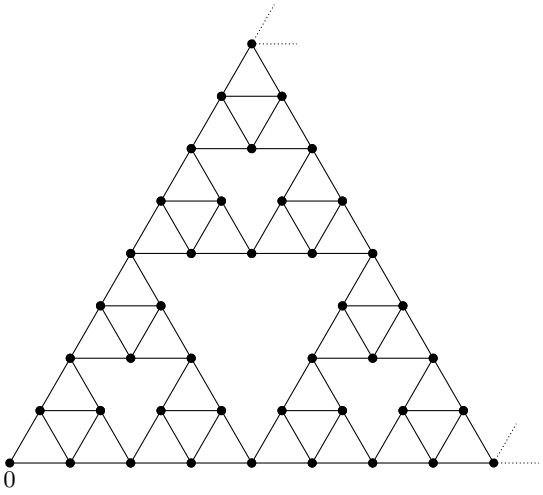


Abbildung 2.3: Sierpinski Dreieck.

Die Substitution $k := 2^n$ ergibt

$$\mathrm{vol}(B_k(0)) = \frac{3(k^{\log_2 3}) + 1}{2},$$

also polynomielles Wachstum zum Grad $\log_2 3$, welcher gerade der fraktalen Dimension des Sierpinski Dreiecks entspricht.

3. Ein vollständiger Baum mit Verzweigungszahl zwei hat ein exponentielles und kein gleichmäßig polynomielles Wachstum. Für Kanten der Länge eins gilt $\mathrm{vol}(\Lambda_n(0)) = 2^{n+1} - 2$.

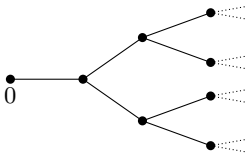


Abbildung 2.4: Vollständiger Baum mit Verzweigungszahl 2.

□

Die Umgebung eines Knotens v_0 mit Radius R durch Mengen mit fest

gewähltem Radius zu überdecken, gelingt durch die Wahl einer Menge disjunkter Umgebungen in $\Lambda_R(v_0)$ mit Radien die klein genug sind:

Definition 2.4.6. Für einen metrischen Graphen der (geom:u,U,poly) erfüllt, wird mit $V_{R,r}(v_0) \subset V$ eine Menge mit maximaler Anzahl an Knoten bezeichnet, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $\Lambda_r(v_i) \cap \Lambda_r(v_j) = \varnothing$ für v_i, $v_j \in V_{R,r}(v_0)$, $v_i \neq v_j$,
- $\Lambda_r(v_i) \subset \Lambda_R(v_0)$ für alle $v_i \in V_{R,r}(v_0)$.

$V_{R,r}(v_0)$ gibt also eine Konfiguration von maximal vielen, disjunkten Umgebungen mit Radius r an, die alle in der Umgebung mit Radius R und Zentrum v_0 enthalten sind.

Der nachfolgende Hilfssatz beruht auf dem Überdeckungssatz von Vitali und sagt aus, dass die Mengen mit Radius $3r + 5U$ und Zentren aus $V_{R,r}(v_0)$ die Ausgangsumgebung $\Lambda_R(v_0)$ überdecken:

Hilfssatz 2.4.7. *Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly). Dann gilt*

$$\bigcup_{v \in V_{R,r}(v_0)} \Lambda_{3r+5U}(v) \supset \Lambda_R(v_0).$$

Beweis. Es wird das Gegenteil angenommen: Sei also $x \in X_{E(v_0,R)}$ in keiner dieser Umgebungen mit Radius $3r + 5U$ enthalten. Dann gilt für alle Knoten $v \in V_{R,r}(v_0)$: Der Abstand zu x ist gleich $\mathfrak{d}(x, v) > 3r + 5U$. Nun gibt es aber auf einem der kürzesten Pfade von x zu v_0 einen Knoten $\tilde{v} \in V$ mit Entfernung $\mathfrak{d}(x, \tilde{v}) \in [r+2U, r+3U]$. Für alle $y \in \Lambda_r(\tilde{v})$ gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}(y, v) &\geq \mathfrak{d}(x, v) - \mathfrak{d}(x, y) \\
\mathfrak{d}(y, v) &\geq \mathfrak{d}(x, v) - \mathfrak{d}(x, \tilde{v}) - \mathfrak{d}(\tilde{v}, y) \\
\mathfrak{d}(y, v) &\geq 3r + 5U - (r + 3U) - (r + U) = r + U
\end{aligned}$$

für alle $v \in V_{R,r}(v_0)$. Dies besagt, dass $\Lambda_r(\tilde{v})$ eine zu jeder Umgebung $\Lambda_r(v)$, $v \in V_{R,r}(v)$, disjunkte Umgebung ist. Und sie ist auch in $\Lambda_R(v_0)$ enthalten, da

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d}(\tilde{v}, v_0) &= \mathfrak{d}(x, v_0) - \mathfrak{d}(x, \tilde{v}) \leq (R + U) - (r + 2U) = R - r - U \\
\mathfrak{d}(y, v_0) &\leq \mathfrak{d}(y, \tilde{v}) + \mathfrak{d}(\tilde{(v)}, v_0) \leq r + U + R - r - U = R,
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{v}$ kein Knoten aus $V_{R,r}(v_0)$ ist:

$$\mathfrak{d}(\tilde{v}, v) \geq \mathfrak{d}(x, v) - \mathfrak{d}(x, \tilde{v}) \geq 3r + 5U - (r + 3U) = 2r + 2U > 0,$$

was ein Widerspruch zur Maximalität von $V_{R,r}(v_0)$ ist. □

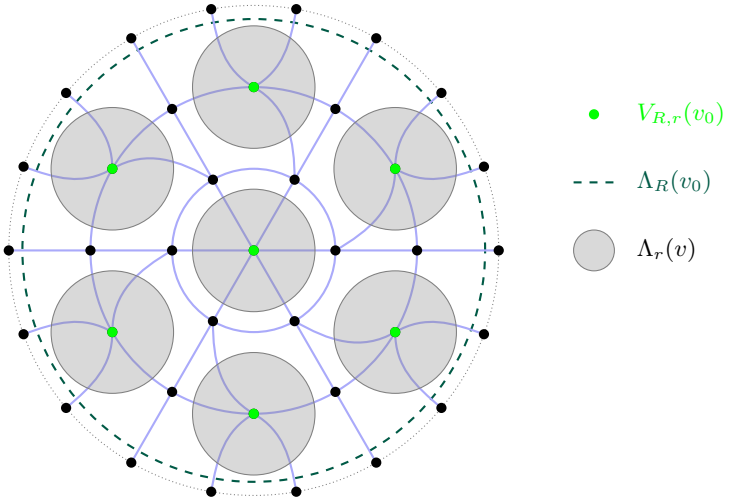


Abbildung 2.5: Beispiel eines Überdeckungsrasters.

Bei der Überdeckung einer Umgebung ist die Anzahl der dazu benötigten kleineren Umgebungen im Lokalisierungsbeweis sehr wichtig. Diese Anzahl kann direkt aus dem gleichmäßig polynomiellen Wachstum abgeleitet werden:

Hilfssatz 2.4.8. *Für einen gleichmäßig polynomiell wachsenden metrischen Graphen mit (geom:u,U,poly) gilt für die maximale Anzahl disjunkter Umgebungen $\Lambda_r(v)$, die in $\Lambda_R(v_0)$ liegen:*

$$\frac{c_1}{c_2}\left(\frac{R}{3r+5U}\right)^d \leq |V_{R,r}(v_0)| \leq \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{R}{r}\right)^d \qquad \textit{für alle } r \geq u, v_0 \in V.$$

Beweis. Sei $V_{R,r}(v_0) \subset V$ eine maximal große Menge an Knoten, so dass $\Lambda_r(v_i) \cap \Lambda_r(v_j) = \varnothing$ für unterschiedliche Knoten v_i, $v_j \in V_{R,r}(v_0)$ und $\Lambda_r(v_i) \subset \Lambda_R(v_0)$ für alle $v_i \in V_{R,r}(v_0)$. Dann gilt laut letztem Hilfssatz:

$$\operatorname{vol}\left(\bigcup_{v_i \in V_{R,r}(v_0)} \Lambda_r(v_i)\right) \leq \operatorname{vol}(\Lambda_R(v_0)) \leq \operatorname{vol}\left(\bigcup_{v_i \in V_{R,r}(v_0)} \Lambda_{3r+5U}(v_i)\right).$$

Mit (geom:poly) ergibt sich daraus

$$|V_{R,r}(v_0)| \cdot c_1 \cdot r^d \leq \operatorname{vol}\left(\bigcup_{v_i \in V_{R,r}(v_0)} \Lambda_r(v_i)\right) \leq \operatorname{vol}(\Lambda_R(v_0)) \leq c_2\, R^d,$$

$$c_1 R^d \leq \mathrm{vol}(\Lambda_R(v_0)) \leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{v_i \in V_{R,r}(v_0)} \Lambda_{3r+5U}(v_i)\right) \leq |V_{R,r}(v_0)| \cdot c_2 \cdot (3r+5U)^d,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Damit ist klar, wie Umgebungen mit Radius R durch Umgebungen mit Radien r überdeckt werden können, zum Beispiel durch die Wahl des Rasters $V_{R,\frac{r}{4}}$ für große r ($r \geq 20U$). In der Multiskalenanalyse werden Mengen mit Radius R durch das Innere von Mengen mit Radius r, also $\Lambda_r^{\mathrm{int}}(v)$, überdeckt. Dafür wird das Raster $V_{R,\frac{r}{10}}$ gewählt, welches für große r etwas feiner ist als benötigt. Dadurch können zusätzliche Eigenschaften der Überdeckungen bewiesen werden.

In einem Schritt der Multiskalenanalyse werden sogenannte Containermengen (dies werden auch Umgebungen eines bestimmten Knoten mit gewissen Radien sein) konstruiert, welche alle Mengen mit bestimmten Eigenschaften beinhalten. Dass das Äußere der Containermengen durch Mengen überdeckt werden kann, die nicht vollständig im Container liegen, und somit nicht die bestimmte Eigenschaft haben, liefert das feinere Raster und wird im folgenden Hilfssatz gezeigt:

Hilfssatz 2.4.9. *Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly). Sei $x \in V$, $r > 300U$. Sei $\Lambda_s(v) \subset \Lambda_R(x)$ mit $v \in V_{R,\frac{r}{10}}(x)$. Dann kann $\Lambda_s^{\mathrm{out}}(v)$ durch Mengen mit Radius $\frac{r}{3}$ und Zentren in $V_{R,\frac{r}{10}}(x)$ überdeckt werden, die keine Teilmengen von $\Lambda_s(v)$ sind. Das heißt, es gibt eine Teilmenge $W \subset V_{R,\frac{r}{10}}(x)$ mit:*

$$\bigcup_{w \in W} \Lambda_{\frac{r}{3}}(w) \supset \Lambda_s^{\mathrm{out}}(v) \qquad \textit{und} \qquad \forall\, w \in W : \Lambda_{\frac{r}{3}}(w) \not\subset \Lambda_s(v).$$

Beweis. Sei W die Teilmenge von $V_{R,\frac{r}{10}}(x)$, so dass $\Lambda_{\frac{r}{3}}(w) \not\subset \Lambda_s(v)$ für alle $w \in W$.

Sei $x_0 \in \Lambda_s^{\mathrm{out}}(v)$. Laut Hilfssatz 2.4.7 gibt es zu x_0 einen Rasterpunkt $v_0 \in V_{R,\frac{r}{10}}(x)$, so dass x_0 in der Umgebung mit Radius $\left(3\frac{r}{10}+5U\right)$ um v_0 liegt. Das heißt:

$$\mathfrak{d}(x_0, v_0) < \frac{3r}{10} + 6U.$$

Damit gilt:

$$\mathfrak{d}(v, v_0) \geq \mathfrak{d}(v, x_0) - \mathfrak{d}(x_0, v_0) \geq s - 3U - \left(\frac{3r}{10} + 6U\right) = s - 9U - \frac{3r}{10}. \tag{2.3}$$

Folgende Beziehungen zeigen, dass v_0 ein Zentrum ist, so dass $x_0 \in \Lambda_{\frac{r}{3}}(v_0)$ und $\Lambda_{\frac{r}{3}}(v_0) \not\subset \Lambda_s(v)$ (also $v_0 \in W$):

- $x_0 \in \Lambda_{\frac{r}{3}}(v_0)$, wenn $\mathfrak{d}(x_0, v_0) \leq \frac{r}{3}$. Dies gilt für $\frac{3r}{10} + 6U \leq \frac{r}{3}$, d.h. $r \geq 180U$,
- $\mathfrak{d}(v, v_0) + \frac{r}{3} > s + U$, mit (2.3) gilt dies, wenn $s - 9U - \frac{3r}{10} + \frac{r}{3} - s - U > 0$, d.h. $r > 300U$. □

Folgende Bemerkung wird verwendet um Rechnungen zu vereinfachen:

Bemerkung 2.4.10. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly). Sei eine Umgebung $\Lambda_R(x)$ und das Raster $V_{R,\frac{r}{10}}(x)$ mit $\Lambda_s(v) \subset \Lambda_R(x)$ für $v \in V_{R,\frac{r}{10}}(x)$ und $r \geq 180U$ gegeben. Dann kann $\Lambda_s(v)$ mit Mengen $\Lambda_{\frac{r}{3}}(v_i)$ überdeckt werden, so dass $v_i \in V_{R,\frac{r}{10}}(x)$ und $\mathfrak{d}(v, v_i) \leq s + \frac{r}{3}$.

Die Überdeckung wird durch Hilfssatz 2.4.7 gewährleistet. Es würde aber $\mathfrak{d}(v, v_i) \leq s + \frac{r}{3} + U$ folgen. Die feinere Wahl des Rasters lässt den zusätzlichen Summanden verschwinden.

Beweis. Sei $x_0 \in \Lambda_r(v)$. Dann gibt es laut Hilfssatz 2.4.7 ein $v_0 \in V_{R,\frac{r}{10}}(x)$, so dass $x_0 \in \Lambda_{3\frac{r}{10}+5U}(v_0)$. Dann gilt für den Abstand von v zu diesem Zentrum:

$$\mathfrak{d}(v, v_0) \leq \mathfrak{d}(v, x_0) + \mathfrak{d}(x_0, v_0) \leq \frac{3r}{10} + 5U + s + U \leq s + \frac{r}{3}$$

für $r \geq 180U$. □

In den letzten beiden Abschnitten gab es einige Beziehungen, die nur für einen großen Radius gelten. Alle diese Bedingungen sollen zu einer einzigen zusammengefasst werden, dies ist möglich mit

$$r > r_{\mathrm{G}} = 300U.$$

Es gelten also alle angegebenen Hilfssätze, Bemerkungen und Beziehungen für alle Radien r mit $r > r_{\mathrm{G}}$.

2.5 Combes-Thomas-Abschätzung

Die Combes-Thomas-Abschätzung ist eine wichtige Abschätzung, die in vielen verschiedenen Bereichen Anwendung findet und mehrfach in der folgenden Multiskalenanalyse benutzt wird. Sie liefert einen exponentiellen Abfall der lokalen Resolventen – vorausgesetzt der reelle Energieparameter befindet sich in einer bekannten Lücke im Spektrum (d.h. in der Resolventenmenge) mit gewissem Abstand zum Spektrum.

Das Fallen hängt von der Größe der bekannten Lücke, dem Abstand des Energierparameters zum Lückenrand und dem Abstand der beiden Mengen, zwischen denen die Resolvente überträgt, ab. Die konkreten Zusammenhänge werden explizit angegeben, wobei herausgestellt wird, dass der Abstand der

beiden Mengen der wichtigste Parameter ist. Die restlichen Konstanten sind unabhängig von der jeweilig gewählten Realisierung, d.h. sie hängen weder von ω noch von den jeweiligen Mengen ab. Genauere Erläuterungen folgen am Ende dieses Abschnittes.

Ursprünglich geht die Abschätzung auf den Artikel [CT73] zurück. Eine Verbesserung mit Ergebnissen, wie sie auch hier angegeben werden, erfolgte in [BCH97]. Der Beweis benutzt assoziierte quadratische Formen und verläuft wie in [Sto01] in Theorem 2.4.1. Unterschiede entstehen durch den zusätzlichen Term der Randbedingungen (RB:P,L,S) in der Sesquilinearform und deren Definitionsbereich.

Um die Abschätzung zu beweisen sind sektorielle quadratische Formen und sektorielle Operatoren notwendig, welche Verallgemeinerungen von halbbeschränkten Formen und Operatoren darstellen. Die Definitionen und der wichtigste Zusammenhang zwischen diesen sind in der Quelle [Kat95] zu finden und werden im folgenden angegeben.

Definition 2.5.1. Für eine quadratische Form $\mathfrak{h} : \mathrm{D}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$ werden Realteil $\mathfrak{t} : \mathrm{D}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$ und Imaginärteil $\mathfrak{k} : \mathrm{D}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$ definiert durch:

$$\mathfrak{t}[f] := \frac{1}{2}\left(\mathfrak{h}[f] + \overline{\mathfrak{h}[f]}\right) = \operatorname{Re}\mathfrak{h}[f], \qquad \mathfrak{k}[f] := \frac{1}{2i}\left(\mathfrak{h}[f] - \overline{\mathfrak{h}[f]}\right) = \operatorname{Im}\mathfrak{h}[f].$$

Dabei entspricht der Realteil dem symmetrischen Anteil der Form und der Imaginärteil dem antisymmetrischen Anteil der Form. Eine quadratische Form $\mathfrak{h} : \mathrm{D}(\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}$ heißt sektoriell, wenn der Realteil $\mathrm{Re}(\mathfrak{h})$ durch eine Konstante C nach unten halbbeschränkt ist und für den Imaginärteil gilt:

$$|\operatorname{Im}(\mathfrak{h}[f,f])| \leq C \operatorname{Re}((\mathfrak{h}+C)[f,f]) \qquad \forall\ f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}).$$

Das heißt, wenn der numerische Wertebereich der Form $\Theta(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{h}[f] \text{ mit } f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}), \|f\| = 1\}$ in einem Sektor in der komplexen Zahlenebene liegt – siehe auch Abbildung 2.6.

Definition 2.5.2. Sei H ein Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ über $\mathbb{C}$. Dann heißt H akkretiv, wenn der numerische Wertebereich $\Theta(H) = \{\langle Hf, f\rangle \text{ mit } f \in \mathrm{D}(H), \|f\| = 1\} \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge der rechten Halbebene ist, d.h. wenn

$$\Theta(H) \subset \{z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}.$$

Ein akkretiver Operator H heißt m-akkretiv, wenn der Defektindex für ein (und damit für alle) $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z < 0$ gleich Null ist (d.h. wenn $H - z$ dichtes Bild hat). Ein Operator H heißt quasi-akkretiv, wenn es eine reelle Zahl α gibt, so dass $H + \alpha$ akkretiv ist.

Ein quasi-akkretiver Operator H heißt sektoriell, wenn sein numerischer Wertebereich in einem Sektor mit Öffnungswinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ liegt. Ist die Verschiebung $H + \alpha$ des Operators zusätzlich noch m-akkretiv, dann wird H m-sektoriell genannt.

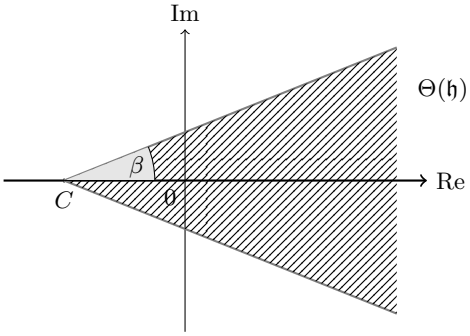


Abbildung 2.6: Numerischer Wertebereich einer sektoriellen Form oder eines sektoriellen Operators mit Öffnungswinkel β.

Jeder m-sektorielle Operator ist maximal sektoriell, dass heißt es gibt keine sektorielle Erweiterung des Operators.

Satz 2.5.3. *Für eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform $\mathfrak{h}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es einen eindeutigen m-sektoriellen Operator H auf $\mathcal{H}$, so dass* $\mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{h})$ *und*

$$\mathfrak{h}[f,g] = \langle Hf, g\rangle \qquad \textit{für alle } f \in \mathrm{D}(H), g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}).$$

Dieser Darstellungssatz und sein Beweis ist in [Kat95] Kapitel VI, § 2 Theorem 2.1 zu finden.

Der Beweis der Combes-Thomas-Abschätzung erfolgt durch Störung der ursprünglichen Form durch gewisse Gewichtsfunktionen, welche von den beiden Mengen, zwischen denen die Resolvente überträgt, abhängen. Die Gewichtsfunktionen werden im Folgenden definiert, dabei wird die Abhängigkeit der Funktion von den beiden Mengen in der Notation unterdrückt, da diese im Beweis fixiert sind.

Sei $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ ein metrischer Graph mit (geom:u). Für gegebene Mengen Y_1, $Y_2 \subset X_E$ seien zwei Gewichtsfunktionen $\tilde{w}$, $w : X_E \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x) &= \inf\{\mathfrak{d}(y,x) \text{ mit } y \in Y_1\},\\ w(x) &= \min\left\{\tilde{w}(x), \inf\{\tilde{w}(z) \text{ mit } z \in Y_2\}\right\}.\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{w}(x)$ der kürzeste Abstand von x zur Menge Y_1 in X_E. Die Funktion $w(x)$ liefert den kürzesten Abstand von x zur Menge Y_1, nach oben beschränkt durch $\mathrm{dist}(Y_1, Y_2)$.

Bemerkung 2.5.4. Die Funktion w ist stetig auf X_E, mehr noch $w_e \in W^{1,2}(I_e)$ und es gilt $|w'| \leq 1$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sei $e^{\alpha w}$ der Multiplikationsoperator, der als Multiplikation mit $e^{\alpha w(x)}$ wirkt. Die Inverse dazu ist $e^{-\alpha w}$ und natürlich gilt $e^{\alpha w}\phi$, $e^{-\alpha w}\phi \in L^2(X_E)$ für $\phi \in L^2(X_E)$, da $e^{\alpha w(x)}$, $e^{-\alpha w(x)} \in L^\infty(X_E)$.

Bemerkung 2.5.5. Sei ein metrischer Graph mit (geom:u) und $H^{P,L}$ ein Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) gegeben. Dann folgt aus $f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$ auch $e^{\alpha w} f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$, da w und damit auch $e^{\alpha w(x)}$ beschränkte, stetige Funktionen auf ganz X_E – also auch stetig in den Knoten – sind. Die Randwertvektoren erfüllen:

$$(e^{\alpha w} f)(v) = c(v) \cdot f(v),$$

für eine von v abhängige, reelle Konstante $c(v)$. Da alle Randwertoperatoren linear sind, bleiben die Randbedingungen erfüllt. Zusammen mit der letzten Bemerkung folgt dies auch aus Hilfssatz 1.4.6.

Für den Beweis der Combes-Thomas-Abschätzung ist jetzt nur noch ein weiterer allgemeingültiger Hilfssatz nötig, welcher erstmals in [BCH97] angegeben wurde und auch in [Sto01] als Lemma 2.4.2 gefunden werden kann.

Hilfssatz 2.5.6. *Sei T ein invertierbarer, selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, mit den Abständen $d_+ := \mathrm{dist}(\{0\}, \sigma(T) \cap (0,\infty))$ und $d_- := \mathrm{dist}(\{0\}, \sigma(T) \cap (-\infty, 0))$. Sei A selbstadjungiert mit $\|A\| \leq 1$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| < \frac{1}{2}\sqrt{d_+ \cdot d_-}$ ist der Operator $T + i\alpha A$ invertierbar mit*

$$\left\|(T + i\alpha A)^{-1}\right\| \leq 2\frac{1}{\min\{d_+, d_-\}}.$$

Satz 2.5.7. *Sei Γ ein metrischer Graph für den* (geom:u) *erfüllt ist und $H^{P,L}(\omega)$ ein negativer Laplace-Operator der Form (RB:P,L,S) auf Γ, für dessen Potential $\mathcal{V}_\omega$* (pot:char,dichte) *gilt. Sei $\omega \in \Omega$ und (r,s), mit $|r| < R$ und $|s| < R$, eine Lücke im Spektrum von $H^{P,L}(\omega)$. Sei $\lambda \in (r,s)$ und $\eta = \mathrm{dist}\left(\{\lambda\}, (r,s)^c\right)$. Seien Γ_{E_1} und Γ_{E_2} zwei induzierte Teilgraphen von Γ mit positivem Abstand $\delta = \mathrm{dist}(\Gamma_{E_1}, \Gamma_{E_2})$. Dann gibt es zwei Konstanten $C_{\mathrm{CTA}}(R,S,\alpha,C_\mathcal{V})$ und $\tilde{C}(R,S,\alpha,C_\mathcal{V})$ mit:*

$$\left\| \mathbb{1}_{X_{E_1}} \left(H^{P,L}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_2}} \right\| \leq C_{\mathrm{CTA}} \cdot \eta^{-1} \cdot \mathrm{e}^{-\tilde{C}\sqrt{\eta(s-r)}\delta}.$$

Beweis. Die Form $\mathfrak{h}_\omega$ ist die assoziierte Form zu $H^{P,L}(\omega)$. Ausgehend von dieser wird die Form $\mathfrak{h}_\alpha$, mit $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_\alpha) = \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$, definiert durch

$$\mathfrak{h}_\alpha[f,g] = \mathfrak{h}_\omega\left[e^{-\alpha w} f, e^{\alpha w} g\right] \qquad \text{für alle } f, g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega),$$

wobei die Gewichtsfunktion $w(x)$ anhand der beiden Mengen $Y_1 = X_{E_1}$ und $Y_2 = X_{E_2}$ konstruiert wird. Das heißt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_\alpha[f,g] &= \left\langle (e^{-\alpha w} f)', (e^{\alpha w} g)' \right\rangle_{L^2(X_E)} - \sum_{v \in V} \left\langle L_v (e^{-\alpha w} f)(v), (e^{\alpha w} g)(v) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \mathcal{V}_\omega e^{-\alpha w} f, e^{\alpha w} g \right\rangle \\
&= \left\langle e^{-\alpha w} f', e^{\alpha w} g' \right\rangle - \alpha \left\langle e^{-\alpha w} f w', e^{\alpha w} g' \right\rangle + \alpha \left\langle e^{-\alpha w} f', e^{\alpha w} g w' \right\rangle \\
&\quad - \alpha^2 \left\langle e^{-\alpha w} f w', e^{\alpha w} g w' \right\rangle - \sum_{v \in V} \langle L_v f(v), g(v) \rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, g \rangle \\
&= \langle f', g' \rangle - \alpha^2 \langle f w', g w' \rangle - \alpha \langle f w', g' \rangle + \alpha \langle f', g w' \rangle \\
&\quad - \sum_{v \in V} \langle L_v f(v), g(v) \rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, g \rangle .
\end{aligned}$$

Der symmetrische Anteil von $\mathfrak{h}_\alpha$ wird mit $\tilde{\mathfrak{h}}$ bezeichnet und entspricht dem Realteil von $\mathfrak{h}_\alpha$, es gilt:

$$\tilde{\mathfrak{h}}[f,g] = \left\langle f', g' \right\rangle - \alpha^2 \left\langle f w', g w' \right\rangle - \sum_{v \in V} \langle L_v f(v), g(v) \rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, g \rangle ,$$

für den antisymmetrischen Teil – dem Imaginärteil – ohne den Faktor α, der mit $\mathfrak{k}$ bezeichnet wird, ergibt sich:

$$\mathfrak{k}[f,g] = i \left\langle f w', g' \right\rangle - i \left\langle f', g w' \right\rangle .$$

Damit gilt $\mathfrak{h}_\alpha = \tilde{\mathfrak{h}} + i\alpha\mathfrak{k}$. Laut der Sobolevabschätzung (1.4) und der Halbbeschränkung der Randoperatoren L_v durch Beziehung (RB:S) gilt:

$$2S\varepsilon \|f'\|^2 - \sum_{v \in V} \langle L_v f(v), f(v) \rangle \geq -\frac{4S}{\varepsilon} \|f\|^2 \qquad \text{für alle } f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_L)$$

und alle ε mit $0 < \varepsilon \leq u$. Für die Wahl von ε mit $\varepsilon \leq \min\left\{u, \frac{1}{4S}\right\}$ folgt für den Realteil:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{h}}[f,f] &= \|f'\|^2 - \sum_{v \in V} \langle L_v f(v), f(v) \rangle - \alpha^2 \langle f w', f w' \rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, f \rangle \\
&\underset{(2.1)}{\geq} \frac{1}{2} \left\|f'\right\|^2 - \left(\frac{4S}{\varepsilon} + \alpha^2 + C_\mathcal{V} \right) \|f\|^2 .
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathfrak{h}}$ ist also nach unten halbbeschränkt, der dazu assoziierte selbstadjungierte Operator wird mit $\tilde{H}$ bezeichnet und hat den Definitionsbereich $\mathrm{D}(\tilde{H}) = \mathrm{D}(H^{P,L})$.

Für den Imaginärteil gilt nun:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{k}[f,f]| &= |\langle fw', f'\rangle - \langle f', fw'\rangle| \\ &\leq 2|\langle fw', f'\rangle| \leq 2\|fw'\|\|f'\| \leq 2\|f\|\|f'\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|f'\|^2 + 2\|f\|^2 \qquad \text{(bin. Formel)} \\ &\leq (\tilde{\mathfrak{h}} + C_1)[f,f] \end{aligned} \tag{2.4}$$

für C_1 groß genug, wobei C_1 von S, u und der Konstante $C_{\mathcal{V}}$ abhängt (es gilt $C_1 \geq \frac{4S}{u} + \alpha^2 + C_{\mathcal{V}} + 2$). Also existiert laut Hilfssatz 2.5.3 ein eindeutiger zu $\mathfrak{h}_\alpha$ assoziierter, m-sektorieller Operator H^α.

Für C_1 groß genug, ist $\tilde{\mathfrak{h}} + C_1$ Skalarprodukt und $\mathfrak{k}$ ist beschränkt im Hilbertraum $D_{\tilde{\mathfrak{h}}} = (\mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega), (\tilde{\mathfrak{h}} + C_1))$. Nach dem Satz von Riesz gibt es einen beschränkten Operator K auf $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$, so dass

$$\mathfrak{k}[f,g] = (\tilde{\mathfrak{h}} + C_1)[Kf, g] \qquad \text{für alle } f, g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega).$$

Laut Gleichung (2.4) hat K Norm kleiner gleich 1 in $D_{\tilde{\mathfrak{h}}}$.

Es wird eine neuer Operator definiert $A := (\tilde{H} + C_1)^{\frac{1}{2}} K (\tilde{H} + C_1)^{-\frac{1}{2}}$ mit $A : L^2(X_E) \to L^2(X_E)$. Es gilt $\|A\| = \|K\|_{D_{\tilde{\mathfrak{h}}}} \leq 1$. Denn $(\tilde{H} + C_1)^{\frac{1}{2}} : \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega) \to L^2(X_E)$ und $(\tilde{H} + C_1)^{-\frac{1}{2}} : L^2(X_E) \to \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$ haben Norm eins zwischen den Hilberträumen $L^2(X_E)$ und $D_{\tilde{\mathfrak{h}}}$. Für den Operator A gilt weiter:

$$\begin{aligned}\left\langle A(\tilde{H} + C_1)^{\frac{1}{2}} f, (\tilde{H} + C_1)^{\frac{1}{2}} g \right\rangle &= \left\langle (\tilde{H} + C_1)^{\frac{1}{2}} Kf, (\tilde{H} + C_1)^{\frac{1}{2}} g \right\rangle \\ &= (\tilde{\mathfrak{h}} + C_1)[Kf, g] \\ &= \mathfrak{k}[f,g] \qquad \text{für alle } f, g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Es wird $r' = r + \frac{\eta}{2}$ und $s' = s - \frac{\eta}{2}$ gesetzt. Für $\alpha^2 \leq \frac{\eta}{2}$ ist das Spektrum von $\tilde{H}$ höchstens um $\frac{\eta}{2}$ gegenüber dem von $H^{P,L}$ verschoben, also gilt (siehe auch Abb. 2.7):

$$\lambda \in (r', s') \subset \varrho(\tilde{H}).$$

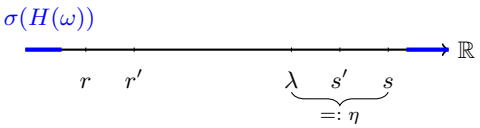


Abbildung 2.7: Lücke im Spektrum.

Für $C \geq \max\{-\lambda, C_1\}$ ist $\phi(t) = \frac{t-\lambda}{t+C}$ auf dem Spektrum von $\tilde{H}$ wohldefiniert, monoton wachsend und beschränkt und es gilt für

$$T := (\tilde{H} - \lambda)(\tilde{H} + C)^{-1} = \phi(\tilde{H}),$$

dass

$$0 \in \left(\frac{r' - \lambda}{r' + C}, \frac{s' - \lambda}{s' + C} \right) \subset \rho(T) = \rho(\phi(\tilde{H})),$$

d.h. Null liegt in der Resolventenmenge von T. Mit

$$\begin{aligned} d_+ &:= \operatorname{dist}(0, \sigma(T) \cap (0, \infty)), \\ d_- &:= \operatorname{dist}(0, \sigma(T) \cap (-\infty, 0)) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \lambda - r = \eta \text{ oder } s - \lambda = \eta \\ \lambda = r' + \frac{\eta}{2} \text{ oder } \lambda = s' - \frac{\eta}{2} \\ s' - \lambda = s' - r' - \frac{\eta}{2} \text{ oder } \lambda - r' = s' - r' - \frac{\eta}{2}, \end{aligned}$$

zusätzlich gilt $\lambda - r' \geq \frac{\eta}{2}$ und $s' - \lambda \geq \frac{\eta}{2}$, also insgesamt:

$$d_+ \cdot d_- \geq \frac{(s' - \lambda)(\lambda - r')}{(s' + C)(r' + C)} \geq \frac{\frac{\eta}{2}(s' - r' - \frac{\eta}{2})}{(R + C)^2},$$

mit $s - r = s' - r' + \eta$ und $\eta \leq \frac{1}{2}(s - r)$ ergibt sich

$$d_+ \cdot d_- \geq \frac{\eta}{8} \frac{s - r}{(R + C)^2}.$$

Weiter gilt für d_+ und d_-:

$$\begin{aligned} d_+ \geq \frac{s' - \lambda}{s' + C} \geq \frac{\eta}{2} \frac{1}{R + C} \\ d_- \geq \frac{\lambda - r'}{r' + C} \geq \frac{\eta}{2} \frac{1}{R + C}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Die folgende Nebenrechnung zeigt, dass für alle $h,\, g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathfrak{h}} - \lambda)[h, g] &= (\tilde{\mathfrak{h}} + C)[h, g] - (C + \lambda)\langle h, g \rangle \\ &= \langle (\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} h, (\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} g \rangle - (C + \lambda)\langle h, g \rangle \\ &= \langle (\tilde{H} - \lambda)(\tilde{H} + C)^{-1} (\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} h, (\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} g \rangle \\ &\quad + \langle (\lambda + C)(\tilde{H} + C)^{-1} (\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} h, (\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} g \rangle - (C + \lambda)\langle h, g \rangle \\ &= \langle T(\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} h, (\tilde{H} + C)^{\frac{1}{2}} g \rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Es gilt $\|A\| \leq 1$ und T ist für $|\alpha| \leq \sqrt{\frac{\eta}{2}}$ ein invertierbarer, selbstadjungierter Operator. Dann ist, nach Hilfssatz 2.5.6, $T+i\alpha A$ für alle α mit $|\alpha| \leq \frac{\sqrt{2\eta(s-r)}}{8(R+C)}$ invertierbar und es gilt

$$\|(T+i\alpha A)^{-1}\| \underset{(2.6)}{\leq} \frac{4(R+C)}{\eta}. \tag{2.8}$$

Sei $\alpha \leq \left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\alpha \leq \frac{\sqrt{2\eta(s-r)}}{8(R+C)}$. Sei $f \in L^2(X_E)$ und $g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$. Das Setzen von

$$h := (\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}}(T+i\alpha A)^{-1}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} f \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$$

liefert

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{h}_\alpha - \lambda)[h,g] \\
&\quad = (\tilde{\mathfrak{h}} - \lambda)[h,g] + i\alpha\mathfrak{k}[h,g] \\
&\quad \underset{(2.5),(2.7)}{=} \langle T(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}h, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}g\rangle + i\alpha\langle A(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}h, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}g\rangle \\
&\quad = \langle T(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}}(T+i\alpha A)^{-1}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} f, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}g\rangle \\
&\qquad + i\alpha\langle A(\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}}(T+i\alpha A)^{-1}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} f, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}g\rangle \\
&\quad = \langle (T+i\alpha A)(T+i\alpha A)^{-1}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} f, (\tilde{H}+C)^{\frac{1}{2}}g\rangle \\
&\quad = \langle f, g\rangle,
\end{aligned}$$

also $f = (H^\alpha - \lambda)h$. Dies zeigt die Gleichheit

$$(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}}(T+i\alpha A)^{-1}(\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} = (H^\alpha - \lambda)^{-1}. \tag{2.9}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\langle e^{-\alpha w}H^\alpha e^{\alpha w} f, g\rangle &= \mathfrak{h}_\alpha[e^{\alpha w}f, e^{-\alpha w}g] \\
&= \mathfrak{h}_\omega[e^{-\alpha w}e^{\alpha w}f, e^{\alpha w}e^{-\alpha w}g] = \mathfrak{h}_\omega[f,g] \\
&= \langle H^{P,L}(\omega)f, g\rangle
\end{aligned}$$

für alle $f \in \mathrm{D}(H^{P,L}(\omega))$ und alle $g \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_\omega)$. Da die Definitionsbereiche dicht liegen und die Resolventen stetig sind, folgt:

$$(H^\alpha - \lambda)^{-1} f = e^{\alpha w}(H^{P,L}(\omega) - \lambda)^{-1}e^{-\alpha w} f \qquad \text{für alle } f \in L^2(X_E).$$

Somit kann die Norm der Resolvente abgeschätzt werden durch:

$$\|\mathbb{1}_{X_{E_2}}(H^{P,L}(\omega) - \lambda)^{-1}\mathbb{1}_{X_{E_1}}\| \leq \|\mathbb{1}_{X_{E_2}}e^{-\alpha w}\|_\infty \, \|(H^\alpha - \lambda)^{-1}\| \, \|e^{\alpha w}\mathbb{1}_{X_{E_1}}\|_\infty$$

wobei

- $w(x)$ auf X_{E_1} gleich null ist: $\|e^{\alpha w}\mathbb{1}_{X_{E_1}}\|_\infty = 1$,
- die Norm von $(H^\alpha - \lambda)^{-1}$ kann mit den Gleichungen (2.8) und (2.9) abgeschätzt werden: $\|(H^\alpha - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{4(R+C)}{\eta}$,
- $w(x)\mathbb{1}_{X_{E_2}} = \operatorname{dist}(X_{E_1}, X_{E_2})\mathbb{1}_{X_{E_2}}$; da $C \geq 1$ ist, gilt auch $\sqrt{\frac{\eta}{2}} \geq \frac{\sqrt{2\eta(s-r)}}{8(R+C)} \geq \alpha$, womit

$$\|\mathbb{1}_{X_{E_2}} e^{-\alpha w}\|_\infty \leq \exp\left(-\frac{\sqrt{2\eta(s-r)}}{8(R+C)} \operatorname{dist}(X_{E_1}, X_{E_2})\right)$$

und insgesamt die Behauptung folgt. □

Die Konstante C ist nur von R, S, u und $C_\mathcal{V}$ abhängig (wobei $C_\mathcal{V}$ aus q_-, q_+ und c_- bestimmt werden kann). Für einen metrischen Graphen können verschiedene induzierte Teilgraphen gewählt werden, so dass die Combes-Thomas-Abschätzung für diese mit denselben Konstanten gilt. Insbesondere gilt diese gleichmäßig in ω, solange die Spektrallücke gleichmäßig in ω vorliegt:

Folgerung 2.5.8. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u,U) *und $H^{P,L}(\omega)$ ein Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential mit* (pot:char,dichte)*. Dann gilt für alle Radien $r_1 \in \mathbb{R}$ und Knoten $x \in V$ so dass $H^{\Lambda_{r_1}(x)}(\omega)$ ein Lücke (r,s) im Spektrum hat mit $|s|$, $|r| \leq R$ und $\lambda \in (r,s)$ mit $\eta := \operatorname{dist}(\{\lambda\}, (r,s)^c)$ und $\delta := \operatorname{dist}\left(\Lambda^{\mathrm{out}}_{r_1}(x), \Lambda^{\mathrm{int}}_{r_2}(v)\right) > 0$ die Combes-Thomas-Abschätzung*

$$\left\|\mathbb{1}_{\Lambda^{\mathrm{out}}_{r_1}(x)}\left(H^{\Lambda_{r_1}(x)}(\omega) - \lambda\right)^{-1}\mathbb{1}_{\Lambda^{\mathrm{int}}_{r_2}(v)}\right\| \leq C_{\mathrm{CTA}}\, \eta^{-1} \exp\left(\tilde{C}\sqrt{(s-r)\eta}\,\delta\right),$$

wobei $\tilde{C}$ und C_{CTA} weder von den Längen r_1, r_2 noch von den Knoten x und v abhängen.

Siehe dazu auch die Veranschaulichung in Abbildung 2.8.

2.6 Geometrische Resolventenungleichung

In der Multiskalenanalyse soll ein Fallen der lokalen Resolventen für unterschiedliche Längenskalen der Resolventen geschlossen werden. Dabei wird der Schluss per Induktion von einer Längenskala auf die nächste vollzogen. Die geometrische Resolventenungleichung ist das Hilfsmittel welches diesen Schritt erlaubt, indem sie eine Beziehung zwischen den Resolventen zu unterschiedlichen Längenskalen herstellt.

Es wird eine allgemeine Form der Resolventenungleichung bewiesen und in Folgerung 2.6.6 die für die Multiskalenanalyse benötigte Form mit Umgebungen zu gewissen Radien notiert. Dabei orientieren sich die Beweise zu allen

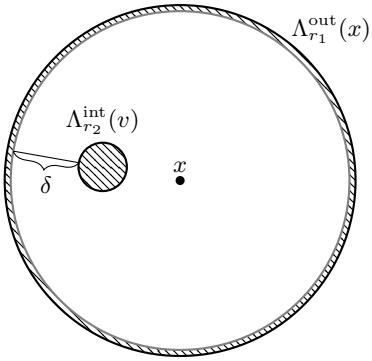


Abbildung 2.8: Veranschaulichung zur Combes-Thomas-Abschätzung.

drei Sätzen dieses Abschnitts an den Beweisen der gleichen Aussagen im Abschnitt 2.5 in [Sto01]. Die Modifikationen in den Beweisen resultieren wieder aus den zusätzlichen Termen der Randbedingung in der Sesquilinearform und den zusätzlichen Randbedingungen in deren Definitionsbereich.

Alle in diesem Abschnitt auftauchenden Operatoren sind zufällige Operatoren aus der Familie $(H^{P,L}(\omega))_{\omega\in\Omega}$ oder Einschränkungen davon auf induzierte Teilgraphen: $H^{\Gamma_E\cdot}(\omega)$. Da in diesem Abschnitt alle Rechnungen für festes $\omega \in \Omega$ ablaufen, wird zur Vereinfachung in der Notation die Abhängigkeit von ω unterdrückt. Dies wird ermöglicht durch die gleichmäßige Abschätzbarkeit des zufälligen, stetigen Potentials $\mathcal{V}_\omega$ durch $\|\mathcal{V}_\omega\| \leq C_\mathcal{V}$.

Satz 2.6.1 (Geometrische Resolventengleichung)**.** *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u,U) *und $H^{P,L}(\omega)$ ein zufälliger Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und zufälligem Potential mit* (pot:char,dichte) *auf Γ. Seien $\Gamma_{E_1} \subset \Gamma_{E_2}$ (d.h. $E_1 \subset E_2$) endliche induzierte Teilgraphen von Γ, $H^{E_1} := H^{\Gamma_{E_1}}(\omega)$ und $H^{E_2} := H^{\Gamma_{E_2}}(\omega)$ die beiden Einschränkungen auf die induzierten Teilgraphen von $H^{P,L}(\omega)$, $\psi \in C^2_{\mathrm{komp}}(X_E)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset X_{E_1}$ sei eine zweimal stetig differenzierbare, reelle Funktion, die konstant auf einer offenen Umgebung eines jeden Knotens in Γ_{E_1} ist. Sei $z \in \varrho(H^{E_1}) \cap \varrho(H^{E_2})$. Dann gilt*

$$\left(H^{E_1} - z\right)^{-1}\psi = \psi\left(H^{E_2} - z\right)^{-1} + \left(H^{E_1} - z\right)^{-1}\left(\psi'\partial + \partial\psi'\right)\left(H^{E_2} - z\right)^{-1},$$

wobei die einzelnen Terme als Operatoren auf $L^2(X_E)$ zu sehen und durch Komposition verknüpft seien sollen.

Der Operator $\partial : W^{1,2}(X_E) \to L^2(X_E)$ weist einer Funktion ihre schwache Ableitung zu. Aus den Anforderungen an die Funktion ψ folgt $\psi(v) \equiv 0$ auf $V_{E_1,\partial}$ und $\psi(v) \equiv c_v$, $\psi'(v) \equiv 0$ auf V_{E_1}.

Beweis. Es wird folgende, äquivalente Gleichheit bewiesen ($\mathfrak{h}^{E_1} := \mathfrak{h}^{\Gamma_{E_1}}$):

$$\begin{aligned}&\langle \psi g, \varphi\rangle = \\ &(\mathfrak{h}^{E_1} - z)\Big[\underbrace{\Big(\psi\big(H^{E_2}-z\big)^{-1} + \big(H^{E_1}-z\big)^{-1}\left(\psi'\partial + \partial\psi'\right)\big(H^{E_2}-z\big)^{-1}\Big)}_{=:h} g, \varphi\Big]\end{aligned} \tag{2.10}$$

für alle $g \in L^2(X_E)$ und alle $\varphi \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}^{E_1})$.

- Sei $f = \big(H^{E_2}-z\big)^{-1} g \in \mathrm{D}(H^{E_2}) \subset W^{2,2}(X_{E_1})$. Die Multiplikation mit kompakt getragenem ψ, sendet dies in $\mathrm{D}(H^{E_1})$: Die Randbedingungen sind erfüllt, da ψf nur auf dem Inneren von X_{E_1} getragen ist und dort die Randbedingungen für H^{E_1} und H^{E_2} übereinstimmen und die Multiplikation mit ψ der Multiplikation mit einer Konstanten für die Randwertvektoren $f(v)$ entspricht, da ψ stetig in den Knoten ist. Das heißt, es gilt $(\psi f)(v) = c_v \cdot f(v)$ und $(\psi f)'(v) = \psi(v) f'(v) = c_v \cdot f'(v)$, da $\psi'(v) = 0$.

  Dass ψf in $W^{2,2}(X_{E_1})$ liegt, folgt aus der Produktregel und der gleichmäßigen Beschränktheit von ψ, ψ' und ψ''

$$\begin{aligned}\|\psi f\|_{W^{2,2}}^2 &\le \|\psi f\|^2 + \|(\psi f)'\|^2 + \|(\psi f)''\|^2 \\ &\le \|\psi\|_\infty^2 \|f\|^2 + \|\psi\|_\infty^2 \|f'\|^2 + \|\psi'\|_\infty^2 \|f\|^2 \\ &\qquad + \|\psi''\|_\infty^2 \|f\|^2 + 2\|\psi'\|_\infty^2 \|f'\|^2 + \|\psi\|_\infty^2 \|f''\|^2 \\ &\le \left(\|\psi\|_\infty^2 + 2\|\psi'\|_\infty^2 + \|\psi''\|_\infty^2\right) \|f\|_{W^{2,2}(X_{E_1})}.\end{aligned}$$

- $\partial f = f'$ ist eine Funktion aus $W^{1,2}(X_{E_2})$. Die Multiplikation mit ψ' liefert eine Funktion aus $W^{1,2}(X_{E_1})$, was von $\big(H^{E_1}-z\big)^{-1}$ in $\mathrm{D}(H^{E_1})$ abgebildet wird.

- Analog ist $\psi' f \in W^{1,2}(X_{E_1})$ und damit $(H^{E_1}-z)^{-1}\partial\psi' f \in \mathrm{D}(H^{E_1})$.

Aus diesen drei Punkten folgt $h \in \mathrm{D}(H^{E_1})$.

Nun wird (2.10) gezeigt:

$$\begin{aligned}&\big(\mathfrak{h}^{E_1} - z\big)[h, \varphi] \\ &= \big(\mathfrak{h}^{E_1} - z\big)\Big[\Big(\psi\big(H^{E_2}-z\big)^{-1} + \big(H^{E_1}-z\big)^{-1}\big(\psi'\partial + \partial\psi'\big)\big(H^{E_2}-z\big)^{-1}\Big) g, \varphi\Big] \\ &= \Big\langle \Big(\psi\big(H^{E_2}-z\big)^{-1} g\Big)', \varphi'\Big\rangle - \sum_{v \in V_{E_1}} \Big\langle L_v\Big(\psi\big(H^{E_2}-z\big)^{-1} g\Big)(v), \varphi(v)\Big\rangle \\ &\quad + \Big\langle (\mathcal{V}_\omega - z)\psi\big(H^{E_2}-z\big)^{-1} g, \varphi\Big\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\mathfrak{h}^{E_1} - z\right)\Big[\left(H^{E_1} - z\right)^{-1}\left(\psi'\partial + \partial\psi'\right)\left(H^{E_2} - z\right)^{-1} g, \varphi\Big] \\
&= \Big\langle \psi'\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \varphi' \Big\rangle + \Big\langle \psi\Big(\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g\Big)', \varphi' \Big\rangle \\
&\quad \underbrace{- \sum_{v \in V_{E_1}} \Big\langle L_v\Big(\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g\Big)(v), (\psi\varphi)(v) \Big\rangle + \Big\langle (\mathcal{V}_\omega - z)\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \psi\varphi \Big\rangle}_{\mathcal{C}} \\
&\quad + \Big\langle (\psi'\partial + \partial\psi')\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \varphi \Big\rangle \\
&= \Big\langle \psi'\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \varphi' \Big\rangle + \Big\langle \Big(\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g\Big)', \psi\varphi' \Big\rangle + \mathcal{C} \\
&\quad + \Big\langle \partial\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \psi'\varphi \Big\rangle - \Big\langle \psi'\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \varphi' \Big\rangle \\
&\quad \underbrace{- \sum_{v \in V} \Big\langle \Big(\psi'\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g\Big)(v), \varphi(v) \Big\rangle}_{=0,\ \text{da } \psi'(v) \equiv 0} \\
&= \Big\langle \Big(\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g\Big)', (\psi\varphi)' \Big\rangle + \Big\langle (\mathcal{V}_\omega - z)\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \psi\varphi \Big\rangle \\
&\quad - \sum_{v \in V_{E_2}} \Big\langle L_v\big(\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g\big)(v), (\psi\varphi)(v) \Big\rangle \\
&= \left(\mathfrak{h}^{E_2} - z\right)\Big[\big(H^{E_2} - z\big)^{-1} g, \psi\varphi\Big] \\
&= \langle \psi g, \varphi \rangle.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $(H^{E_1} - z)h = \psi g$ für alle $g \in L^2(X_E)$, was der Behauptung entspricht. □

Definition 2.6.2. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U) und $\Gamma_{\tilde{E}}$ induzierter Teilgraph zur Kantenmenge $\tilde{E} \subset E$. Sei $H^{P,L}(\omega)$ ein zufälliger Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential mit (pot:char,dichte). Eine Funktion f heißt schwache Lösung der Gleichung

$$H^{P,L}(\omega) f = g \qquad \text{auf } \Gamma_{\tilde{E}},$$

wenn $g \in L^2(X_{\Gamma_{\tilde{E}}})$, $f \in \{\psi \in W^{1,2}(X_{\Gamma_{\tilde{E}}})$ mit $\psi(v) \in \mathrm{D}(L_v)$ für alle $v \in V_{\tilde{E},\mathrm{int}}\}$ und für alle $\varphi \in \mathrm{D}\left(\mathfrak{h}_\omega^{\Gamma_{\tilde{E}}}\right)$ gilt:

$$\langle f', \varphi' \rangle - \sum_{v \in V_{\tilde{E},\mathrm{int}}} \langle L_v f(v), \varphi(v) \rangle + \langle \mathcal{V}_\omega f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle.$$

Eine schwache Lösung f auf einem induzierten Teilgraphen erfüllt also auf dem Rand des Teilgraphen keine Randbedingungen – weder die der Ausgangsform, noch die der Einschränkung. Dafür sind dort die Randwerte der

Testfunktionen φ identisch zu Null und vernichten jeden Einfluss der Randwerte der Lösung. Im Inneren des Teilgraphen muss f die Randbedingungen der Form erfüllen. Mit der Abbildungsvorschrift der Form wird dann getestet, ob f schwache Lösung der Gleichung $H^{P,L}(\omega)f = g$ ist.

Nun kann die Norm der Ableitung jeder schwachen Lösung f auf einem endlichen Teilgraphen nach oben abgeschätzt werden durch die Norm der Funktion f und die Norm der Funktion g auf einem etwas größeren Teilgraphen. Eine Ungleichung dieser Art heißt Caccioppoli-Ungleichung.

Hilfssatz 2.6.3 (Caccioppoli-Ungleichung)**.** *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u,U) *und beschränktem Knotengrad. Sei $H^{P,L}(\omega)$ ein negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential* (pot:char,dichte)*. Seien $\Gamma_{E_3} \subset \Gamma_{E_4}$ induzierte Teilgraphen von Γ mit $V_{E_3,\partial} \subset V_{E_4,\mathrm{int}}$. Sei weiterhin $g \in L^2(X_{E_4})$. Dann existiert eine Konstante $C_{\mathrm{CP}} = C_{\mathrm{CP}}(u, S, q_-, q_+, c_+)$, so dass für alle schwachen Lösungen f von $H^{P,L}(\omega)f = g$ auf Γ_{E_4} gilt:*

$$\|f'\|_{L^2(X_{E_3})} \leq C_{\mathrm{CP}} \left(\|f\|_{L^2(X_{E_4})} + \|g\|_{L^2(X_{E_4})} \right).$$

Beweis. Es gibt eine Abschneidefunktion ψ mit $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_{X_{E_3}} \equiv 1$, $\psi|_{X_E \setminus X_{E_4}} \equiv 0$, $\psi \in C^\infty(X_E)$ mit gleichmäßiger Beschränkung von $\|\psi_e'\|_\infty$ für alle Kanten e.

Die Abschneidefunktion ψ kann folgendermaßen gewählt werden: Auf $X_E \setminus X_{E_4}$ wird sie gleich null gesetzt. Sei $\tilde{\psi} : [0, \frac{u}{2}] \to [0, 1]$ eine glatte Funktion die gleich null auf einer Umgebung um Null und gleich eins auf einer Umgebung um $\frac{u}{2}$ ist. Auf allen Kanten $e \in E_4$ für die $e \sim v$ für ein $v \in V_{E_4,\partial}$ gilt, wird ψ auf dem Intervall der Länge $\frac{u}{2}$ vom Randknoten aus gleich $\tilde{\psi}$ gesetzt. Auf allen restlichen Kanten oder Teilen von Kanten in E_4 wird ψ identisch eins gewählt. Dann ist $\|\psi_e'\|_\infty \leq \|\tilde{\psi}'\|_\infty$ nur von u abhängig.

Sei $g \in L^2(X_{E_4})$, f laut Voraussetzung und $\phi = f\psi^2$. Dann ist $\phi \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}^{E_4}) \subset W^{1,2}(X_{E_4})$ nach Hilfssatz 1.4.6. Die Produktregel liefert:

$$\langle f', \phi' \rangle_{L^2(X_{E_4})} = \langle \psi f', \psi f' \rangle_{L^2(X_{E_4})} + 2\langle \psi f', f\psi' \rangle_{L^2(X_{E_4})}.$$

Laut Voraussetzung folgt dann:

$$\begin{aligned}
\|\psi f'\|^2_{L^2(X_{E_4})} &= \langle \psi f', \psi f' \rangle_{L^2(X_{E_4})} = \langle f', \phi' \rangle_{L^2(X_{E_4})} - 2\langle \psi f', f\psi' \rangle_{L^2(X_{E_4})} \\
&\underset{\text{Vor.}}{=} \langle g, \phi \rangle + \sum_{v \in V_{E_4,\mathrm{int}}} \langle L_v f(v), \phi(v) \rangle - \langle \mathcal{V}_\omega f, \phi \rangle - 2\langle \psi f', f\psi' \rangle \\
&\leq \|g\|\|\phi\| + \sum_{v \in V_{E_4,\mathrm{int}}} \langle L_v(\psi f)(v), (\psi f)(v) \rangle + C_{\mathcal{V}} \|\psi f\|^2 + 2\|\psi f'\|\|f\psi'\| \\
&\leq \|g\|\|f\| + C_{\mathcal{V}} \|f\|^2 + 2\|\tilde{\psi}'\|_\infty \|f\|\|\psi f'\| + \sum_{v \in V_{E_4,\mathrm{int}}} \langle L_v(\psi f)(v), (\psi f)(v) \rangle.
\end{aligned}$$

Aus der Sobolev-Ungleichung und der gleichmäßigen Beschränkung von L_v folgt – wie in (1.20) für den durch das Innere der Umgebung E_4 induzierten Teilgraphen – die Abschätzung über die Summe der Randwerte

$$\sum_{v\in V_{E_4,\mathrm{int}}} \langle L_v(\psi f)(v),(\psi f)(v)\rangle \;\le\; 2S\left(\frac{2}{\varepsilon}\|f\|^2+2\varepsilon\|\psi f'\|^2+2\varepsilon\|\psi' f\|^2\right)$$

für alle ε mit $0<\varepsilon\le u$, was weiter

$$\begin{aligned}(1-4S\varepsilon)\|\psi f'\|^2 &\\ \le \|g\|\|f\|+\left(C_{\mathcal{V}}+\frac{4S}{\varepsilon}+4S\varepsilon\|\tilde\psi'\|_\infty\right)\|f\|^2+2\|\tilde\psi'\|_\infty\|f\|\|\psi f'\|&\end{aligned}$$

ergibt. Für ε so klein, dass $1-4S\varepsilon=\frac12$, d.h. $\varepsilon=\min\{u,\frac{1}{8S}\}$ folgt:

$$\|\psi f'\|^2\le 2\|g\|\|f\|+\underbrace{2\left(C_{\mathcal{V}}+\frac{4S}{\varepsilon}+4S\varepsilon\|\tilde\psi'\|_\infty\right)}_{=:\widehat C}\|f\|^2+4\|\tilde\psi'\|_\infty\|f\|\|\psi f'\|.$$

Dies wird nun als quadratische Gleichung in $x=\|\psi f'\|$ aufgefasst. Mit der Bezeichnung $\widetilde C=2\|\tilde\psi'\|_\infty$ lautet sie:

$$x^2-2\widetilde C\|f\|x-\widehat C\|f\|^2-2\|g\|\|f\|\le 0.$$

Die Ungleichung gilt für x zwischen den beiden Nullstellen:

$$x=\widetilde C\|f\|\pm\sqrt{\underbrace{\left(\widetilde C^2+\widehat C\right)\|f\|^2+2\|g\|\|f\|}_{=:D}}.$$

Der positive Term unter der Wurzel lässt sich nach oben abschätzen durch:

$$\begin{aligned}D&\le\left(\widetilde C^2+\widehat C\right)\|f\|^2+2\|g\|\|f\|+\frac{1}{(\widetilde C^2+\widehat C)}\|g\|^2,\\ D&\le\left(\sqrt{\widetilde C^2+\widehat C}\|f\|+\frac{1}{\sqrt{\widetilde C^2+\widehat C}}\|g\|\right)^2.\end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung kann also nur für x kleiner gleich $\widetilde C\|f\|$ plus Wurzel aus diesem Ausdruck erfüllt sein. Mit den Eigenschaften der Abschneidefunktion ψ folgt nun:

$$\begin{aligned}\|f'\|_{L^2(X_{E_3})}&\le\|\psi f'\|_{L^2(X_{E_4})}\\ &\le\widetilde C\|f\|_{L^2(X_{E_4})}+\sqrt{\widetilde C^2+\widehat C}\|f\|_{L^2(X_{E_4})}+\frac{1}{\sqrt{\widetilde C^2+\widehat C}}\|g\|_{L^2(X_{E_4})}.\end{aligned}$$

Also gibt es eine Konstante die von den Konstanten S, u und $C_{\mathcal{V}}$, also den Konstanten des Potentials q_-, q_+, c_+ abhängt, welche die Behauptung erfüllt. □

Folgerung 2.6.4. *Offensichtlich gilt:*

1. *Wenn f schwache Lösung von $H^{P,L}(\omega)f = g$ auf Γ_{E_4} ist, dann ist f schwache Lösung zu $(H^{P,L}(\omega) - \lambda)f = g - \lambda f$ auf Γ_{E_4} und es gilt:*

$$\|f'\|_{L^2(X_{E_3})} \leq C_{\mathrm{CP}} \left(\|f\|_{L^2(X_{E_4})} + |\lambda| \cdot \|f\|_{L^2(X_{E_4})} + \|g\|_{L^2(X_{E_4})} \right).$$

2. *Die Voraussetzungen an Γ_{E_3} und Γ_{E_4} sind insbesondere dann erfüllt, wenn $\Gamma_{E_3} = \Lambda_r(v_0)$ und $\Gamma_{E_4} = \Lambda_s(v_0)$ für alle $s \geq r + U$.*

Damit kann nun die Resolventenungleichung bewiesen werden. Diese verknüpft die Resolventen von unterschiedlich großen induzierten Teilgraphen.

Satz 2.6.5 (Geometrische Resolventenungleichung)**.** *Sei Γ ein metrischer Graph mit endlichem Knotengrad und* (geom:u,U)*. Sei $H^{P,L}(\omega)$ ein zufälliger Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential der Form* (pot:char,dichte)*. Seien $\Gamma_{E_1} \subset \Gamma_{E_2}$ endliche induzierte Teilgraphen von Γ, I ein beschränktes Intervall und $\lambda \in \varrho(H^{E_1}) \cap \varrho(H^{E_2}) \cap I$. Seien $\Gamma_{E_A} \subset \Gamma_{E_1}$ und $\Gamma_{E_B} \subset \Gamma_{E_2} \setminus \Gamma_{E_1}$ induzierte Teilgraphen. Wenn es eine Funktion $\varphi \in C^\infty_{\mathrm{komp}}(X_{E_1})$ mit φ ist konstant auf einer Umgebung jedes Knotens in V_{E_1}, identisch zu null um jeden Randknoten von Γ_{E_1}, $\varphi|_{X_{E_A}} \equiv 1$ und zwei induzierte Teilgraphen $\Gamma_{E_3} \subset \Gamma_{E_4} \subset \Gamma_{E_1}$ gibt, so das* $\operatorname{supp}\varphi' \subset X_{E_3}$, *$V_{E_3,\partial} \subset V_{E_4,\mathrm{int}}$ und Γ_{E_A} und Γ_{E_4} disjunkt sind, dann existiert eine Konstante C_{GRU} die nur von S, u, den Konstanten des Potentials und dem Intervall I abhängt, so dass die folgende Beziehung gilt:*

$$\begin{aligned}&\left\| \mathbb{1}_{X_{E_B}} \left(H^{E_2} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} \right\| \\ &\qquad \leq C_{\mathrm{GRU}} \left\| \mathbb{1}_{X_{E_B}} \left(H^{E_2} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_4}} \right\| \left\| \mathbb{1}_{X_{E_4}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} \right\|.\end{aligned}$$

Werden zuerst alle sechs induzierten Teilgraphen mit den geforderten Eigenschaften gewählt, dann existiert die Abschneidefunktion φ, wenn die Teilgraphen groß genug sind und genügend Abstand voneinander haben – siehe dazu auch die Veranschaulichung in Abbildung 2.9.

Beweis. Da λ reell ist, ist die Resolvente selbstadjungiert und

$$\begin{aligned}&\left\| \mathbb{1}_{X_{E_B}} \left(H^{E_2} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} \right\| \\ &\quad = \left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_2} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\| \qquad (\text{mit } \varphi|_{X_{E_A}} \equiv 1, \varphi|_{X_{E_B}} \equiv 0)\end{aligned}$$

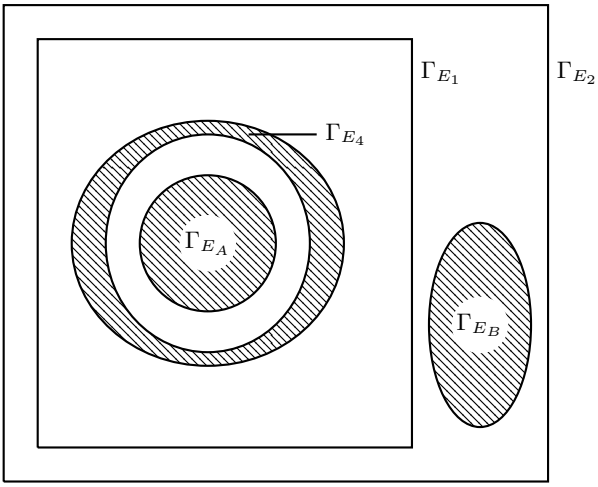


Abbildung 2.9: Induzierte Teilgraphen zur Geometrischen Resolventenungleichung.

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(\varphi \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} - \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \varphi \right) \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\| \\
&= \left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} (\partial\varphi' + \varphi'\partial) \big(H^{E_2} - z\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\| \qquad \text{(Satz 2.6.1)} \\
&\leq \underbrace{\left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \partial\varphi' \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\|}_{(i)} \\
&\quad + \underbrace{\left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \varphi'\partial \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\|}_{(ii)}.
\end{aligned}
$$

Zuerst soll (i) betrachtet werden, dabei ergibt sich mit $\operatorname{supp}\varphi' \subset X_{E_3}$

$$
\begin{aligned}
(i) &= \left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \partial\varphi' \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\| \\
&= \left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \partial \mathbb{1}_{X_{E_3}} \mathbb{1}_{X_{E_4}} \varphi' \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\| \\
&\leq \|\varphi'\|_\infty \underbrace{\left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \partial \mathbb{1}_{X_{E_3}} \right\|}_{(iii)} \left\| \mathbb{1}_{X_{E_4}} \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\|.
\end{aligned}
$$

(iii) soll nun mit Hilfssatz 2.6.3 abgeschätzt werden. Zunächst gilt für $f \in L^2(X_{E_1})$, $g := \mathbb{1}_{X_{E_A}} f$ und $h := \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} g$, dass $h \in \mathrm{D}(H^{\Gamma_{E_1}}) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{h}^{E_1})$

und damit für alle $w \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}^{E_4})$:

$$\begin{aligned}
&\langle h', w'\rangle_{L^2(X_{E_4})} - \sum_{v\in V_{E_4,\mathrm{int}}} \langle L_v h(v), w(v)\rangle + (\mathcal{V}_\omega - \lambda)\langle h, w\rangle_{L^2(X_{E_4})} \\
&\quad = -\langle h'', w\rangle_{L^2(X_{E_4})} - \sum_{v\in V_{E_1,\mathrm{int}}} \langle h'(v), w(v)\rangle \\
&\qquad - \sum_{v\in V_{E_1,\mathrm{int}}} \langle L_v h(v), w(v)\rangle + (\mathcal{V}_\omega - \lambda)\langle h, w\rangle_{L^2(X_{E_4})} \\
&\quad = \big\langle -h'' + (\mathcal{V}_\omega - \lambda)h, w\big\rangle_{L^2(X_{E_4})} - \sum_{v\in V_{E_4,\mathrm{int}}} \underbrace{\langle L_v h(v) + h'(v), w(v)\rangle}_{=0,\text{ laut Randbedingung}} \\
&\quad = \langle g, w\rangle_{L^2(X_{E_1})},
\end{aligned}$$

also dass h schwache Lösung von $H^{P,L}(\omega) = g + \lambda h$ auf Γ_{E_4} ist. Hilfssatz 2.6.3 bzw. Folgerung 2.6.4 ergibt:

$$\begin{aligned}
\|h'\|_{L^2(X_{E_3})} &= \Big\| \mathbb{1}_{X_{E_3}} \partial \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} f \Big\| \\
&\le C\Bigg(\Big\| (1+|\lambda|)\big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} f \Big\|_{L^2(X_{E_4})} + \underbrace{\Big\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} f \Big\|_{L^2(X_{E_4})}}_{=0} \Bigg) \\
&= C(1+|\lambda|) \Big\| \mathbb{1}_{X_{E_4}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} f \Big\|_{L^2(X_{E_1})}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{1}_{X_{E_3}} \partial \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}}$ beschränkt und für den normgleichen adjungierten Operator gilt

$$\mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \partial^* \mathbb{1}_{X_{E_3}} f = -\mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \partial\, \mathbb{1}_{X_{E_3}} f$$

für alle $f \in W_0^{1,2}(X_E)$. Also gilt für die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von $\mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \partial\, \mathbb{1}_{X_{E_3}}$ auf ganz $L^2(X_E)$:

$$\begin{aligned}
\Big\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \partial \mathbb{1}_{X_{E_3}} \Big\| &= \Big\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \partial^* \mathbb{1}_{X_{E_3}} \Big\| \\
&= \Big\| \mathbb{1}_{X_{E_3}} \partial \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} \Big\| \\
&\underset{(2.11)}{\le} C(1+|\lambda|) \Big\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_4}} \Big\|.
\end{aligned}$$

Dies ergibt für (i)

$$(i) \le C(1+|\lambda|)\|\varphi'\|_\infty \Big\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \left(H^{E_1} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_4}} \Big\| \Big\| \mathbb{1}_{X_{E_4}} \left(H^{E_2} - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \Big\|.$$

Für (ii) kann analog

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \varphi' \partial \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\| \\
&\qquad \leq \|\varphi'\|_\infty \left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_4}} \right\| \left\| \mathbb{1}_{X_{E_3}} \partial \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\|, \\
&\left\| \mathbb{1}_{X_{E_3}} \partial \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} f \right\|_{L^2(X_{E_3})} \\
&\qquad \leq C(1 + |\lambda|) \left\| \mathbb{1}_{X_{E_4}} \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} f \right\|_{L^2(X_{E_4})}
\end{aligned}$$

gezeigt werden und liefert damit die Behauptung

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{X_{E_B}} \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_A}} \right\| \\
&\qquad \leq C_{\mathrm{GRU}} \left\| \mathbb{1}_{X_{E_A}} \big(H^{E_1} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_4}} \right\| \left\| \mathbb{1}_{X_{E_4}} \big(H^{E_2} - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{X_{E_B}} \right\|,
\end{aligned}$$

wobei $C_{\mathrm{GRU}} = 2C(1 + |\lambda|)\|\varphi'\|_\infty$ nur von u, S dem Intervall I und der Potentialbeschränkung $C_\mathcal{V}$ abhängt. □

Folgerung 2.6.6. *Sei* Γ *ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) und* $H^{P,L}(\omega)$ *ein Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential* (pot:char,dichte)*, R, s, r drei Längenskalen und x, v, $v_1 \in V$ drei Knoten, so dass:*

- $\Lambda_s(v) \subset \Lambda_R(x)$ *mit* $\Lambda_R^{\mathrm{out}}(x)$ *und* $\Lambda_s(v)$ *sind disjunkt,*
- $\Lambda_r(v_1) \subset \Lambda_s(v)$.

Sei I ein beschränktes Intervall und $\lambda \in \varrho(H^{\Lambda_R(x)}(\omega)) \cap \varrho(H^{\Lambda_s(v)}(\omega)) \cap I$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_R^{\mathrm{out}}(x)} \big(H^{\Lambda_R(x)}(\omega) - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_r^{\mathrm{int}}(v_1)} \right\| \\
&\qquad \leq C_{\mathrm{GRU}} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_R^{\mathrm{out}}(x)} \big(H^{\Lambda_R(x)}(\omega) - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_s^{\mathrm{out}}(v)} \right\| \\
&\qquad\qquad \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_s^{\mathrm{out}}(v)} \big(H^{\Lambda_s(v)}(\omega) - \lambda\big)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_r^{\mathrm{int}}(v_1)} \right\|.
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.6.7. Die im Satz 2.6.5 verwendeten Mengen in obiger Folgerung sind:

Bezeichnung	Kantenmenge	induzierter Teilgraph
E_2	$E(x, R)$	$\Lambda_R(x)$
E_1	$E(v, s)$	$\Lambda_s(v)$
E_A	$E(v_1, \frac{r}{3})$	$\Lambda_r^{\text{int}}(v_1)$
E_B	$E(x, R) \setminus E(x, R - 3U)$	$\Lambda_R^{\text{out}}(x)$
E_3	$E(v, s - U) \setminus E(v, s - 2U)$	Γ_{E_3}
E_4	$E(v, s) \setminus E(v, s - 3U)$	$\Lambda_s^{\text{out}}(v)$

Die Folgerung wird in der Multiskalenanalyse einmal mit Containermengen, die die Rolle von $\Lambda_s(v)$ übernehmen und einmal mit dem Spezialfall $r = s$ und $v = v_1$ verwendet. Beide Varianten werden in Abbildung 2.10 veranschaulicht.

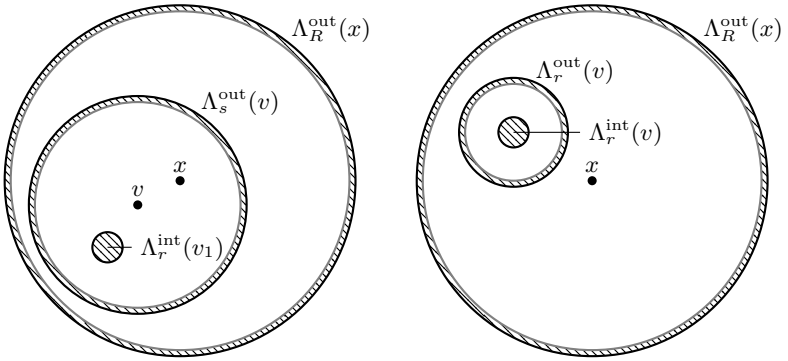


Abbildung 2.10: Veranschaulichung der induzierten Teilgraphen zur Geometrischen Resolventenungleichung laut Folgerung 2.6.6 und Spezialfall $v = v_1$, $s = r$.

2.7 Eigenwertzählfunktion und Weyl-Asymptotik

In diesem Abschnitt wird eine gleichmäßige Abschätzung an die Anzahl an Eigenwerten der Einschränkung des zufälligen Operators auf einen endlichen induzierten Teilgraphen in einem beschränkten Intervall angegeben.

Dabei wird von den bekannten Eigenwerten des negativen Laplace-Operators mit Dirichlet-Randbedingungen ausgegangen und durch Störungstheorie eine Schranke angegeben, um welche sich die Anzahl der Eigenwerte bei Änderung auf einen negativen Laplace-Operator mit beliebigen selbstadjun-

gierten Knoten-Randbedingungen und einem stetigen Potential verschieben kann.

Definition 2.7.1. Sei $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ ein metrischer Graph. Die spektrale Zählfunktion $n : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ eines selbstadjungierten Operators H auf Γ ist definiert als

$$n(\lambda) = \operatorname{Tr}\left(\mathbb{1}_{(-\infty,\lambda]}(H)\right).$$

Die Abbildung $\mathbb{1}_{(-\infty,\lambda]}(H)$ entspricht der Projektion auf den Eigenraum zu den Spektralwerten im Intervall $(-\infty, \lambda]$ von H. Die Spur des Projektionsoperators entspricht der Dimension des Raumes, auf den projiziert wird. Ist das wesentliche Spektrum nicht leer, dann ist die Zählfunktion konstant unendlich ab dem unteren Ende des wesentlichen Spektrums von H. Offensichtlich ist die Zählfunktion monoton wachsend und für einen Operator mit diskretem Spektrum für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ endlich.

Hilfssatz 2.7.2. *Es ergibt sich:*

1. *Für einen endlichen metrischen Graphen Γ mit Kanten endlicher Länge und einen selbstadjungierten negativen Laplace-Operator H der Form (RB:P,L,S) ist das Spektrum diskret.*

2. *Sei H ein selbstadjungierter Operator mit kompakter Resolvente (d.h. diskretem Spektrum) auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, V ein beschränktes Potential auf $\mathcal{H}$. Dann hat auch $H + V$ eine kompakte Resolvente.*

3. *Der negative Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen auf einem Intervall der Länge l hat die Eigenwerte $\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ für $n \in \mathbb{N}$.*

4. *Die Eigenwertzählfunktion zum Operator aus 3. hat für $\lambda \geq 0$ die Form $n(\lambda) = \left\lfloor \frac{l}{\pi}\sqrt{\lambda} \right\rfloor$ (für $\lambda < 0$ gilt $n(\lambda) = 0$).*

Beweis. 1. Dies wurde in [Kuc04] unter Theorem 18 bewiesen.

Die Resolvente ist kompakt, denn $(H - z)^{-1} : L^2(X_E) \to \mathrm{D}(H)$ kann dargestellt werden als $(H - z)^{-1} = IS$ mit

$$\begin{aligned} S &: L^2(X_E) \to W^{1,2}(X_E) & Sf &= (H - z)^{-1} f, \\ I &: W^{1,2}(X_E) \to L^2(X_E) & If &= f. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} L^2(X_E) & \xrightarrow{(H-z)^{-1}} & \mathrm{D}(H) \\ & {\scriptstyle S} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle I} & \\ & W^{1,2}(X_E) & \end{array}$$

Dabei ist I kompakt, da für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, welche die Kegeleigenschaft aufweisen, $W^{1,2}(\Omega)$ kompakt eingebettet werden kann in $W^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$. Nachgelesen werden kann dies in [AF03] als Spezialfall von Theorem 6.3 (Rellich-Kondrachov Theorem). Der Operator S ist beschränkt: denn für alle $\varepsilon \leq u$ folgt aus der Kegeleigenschaft der Kanten und Lemma 5.5 in [AF03] (siehe auch den Beweis zu Hilfssatz 2.9.3) und der Beschränkung der Resolvente durch C_{R}:

$$\begin{aligned}\left\|\partial(H-z)^{-1}f\right\| &\leq C_{\mathrm{Kegel}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\left\|(H-z)^{-1}f\right\| + \varepsilon\left\|\Delta(H-z)^{-1}f\right\|\right)\\ &\leq C_{\mathrm{Kegel}}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon|z|\right)\left\|(H-z)^{-1}f\right\| + C_{\mathrm{Kegel}}\cdot\varepsilon\cdot\|f\|\\ &\leq C_{\mathrm{Kegel}}\left[C_{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon|z|\right)+\varepsilon\right]\|f\|\end{aligned}$$

und damit $$\left\|(H-z)^{-1}f\right\|_{W^{1,2}(X_E)} \leq \tilde{C}\,\|f\|_{L^2(X_E)}\,.$$

Da die kompakten Operatoren in den beschränkten Operatoren ein zweiseitiges Ideal darstellen, ist die Resolvente kompakt und damit das Spektrum von H diskret.

Dabei ist die hier verwendete Argumentation auch für Gebiete in höheren Dimensionen gültig – solange diese beschränkt sind und die Kegeleigenschaft erfüllen. Die Argumentation über die Soboleveinbettung – wie in [Kuc04] – ist in höheren Dimensionen nicht mehr möglich.

2. Offensichtlich ist $H+V$ selbstadjungiert, also gilt laut der zweiten Resolventengleichung: $(H-i)^{-1}-(H+V-i)^{-1} = (H-i)^{-1}V(H+V-i)^{-1}$. Analog zu Teil 1. folgt aus der Beschränktheit von $V(H+V-i)^{-1}$, dass die rechte Seite der Gleichung ein kompakter Operator ist und damit auch die Resolvente $(H+V-i)^{-1}$ – also auch jede Resolvente zu $H+V$ kompakt.

3. Die Lösung der Differentialgleichung $-f'' = \lambda f$ mit den gesuchten Randwerten $f(0) = f(l) = 0$ ergibt für $\lambda > 0$ gerade obige Eigenwerte mit den Eigenfunktionen $c\cdot\sin(\sqrt{\lambda}x)$ und für $\lambda \leq 0$ keine nicht-triviale Lösung.

4. Folgt sofort aus 3. □

Die spektrale Zählfunktion für Einschränkungen auf endliche induzierte Teilgraphen ist also eine Eigenwertzählfunktion und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ endlich. Wie sie konkret anhand der Eigenwertzählfunktion für Dirichlet-Randbedingungen abgeschätzt werden kann, ist Bestandteil der nächsten Hilfssätze.

Dies funktioniert analog wie in [GLV07] vorgeführt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Kantenlängen nicht mehr konstant sind. Dies hat nur Einfluss auf die Eigenwertzählfunktion des Dirichlet-Laplace. Für diese kann nur noch eine Abschätzung nach oben angegeben werden, welche aber für diesen Zweck ausreichend ist.

Aus Punkt 4 des vorherigen Hilfssatzes ergibt sich sofort:

Bemerkung 2.7.3. Sei Γ ein endlicher metrischer Graph mit endlich langen Kanten und U das Maximum der Kantenlängen. Dann gilt für die Eigenwertzählfunktion des Dirichlet-Laplace-Operators H_{D} auf Γ:

$$n_{H_{\mathrm{D}}}(\lambda) \leq \begin{cases} \frac{U}{\pi}\sqrt{\lambda}\cdot|E|, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Hilfssatz 2.7.4. *Seien ein endlicher metrischer Graph Γ mit endlich langen Kanten und zwei selbstadjungierte Realisierungen H_1 und H_2 des negativen Laplace-Operators der Form (RB:P,L,S) auf Γ gegeben. Dann gilt*

$$|n_{H_1}(\lambda) - n_{H_2}(\lambda)| \leq 2|E|.$$

Beweis. Die beiden Operatoren H_1 und H_2 sind selbstadjungierte Erweiterungen des minimalen negativen Laplace-Operators $-\Delta$ auf $D_0 := W_0^{2,2}(X_E)$ bzw. selbstadjungierte Einschränkungen des maximalen Laplace-Operators $-\Delta$ auf $W^{2,2}(X_E)$. Für die Definitionsbereiche gilt $W^{2,2}(X_E)/W_0^{2,2}(X_E) = 4|E|$. Die Definitionsbereiche der Einschränkungen haben gerade den halben Index, also gilt $\mathrm{D}(H_i)/D_0 = 2|E|$. Wird die Eigenwertzählfunktion über die Dimension des Raumes der Eigenfunktionen zu Eigenwerten kleiner gleich λ ausgedrückt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} n_{H_2}(\lambda) &= \max\{\dim Y \text{ mit } Y \subset \mathrm{D}(H_2), H_2\big|_Y \leq \lambda\} \\ &\leq \max\{\dim Y \text{ mit } Y \subset D_0, H_2\big|_Y \leq \lambda\} + 2|E|, \end{aligned}$$

denn es wurde ein Unterraum der Dimension $2|E|$ herausgenommen; weiter gilt $H_1\big|_{D_0} = H_2\big|_{D_0}$, da aus $f \in D_0 \Rightarrow f(v) \equiv 0 \Rightarrow \mathfrak{h}_1[f,f] = \mathfrak{h}_2[f,f]$. Womit sich

$$\begin{aligned} &= \max\{\dim Y \text{ mit } Y \subset D_0, H_1\big|_Y \leq \lambda\} + 2|E| \\ &\leq \max\{\dim Y \text{ mit } Y \subset \mathrm{D}(H_1), H_1\big|_Y \leq \lambda\} + 2|E| \\ &= n_{H_1}(\lambda) + 2|E| \end{aligned}$$

ergibt. □

Die Differenz der Eigenwertzählfunktionen wird spektrale Verschiebefunktion („spectral shift function“) genannt. Diese wird zur Ermittlung, bzw. zu Existenz- und Konvergenzbetrachtungen der Integrierten Zustandsdichte betrachtet, welche für allgemeine metrische Graphen nicht untersucht werden kann, da die Ergodizität der Operatorfamilien fehlt. Die integrierte Zustandsdichte ist eine Verteilungsfunktion der Spektralwerte eines Operators und entspricht dem Grenzwert vom Quotienten aus der Eigenwertzählfunktion und dem Volumen zum Radius r für r gegen unendlich. Für metrische Graphen auf $\mathbb{Z}^d$ wurde dies in [GLV07] studiert und für Cayleygraphen wird dies gerade in [PSS] niedergeschrieben.

Hilfssatz 2.7.5. *Sei Γ ein endlicher metrischer Graph mit endlich langen Kanten und H ein negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S). Sei W ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf $L^2(X_E)$. Dann gilt für die Eigenwertzählfunktion von $H+W$:*

$$n_{H+W}(\lambda) \leq \begin{cases} |E|\left[2+\frac{U}{\pi}\left(\sqrt{\lambda}+\|W\|\right)\right], & \lambda \geq -\|W\| \\ 2|E|, & \lambda < -\|W\|, \end{cases}$$

wobei U die Länge einer der längsten Kanten in Γ ist.

Beweis. Aus dem min-max-Prinzip ergibt sich für die Eigenwertzählfunktion des gestörten Operators $H+W$:

$$n_{H+W}(\lambda) \leq n_H(\lambda + \|W\|).$$

Mit Hilfssatz 2.7.4 folgt dann für die Eigenwertzählfunktionen von H und den Dirichlet-Laplace H_{D} auf Γ die Beziehung

$$n_{H+W}(\lambda) \leq 2|E| + n_{H_{\mathrm{D}}}(\lambda + \|W\|)$$

und mit der Eigenwertzählfunktion des Dirichlet-Laplace aus Bemerkung 2.7.3 die Behauptung. □

Nun kann diese Aussage benutzt werden, um eine gleichmäßige Abschätzung der Anzahl an Eigenwerten der Einschränkung eines negativen Laplace-Operators auf Umgebungen mit Radius r anzugeben. Dabei ist die Abschätzung unabhängig vom Zentrum der Umgebungen und wird Weyl-Asymptotik genannt.

Folgerung 2.7.6. *Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) mit polynomiellem Wachstum vom Grad d und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential*

mit (pot:char,dichte)*. Dann gilt für jede Einschränkung des Operators auf eine Umgebung mit Radius r die Abschätzung:*

$$n_{H^{\Lambda_r(v)}(\omega)}(\lambda) \leq \begin{cases} \left(2 + \frac{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{C_\mathcal{V}})U}{\pi}\right) \frac{c_2 \cdot r^d}{u}, & \lambda \geq -C_\mathcal{V} \\ \frac{2c_2 \cdot r^d}{u}, & \lambda < -C_\mathcal{V}. \end{cases}$$

Also gibt es für jedes beschränkte Intervall I eine Konstante C_{Weyl}, welche von u, U, $C_\mathcal{V}$, c_2 und I, aber nicht von v und ω abhängt mit

$$n_{H^{\Lambda_r(v)}(\omega)}(\lambda) \leq C_{\text{Weyl}} \cdot r^d.$$

2.8 Anfangslängen- und Wegner-Abschätzung

Alle bisher angegebenen Abschätzungen gelten für alle zufälligen Realisierungen der Operatorfamilie $(H^{P,L}(\omega))$ mit gleichen Konstanten, also gleichmäßig in ω. In diesem Abschnitt werden zwei Abschätzungen aufgeführt, die vom Zufall abhängig sind, das heißt Aussagen die mit bestimmter Wahrscheinlichkeit gelten bzw. Erwartungswerte bestimmter Größen.

Die Anfangslängenabschätzung ist der erste Schritt zur Lokalisierung und stellt einen Zusammenhang zwischen dem zufälligen Potential und dem Spektrum des zufälligen Operators dar. Dies geschieht, indem aus der Eigenschaft des Potentials, sich nicht an der unteren Schranke seines Trägers zu konzentrieren, geschlussfolgert wird, dass das Spektrum von Einschränkungen des zufälligen Operators mit geringer Wahrscheinlichkeit (d.h. für wenige ω) an der unteren Schranke der Spektren von Operatoren aus der zufälligen Operatorfamilie $(H^{P,L}(\omega))$ liegt.

Die Annahme an das Einzelplatzmaß μ, sich nicht im untersten Bereich zu konzentrieren, wird Unordnungsannahme genannt und gewährleistet eine sogenannte „hohe Unordnung“. Definiert wird sie wie folgt:

Annahme 2.8.1. *Für einen metrischen Graphen mit* (geom:u,U) *und gleichmäßig polynomiellen Wachstum vom Grad d existiere für das Einzelplatzmaß μ ein $\tau > \frac{d}{2}$ mit*

$$\mu([q_-, q_- + h]) \leq h^\tau \qquad \textit{für } h \textit{ klein.} \tag{pot:unord}$$

Definition 2.8.2. Sei Γ ein metrischer Graph und $\mathcal{V}_\omega$ ein zufälliges Potential auf Γ. Sind die Eigenschaften (pot:char,dichte) und (pot:unord) für das Potential erfüllt, wird dies zusammengefasst als Eigenschaft (pot:char,dichte,unord) notiert.

Daraus ergibt sich der im Folgenden angegebene Satz, welcher Anfangslängenabschätzung genannt wird und garantiert, dass ab einem bestimmten Radius r das Spektrum von Einschränkungen auf Umgebungen mit Radius r

mit geringer Wahrscheinlichkeit nahe der unteren Schranke κ des Spektrums von $H^{P,L}(\omega)$ liegt (d.h. κ ist die untere Schranke von $H^{P,L} + (q_-\nu_e)_{e\in E}$). Der Beweis ist dabei analog zum Beweis der Anfangslängenabschätzung (Theorem 3.2) in [EHS07] für den negativen Laplace-Operator mit Kirchhoff-Randbedingungen auf $\mathbb{Z}^d$. Die Rolle der Dimension d wird hier vom Grad des polynomiellen Wachstums übernommen.

Satz 2.8.3 (Anfangslängenabschätzung)**.** *Sei Γ ein metrischer Graph mit den Eigenschaften (geom:u,U,poly) und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und zufälligem Potential nach (pot:char,dichte,unord) auf Γ. Dann gibt es zu jedem $\xi \in (0, 2\tau - d)$ ein $\beta > 0$ – welches von τ und ξ abhängt – und einen Radius $r_1 \geq r_{\mathrm{G}}$, so dass für alle $v \in V$*

$$\mathbb{P}\left\{\operatorname{dist}\left(\sigma\left(H^{\Lambda_r(v)}(\omega)\right), \{\kappa\}\right) \leq r^{\beta-2}\right\} \leq r^{-\xi},$$

für alle $r \geq r_1$, wobei κ die untere Schranke von $H^{P,L} + (q_-\nu_e)_{e\in E}$ ist.

Beweis. Für eine Länge r und einen Abstand h sei die Menge $\Omega_{r,h}$ definiert als

$$\Omega_{r,h} := \{\omega \in \Omega \text{ mit } \forall\, v \in V \text{ ist } q_e(\omega) \geq q_- + h \text{ für alle } e \in E(v, r)\}.$$

Dann gilt laut (pot:char) für alle $f \in \mathrm{D}(H^{P,L})$ mit $\|f\| = 1$:

$$\left\langle H^{\Lambda_r(v)}(\omega)f, f\right\rangle \geq \kappa + \frac{h}{c_-}c_- = \kappa + h \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega_{r,\frac{h}{c_-}}.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass $H^{\Lambda_r(v)}(\omega)$ Spektrum (d.h. Eigenwerte) in $[\kappa, \kappa + h]$ hat, größer oder gleich der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu $\Omega_{r,\frac{h}{c_-}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Omega_{r,\frac{h}{c_-}}\right) &= \left(1 - \mu\left(\left[q_-, q_- + \frac{h}{c_-}\right]\right)\right)^{|E(v,r)|} && (|\tilde{E}| = \#\text{ Kanten in } \tilde{E}) \\
&\geq 1 - |E(v,r)| \cdot \mu\left(\left[q_-, q_- + \frac{h}{c_-}\right]\right) && (\text{bern. Ungleichung}) \\
&\underset{(\text{geom:poly}),(\text{pot:unord})}{\geq} 1 - \frac{c_2 \cdot r^d}{u}\left(\frac{h}{c_-}\right)^{\tau}.
\end{aligned}$$

Für $\xi \in (0, 2\tau - d)$ wird β mit $\beta < \frac{2\tau - d - \xi}{\tau}$ gewählt, so dass $\xi < \tau(2 - \beta) - d$ gilt und $h := r^{\beta-2}$ gesetzt. Dann folgt:

$$\mathbb{P}\left(\Omega_{r,\frac{r^{\beta-2}}{c_-}}\right) \geq 1 - \underbrace{\frac{c_2 \cdot r^{\xi - \tau(2-\beta) + d}}{u \cdot c_-^{\tau}}}_{(i)} \cdot r^{-\xi},$$

wobei $(i) \leq 1$ für $r \geq r_1$ gilt (wobei r_1 von $u, c_2, c_-, \tau, d, \xi$ und β abhängt), da der Exponent von r in (i) kleiner als null ist. □

Die Wegner-Abschätzung liefert eine Aussage über die Verteilung von Eigenwerten von Einschränkungen des Operators auf endliche induzierte Teilgraphen. Sie ist eine Abschätzung an den Erwartungswert der Anzahl der Eigenwerte einer Einschränkung in einem Intervall der Länge 2ε um ein Energieniveau λ, welche hauptsächlich durch die Anzahl der Kanten des induzierten Teilgraphen bestimmt wird. Eine weitere Größe, die in die Abschätzung eingeht und vom Einzelplatzpotential abhängt, ist:

Definition 2.8.4. Für ein Maß μ und ein $\varepsilon > 0$ ist durch $s(\mu, \varepsilon)$ das Stetigkeitsmodul definiert:

$$s(\mu, \varepsilon) := \sup\{\mu([\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Im Folgenden wird die Wegner-Abschätzung aus [GHV08] angegeben. Das dort verwendete Modell ist viel allgemeiner: Für den metrischen Graphen und das zufällige Potential werden Summierbarkeits- und Überdeckungseigenschaften angegeben, welche für die hier verwendeten Graphen und Potentiale offensichtlich erfüllt sind (siehe auch die Bemerkung nach Definition 3 im zweiten Abschnitt in [GHV08]). Für das hier verwendete Modell ergibt sich dann als Spezialfall des Theorems 6 aus [GHV08] die Wegner-Abschätzung:

Satz 2.8.5. *Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential mit* (pot:char,dichte) *auf Γ. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Konstante $C_{\mathrm{W}} = C_{\mathrm{W}}(\lambda_0)$, so dass für alle $\lambda \leq \lambda_0$, alle endlichen Mengen von Kanten $\tilde{E} \subset E$ und alle $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left\{\mathrm{Tr}\left(\mathbb{1}_{[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]}\left(H^{\Gamma_{\tilde{E}}}(\omega)\right)\right)\right\} \leq C_{\mathrm{W}} \cdot s(\mu, \varepsilon) \cdot |\tilde{E}|.$$

In der Multiskalenanalyse wird die Kantenmenge, auf die der Operator eingeschränkt wird, wieder eine Umgebung $E(v, r)$ mit Radius r sein, dann folgt aus dem gleichmäßig polynomiellen Wachstum auch sofort eine Abschätzung der Anzahl an Kanten:

$$|E(v, r)| \leq \frac{c_2 \cdot r^d}{u}.$$

2.9 Existenz von verallgemeinerten Eigenfunktionen

Die Existenz von verallgemeinerten Eigenfunktionen (VEF) der vorliegenden Differentialoperatoren ist ein wichtiger Baustein des Lokalisierungsbeweises. In diesem Abschnitt wird angegeben, dass zu Spektralmaß fast jedem Spektralwert eine polynomiell wachsende, verallgemeinerte Eigenfunktion existiert.

Aus polynomiellen Fallen der lokalen Resolventen – welches mittels Multiskalenanalyse in Abschnitt 3.1 gezeigt wird – wird daraus in Abschnitt 3.2 geschlussfolgert, dass die verallgemeinerten Eigenfunktionen polynomiell fallen und somit echte Eigenfunktionen sind.

Zusätzlich gibt es eine Entwicklung in verallgemeinerte Eigenfunktionen. Das heißt jede Funktion des Hilbertraumes kann mithilfe der geordneten Spektraldarstellung $U = (U_j) : L^2(X_E) \to \oplus_{j=1}^N L^2(M_j, \varrho)$ des Operators und verallgemeinerten Eigenfunktionen $f_j(\lambda)$ dargestellt werden. Dazu wird die Existenz verallgemeinerter Eigenfunktionen für das Mengensystem (M_j) mit $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ der geordneten Spektraldarstellung, d.h. $M_1 = \sigma(H^{P,L}(\omega))$ und $M_{j+1} \subset M_j$, notwendig. Für den Zweck der Lokalisierung ist dabei die fast sichere Existenz einer VEF zu Spektralmaß fast allen Spektralwerten, also zur Menge M_1, ausreichend. In [PSW89] werden hinreichende Kriterien angegeben, um die Existenz von und eine Entwicklung in verallgemeinerten Eigenfunktionen zu gewährleisten. Bei der richtigen Wahl eines dort benötigten Hilfsoperators ergibt sich auch ein maximal polynomielles Wachstum der VEF.

Für die Definition von VEF werden die Funktionenräume der lokal quadratintegrierbaren Funktionen $L^2_{\text{lok}}(X_E)$ und der kompakt getragenen Funktionen $L^2_{\text{komp}}(X_E)$ sowie das entsprechende Integral $\langle\cdot|\cdot\rangle$ zur Verallgemeinerung des Skalarproduktes benutzt, welche in Abschnitt 2.3 eingeführt wurden.

Definition 2.9.1. Sei X ein topologischer Raum mit Maß dx. Sei H ein lokaler Operator auf $L^2(X)$, d.h. aus $f \in L^2_{\text{komp}}(X) \cap \mathrm{D}(H)$ folgt $Hf \in L^2_{\text{komp}}(X)$ und $\mathcal{D} := \mathrm{D}(H) \cap L^2_{\text{komp}}(X)$ sei wesentlich für H, d.h. $H = \overline{H|_{\mathcal{D}}}$. Eine nichttriviale Funktion $f \in L^2_{\text{lok}}(X)$ heißt verallgemeinerte Eigenfunktion von H zu $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn

$$\langle H\phi|f\rangle = \lambda\langle\phi|f\rangle \qquad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}.$$

Als erstes wird überprüft, ob die beiden Anforderungen aus der Definition für verallgemeinerte Eigenfunktionen für die zufälligen Operatoren $(H^{P,L}(\omega))$ erfüllt sind. Weiter wird gezeigt, dass die verallgemeinerten Eigenfunktionen lokal im Definitionsbereich des jeweiligen Operators liegen.

Hilfssatz 2.9.2. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u)*, beschränktem Knotengrad und $H^{P,L}(\omega)$ ein negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential nach* (pot:char,dichte)*. Dann gilt für $H^{P,L}(\omega)$ auf $L^2(X_E)$:*

1. *Der Operator $H^{P,L}(\omega)$ ist lokal.*
2. *$\mathrm{D}(H^{P,L}(\omega)) \cap L^2_{\text{komp}}(X_E)$ ist wesentlich für $H^{P,L}(\omega)$.*
3. *Sei f eine verallgemeinerte Eigenfunktion von $H^{P,L}(\omega)$. Dann ist $f \in W^{2,2}_{\text{lok}}(X_E)$ und hat einen Repräsentanten der die Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) erfüllt.*

Beweis. 1. ist trivial für den negativen Laplace-Operator und Potentiale die als Multiplikationsoperatoren agieren. *2.* und *3.* sind in [LSS08] in Proposition 5.3 zu finden und benutzen Methoden aus Kapitel 1 (kompakt getragene Abschneidefunktionen und Funktionen die nur um einen Knoten getragen sind, um die Randbedingungen zu prüfen; für die zweite schwache Ableitung von f gilt $f'' = \mathcal{V}_\omega f - \lambda f$). □

Eine verallgemeinerte Eigenfunktion erfüllt also wieder die Randbedingungen des Operators und eine Eigenwertgleichung, wobei die Funktion selbst nur lokal im Definitionsbereich des Operators liegt und deswegen dessen Abbildungsvorschrift in die Eigenwertgleichung eingesetzt werden muss:

$$-\Delta f + \mathcal{V}_\omega f = \lambda f.$$

Wird das Potential $\mathcal{V}_\omega$ von einer differenzierbaren Funktion erzeugt, dann ist f sogar eine $C^\infty(X_E)$-Funktion.

Aus der Eigenwertgleichung kann eine Abschätzung der Norm der ersten schwachen Ableitung durch die Norm der Funktion selbst gewonnen werden.

Hilfssatz 2.9.3. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u,U)*, $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential nach* (pot:char,dichte)*. Sei f eine verallgemeinerte Eigenfunktion zu $\lambda \in \sigma(H^{P,L}(\omega))$. Dann gibt es eine Konstante C_{Kegel}, die nur von $|\lambda|$, u und $C_\mathcal{V}$ abhängt, so dass für alle Kanten $e \in E$ die Abschätzung*

$$\|f'\|^2_{L^2(I_e)} \leq C_{\text{Kegel}} \|f\|^2_{L^2(I_e)}$$

gilt.

Beweis. Gilt für ein Gebiet Ω die Kegeleigenschaft – was für alle Kanten offensichtlich der Fall ist –, dann kann mit Lemma 5.5 in [AF03] die erste Ableitung einer $W^{2,2}(\Omega)$-Funktion durch die zweite Ableitung und die Funktion selbst auf folgende Weise abgeschätzt werden

$$\|f_e'\|_{L^2(I_e)} \leq C_{\text{K}} \left(\varepsilon \|f''\|_{L^2(I_e)} + \varepsilon^{-1} \|f\|_{L^2(I_e)} \right),$$

für alle $\varepsilon \leq u$ und eine Konstante C_{K}, die nur vom jeweiligen Kegel abhängt. Weiter gilt $f'' = \mathcal{V}_\omega f - \lambda f$, was mit der gleichmäßigen Abschätzung der Norm von $\mathcal{V}_\omega$ durch $C_\mathcal{V}$ die Ungleichung

$$\|f_e'\|_{L^2(I_e)} \leq C_{\text{K}} \left(\varepsilon (C_\mathcal{V} + |\lambda|) \|f\|_{L^2(I_e)} + \varepsilon^{-1} \|f\|_{L^2(I_e)} \right)$$

ergibt. □

Die notwendigen Kriterien für eine Entwicklung in verallgemeinerten Eigenfunktionen nach [PSW89] wurden in [LSS08] für negative Laplace-Operatoren mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) auf metrischen Graphen mit (geom:u) überprüft und sind für Potentiale, welche gleichmäßig lokal in $L^2(X_E)$ liegen, erfüllt. Die Potentiale nach (pot:char,dichte) fallen offensichtlich darunter. Aus der Folgerung 5.4 in [LSS08], welche eine Entwicklung dieser Operatoren in VEF liefert, folgt für die Existenz von VEF:

Folgerung 2.9.4. *Sei Γ ein metrischer Graph mit* (geom:u) *und $H^{P,L}(\omega)$ ein Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) auf Γ und Potential mit* (pot:char,dichte). *Sei ϱ ein Spektralmaß für $H^{P,L}(\omega)$ und $w : X_E \to [1,\infty)$ eine Gewichtsfunktion mit $w^{-1} \in L^2(X_E)$. Dann existiert für ϱ-fast alle Spektralwerte $\lambda \in \sigma(H^{P,L}(\omega))$ eine Funktion f_λ, welche eine verallgemeinerte Eigenfunktion für $H^{P,L}(\omega)$ zu λ mit der Eigenschaft $w^{-1}f_\lambda \in L^2(X_E)$ ist .*

Um eine Gewichtsfunktion angeben zu können, ist die Wahl eines Wurzelknotens des metrischen Graphen notwendig.

Definition 2.9.5. Sei Γ ein metrischer Graph. Es wird ein Wurzelknoten $0 \in V$ festgelegt.

Die Wahl des Wurzelknotens ist beliebig. Ist er einmal festgelegt, muss er aber fixiert bleiben. Auf einigen metrischen Graphen (z.B. $\mathbb{Z}^d$ oder anderen Cayleygraphen) ist eine natürliche Wahl des Wurzelknotens vorgegeben.

Bemerkung 2.9.6. (eine Gewichtsfunktion) Sei $m > \frac{d+1}{2}$ und $w : X_E \to [1,\infty)$ definiert als

$$w(x) := (1 + \mathfrak{d}(x,0))^m.$$

Dann ist w eine Gewichtsfunktion im Sinn der letzten Folgerung, d.h. $w^{-1} \in L^2(X_E)$.

Beweis. Die L^2-Norm von w^{-1} wird über die Kugelschalen mit Radius n abgeschätzt. Dabei liefert das gleichmäßig polynomielle Wachstum des Graphen eine Abschätzung der Volumina der Kugeln:

$$\begin{aligned}
\int_{X_E} \|w^{-1}(x)\|^2 \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n(0)\setminus B_{n-1}(0)} w^{-2}(x)\, dx \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n(0)\setminus B_{n-1}(0)} n^{-2m}\, dx \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B_n(0)) n^{-2m} \\
&\leq c_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-2m} < \infty,
\end{aligned}$$

da $m > \frac{d+1}{2}$. □

Zusammen mit der letzten Folgerung kann daraus polynomielles Wachstum der verallgemeinerten Eigenfunktionen gewonnen werden. Dabei ist das Wachstum der Eigenfunktionen schwach, wenn das Wachstum der Gewichtsfunktion schwach ist. Wird der Parameter m möglichst klein gewählt, ergibt sich über den Grad des polynomiellen Wachstums folgende Aussage:

Hilfssatz 2.9.7. *Seien Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger Operator auf Γ mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential nach* (pot:char,dichte). *Dann gilt für jede verallgemeinerte Eigenfunktion von $H^{P,L}(\omega)$, jeden Knoten $v \in V$ und jeden Radius $R > 5U$:*

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_R(v)} f \right\| \leq C_{\mathrm{poly}\nearrow} \cdot R^d \cdot (1 + \mathfrak{d}(v,0) + R + U)^{\frac{d+2}{2}},$$

wobei $C_{\mathrm{poly}\nearrow}$ nur von c_1, c_2 und f abhängt.

Beweis. Laut Bemerkung 2.9.6 ist $w(x) = (1 + \mathfrak{d}(x,0))^{\frac{d+2}{2}}$ eine Gewichtsfunktion für alle verallgemeinerten Eigenfunktionen f zu $H^{P,L}(\omega)$, so dass $w^{-1} f \in L^2(X_E)$ folgt. Es gilt für alle $r > 5U$:

$$\sup_{v \in V} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_r(v)} w^{-1} f \right\| \leq C_r < \infty.$$

Das polynomielle Wachstum (geom:poly) beschränkt das Volumen einer Umgebung $\Lambda_{2r+U}(v)$ auf $c_2 \cdot (2r+U)^d$. Also gibt es maximal $\frac{\mathrm{vol}}{u}$ viele Kanten und maximal $\frac{2\,\mathrm{vol}}{u}$ viele Knoten in $\Lambda_{2r+U}(v)$. Demnach gibt es eine feste obere Schranke der Anzahl an Umgebungen $\Lambda_r(v)$ zu verschiedenen Knoten $v \in V$ die sich schneiden können. Wäre obiges Supremum unendlich, dann könnte $w^{-1} f$ keine $L^2(X_E)$-Funktion sein.

Für ein $x \in X_{E(v_0,R)}$ gilt $\mathfrak{d}(x,0) \leq \mathfrak{d}(v_0,0) + R + U$, das heißt für den Funktionswert der Gewichtsfunktion folgt:

$$w^{-1}(x) \geq (1 + \mathfrak{d}(v_0,0) + R + U)^{-\frac{d+2}{2}}.$$

Die Umgebung $\Lambda_R(v_0)$ kann mit Mengen vom Radius r überdeckt werden, wenn nach Hilfssatz 2.4.7 ein Überdeckungsraster $V_{R,s}(v_0)$ mit zweitem Radius $s = \frac{r-5U}{3}$ benutzt wird. Dieses hat – laut Hilfssatz 2.4.8 – maximal $\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{R}{s}\right)^d$ Elemente. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
(1 + \mathfrak{d}(v_0,0) + R + U)^{-\frac{d+2}{2}} \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_R(v_0)} f \right\|_{L^2(X_E)} &\leq \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_R(v_0)} f w^{-1} \right\| \\
&\leq \sum_{v \in V_{R,s}(v_0)} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_r(v)} f w^{-1} \right\| \\
&\leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{3R}{r-5U} \right)^d C_r.
\end{aligned}$$

Umgestellt nach $\left\|\mathbb{1}_{\Lambda_R(v_0)} f\right\|$ ergibt dies die Behauptung mit einer Konstanten, die nur von c_1, c_2, f und r abhängt, wobei r ein frei wählbarer Parameter ohne weitere Bedeutung ist. □

3 Die Multiskalenanalyse

Die Multiskalenanalyse liefert ein exponentielles oder polynomielles Fallen der lokalen Resolventen:

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_r^{\text{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_r(v)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_r^{\text{int}}(v)} \right\| \leq e^{-\gamma \cdot r}, \qquad \text{oder } \leq r^{-n}$$

für unterschiedliche Längenskalen r. Dabei ist die Multiskalenanalyse der Induktionsschritt von einer Längenskala zu einer größeren, wobei die Abschätzung nicht für alle Konfigurationen ω gilt. Allerdings muss die Wahrscheinlichkeit für deren Gültigkeit mit wachsender Längenskala schnell gegen eins konvergieren. Zum Beweis werden alle vorbereitenden Abschätzungen der Abschnitte 2.4 bis 2.8 benötigt.

In der Literatur gibt es verschiedene Versionen der Multiskalenanalyse. Die erste Multiskalenanalyse für stetige Modelle wurde von Martinelli und Holden in [MH84] publiziert. Zwei Monographien die sich mit zufällige Operatoren befassen und die Multiskalenanalyse behandeln sind [Sto01] und [Kir08]. Im nächsten Abschnitt wird die MSA von [Sto01] auf das Modell der metrischen Graphen angepasst. Unterschiede zu dieser Variante entstehen durch die komplizierteren Überdeckungen und Überdeckungsraster auf metrischen Graphen.

In jedem Induktionsschritt zu einer Längenskala werden Mengen der Form $\Lambda_r(v_0)$ durch Innere solcher Mengen, also durch Mengen der Form $\Lambda_{\frac{r}{3}}(v)$ überdeckt. Dazu wird ein Überdeckungsraster benötigt, welches die Zentren der Überdeckungsmengen beinhalten soll. Auf $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{Z}^d$ werden als Mengen $\Lambda_r(v_0)$ Würfel gewählt und als Raster $\frac{r}{3} \cdot \mathbb{Z}^d + v_0$. Die Überdeckung ist dann eine Pflasterung (also eine disjunkte Überdeckung) mit Würfeln der Kantenlänge $\frac{r}{3}$, deren Zentren gerade auf dem Raster liegen. In diesem Fall kann die genaue Anzahl an Überdeckungsmengen angegeben werden und der Abstand von zwei Überdeckungszentren ist fest und bekannt.

Für metrische Graphen ist die Überdeckung nicht mehr so präzise kontrollierbar und für gleichmäßig polynomiell wachsende Graphen erfolgt sie wie im Abschnitt 2.4 angegeben. Dabei gibt es nur eine Abschätzung nach oben an die Anzahl benötigter Überdeckungsmengen und die Abstände von Überdeckungszentren können auch nur abgeschätzt werden und sind nicht fest wie im $\mathbb{Z}^d$-Fall. Daraus resultieren Änderungen in Abschätzungen in dieser Variante der MSA, woraus folgt, dass kein exponentieller Abfall der lokalen Resolventen geschlussfolgert werden kann – der genaue Zusammenhang wird dabei später erläutert.

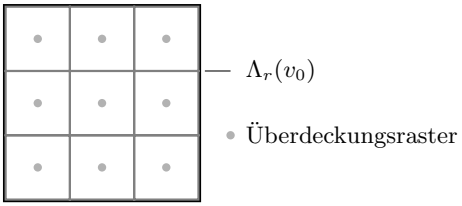


Abbildung 3.1: Würfel.

Dadurch ändern sich alle Definitionen und Aussagen auf polynomiellen Abfall. Die Zusammenhänge zwischen den Induktionsparametern und deren Wahl werden auch weitgehend verändert. Die Struktur des Beweises bleibt aber erhalten. Für eine weitere Multiskalenanalyse mit polynomiellem Abfall sei auf [FLM00] verwiesen.

Als letzte Bemerkung vor dem Start der MSA folgt noch ein Hinweis über die Notation in diesem Kapitel: Für die Kantenlängenfunktion der metrischen Graphen ist die Bezeichnung l und für die Randbedingungen die Familie der Operatoren (L_v) reserviert. In diesem Kapitel werden sowohl die Kantenlängen als auch die Randbedingungen (außer als Bezeichner in den Operatoren $H^{P,L}$) nicht benötigt. Allerdings sind die Bezeichnungen l und L als Längenskalen in der Multiskalenanalyse standard, weswegen sie auch hier benutzt werden sollen.

3.1 Der Induktionsprozess

Nun folgen die Definitionen des polynomiellen Abfalls der lokalen Resolventen und die Aussagen darüber, wie sie in der Multiskalenanalyse bewiesen werden:

Definition 3.1.1. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger Operator mit (RB:P,L,S) und (pot:char,dichte,unord). Seien $n > 0$, $l > 0$ und $v \in V$. Der induzierte Teilgraph $\Lambda_l(v) \subset \Gamma$ heißt (n, λ, ω)-gut, falls $\lambda \in \varrho(H^{\Lambda_l(v)}(\omega))$ und

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} \right\| \leq l^{-n}.$$

Ist dies nicht erfüllt, dann heißt $\Lambda_l(v)$ (n, λ, ω)-schlecht.

Definition 3.1.2. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $l > 0$ ein Radius, sowie $n, \xi, \theta, q > 0$. Für die folgenden logischen Aussagen werden Abkürzungen definiert:

1. $G(I, l, n, \xi)$:
   Für alle v_1, $v_2 \in V$ mit $\Lambda_l(v_1)$ und $\Lambda_l(v_2)$ sind disjunkt gilt die

Abschätzung

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \text{ mit } \forall\, \lambda \in I : \Lambda_l(v_1) \text{ oder } \Lambda_l(v_2) \text{ ist } (n,\lambda,\omega)\text{-gut}\} \geq 1 - l^{-2\xi}.$$

2. $W(I,l,\theta,n,q)$:
   Für alle $\lambda \in I$ und alle Umgebungen $\Lambda_l(v) \subset \Gamma$ gilt

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \text{ mit } \operatorname{dist}\left(\sigma(H^{\Lambda_l(v)}(\omega)), \{\lambda\}\right) \leq l^{-\theta n}\right\} \leq l^{-q}.$$

Aussage $W(I,l,\theta,n,q)$ heißt schwache Wegner-Abschätzung und wird aus der Wegner-Abschätzung (Satz 2.8.5) geschlussfolgert. In der Literatur ist dies zum Beispiel als Lemma 13 in [GHV08] zu finden, wo diese Ableitung aus der Wegner-Abschätzung für $\mathbb{Z}^d$- und $\mathbb{R}^d$-Strukturen angegeben wird. Mit analogem Beweis, wobei die Rolle der Dimension d vom Grad des gleichmäßig polynomiellen Wachstums übernommen wird, ergibt sich:

Bemerkung 3.1.3. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger Operator auf Γ mit Randbedingungen nach (RB:P,L,S) und Potential mit (pot:char,dichte,unord). Seien θ, $q > 0$ mit $q < \theta n - d$ und I ein beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine Länge $r_2 \in (0,\infty)$, so dass für alle $l \geq r_2$ Aussage $W(I,l,\theta,n,q)$ gilt.

Beweis. Offenbar gilt für das Einzelplatzpotential:

$$\begin{aligned} s(\mu,\varepsilon) &= \sup\{\mu([\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]), \lambda \in \mathbb{R}\} = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \varrho_\mu(x)\,dx \\ &\leq 2\varepsilon \|\varrho_\mu\|_\infty \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot c_\varrho. \end{aligned}$$

Dann gilt laut der Wegner-Abschätzung (Satz 2.8.5) für $\lambda \in I$, $v \in V$ und $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \text{ mit } \operatorname{dist}\left(\sigma(H^{\Lambda_l(v)}(\omega)), \{\lambda\}\right) \leq l^{-\theta n}\right\} \\ &\qquad \leq \mathbb{E}\left\{\operatorname{Tr}\left[\mathbb{1}_{(\lambda-l^{-\theta n},\lambda+l^{-\theta n})}\left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega)\right)\right]\right\} \\ &\qquad \leq C_{\mathrm{W}} s(\mu, l^{-\theta n}) |\Lambda_l(v)| \\ &\qquad \underset{\text{(geom:poly)}}{\leq} 2 \cdot C_{\mathrm{W}} \cdot c_\varrho l^{-\theta n} \cdot \frac{c_2 \cdot l^d}{u} \\ &\qquad = \frac{2}{u} \cdot c_2 \cdot c_\varrho \cdot C_{\mathrm{W}} \cdot l^{d-\theta n} \\ &\qquad \leq l^{-q} \end{aligned}$$

für $l \geq r_2(C_{\mathrm{W}}, c_2, c_\varrho, u)$. □

Aus der Anfangslängenabschätzung und der Combes-Thomas-Abschätzung lässt sich jetzt der Induktionsanfang schlussfolgern, welcher dem polynomiellen Fallen der lokalen Resolventen mit großer Wahrscheinlichkeit bzw. $G(I,l,n,\xi)$ entspricht.

Satz 3.1.4 (Induktionsanfang)**.** *Sei $(H^{P,L}(\omega))$ ein negativer Laplace-Operator auf Γ mit (RB:P,L,S), (pot:char,dichte,unord) und (geom:u,U,poly). Sei $\xi \in (0, 2\tau - d)$. Dann gibt es ein $\beta \in (0,2)$ und ein $r_3 \geq r_1$, so dass für $l \geq r_3$, $n \in \mathbb{R}^+$ und $I = \left[\kappa, \kappa + \frac{1}{2} l^{\beta-2}\right]$ Aussage $G(I,l,n,\xi)$ gilt.*

Beweis. Laut der Anfangslängenabschätzung (Satz 2.8.3) gibt es eine Länge r_1 und ein $\beta \in (0,2)$, so dass für alle $l \geq r_1$

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \text{ mit } \operatorname{dist}(\sigma(H^{\Lambda_l(v)}(\omega)), \{\kappa\}) \leq l^{\beta-2}\} \leq l^{-\xi}.$$

Dann gilt für alle ω mit $\operatorname{dist}(\sigma(H^{\Lambda_l(v)}(\omega)), \{\kappa\}) > l^{\beta-2}$ die Combes-Thomas-Abschätzung mit den Konstanten $\lambda \in I$, $r := \kappa - 1$ und $s := \kappa + l^{\beta-2}$, welche mit $\eta \geq \frac{1}{2} l^{\beta-2}$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(v)} \left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{out}}(v)} \right\| \\
&\qquad \leq C_{\text{CTA}} \cdot \eta^{-1} \cdot \exp\left(-\tilde{C}\sqrt{\eta(s-r)}\operatorname{dist}(\Lambda_l^{\text{int}}(v), \Lambda_l^{\text{out}}(v))\right) \\
&\qquad \underset{(2.2)}{\leq} C_{\text{CTA}} \cdot 2l^{2-\beta} \cdot \exp\left(-\tilde{C} \cdot \sqrt{\frac{l^{\beta-2}}{2}(l^{\beta-2}+1)} \cdot \frac{l}{2}\right) \\
&\qquad \leq 2C_{\text{CTA}} \cdot l^{2-\beta} \cdot \exp\left(-\tilde{C} \cdot \frac{l^{\frac{\beta}{2}}}{l} \cdot \frac{l}{2}\right) \\
&\qquad = 2C_{\text{CTA}} \cdot l^{2-\beta} \cdot \exp\left(-\tilde{C} \cdot l^{\frac{\beta}{2}}\right) \\
&\qquad \leq l^{-n}
\end{aligned}$$

ergibt, für $l \geq r_3(C_{\text{CTA}}, \beta, n, r_1)$. Damit sind alle Umgebungen $\Lambda_l(v)$ für die oben beschriebenen Konfigurationen (n,λ,ω)-gut. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei unabhängige Umgebungen (d.h. $E_{\Lambda_l(v_1)} \cap E_{\Lambda_l(v_1)} = \varnothing$) (n,λ,ω)-schlecht sind, ist kleiner gleich $\left(l^{-\xi}\right)^2$ – was gerade $G(I,l,n,\xi)$ entspricht. □

Damit ist $G(I,l,n,\xi)$ erfüllt für festes n und ξ zu allen Längenskalen $l \geq r_3$. Allerdings ist das Intervall $I = \left[\kappa, \kappa + \frac{1}{2} l^{\beta-2}\right]$ von der Längenskala abhängig und dessen Länge geht für $l \to \infty$ gegen null. Nun gilt es nur noch einen Induktionsschritt von $G(I,l,n,\xi)$ zu einer größeren Längenskala, aber mit demselbem Intervall I auszuführen:

Satz 3.1.5 (Induktionssatz)**.** *Sei $(H^{P,L}(\omega))$ ein negativer Laplace-Operator auf Γ mit (RB:P,L,S), (pot:char,dichte,unord) und (geom:u,U,poly). Seien die Induktionsparameter gegeben durch:*

$$\left.\begin{array}{ll} q \in (d, d+1), & \\ \xi \in (0, 2\tau - d) & \text{mit } \xi \leq \frac{1}{4}(q-d), \\ \alpha & \text{mit } 1 < \alpha < 1 + \frac{\xi}{2d+\xi}, \\ n & \text{mit } n > 5d+2, \\ \theta & \text{mit } \frac{2d+1}{n} < \theta < \frac{n-d}{2n}. \end{array}\right\} \quad \text{(IP)}$$

Dann gibt es einen Radius r_9, so dass aus $G(I, l, n, \xi)$ mit $l \geq r_9$ für ein offenes, beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $L = l^\alpha$ auch $G(I, L, n, \xi)$ folgt.

Der Satz liefert den benötigten Iterationsschritt. Steht einmal fest ab welchem Radius – r_9 – der Induktionsschritt vollzogen werden kann, ist durch den Induktionsanfang und die Anfangslängenabschätzung sofort klar, für welches Intervall I Aussage $G(I, r, n, \xi)$ gilt, nämlich für das Intervall $I = [\kappa, \kappa + \frac{1}{2}{r_9}^{\beta-2}]$ aus dem Induktionsanfang – wobei β aus der Anfangslängenabschätzung gewonnen wird und von ξ, τ und d abhängt.

Allerdings ist der Induktionsschluss für jedes Intervall gültig, für welches $G(I, l, n, \xi)$ ab einer gewissen Startlänge gezeigt werden kann, weswegen nicht das konkrete Intervall aus dem Induktionsanfang in der Formulierung des Satzes auftaucht. In der im Beweis benötigten Combes-Thomes-Abschätzung und Geometrischen Resolventenungleichung werden nur Energieparameter $\lambda \in I$ eingesetzt und liefern für jedes beschränkte Intervall I eine gleichmäßige Abschätzung in λ. Die schwache Wegner-Abschätzung und die Weyl-Asymptotik werden für einige Energieniveaus mehr benötigt. Es reicht aber aus diese für ein um einhalb größeres Intervall als I zu wissen: $I_0 := I + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Da auch I_0 beschränkt ist, gelten diese beiden Abschätzungen gleichmäßig für alle $\lambda \in I_0$.

Viele Anforderungen an die Induktionsparameter werden erst später im Beweis klar, sollen aber gesammelt hier auftauchen, um zu zeigen, wie die Zusammenhänge zwischen ihnen sind und dass sie auch „wählbar“ sind. An den konkreten Stellen im Beweis wird dann auf die Wahl der Parameter laut (IP) verwiesen.

Einige Einschränkungen sind schon jetzt klar: ξ wird so gewählt, dass die Anfangslängenabschätzung und damit auch der Induktionsanfang gezeigt werden kann. Die untere Schranke an θ liefert für die angegebene Wahl von q die schwache Wegner-Abschätzung laut Bemerkung 3.1.3. Die Wahl von n gewährleistet, dass θ gewählt werden kann (d.h. dass die untere Schranke für θ kleiner als die obere Schranke ist).

Der Beweis wird in vier Schritten vollzogen: Die ersten drei Schritte liefern das benötigte Ereignis in Ω mit Wahrscheinlichkeit von mindestens $1-L^{-2\xi}$ für die Formulierung von $G(I,L,n,\xi)$. Im letzten Schritt wird dann der Schluss, wie mithilfe von (n,λ,ω)-guten Umgebungen mit Radius l eine (n,λ,ω)-gute Umgebung $\Lambda_L(w)$ gefunden werden kann, angegeben.

Beweis. Aus der Wahl der Induktionsparameter folgt direkt (mit $\alpha < 2$):

$$\left.\begin{aligned} &0 < q - d,\\ &q < \theta n - d,\\ &\theta < \frac{n+d-\alpha d}{\alpha n}. \end{aligned}\right\} \tag{IP'}$$

Als Erstes wird die Menge aller ω definiert, so dass für einen Knoten $v \in V$ maximal drei disjunkte (n,λ,ω)-schlechte Umgebungen mit Zentrum im Überdeckungsraster $V_{L,\frac{l}{10}}(v) \subset V$ und Seitenlänge l in $\Lambda_L(v)$ existieren:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{G}}(v) := \{\omega \in \Omega \text{ mit } \forall\, \lambda \in I \nexists\, 4 \text{ disjunkten Umgebungen } \Lambda_l(b_i) \subset \Lambda_L(v)\\ \text{mit } b_i \in V_{L,\frac{l}{10}}(v), i = 1,\dots,4, \text{ die alle } (n,\lambda,\omega)\text{-schlecht sind}\}.\end{aligned}$$

Schritt 1. *Unter den Voraussetzungen des Induktionssatzes gilt:*

1. *Es existiert ein $r_4 = r_4(d,\alpha)$, so dass für $l \geq r_4$ folgt:*

$$\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{G}}(v)) \geq 1 - \tfrac{1}{3}L^{-2\xi} \qquad \text{für alle } v \in V.$$

2. *Für $\omega \in \Omega_{\mathrm{G}}(v)$, $\lambda \in I$, $x \in V$, l groß genug gibt es drei induzierte Teilgraphen $\boxdot_i$ $(i = 1,2,3)$, mit $\boxdot_i := \Lambda_{l_i}(v_i)$ oder $\boxdot_i = \Gamma_\varnothing$ die Containermengen genannt werden und die folgenden Eigenschaften besitzen:*

   a) $l_i \in \mathcal{L} = \left\{3l+2U, \frac{63}{10}l+11U, \frac{48}{5}l+\frac{41}{2}U\right\}$, $\sum_{i=1}^{3} l_i \leq \frac{48}{5}l + \frac{41}{2}U$, $v_i \in V_{L,\frac{l}{10}}(x)$.

   b) Falls $\Lambda_l(b) \subset \Lambda_L(x)$ mit $b \in V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ (n,λ,ω)-schlecht ist, so gilt

$$\Lambda_l(b) \subset \bigcup_{i=1}^{3} \boxdot_i.$$

   c) Je zwei verschiedene Container sind disjunkt.

Bemerkung 3.1.6. Die Eigenschaften von Schritt 1 liefern Folgendes:

- Zu jedem Tupel einer Energie $\lambda \in I$ und eines $\omega \in \Omega_{\mathrm{G}}$ gibt es (n,λ,ω)-schlechte Umgebungen mit Radius l und Zentrum im Überdeckungsraster, von denen maximal drei disjunkt sind. Teil 2.b) des Schrittes liefert, dass diese alle in den Containermengen liegen.

- Im Folgenden muss die Anzahl möglicher Container in $\Lambda_L(x)$ abgeschätzt werden. Die Festlegung der Zentren auf das Raster schränkt dies weit ein, die Anzahl an möglichen Kantenlängen auch. Die verschiedenen Kantenlängen sind notwendig um 2.c) zu gewähren. Weiter sind die Kantenlängen und deren maximale Summe wichtig bei der Iteration in Schritt 4.

- Wird der Containerrand laut Hilfssatz 2.4.9 mit Mengen überdeckt, die nicht vollständig in diesem Container liegen, dann liefert 2.c) automatisch, dass die Überdeckungsumgebungen (n, λ, ω)-gute Mengen sind.

Beweis Schritt 1. 1. Sei $\omega \notin \Omega_{\mathrm{G}}$. Dann gibt es ein $\lambda \in I$, so dass vier disjunkte (n, λ, ω)-schlechte Umgebungen mit Radius l und Zentren in $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ existieren. Dafür wird die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt: Laut Hilfssatz 2.4.8 gibt es maximal $\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{10L}{l}\right)^d$ Umgebungen mit Radius $\frac{l}{10}$ und Zentren in $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ in $\Lambda_L(x)$. Dann gibt es maximal $\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4\left(\frac{10L}{l}\right)^{4d}$ Quadrupel von disjunkten Umgebungen mit Radius l und Zentren in $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ in $\Lambda_L(x)$. Laut $G(I, l, n, \xi)$ ist die Wahrscheinlichkeit für mindesten zwei Paare unabhängiger (n, λ, ω)-schlechter Mengen kleiner als $\left(l^{-2\xi}\right)^2$. Damit folgt:

$$\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{G}}^C) \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 \left(\frac{10L}{l}\right)^{4d} l^{-4\xi}.$$

Die Multiplikation mit $L^{2\xi}$ liefert:

$$\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{G}}^C)L^{2\xi} \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 \left(\frac{10L}{l}\right)^{4d} l^{-4\xi}L^{2\xi} = \left(\frac{10^d c_2}{c_1}\right)^4 l^{4d(\alpha-1)-4\xi+2\alpha\xi}.$$

Für den Exponent von l ergibt sich:

$$4d(\alpha-1) - 4\xi + 2\alpha\xi < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 + \frac{\xi}{2d+\xi},$$

was laut (IP) erfüllt ist. Es wird also $\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{G}}^C) \leq \frac{1}{3}L^{-2\xi}$ für $l \geq r_4(d, \alpha)$, wobei α auf anderen Parametern aufbaut, die aber alle nur von d und τ abhängig sind.

2. Mit $\omega \in \Omega_{\mathrm{G}}$ existieren maximal drei disjunkte (n, λ, ω)-schlechte Umgebungen über dem Raster $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$. Seien $\Lambda_l(b_i)$, $b_i \in V_{L,\frac{l}{10}}(x)$, $i = 1, 2, 3$ drei solche Umgebungen (sonst vereinfacht sich der Beweis).

Dann liegen alle (n, λ, ω)-schlechten Umgebungen mit Zentren auf dem Raster $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$, die nicht disjunkt zu $\Lambda_l(b_i)$ sind, in $\Lambda_{3l+2U}(b_i)$: Für alle diese (n, λ, ω)-schlechten Mengen $\Lambda_l(b)$ gibt es eine Kante e_b mit $e_b \in E(b, l)$ und $e_b \in E(b_i, l)$. Der Abstand eines jeden Punktes y aus $\Lambda_l(b)$ zu b_i ist kleiner gleich $\mathfrak{d}(y, b) + \mathfrak{d}(b, b_i)$, wobei $\mathfrak{d}(y, b) < l + U$ und $\mathfrak{d}(b, b_i) \leq l + l + U$ gilt, weil e_b maximal l entfernt von b und b_i aus beginnt und e_b höchstens die Länge U hat.

Wenn zwei der Mengen $\Lambda_{3l+2U}(b_i)$ nicht disjunkt sind, müssen diese noch zu einer größeren Umgebung zusammengefügt werden.

Seien ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Container zu $\Lambda_{3l+2U}(b_1)$ und $\Lambda_{3l+2U}(b_2)$ nicht disjunkt, dann gibt es eine Kante e_b, die in beiden enthalten ist und einen Punkt $\tilde{x}$ in I_{e_b}. Laut dem Überdeckungssatz 2.4.7 gibt es im Raster $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ einen Knoten $\tilde{v}$, so dass $\tilde{x} \in \Lambda_{3\cdot\frac{l}{10}+5U}(\tilde{v})$. Dann gilt für alle y, die im Container zu b_i $(i = 1, 2)$ liegen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(y, \tilde{v}) &\leq \mathfrak{d}(y, b_i) + \mathfrak{d}(b_i, \tilde{v}) \\ &< (3l + 2U + U) + \left(3l + 2U + \frac{3l}{10} + 5U + U\right) \\ &\leq \frac{63}{10}l + 11U\end{aligned}$$

Der neue Container ist also $\Lambda_{\frac{63}{10}l+11U}(\tilde{v})$.

Nun kann es noch passieren, dass dieser Container und $\Lambda_{3l+2U}(b_3)$ nicht disjunkt sind. Dann wird wieder ein noch größerer Container gewählt der beide enthält. Dazu wird auf einem der kürzesten Pfade zwischen $\tilde{v}$ und b_3 bei Entfernung $3l + \frac{5}{2}U$ ein Rasterknoten aus $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ gesucht, welcher wieder in maximaler Entfernung von $\frac{3l}{10} + 6U$ gefunden werden kann und mit $\overline{v}$ bezeichnet wird. Es gilt für alle $y \in \Lambda_{\frac{63}{10}l+11U}(\tilde{v})$ und $z \in \Lambda_{3l+2U}(b_3)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(y, \overline{v}) &\leq \mathfrak{d}(y, \tilde{v}) + \mathfrak{d}(\tilde{v}, \overline{v}) < \frac{63}{10}l + 12U + 3l + \frac{5}{2}U + \frac{3}{10}l + 6U \\ &= \frac{48}{5}l + \frac{41}{2}U, \\ \mathfrak{d}(z, \overline{v}) &\leq \mathfrak{d}(z, b_3) + \mathfrak{d}(b_3, \overline{v}) \leq \mathfrak{d}(z, b_3) + \mathfrak{d}(b_3, \tilde{v}) - \left(3l + \frac{5}{2}U\right) + \frac{3}{10}l + 6U \\ &< 3l + 3U + \left(\frac{63}{10}l + 11U + 3l + 2U + U\right) - 3l - \frac{5}{2}U + \frac{3}{10}l + 6U \\ &= \frac{48}{5}l + \frac{41}{2}U.\end{aligned}$$

Das heißt: Alle (n, λ, ω)-schlechten Mengen mit Zentrum in $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ und Radius l liegen im Container $\Lambda_{\frac{48l}{5}+\frac{41U}{2}}(\overline{v})$. Durch geeignete Umnummerierung gibt es für drei disjunkte schlechte Umgebungen folgende Konfigurationen für Container, die alle der unter 2.) geforderten Eigenschaften genügen:

(i) $\boxdot_i = \Lambda_{3l+2U}(b_i)$, $i = 1, 2, 3$

(ii) $\boxdot_1 = \Lambda_{\frac{63}{10}l+11U}(\tilde{v})$, $\boxdot_2 = \Lambda_{3l+2U}(b_3)$, $\boxdot_3 = \Gamma_\varnothing$

(iii) $\boxdot_1 = \Lambda_{\frac{48l}{5}+\frac{41U}{2}}(\overline{v})$, $\boxdot_2 = \boxdot_3 = \Gamma_\varnothing$. □

Die konkreten Containermengen hängen von den jeweiligen Parametern $\omega \in \Omega$ und $\lambda \in I$ ab, d.h. es gibt für jedes Tupel (ω, λ) drei Mengen $\boxdot_i(\omega, \lambda)$.

Das Ziel ist zu zeigen, dass $\Lambda_L(x)$ (n, λ, ω)-gut ist für alle $\omega \in \Omega_G$ und für alle Energien $\lambda \in I$. Dies gelingt nicht immer. Mit Hilfe der Wegner-Abschätzung wird gezeigt: Wenn es für $\Lambda_L(x)$ nicht gelingt, dann ist es sehr unwahrscheinlich, dass es auch für $\Lambda_L(y)$, mit $\Lambda_L(x)$ und $\Lambda_L(y)$ sind disjunkt, auch nicht gelingt.

In den beiden nächsten Schritten wird ein Zusammenhang von Spektren verschiedener Umgebungen aufgezeigt, der aus der schwachen Wegner-Abschätzung folgt.

Definition 3.1.7. Für eine Umgebung $\Lambda_s(z)$ mit $s > 0$ sei folgendes definiert:

$$\sigma_1\left(H^{\Lambda_s(z)}(\omega)\right) := \sigma\left(H^{\Lambda_s(z)}(\omega)\right) \cap (I + (-\tfrac{1}{2}s^{-\theta n}, \tfrac{1}{2}s^{-\theta n})),$$

wobei $A + B$ die Minkowski-Summe ist.

Aus der Wahl von I_0 folgt für $s \geq 1$ automatisch:

$$\left(I + (-\tfrac{1}{2}s^{-\theta n}, \tfrac{1}{2}s^{-\theta n})\right) \subset I_0.$$

Schritt 2. *Für zwei disjunkte und damit unabhängige Umgebungen $\Lambda_{l_1}(v_1)$ und $\Lambda_{l_2}(v_2)$ mit l_1, $l_2 \geq r_2$ gilt:*

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \text{ mit } \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)\right) \leq \min\{l_1, l_2\}^{-\theta n}\right\} \leq C_{\text{Weyl}} \cdot \frac{\max\{l_1, l_2\}^d}{\min\{l_1, l_2\}^q}.$$

Beweis. O.E.d.A. sei $l_1 = \min\{l_1, l_2\}$. Für endliche Teilmengen E_1, $E_2 \subset E$ die disjunkt sind und ein Ereignis $\Omega_0 \subset \Omega$ mit

$$\prod_{e \in E_1 \cup E_2} q_e(\Omega_0) \times [q_-, q_+]^{E \setminus (E_1 \cup E_2)} = \Omega_0,$$

das heißt Ω_0 hängt nur von den Kanten in E_1 und E_2 ab, gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_0) &= \int\limits_{E\setminus E_1} \left(\int\limits_{E_1} \mathbb{1}_{\Omega_0} \prod_{e\in E_1} \varrho_\mu(\omega_e)\, d\omega_e \right) \prod_{e\in E\setminus E_1} \varrho_\mu(\omega_e)\, d\omega_e \\ &= \mathbb{E}_{E\setminus E_1}\left(\mathbb{P}_{E_1}(\Omega_0)\right) \\ &= \mathbb{E}_{E_2}\left(\mathbb{P}_{E_1}(\Omega_0)\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dies wird nun angewendet auf die abzuschätzende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{E(v_1,l_1)}\left\{\omega\in\Omega : \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)\right) \le {l_1}^{-\theta n}\right\} \\ &= \mathbb{P}_{E(v_1,l_1)}\left\{\omega\in\Omega : \min_{\lambda\in\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)} \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \{\lambda\}\right) \le {l_1}^{-\theta n}\right\} \\ &= \mathbb{P}_{E(v_1,l_1)}\left\{\bigcup_{\lambda\in\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)} \left\{\omega\in\Omega : \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \{\lambda\}\right) \le {l_1}^{-\theta n}\right\}\right\} \\ &\le \sum_{\lambda\in\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)} \mathbb{P}_{E(v_1,l_1)}\left\{\omega\in\Omega : \operatorname{dist}\left(\sigma_1(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \{\lambda\}) \le {l_1}^{-\theta n}\right\}. \end{aligned}$$

Mit $\sigma\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}\right)$ an Stelle von $\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}\right)$ werden die Wahrscheinlichkeiten höchstens größer und diese können einzeln mit der schwachen Wegner-Abschätzung $W(I,l,\theta,n,q)$ aus Bemerkung 3.1.3 durch ${l_1}^{-q}$ abgeschätzt werden. Die Weyl-Asymptotik aus Folgerung 2.7.6 liefert eine Abschätzung an die Anzahl der Summanden, also die Anzahl an Eigenwerten von $H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)$ in I_0.

$$\le \left|\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)\right| \cdot {l_1}^{-q} \le C_{\text{Weyl}} \cdot \frac{{l_2}^d}{{l_1}^q}.$$

Für die gesamte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big\{ \underbrace{\omega\in\Omega : \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)\right) \le {l_1}^{-\theta n}}_{=:\Omega_0} \Big\} \\ &\underset{(3.1)}{=} \mathbb{E}_{E(v_2,l_2)}\left(\mathbb{P}_{E(v_1,l_1)}(\Omega_0)\right) \\ &\le \mathbb{E}_{E(v_2,l_2)}\left(C_{\text{Weyl}} \cdot \frac{{l_2}^d}{{l_1}^q}\right) = C_{\text{Weyl}} \cdot \frac{{l_2}^d}{{l_1}^q}. \end{aligned}$$

□

Schritt 3. *Es gibt ein r_5, so dass für $l \geq r_5$ gilt: Für x, $y \in V$ mit $\Lambda_L(x)$ und $\Lambda_L(y)$ disjunkt gilt:*

$$\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{W}}) \leq \frac{1}{3} L^{-2\xi}, \textit{ mit}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{W}} = \{\omega \in \Omega \textit{ mit } \exists\ \Lambda_{l_i}(v_i), i = 1,2 \textit{ mit}\\ \Lambda_{l_1}(v_1) = \Lambda_L(x) \textit{ oder } v_1 \in V_{L,\frac{l}{10}}(x) \textit{ und } l_1 \in \mathcal{L},\\ \Lambda_{l_2}(v_2) = \Lambda_L(y) \textit{ oder } v_2 \in V_{L,\frac{l}{10}}(y) \textit{ und } l_2 \in \mathcal{L},\\ \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)\right) \leq \min\{l_1,l_2\}^{-\theta n}\Big\}.\end{aligned}$$

Beweis. Es wird die Anzahl der möglichen Umgebungspaare $\Lambda_{l_i}(v_i)$ abgeschätzt durch: Die Anzahl von Zentren ist beschränkt durch die Anzahl an Knoten in den Rastern $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$, $V_{L,\frac{l}{10}}(y)$ welche beide laut Hilfssatz 2.4.8 durch $\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{10L}{l}\right)^d$ beschränkt sind. Da es maximal vier verschiedene Kantenlängen geben kann, gilt mit Schritt 2 für $l \geq r_2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{W}}) &\leq \left(\frac{4\cdot 10^d c_2}{c_1}\left(\frac{L}{l}\right)^d\right)^2 \cdot C_{\mathrm{Weyl}} \cdot \frac{(\max\{l_1,l_2\})^d}{(\min\{l_1,l_2\})^q} \qquad (l < l_1, l_2 \leq L)\\ &\leq C_{\mathrm{Weyl}}\left(\frac{4\cdot 10^d c_2}{c_1}\right)^2 \cdot \frac{L^{3d}}{l^{2d+q}} = C_{\mathrm{Weyl}}\left(\frac{4\cdot 10^d c_2}{c_1}\right)^2 l^{3d\alpha-2d-q}.\end{aligned}$$

Multipliziert mit $L^{2\xi} = l^{2\alpha\xi}$ ergibt sich auf der rechten Seite als Exponent von l gerade $3\alpha d - 2d - q + 2\alpha\xi$. Dieser Exponent ist genau dann kleiner als null, wenn

$$\alpha < \frac{2d+q}{3d+2\xi} = \frac{3d+(q-d)}{3d+2\xi}$$

gilt. Mit der Wahl von α und ξ laut (IP) folgt:

$$\alpha < 1 + \frac{2\xi}{4d+2\xi} < 1 + \frac{2\xi}{3d+2\xi} = \frac{3d+4\xi}{3d+2\xi} \underset{\xi \leq \frac{1}{4}(q-d)}{\leq} \frac{3d+(q-d)}{3d+2\xi},$$

demnach gibt es ein $r_5(C_{\mathrm{Weyl}}, c_1, c_2, d, q, \alpha, r_2)$, so dass für alle $l \geq r_5$:

$$\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{W}}) \leq C_{\mathrm{Weyl}}\left(\frac{4\cdot 10^d c_2}{c_1}\right)^2 l^{3d\alpha-2d-q} \leq \frac{1}{3} L^{-2\xi}. \qquad \square$$

Schritt 4. *Seien x, $y \in V$, so dass $\Lambda_L(x)$ und $\Lambda_L(y)$ disjunkt sind, Ω_{G} und Ω_{W} wie in Schritt 1 und 3. Sei $\omega \in \Omega_{\mathrm{G}}(x) \cap \Omega_{\mathrm{G}}(y) \cap \Omega_{\mathrm{W}}^c$ und $\lambda \in I$. Dann gibt es ein $z \in \{x,y\}$ und ein r_8, so dass $\Lambda_L(z)$ (n,λ,ω)-gut ist für $l \geq r_8$.*

Definition 3.1.8. Sei $\lambda \in I$. Ein induzierter Teilgraph $\Lambda_r(v)$ wird λ-resonant zu $\omega \in \Omega$ genannt, wenn

$$\operatorname{dist}\left(\sigma(H^{\Lambda_r(v)}(\omega)), \{\lambda\}\right) \leq \tfrac{1}{2} r^{-\theta n},$$

ansonsten λ-dissonant zu ω.

Beweis. Sei l_1 die maximale Länge aller Umgebungen $\Lambda_s(v)$ mit $s \in \mathcal{L}$, $v \in V_{L,\frac{l}{10}}(x) \cup V_{L,\frac{l}{10}}(y)$ bzw. $\Lambda_L(x)$ und $\Lambda_L(y)$, die λ-resonant zu $\omega \in \Omega_{\mathrm{W}}^{\mathrm{c}}$ sind. (Gibt es keine solche Menge, dann sind diese alle λ-dissonant.) O.E.d.A. sei $\Lambda_{l_1}(v_1)$ solch eine Umgebung mit $v_1 \in V_{L,\frac{l}{10}}(y)$ oder $v_1 = y$. Dann sind alle Umgebungen $\Lambda_{l_2}(v_2)$ mit $v_2 \in V_{L,\frac{l}{10}}(x)$, $l_2 \in \mathcal{L}$ und $\Lambda_L(x)$ λ-dissonant:

Es wird das Gegenteil angenommen, d.h. $\Lambda_{l_2}(v_2)$ oder $\Lambda_L(x)$ ist λ-resonant. O.E.d.A. sei dies $\Lambda_{l_2}(v_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right)\right) \\
&\quad \underset{(1.5)}{\leq} \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_1}(v_1)}(\omega)\right), \{\lambda\}\right) + \operatorname{dist}\left(\sigma_1\left(H^{\Lambda_{l_2}(v_2)}(\omega)\right), \{\lambda\}\right) \\
&\quad \leq \frac{1}{2} l_1^{-\theta n} + \frac{1}{2} l_2^{-\theta n} \qquad (\Lambda_{l_1}(v_1), \Lambda_{l_2}(v_2)\lambda \text{ -resonant}) \\
&\quad \leq \min\{l_1, l_2\}^{-\theta n},
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $\omega \in \Omega_{\mathrm{W}}$, was zu einem Widerspruch führt. Also sind alle Container zu $\Lambda_L(x)$ aus Schritt 1 und $\Lambda_L(x)$ selbst λ-dissonant.

Ziel ist, zu zeigen, dass $\Lambda_L(x)$ eine (n, λ, ω)-gute Umgebung ist. Dies soll ermöglicht werden, indem $\Lambda_L^{\mathrm{int}}(x)$ überdeckt wird durch Mengen $\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_0)$. Es sind also die Normen

$$(i) := \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_0)} \right\|$$

abzuschätzen. Dies wird durch Iterieren mit

$$\begin{aligned}
(i) &\leq C \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_1)} \right\| \\
&\vdots \\
(i) &\leq C^m \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_m)} \right\|
\end{aligned}$$

erreicht, wobei $\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_1)$ zur Überdeckung von $\Lambda_l^{\mathrm{out}}(x_0)$ benutzt wird, bzw. $\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_m)$ zur Überdeckung von $\Lambda_l^{\mathrm{out}}(x_{m-1})$. Dabei soll $C < 1$ möglichst

klein sein. Im letzten Rechenschritt wird dann die Norm durch die Combes-Thomas-Abschätzung abgeschätzt. Der Iterationsvorgang von x_0 zu x_m ist der wesentliche Inhalt der Multiskalenanalyse und wird nun vorgestellt:

Sei also x_0 mögliches Überdeckungszentrum für $\Lambda_L^{\mathrm{int}}(x)$, dass heißt $x_0 \in V_{L,\frac{l}{10}}(x) \cap \Lambda_{\frac{L+l}{3}}(x)$ laut Bemerkung 2.4.10. Sind die Punkte $x_0, \ldots, x_m \in V_{L,\frac{l}{10}}(x) \cap \Lambda_L(x)$ mit $m \geq 0$ gewählt, dann werden anhand von ω zwei Fälle unterschieden, wie der nachfolgende Punkt x_{m+1} gewählt wird (siehe auch Abbildung 3.2; die grünen Umgebungen entsprechen Fall (+), die roten Umgebungen mit den Containern Fall (−)):

(+): $\Lambda_l(x_m)$ ist (n, λ, ω)-gut:
Dann gilt laut der Geometrischen Resolventenungleichung in Folgerung 2.6.6:

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_m)} \right\| \\
&\quad \leq C_{\mathrm{GRU}} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(x_m)} \right\| \\
&\qquad\qquad \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(x_m)} \left(H^{\Lambda_l(x_m)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_m)} \right\| \\
&\quad \leq C_{\mathrm{GRU}} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(x_m)} \right\| \cdot l^{-n}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Nun wird $\Lambda_l^{\mathrm{out}}(x_m)$ überdeckt durch Umgebungen mit Mittelpunkten in $V_{L,\frac{l}{10}}(x)$ und Radius $\frac{l}{3}$; also mit Inneren von Umgebungen mit Radius l. Laut Hilfssatz 2.4.7 und Bemerkung 2.4.10 ist dies wie folgt möglich:

$$\Lambda_l^{\mathrm{out}}(x_m) \subset \bigcup_{v \in V_{L,\frac{l}{10}}(x) \cap V_{E\left(x_m, \frac{4}{3}l\right)}} \Lambda_l^{\mathrm{int}}(v).$$

Durch Hilfssatz 2.4.8 kann die maximale Anzahl benötigter Zentren abgeschätzt werden (die Überdeckungszentren liegen in $E\left(x_m, \frac{4l}{3}\right)$ und damit liegen die zugehörigen disjunkten Mengen mit Radius $\frac{l}{10}$ in $E\left(x_m, \frac{4l}{3} + \frac{l}{10} + U\right)$):

$$\left| V_{L,\frac{l}{10}}(x) \cap V_{E\left(x_m, \frac{4l}{3}\right)} \right| \leq \left| V_{\frac{4l}{3}+\frac{l}{10}+U,\frac{l}{10}}(x_m) \right| \leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{10\left(\frac{43}{30}l + U\right)}{l} \right)^d$$
$$\underset{l > r_{\mathrm{G}}}{<} \frac{c_2}{c_1} \cdot 15^d.$$

Aus Beziehung (3.2) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x_m)} \right\| \\
&\leq C_{\text{GRU}}\, l^{-n} \cdot \sum_{v \in V_{L,\frac{l}{10}}(x) \cap V_{E\left(x_m, \frac{4}{3}l\right)}} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(v)} \right\| \\
&\leq \underbrace{C_{\text{GRU}} \cdot l^{-n} \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot 15^d}_{=:\delta_+} \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x_{m+1})} \right\|,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei x_{m+1} ein Knoten aus $V_{L,\frac{l}{10}}(x) \cap V_{E\left(x_m, \frac{4}{3}l\right)}$ ist, für den obige Norm maximal wird. Der Abstand $\mathfrak{d}(x_m, x_{m+1})$ ist kleiner gleich $\frac{4l}{3}$.

$(-)$: $\Lambda_l(x_m)$ ist (n, λ, ω)-schlecht.

Dann gibt es laut Schritt 2 eine Containermenge $\boxdot_i = \Lambda_{l_i}(v_i)$, mit $l_i \in \mathcal{L}$ und $v_i \in V_{L,\frac{l}{10}}(x)$, so dass $\Lambda_l(x_m) \subset \boxdot_i$. Aus (2.2) folgt

$$\operatorname{dist}\left(\boxdot_i^{\text{out}}, \Lambda_l^{\text{int}}(x_m) \right) \geq \operatorname{dist}\left(\Lambda_l^{\text{out}}(x_m), \Lambda_l^{\text{int}}(x_m) \right) \geq \frac{l}{2}.$$

Da alle Container in $\Lambda_L(x)$ λ-dissonant sind, gilt für $r := \lambda - \frac{1}{2} {l_i}^{-\theta n}$ und $s := \lambda + \frac{1}{2} {l_i}^{-\theta n}$, dass (r, s) eine Lücke im Spektrum von $H^{\boxdot_i}$ ist. Mit $\eta = \frac{1}{2} {l_i}^{-\theta n}$ folgt aus der Combes-Thomas-Abschätzung (Satz 2.5.7):

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\boxdot_i^{\text{out}}} \left(H^{\boxdot_i}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x_m)} \right\| \\
&\qquad \leq C_{\text{CTA}} \cdot 2 \cdot {l_i}^{\theta n} \cdot \exp\left(-\frac{\tilde{C}}{\sqrt{2}} \cdot {l_i}^{-\theta n} \cdot \frac{l}{2} \right) \\
&\qquad \leq 2 C_{\text{CTA}} \cdot {l_i}^{\theta n}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Folgerung aus der Geometrischen Resolventenungleichung 2.6.6 liefert, wenn $\boxdot_i^{\text{out}}$ und $\Lambda_L^{\text{out}}(x)$ disjunkt sind, die Beziehung:

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x_m)} \right\| \\
&\leq C_{\text{GRU}} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\boxdot_i^{\text{out}}} \right\| \\
&\qquad \cdot \left\| \mathbb{1}_{\boxdot_i^{\text{out}}} \left(H^{\boxdot_i}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x_m)} \right\| \\
&\underset{(3.4)}{\leq} 2\, C_{\text{GRU}}\, C_{\text{CTA}}\, {l_i}^{\theta n} \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\boxdot_i^{\text{out}}} \right\|.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nun kann $\boxdot_i^{\text{out}}$ mit Mengen vom Radius $\frac{l}{3}$ überdeckt werden, was laut Hilfssatz 2.4.9 möglich ist, so dass die überdeckenden Mengen nicht in $\boxdot_i$ und auch in keinem anderen Container liegen, also (n, λ, ω)-gut sind:

$$\bigcup_{w \in W} \Lambda_l^{\text{int}}(w) \supset \boxdot_i^{\text{out}}, \qquad \text{mit } \Lambda_l^{\text{int}}(w) \not\subset \boxdot_i \text{ für } w \in W.$$

Die Zentren sind maximal $\frac{l}{3}$ entfernt vom Container $\boxdot_i$ und damit die disjunkten Mengen mit Radius $\frac{l}{10}$ des Rasters in der Umgebung mit Radius $l_i + \frac{l}{3} + \frac{l}{10} + U$ um das Zentrum des Containers enthalten. Laut Hilfssatz 2.4.8 ist die Anzahl der Zentren in W:

$$|W| \leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{10(l_i + \frac{l}{3} + \frac{l}{10} + U)}{l} \right)^d.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\boxdot_i^{\text{out}}} \right\| \\ &\leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{10(l_i + \frac{13}{30} l + U)}{l} \right)^d \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(\widehat{x})} \right\| \end{aligned} \tag{3.6}$$

wobei $\widehat{x}$ ein Element aus W ist, für das letztere Norm maximal wird. Nun gilt: $\Lambda_l^{\text{int}}(\widehat{x})$ ist (n, λ, ω)-gut und es kann ein Schritt nach $(+)$ durchgeführt werden, woraus insgesamt mit den Gleichungen (3.3), (3.5) und (3.6) folgt, dass

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x_m)} \right\| \\ &\leq \underbrace{2 C_{\text{CTA}} \left(\frac{C_{\text{GRU}} \cdot c_2}{c_1} \right)^2 \left(\frac{150(l_i + \frac{13}{30} l + U)}{l} \right)^d \cdot l^{-n} \cdot {l_i}^{\theta n}}_{=:\delta_-} \\ &\qquad \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x_{m+1})} \right\|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dabei gilt für die verwendeten Zentren

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(x_m, v_i) &\leq l_i + U - l \\ \mathfrak{d}(\widehat{x}, v_i) &\leq \frac{l}{3} + l_i + U \end{aligned}$$

und insgesamt mit Schritt $(+)$:

$$\mathfrak{d}(x_m, x_m + 1) \leq 2 l_i + \frac{2}{3} l + 2U.$$

Nun gilt für die Vorfaktoren δ_+ und δ_-:

$$\delta_+ = C_{\mathrm{GRU}} \frac{c_2}{c_1} \cdot 15^d \cdot l^{-n}$$

wird beliebig klein für alle $l \geq r_6$, wobei $r_6(C_{\mathrm{GRU}}, c_1, c_2, d, n)$. Mit $l_i < L$ bzw. $l_i + \frac{13}{30} l + U < L$ $\left(\text{z.B. erfüllt für } l \geq 11^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta_- &\leq 2C_{\mathrm{CTA}} \left(\frac{C_{\mathrm{GRU}} \cdot c_2}{c_1}\right)^2 \left(\frac{150 l^\alpha}{l}\right)^d \cdot l^{-n} \cdot l^{\alpha\theta n} \\ &= \tilde{C} \cdot l^{d(\alpha-1)-n+\alpha\theta n}.\end{aligned}$$

Um polynomielles Fallen dieses Vorfaktors zu gewähren, muss der Exponent kleiner als null sein, was umgestellt $\theta < \frac{n+d-\alpha d}{\alpha n}$ bedeutet und laut (IP') erfüllt ist. Also gibt es einen Radius r_7 der von C_{GRU}, C_{CTA}, c_2, c_1, d, α und n abhängt, so dass

$$\delta_- \leq \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } l \geq r_7.$$

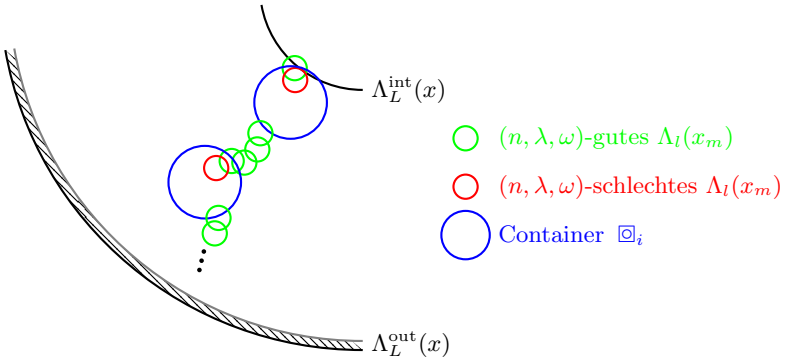


Abbildung 3.2: Iteration in der Multiskalenanalyse.

Mit steigender Anzahl an Iterationen nach (+) und (−) wird die Abschätzung immer besser, weil in beiden Fällen die Vorfaktoren kleiner als eins sind. Allerdings sind für die Ausführbarkeit einige Restriktionen gegeben, so dass nicht klar ist, wie oft die jeweiligen Fälle auftauchen können: Für (+) muss zur Anwendung der Geometrischen Resolventenungleichung gelten, dass $\Lambda_l(x_m)$ und $\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)$ disjunkt sind. Für (−) muss gelten, dass $\boxdot_i^{\mathrm{out}}$ und $\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)$ disjunkt sind und nach der Wahl von $\widehat{x}$ noch ein Schritt nach (+) ausgeführt werden kann.

Das Zentrum, bei dem die Iteration gestoppt wird, sei mit x_k bezeichnet. Um – für spätere Anwendung – noch eine Combes-Thomas-Abschätzung zwischen $\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_k)$ und $\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)$ möglich zu machen, müssen diese beiden Mengen einen positiven Abstand haben.

Die Anzahl der nach (+) iterierten Schritte sei mit k_+ bezeichnet, die der nach Fall (−) iterierten Schritte mit k_-. Da nicht klar ist, ob ein Schritt nach Fall (−) überhaupt auftritt, gilt es, die Mindestanzahl an Schritten nach (+) zu ermitteln. Am wenigsten Schritte nach Fall (+) gibt es, wenn der Startpunkt x_0 soweit wie möglich von x entfernt liegt und mit jedem Schritt immer die maximale Schrittweite direkt zum Rand, also zu $\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)$ überwunden wird. Wenn dabei die größtmöglichen Container im Weg stehen, das heißt durch Schritte nach Fall (−) überwunden werden müssen, ergibt sich die minimale Anzahl der Schritte nach Fall (+). Siehe dazu auch die Veranschaulichung in Abbildung 3.2. Es gilt also:

$$k_+ \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{3}l\right)}_{\text{Schrittweite (+)}} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\left(2l_i + \frac{2}{3}l + 2U\right)}_{\text{Schrittweite Fall (−)}} \geq \underbrace{L - 3U}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} - \underbrace{\left(\frac{L}{3} + \frac{l}{3} + U\right)}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x) \cap \Lambda_L^{\mathrm{int}}(x_0) \neq \varnothing} - \underbrace{\left(\frac{l}{3} + 2U\right)}_{x_k\text{-Bedingung}}$$

woraus mit Teil 2.a) aus Schritt 2

$$k_+ \geq \frac{1}{2}\frac{L}{l} - \frac{82}{5} - \frac{159}{4}\frac{U}{l} \geq \frac{1}{2}\frac{L}{l} - 17 \tag{3.8}$$

für $l \geq 300U = r_{\mathrm{G}}$ folgt. Insgesamt ergibt dies mit den Endformeln (3.3) aus Fall (+) und (3.7) aus Fall (−) (und $k = k_+ + k_-$ und $\delta_- < 1$):

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_0)} \right\| \\
&\qquad \leq \delta_+^{k_+} \cdot {\delta_-}^{k_-} \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_k)} \right\| \\
&\qquad \leq \delta_+^{k_+} \cdot \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_k)} \right\|.
\end{aligned}$$

Die letzte Norm kann analog zu (3.4) mit der Combes-Thomas-Abschätzung abgeschätzt werden ($r = \lambda - \frac{1}{2}L^{-\theta n}$, $s = \lambda + \frac{1}{2}L^{-\theta n}$), da $\Lambda_L(x)$ λ-dissonant ist:

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(x_0)} \right\| \leq \delta_+^{k_+} \cdot 2C_{\mathrm{CTA}} \cdot L^{\theta n}. \tag{3.9}$$

Mit der letzten Abschätzung wird der Iterationsschritt bewiesen. Zuerst wird $\Lambda_L^{\mathrm{int}}(x)$ mit Umgebungen der Form $\Lambda_l^{\mathrm{int}}(y)$ überdeckt. Die benötigten Zentren haben höchstens einen Abstand von $\frac{L+l}{3}$ von x, also kann Beziehung

(3.9) mit $x_0 = y$ benutzt werden. Aus der obigen Herangehensweise mit der maximalen Anzahl an Überdeckungsmengen folgt dann:

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{int}}(x)} \right\| \\
&\qquad \leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{10\left(\frac{L+l}{3} + \frac{l}{10} + U\right)}{l} \right)^d \cdot {\delta_+}^{k_+} \cdot 2C_{\text{CTA}} \cdot L^{\theta n} \\
&\qquad \underset{\delta_+ < 1, (3.8)}{\leq} 2C_{\text{CTA}} \cdot \frac{c_2}{c_1} \cdot (\delta_+)^{\frac{L}{2l} - 17} \cdot \left(\frac{10\left(\frac{L}{3} + \frac{13}{30} l + U\right)}{l} \right)^d \cdot L^{\theta n} \\
&\qquad \leq \tilde{C} \cdot (\delta_+)^{\frac{L}{2l} - 17} \cdot l^{d(\alpha-1) + \alpha\theta n}.
\end{aligned}$$

Laut (IP) und (IP') gilt:

$$\leq \tilde{C} \cdot (\delta_+)^{\frac{L}{2l} - 17} \cdot l^{2n}.$$

Für $l \geq r_6$ gilt $\delta_+ \leq \frac{1}{2}$ und mit $l \geq (4 \cdot 17)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$ ergibt sich für die Exponentialfunktion $\frac{l^{\alpha-1}}{2} - 17 \leq \frac{l^{\alpha-1}}{4}$ und damit:

$$\leq \tilde{C} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{l^{\alpha-1}}{4}} \cdot l^{2n} \leq \tilde{C} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{8}}{2} \right)^{l^{\alpha-1}} \cdot l^{2n}.$$

Es existiert ein Radius r_8 mit $r_8 \geq \max\{r_6, r_7\}$, so dass für alle Radien $l \geq r_8(C_{\text{CTA}}, c_2, c_1)$ der exponentielle Teil schneller fällt, als jedes Polynom wächst, also auch schneller als $\tilde{C} \cdot l^{2n+\alpha n} \leq \tilde{C} \cdot l^{4n}$, woraus der polynomielle Abfall folgt:

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\text{out}}(x)} \left(H^{\Lambda_L(x)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\text{int}}(x)} \right\| \leq l^{-\alpha n} = L^{-n}. \qquad \text{4}$$

Laut Schritt 4 gilt $G(I, L, n, \xi)$ für alle $\omega \in \Omega_{\text{G}}(x) \cap \Omega_{\text{G}}(y) \cap \Omega_{\text{W}}^c$ und $l \geq r_8$, wenn $G(I, l, n, \xi)$ gilt, wobei für die Ereignisse laut Teil 1 aus Schritt 1 und Schritt 3 gilt:

$$\mathbb{P}(\Omega_{\text{G}}) \geq 1 - \frac{1}{3} L^{-2\xi}, \qquad \mathbb{P}(\Omega_{\text{W}}) \leq \frac{1}{3} L^{-2\xi},$$

für $l \geq \max\{r_4, r_5\}$, woraus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega_{\text{G}}(x) \cap \Omega_{\text{G}}(y) \cap \Omega_{\text{W}}^c) &= 1 - \mathbb{P}(\Omega_{\text{G}}(x)^c \cup \Omega_{\text{G}}^c(y) \cup \Omega_{\text{W}}) \\
&\geq 1 - (\mathbb{P}(\Omega_{\text{G}}(x)^c) + \mathbb{P}(\Omega_{\text{G}}(y)^c) + \mathbb{P}(\Omega_{\text{W}})) \\
&\geq 1 - \left(\frac{1}{3} L^{-2\xi} + \frac{1}{3} L^{-2\xi} + \frac{1}{3} L^{-2\xi} \right) \\
&= 1 - L^{-2\xi},
\end{aligned}$$

also auch die Behauptung

$$\mathbb{P}(\Omega_{\mathrm{G}}(x) \cap \Omega_{\mathrm{G}}(y) \cap \Omega_{\mathrm{W}}^{c}) \geq 1 - L^{-2\xi}$$

für $l \geq r_9 := \max\{r_4, r_5, r_8\}$ folgt. □

Bemerkung 3.1.9. Es ist kein exponentielles Fallen der lokalen Resolventen möglich, da für k_+ gilt $k_+ \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{l} - c$, wobei der Vorfaktor kleiner als eins eine wichtige Rolle einnimmt. Für exponentielle Lokalisierung wird in der Abschätzung der lokalen Resolventen im Induktionsschritt vom Fallen der Resolventen zur Längenskala l

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_l(v)-\omega} \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} \right\| \leq e^{-\gamma \cdot l} \qquad \text{auf}$$

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_L(v)-\omega} \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_L^{\mathrm{int}}(v)} \right\| \leq e^{-\gamma_L \cdot L}$$

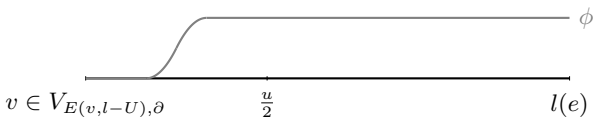
geschlossen. Dabei darf γ_L nur geringfügig kleiner werden, so dass es eine untere Schranke für alle $\gamma_\cdot$ gibt, welche noch größer als Null ist. In der Berechnung der neuen Konstanten ergibt sich mit dem Vorfaktor $\frac{1}{2}$ in k_+, dass γ_L höchstens halb so groß wie γ ist. Damit kann kein gleichmäßiger Koeffizient für das exponentielle Fallen gefunden werden.

3.2 Spektrale Lokalisierung

Nun wird gezeigt, wie aus dem Induktionssatz polynomielles Fallen der verallgemeinerten Eigenfunktionen für fast alle Operatoren der Operatorfamilie $(H^{P,L}(\omega))$ geschlussfolgert werden kann. Laut Abschnitt 2.9 existiert eine Entwicklung des Operators in verallgemeinerte Eigenfunktionen, wobei ein maximales polynomielles Wachstum bekannt ist. Verknüpft mit dem polynomiellen Fallen der lokalen Resolventen für viele Konfigurationen ω aus dem Induktionssatz ergibt sich ein polynomielles Fallen der verallgemeinerten Eigenfunktionen (VEF). Ist der Grad des polynomiellen Fallens hoch genug, dann liegen die VEF automatisch in $L^2(X_E)$ und sind somit automatisch Eigenfunktionen und das Spektrum fast sicher diskret – zumindest im Intervall I, für welches der Induktionsatz gilt.

Dazu wird noch folgender Hilfssatz über Abschätzungen der Normen verallgemeinerter Eigenfunktionen benötigt.

Hilfssatz 3.2.1. *Sei Γ metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential, welches (pot:char,dichte,unord) erfüllt. Sei eine Umgebung $\Lambda_l(v)$ mit $v \in V$ und $l \geq 6U$ gegeben. Dann gibt es zu jedem beschränkten Intervall $I_0 \in \mathbb{R}$ eine Konstante $C_{\mathrm{VEF}}(I_0, u, S, C_{\mathcal{V}})$, die nicht von l und v abhängt, so*



dass für jede verallgemeinerte Eigenfunktion f zu einem $\lambda \in I_0$ für alle $\omega \in \Omega$ mit $\lambda \in \varrho(H^{\Lambda_l(v)}(\omega))$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f \right\| \leq C_{\mathrm{VEF}} \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda \right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} \right\| \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} f \right\|.$$

Der Radius $l \geq 6U$ gewährleistet, dass $\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)$ und $\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)$ disjunkte induzierte Teilgraphen sind. Diese Beziehung wird auch Ungleichung der fallenden Eigenfunktion genannt und liefert mit dem Fallen der lokalen Resolventen das Fallen der verallgemeinerten Eigenfunktionen. Der Beweis benutzt dieselben Ideen, wie der entsprechende Beweis von Lemma 3.2.2 Punkt (b) in [Sto01].

Beweis. Sei $\psi : \left[0, \frac{u}{2}\right] \to [0,1]$ eine glatte Funktion mit folgenden Eigenschaften: $\psi(x) = 0$ auf offener Umgebung von Null und $\psi(x) = 1$ auf offener Umgebung von $\frac{u}{2}$. Daraus kann eine Abschneidefunktion konstruiert werden, die ihren Träger in $X_{E(v,l-U)}$ hat.

Auf den Randkanten von $\Lambda_{l-U}(v)$ (d.h. Kanten, deren Anfangs- oder Endknoten in $V_{E(v,l-U),\partial}$ liegt) sei ϕ vom Randpunkt aus auf dem Intervall der Länge $\frac{u}{2}$ gleich $\psi(x)$ gesetzt und auf dem Rest von $X_{E(v,l-U)}$ identisch zu eins und sonst identisch zu null. Dann gilt

- $\phi(v) \equiv \begin{cases} 1, & \text{auf } V_{E(v,l-U),\mathrm{int}}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$
- $\operatorname{supp} \phi \subset X_{E(v,l-U)}$, $\operatorname{supp} \phi' \subset \Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)$ und die Randknoten von $E(v, l-U)$ sind innere Knoten von $\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)$.

Seien f, $g \in \mathrm{D}_{\mathrm{lok}}(\mathfrak{h}_\omega)$. Dann gilt mit der Notation aus Abschnitt 2.3:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\omega^\star[\phi f, g] - \mathfrak{h}_\omega^\star[f, \phi g] = \langle (\phi f)' | g' \rangle - \langle f' | (\phi g)' \rangle - \sum_{v \in V} \langle L_v(\phi f)(v), g(v) \rangle \\ + \sum_{v \in V} \langle L_v f(v), (\phi g)(v) \rangle + \langle \mathcal{V}_\omega(\phi f) | g \rangle - \langle \mathcal{V}_\omega f | \phi g \rangle. \end{aligned}$$

Dabei laufen die beiden Summen nur über endlich viele nicht-triviale Summanden, da ϕ kompakten Träger hat. Weil $\phi(v)$ laut Konstruktion konstant und L_v linear ist, heben sich die beiden Summen der rechten Seite auf. Auch

die beiden Skalarprodukte mit dem Potential heben sich auf, da sie endlich sind und ϕ reell ist. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_\omega^\star[\phi f, g] - \mathfrak{h}_\omega^\star[f, \phi g] &= \langle(\phi f)'|g'\rangle - \langle f'|(\phi g)'\rangle \qquad \text{(Produktregel)} \\ &= \langle \phi' f|g'\rangle - \langle f'|\phi' g\rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Sei nun f eine verallgemeinerte Eigenfunktion zu $\lambda \in I_0$ (im Sinne von Definition 2.9.1) und $g := (H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda)^{-1}\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f$. Dann erfüllt f laut Hilfssatz 2.9.2 Punkt 3. die Randbedingungen des Operators und damit auch der Form, d.h. $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{lok}}(\mathfrak{h}_\omega)$ und $\phi f \in \mathrm{D}(H^{\Lambda_l(v)}(\omega))$ (denn $(\phi f)(v) = f(v)$ und $(\phi f)'(v) = f'(v)$ auf $V_{E(v,l-U),\mathrm{int}}$ und für alle anderen Knoten gilt $(\phi f)(v) = (\phi f)'(v) \equiv 0$). Es folgt nach dem Darstellungssatz für nach unten beschränkte selbstadjungierte Operatoren über assoziierte Formen – welcher auch aus Satz 2.5.3 folgt:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{h}_\omega - \lambda)[\phi f, g] &= (\mathfrak{h}_\omega^{\Lambda_l(v)} - \lambda)[\phi f, g] \\ &= \left\langle (H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda)\phi f, (H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda)^{-1}\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f \right\rangle \\ &= \left\langle \phi f, \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f \right\rangle \qquad \left(\phi\big|_{\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)}} \equiv 1\right) \\ &= \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f \right\|^2 . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Auf $\mathfrak{h}_\omega^\star[f, \phi g]$ kann der Repräsentationssatz nicht angewendet werden, da f nicht im Definitionsbereich des Operators liegt. Trotzdem folgt aus partieller Integration:

$$\begin{aligned}\overline{(\mathfrak{h}_\omega^\star - \lambda)[f, \phi g]} &= (\mathfrak{h}_\omega^\star - \lambda)[\phi g, f] \qquad (\phi(v) \equiv 0 \text{ auf } V \setminus V_{E(v,l-U),\mathrm{int}}) \\ &= \langle (\phi g)'|f'\rangle - \sum_{v \in V_{E(v,l-U),\mathrm{int}}} \langle L_v(\phi g)(v), f(v)\rangle + \langle (\mathcal{V}_\omega)(\phi g)|f\rangle \\ &= \langle -(\phi g)''|f\rangle + \langle (\mathcal{V}_\omega)(\phi g)|f\rangle \\ &\quad \underbrace{- \sum_{v \in V_{E(v,l-U),\mathrm{int}}} \langle (\phi g)'(v), f(v)\rangle - \sum_{v \in V_{E(v,l-U),\mathrm{int}}} \langle L_v(\phi g)(v), f(v)\rangle}_{=0, \text{ laut Randbedingungen}} \\ &= \langle \left(H^{P,L}(\omega) - \lambda\right) \phi g|f\rangle \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

da $(\phi g) \in \mathrm{D}(H^{P,L}(\omega))$ und f verallgemeinerte Eigenfunktion von $H^{P,L}(\omega)$ zu

λ ist. Mit (3.10) und(3.11) ergibt dies dann:

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right\|^2 &= \left\langle f\phi', g'\right\rangle - \left\langle f'|\phi' g\right\rangle \\ &\leq \left\|\psi'\right\|_\infty \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} f\right\| \left\|\mathbb{1}_{\operatorname{supp}\phi'} \left(\left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right)'\right\| \\ &\quad + \left\|\psi'\right\|_\infty \left\|\mathbb{1}_{\operatorname{supp}\phi'} f'\right\| \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right\|.\end{aligned}$$

Die Ableitung f' kann durch die Kegeleigenschaft der Kanten des Graphen mit Hilfssatz 2.9.3 abgeschätzt werden. Da $\operatorname{supp}\phi' \subset \Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)$ gilt, folgt:

$$\left\|\mathbb{1}_{\operatorname{supp}\phi'} f'\right\| \leq \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} f'\right\| \leq C_{\mathrm{Kegel}} \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} f\right\|.$$

Die Schale mit Breite U innerhalb von $\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)$ wird mit $\Lambda_l^\delta(v) := \Lambda_{l-U}(v) \setminus \Lambda_{l-2U}(v)$ bezeichnet. Für diese gilt $\mathbb{1}_{\Lambda_l^\delta(v)} \geq \mathbb{1}_{\operatorname{supp}\phi'}$, woraus mittels partieller Integration – analog zu Rechnungen in (3.12) – geschlussfolgert werden kann, dass g schwache Lösung zu $H^{P,L}(\omega)g = \lambda g + \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f$ auf $\Lambda_l^\delta(v)$ ist (d.h. g ist schwache Lösung von $(H^{P,L}(\omega) - \lambda)g = 0$ auf $\Lambda_l^\delta(v)$). Mit der Caccioppoli-Abschätzung folgt:

$$\begin{aligned}&\left\|\mathbb{1}_{\operatorname{supp}\phi'} \left(\left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right)'\right\| \\ &\quad\leq \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^\delta(v)} \left(\left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega)\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right)'\right\| \\ &\quad= C_{\mathrm{CP}}(1 + |\lambda|) \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right\|.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right\|^2 &\leq \left\|\psi'\right\|_\infty \big((1 + |\lambda|)C_{\mathrm{CP}} + C_{\mathrm{Kegel}}\big) \\ &\quad \cdot \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} \left(H^{\Lambda_l(v)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)}\right\| \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{int}}(v)} f\right\| \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_l^{\mathrm{out}}(v)} f\right\|.\end{aligned}$$

□

Mit diesem Hilfssatz, dem Induktionssatz und dem Wissen über verallgemeinerte Eigenfunktionen aus Abschnitt 2.9 lässt sich jetzt das polynomielle Fallen der VEF beweisen.

Hilfssatz 3.2.2. *Seien Γ ein metrischer Graph und $(H^{P,L}(\omega))$ ein zufälliger Operator mit (geom:u,U,poly), (RB:P,L,S) und (pot:char,dichte,unord). Seien Induktionsparameter laut* (IP) *im Induktionssatz 3.1.5 gewählt und $I =$*

$[\kappa, \kappa + \frac{1}{2} {r_0}^{\beta-2}]$ *mit* $r_0 \geq \max\{r_3, r_9\}$ *das zugehörige Intervall, welches mit der Startlänge* r_9 *des Induktionssatzes aus dem Induktionsanfang, welcher für* $l \geq r_3$ *gilt, gewonnen wird.*

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{R}^+$ *und eine Menge* $\Omega_0 \subset \Omega$ *mit* $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$*, so dass für alle verallgemeinerten Eigenfunktionen* f_λ *von* $H^{P,L}(\omega)$ *mit* $\lambda \in I$ *und* $\omega \in \Omega_0$ *gilt: Es gibt eine Konstante* $C_{\mathrm{poly}\searrow} = C_{\mathrm{poly}\searrow}(C_{\mathrm{VEF}}, C_{\mathrm{poly}\nearrow}, d)$ *und einen Radius* r_{10} *– welcher auch von der Eigenfunktion abhängt – mit*

$$\|\mathbb{1}_{\Lambda_{20U}(x)} f_\lambda\| \leq C_{\mathrm{poly}\searrow} \mathfrak{d}(x,0)^{-n_0}$$

für alle $x \in X_E$ *mit* $\mathfrak{d}(x,0) \geq r_{10}$*.*

Der Beweis wurde schon in [DK89] in ähnlicher Form aufgeführt. Da hier nur polynomielles Abfallen bewiesen werden kann, vereinfacht er sich etwas.

Beweis. Laut dem Induktionssatz 3.1.5 gilt $G(I, l_k, n, \xi)$ für die Folge von Längen $l_k = {r_0}^{\alpha^k}$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Für $v_0 \in V$ wird der folgende induzierte Teilgraph betrachtet:

$$A_{k+1}(v_0) := \Lambda_{2l_{k+1}+2U}(v_0) \setminus \Lambda_{2l_k+U}(v_0), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

mit dem Überdeckungsraster $V_{k+1}(v_0) := V_{2l_{k+1}+2U, \frac{l_k}{10}}(v_0)$. Mit $\Omega_k(v_0)$ sei das folgende Ereignis bezeichnet:

$$\Omega_k(v_0) := \{\omega \in \Omega \text{ mit } \exists\, \lambda \in I, x \in A_{k+1}(v_0) \cap V_{k+1}(v_0) : \Lambda_{l_k}(x) \text{ und } \Lambda_{l_k}(v_0) \text{ sind } (n, \lambda, \omega)\text{-schlecht}\Big\}.$$

Laut dem Induktionssatz 3.1.5 gilt $G(I, l_k, n, \xi)$, was die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten zweier disjunkter schlechter Umgebungen mit Radius l_k auf $l_k^{-2\xi}$ beschränkt (nach der Konstruktion von $A_{k+1}(v_0)$ sind die beiden Umgebungen in Ω_k disjunkt). Mit dem Abschätzen der maximalen Anzahl an Rasterpunkten laut Hilfssatz 2.4.8 folgt analog zu Abschätzungen im vorigem Abschnitt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega_k(v_0)) &\leq \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{10 \cdot (2l_{k+1} + 2U)}{l_k} \right)^d l_k^{-2\xi} \\
&\leq \frac{c_2}{c_1} \cdot (40)^d \cdot l_k^{d(\alpha-1)-2\xi} \\
&\leq l_k^{-\delta}
\end{aligned}$$

für ein δ mit $\frac{3}{2}\xi \geq \delta > 0$ und ab einem gewissen $k \geq k_0$ abhängig von c_1, c_2, ξ, d, b und α (denn aus (IP) folgt $2d(\alpha - 1) < \xi$). Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse Ω_k ist konvergent:

$$\sum_{k \geq k_0}^{\infty} \mathbb{P}(\Omega_k(v_0)) \leq \sum_{k \geq k_0}^{\infty} \left(l_0^{\alpha^k} \right)^{-\delta} = \sum_{k \geq k_0}^{\infty} \left(l_0^{-\delta} \right)^{\alpha^k} < \infty,$$

da $l_0^{-\delta} < 1$ und $\alpha^k > k$ ab einem bestimmten k. Mit dem Borel-Cantelli Lemma folgt daraus:

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \text{ mit } \exists\, k_1 \in \mathbb{N}, \text{s.d. } \forall\, k \geq k_1 : \omega \notin \Omega_k(v_0)\right\} = 1.$$

Der Durchschnitt aller dieser Ereignisse über $v \in V$

$$\bigcap_{v \in V} \left\{\omega \in \Omega \text{ mit } \exists\, k_1 \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } \forall\, k \geq k_1 : \omega \notin \Omega_k(v)\right\}$$

hat immer noch Maß eins (dies wird am leichtesten über doppelte Komplementbildung nachgerechnet) und entspricht dem gesuchten Ereignis

$$\Omega_0 := \left\{\omega \in \Omega \text{ mit } \ \forall\, v \in V\ \exists\, k_v \in \mathbb{N}, \text{s.d. } \forall\, k \geq k_v : \omega \notin \Omega_k(v)\right\}.$$

Sei $\omega \in \Omega_0$ und f eine verallgemeinerte Eigenfunktion von $H^{P,L}(\omega)$ zu $\lambda \in I$. Sei $v_0 \in V$ mit $\left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{20U}(v_0)} f\right\| > 0$ (wenn solch ein v_0 nicht existiert, ist $f \equiv 0$). Dann ist $\Lambda_{l_k}(v_0)$ nicht (n, λ, ω)-gut für unendlich viele k, denn sonst gilt laut Hilfssatz 3.2.1 und Hilfssatz 2.9.7

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{20U}(v_0)} f\right\| &\leq \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{int}}(v_0)} f\right\| \\
&\leq C_{\text{VEF}} \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{out}}(v_0)} \left(H^{\Lambda_{l_k}(v_0)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{int}}(v_0)}\right\| \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{out}}(v_0)} f\right\| \\
&\leq C_{\text{VEF}} \cdot {l_k}^{-n} \cdot C_{\text{poly}\nearrow} \cdot {l_k}^{d} \cdot (1 + \mathfrak{d}(v_0, 0) + l_k + U)^{\frac{d+2}{2}} \\
&\leq C_{v_0} \cdot {l_k}^{\frac{3d+2}{2} - n},
\end{aligned}$$

was für jede Teilfolge von (l_k) gegen null konvergiert. Also gibt es ein $k_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_2$ die Umgebung $\Lambda_{l_k}(v_0)$ (n, λ, ω)-schlecht ist. Dann gilt mit $k \geq \max\{k_2, k_{v_0}\}$ und $v \in A_{k+1}(v_0) \cap V_{k+1}(v_0)$, dass $\Lambda_{l_k}(v)$ (n, λ, ω)-gut ist. Mit den Schalen $A_{k+1}(v_0)$ kann der ganze Graph Γ überdeckt werden und es folgt für $k_3 := \max\{k_2, k_{v_0}\}$:

$$\bigcup_{k \geq k_3} A_{k+1}(v_0) = \Gamma \setminus \Lambda_{2l_{k_3}+U}(v_0).$$

Zu jedem $y \in A_{k+1}(v_0)$ gibt es ein solches Zentrum $y_1 \in A_{k+1}(v_0) \cap V_{k+1}(v_0)$, so dass $\Lambda_{20U}(y) \subset \Lambda_{l_k}^{\text{int}}(y_1)$ liegt (dies folgt aus dem Überdeckungssatz 2.4.7 für $l_k \geq 780U$). Mit Hilfssatz 3.2.1 ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{20U}(y)} f\right\| &\leq \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{int}}(y_1)} f\right\| \\
&\leq C_{\text{VEF}} \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{out}}(y_1)} \left(H^{\Lambda_{l_k}(y_1)}(\omega) - \lambda\right)^{-1} \mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{int}}(y_1)}\right\| \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{out}}(y_1)} f\right\| \\
&\leq C_{\text{VEF}} \cdot {l_k}^{-n} \cdot \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{l_k}^{\text{out}}(y_1)} f\right\|,
\end{aligned}$$

mit polynomiellem Wachstum der verallgemeinerten Eigenfunktion laut Hilfssatz 2.9.7 folgt:

$$\begin{aligned}
&\leq C_{\mathrm{VEF}} \cdot {l_k}^{-n} \cdot C_{\mathrm{poly}\nearrow} \cdot {l_k}^{d} \cdot (1 + \mathfrak{d}(y_1, 0) + l_k + U)^{\frac{d+2}{2}} \\
&\leq \tilde{C} \cdot {l_k}^{d-n} \cdot (1 + \mathfrak{d}(y_1, y) + \mathfrak{d}(y, v_0) + \mathfrak{d}(v_0, 0) + l_k + U)^{\frac{d+2}{2}} .
\end{aligned}$$

Mit $\mathfrak{d}(y, v_0) \in [2l_k + U, 2l_{k+1} + 3U]$, d.h. $\left(\frac{\mathfrak{d}(y,v_0)}{3}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq l_k \leq \frac{\mathfrak{d}(y,v_0)}{2}$ und $\mathfrak{d}(y, y_1) \leq \frac{l_k}{3} + U - 20U$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{C} \cdot {l_k}^{d-n} \cdot \left(1 + \frac{4l_k}{3} - 19U + \mathfrak{d}(y, v_0) + \mathfrak{d}(v_0, 0)\right)^{\frac{d+2}{2}} \\
&\leq \tilde{C} \cdot \left(\frac{\mathfrak{d}(y, v_0)}{3}\right)^{\frac{d-n}{\alpha}} \cdot (2\mathfrak{d}(y, v_0) + \mathfrak{d}(v_0, 0))^{\frac{d+2}{2}} \\
&\leq \tilde{C} \cdot 2^{d+2} \cdot \left(\frac{\mathfrak{d}(y, v_0)}{3}\right)^{\frac{d-n}{\alpha}} \cdot \mathfrak{d}(y, v_0)^{\frac{d+2}{2}} \cdot \mathfrak{d}(v_0, 0)^{\frac{d+2}{2}} \\
&\leq C_{\mathrm{poly}\searrow} \cdot \mathfrak{d}(y, v_0)^{\frac{d}{\alpha} + \frac{d+2}{2} - \frac{n}{\alpha}} .
\end{aligned}$$

Für $n \geq 2d + 2$ ($\alpha < 2$) ist der Exponent negativ, was durch die Wahl $n > 5d + 2$ laut (IP) immer erfüllt ist. Damit gibt es eine Konstante $C_{\mathrm{poly}\searrow}$, die nicht vom Schalenindex k abhängt, sondern nur von d, C_{VEF} und $C_{\mathrm{poly}\nearrow}$ (also von den Konstanten u, c_1, c_2, d, S, $C_{\mathcal{V}}$, dem Intervall I_0 und f), so dass um den Knoten v_0 ab dem Abstand $2l_{k_3} + 2U =: r_{10}$ polynomieller Abfall gezeigt wurde. Um die Notation der Behauptung zu erfüllen, kann v_0 als der Wurzelknoten des Graphen definiert werden, denn bisher war es nicht nötig einen bestimmten Knoten als Wurzel festzulegen. □

Für eine – im Sinn des letzten Hilfssatzes – polynomiell fallende Funktion gibt es einen bestimmten Grad des polynomiellen Fallens, ab dem die Funktion automatisch eine $L^2(X_E)$-Funktion ist. Die Schranke an den Grad ist die Gleiche wie für die Gewichtsfunktion aus Bemerkung 2.9.6, für welche punktweises polynomielles Wachstum bzw. Fallen bekannt ist:

Bemerkung 3.2.3. Sei Γ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly). Dann ist $f = (f_e)_{e \in E}$ mit $f_e \in L^2(I_e)$ eine $L^2(X_E)$-Funktion, wenn

$$\forall\, v \in V : \qquad \left\| \mathbb{1}_{\Lambda_{20U}(v)} f \right\| \leq \mathfrak{d}(v, 0)^{-m} \quad \text{mit } m > \frac{d+1}{2}.$$

Beweis. Sei $\Lambda_k := \Lambda_{20kU}(0) \setminus \Lambda_{20(k-1)U-U}(0)$ ein induzierter Teilgraph. Dann kann der ganze Graph Γ durch die Schalen Λ_k überdeckt werden und für $x \in X_{\Lambda_k}$ gilt $\mathfrak{d}(x, 0) \geq 20kU - 21U$. Aus dem Überdeckungssatz 2.4.7

folgt, dass jede Schale mit Umgebungen mit Radius $20U$ und Zentren im Überdeckungsraster $V_{20kU,5U}(0)$ überdeckt werden kann:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_{\Lambda_k} f\|^2 &\leq \sum_{v\in\Lambda_k\cap V_{20kU,5U}(0)} \left\|\mathbb{1}_{\Lambda_{20U}(v)} f\right\|^2 \\ &\underset{\text{Vor.}}{\leq} \sum_{v\in\Lambda_k\cap V_{20kU,5U}(0)} \mathfrak{d}(v,0)^{-2m} \\ &\underset{\text{Hsatz. 2.4.8}}{\leq} \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{20kU}{5U}\right)^d (20kU-21U)^{-2m} \\ &\leq C\cdot k^d\cdot(k-2)^{-2m} \qquad (k\geq 3).\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\sum_{k=4}^{\infty}\|\mathbb{1}_{\Lambda_k} f\|^2 \leq \sum_{k=4}^{\infty} C\frac{k^d}{(k-2)^2 m} \leq C\cdot 2^d \sum_{k=4}^{\infty}\frac{(k-2)^d}{(k-2)^{2m}} < \infty,$$

wenn $d-2m<-1$, was laut Voraussetzung erfüllt ist. □

Laut Hilfssatz 3.2.2 sind die VEF zu $H^{P,L}(\omega)$ zu den Spektralwerten aus dem Intervall aus der Multiskalenanalyse also polynomiell fallend – zumindest außerhalb einer beschränkten Umgebung. Daraus kann nun geschlossen werden, dass ein Operator aus der Familie $(H^{P,L}(\omega))$ in diesem Intervall fast sicher nur Punktspektrum besitzt:

Satz 3.2.4. *Sei Γ ein metrischer Graph mit den geometrischen Eigenschaften (geom:u,U,poly) und $H^{P,L}(\omega)$ ein zufälliger Operator mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) und Potential nach (pot:char,dichte,unord). Sei r_0 der Radius aus dem letzten Hilfssatz und $n\geq 5d+2$. Dann hat $H^{P,L}(\omega)$ für fast alle $\omega\in\Omega$ in $I=\left[\kappa,\kappa+\frac{1}{2}r_0{}^{\beta-2}\right]$ reines Punktspektrum mit polynomiell abklingenden Eigenfunktionen.*

Beweis. Laut den Voraussetzungen gilt Hilfssatz 3.2.2. Somit gibt es eine Menge $\Omega_0\subset\Omega$ mit Maß eins, so dass für alle $\omega\in\Omega_0$ alle verallgemeinerten Eigenfunktionen f zu Spektralwerten $\lambda\in I$ zu $H^{P,L}(\omega)$ mit dem Exponenten $\frac{n}{\alpha}-\frac{d}{\alpha}-\frac{d+2}{2}$ polynomiell fallen. Laut Bemerkung 3.2.3 sind die verallgemeinerten Eigenfunktionen $L^2(X_E)$-Funktionen und somit echte Eigenfunktionen, wenn der Exponent größer als $\frac{d+1}{2}$ ist, also wenn:

$$\frac{n}{\alpha}-\frac{d}{\alpha}-\frac{d+2}{2}>\frac{d+1}{2}.$$

Die ist laut Voraussetzung erfüllt, da $\alpha<2$ und $d\geq 1$.

Da $L^2(X_E)$ separabel ist, kann $H(\omega):=H^{P,L}(\omega)$ nur abzählbar viele verschiedene Eigenwerte haben. Sei $\rho_{H(\omega)}$ das Spektralmaß von $H(\omega)$, dann

gibt es laut Entwicklung in verallgemeinerten Eigenfunktionen in $I \cap \sigma(H(\omega))$ für $\rho_{H(\omega)}$-fast alle λ eine verallgemeinerte Eigenfunktion, die in $L^2(X_E)$ liegt. Die Menge aller dieser λ aus $I \cap \sigma(H(\omega))$ wird mit A_0 bezeichnet. Da es in I nur abzählbar viele Eigenwerte gibt, muss A_0 abzählbar sein, also ist das Spektralmaß eingeschränkt auf I auf der abzählbaren Menge A_0 getragen und muss somit diskret sein. Daher hat $H^{P,L}(\omega)$ reines Punktspektrum in I. □

Bemerkung 3.2.5.

1. Das Spektrum der Operatorfamilie $H^{P,L}(\omega)$ ist im Allgemeinen nicht mehr deterministisch. Wenn $H^{P,L}(\omega)$ Spektrum in I hat, dann ist es fast sicher reines Punktspektrum. Es muss sich aber nicht mehr über das ganze Intervall I erstrecken. Mehr noch: Es ist nicht auszuschließen, dass die Menge $\{\omega \in \Omega \text{ mit } I \cap \sigma(H^{P,L}(\omega)) = \varnothing\}$ Maß größer als null hat. Dies wird am Beispiel 3.3.1 im nächsten Abschnitt illustriert.

2. Mit den vorbereitenden Abschätzungen aus Kapitel 2 kann die Multiskalenanalyse aus [EHS07] benutzt werden, um spektrale Lokalisierung mit exponentiell fallenden Eigenfunktionen und dynamische Lokalisierung für alle negativen Laplace-Operatoren mit Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) auf $\mathbb{Z}^d$ mit zufälligen Potentialen mit (pot:char,dichte,unord) und Parametern $c_- = c_+ = 1$ zu schlussfolgern.

3. Dies ist das erste Lokalisierungsergebnis für metrische Graphen, bei denen die Graphen nicht auf $\mathbb{Z}^d$ oder Bäume eingeschränkt werden. Die Wahl der Randbedingungen wurde von δ-Randbedingungen auf alle Knoten-Randbedingungen, welche ein endliches unteres Ende des Spektrums besitzen, erweitert.

3.3 Erläuterungen und Verallgemeinerungen

In diesem Abschnitt folgen kurze Erläuterungen und Beispiele, um zu zeigen wie aussagekräftig der Lokalisierungsbeweis ist. Außerdem werden vielseitige Verallgemeinerungsmöglichkeiten angegeben.

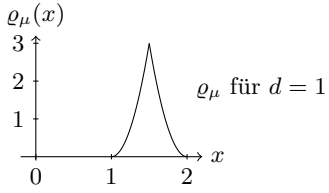
Ist ein Start der Multiskalenanalyse nur durch die Anfangslängenabschätzung gegeben, dann sind die Aussagen sehr schwach, wenn die zufällige Operatorfamilie kein deterministisches Spektrum hat und nur bei sehr wenigen Realisierungen das Spektrum an der unteren Schranke beginnt. Dies wird im nächsten Beispiel verdeutlicht:

Beispiel 3.3.1. Es wird ein nicht-deterministisches Modell angegeben, bei dem der untere Rand des Spektrums bekannt ist und sich mit den Konfigurationen von ω stark ändert. Sei $\Gamma = (E, V, l, i, j)$ ein metrischer Graph mit (geom:u,U,poly) mit gleichmäßig polynomiellem Wachstum vom Grad d. Sei weiterhin $H^{P,L}$ ein negativer Laplace-Operator mit Randbedingungen der

Form (RB:P,L,S) auf Γ. Die untere Schranke des Operators $H^{P,L}$ wird wieder mit κ bezeichnet und das zufällige Potential folgendermaßen gewählt:

$$q_- := 1, \qquad q_+ := 2,$$
$$\nu_e := \begin{cases} (-\kappa+3)\cdot \mathbb{1}_{I_e}, & \kappa < 3 \\ \mathbb{1}_{I_e}, & \kappa \geq 3 \end{cases}$$
$$\varrho_\mu := \begin{cases} (2d+1)(2x-2)^{2d}, & 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ (2d+1)(2x-4)^{2d}, & \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

dabei gewährleistet die Wahl von ϱ_μ, dass (pot:unord) erfüllt ist.



Laut Konstruktion erfüllt $\mathcal{V}_\omega = (\omega_e \nu_e)$ offensichtlich (pot:char,dichte,unord) und es gilt $H^{P,L}(\omega) \geq 3$.

Nun werden der metrische Graph und der Operator modifiziert, indem an einem beliebigen Knoten eine zusätzliche Kante $\tilde{e}$ mit Länge $l(\tilde{e}) = \pi$ und Dirichlet-Randbedingungen hinzugefügt wird. Für diese Kante wird $\nu_{\tilde{e}} = \mathbb{1}_{I_{\tilde{e}}}$ gesetzt. Der neue metrische Graph und der Operator werden mit $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{H}^{P,L}$ bezeichnet, wobei die Lokalisierungsvoraussetzungen immer noch erfüllt sind. Das Setzen von Dirichlet-Randbedingungen liefert eine Entkopplung und mit Hilfssatz 2.7.2 Punkt 3.:

$$\sigma\left(\tilde{H}^{P,L}\right) = \sigma\left(H^{P,L}\right) \cup \{n^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}\}.$$

Das Spektrum des zufälligen Operators $\tilde{H}^{P,L}(\omega)$ beginnt immer am untersten Eigenwert der Dirichlet-Operators $-\Delta + \omega_{\tilde{e}} \cdot \mathbb{1}_{I_{\tilde{e}}}$ auf der Zusatzkante $\tilde{e}$, welcher gerade $1+\omega_{\tilde{e}}$ entspricht. Also liegt das untere Ende des Spektrums von $\tilde{H}^{P,L}(\omega)$ im Intervall $[2,3]$ und das Maß aller Operatoren deren Spektrum frühestens bei $a \in [2,3]$ beginnt, kann durch

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \text{ mit } \omega_{\tilde{e}} \geq a-1\} = \int_{a-1}^{2} \varrho_\mu \, dx$$

angegeben werden.

Aus der Lokalisierung kann nun geschlussfolgert werden, dass fast alle Operatoren $\tilde{H}^{P,L}(\omega)$ in $(2, \varepsilon)$ reines Punktspektrum haben – für ein gewisses kleines ε. Allerdings ist das Maß aller Realisierungen, welche dort überhaupt Spektrum haben, sehr gering und damit die Lokalisierungsaussage sehr schwach.

Dies ist natürlich ein konstruiertes Beispiel und soll den Einfluss der Ergodizität veranschaulichen. Zur Untersuchung des Spektrums hätte $H^{P,L}(\omega)$ allein auf Γ mit der Multiskalenanalyse untersucht werden können. Inwieweit dort aber der gleiche Effekt auftritt, ist völlig unklar.

Liegt allerdings deterministisches Spektrum vor, dann haben fast alle Operatoren der zufälligen Operatorfamilie Spektrum im jeweiligen Lokalisierungintervall und dieses ist reines Punktspektrum. Mit der hier vorliegenden Klasse kann dies für eine weite Gruppe an Graphen geschlussfolgert werden:

Eine allgemeinere Gruppe als die metrischen Graphen $\mathbb{Z}^d$, für die zufällige Operatorfamilien mit deterministischem Spektrum angegeben werden können, ist die Gruppe der Cayleygraphen.

Definition 3.3.2. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und S ein endliches Erzeugendensystem und $l : S \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion. Der metrische Cayleygraph $\Gamma(G, S) = (E, V, l, i, j)$ wird definiert durch:

$$\begin{aligned} V &= G & E &= \{(g,h) \text{ mit } g^{-1}h \in S\} \\ l(e) &= l((g,h)) := l(g^{-1}h) & & \\ i(e) &= i((g,h)) := g & j(e) &= j(g,h) := h \end{aligned}$$

Zu Schleifen und mehrfachen Kanten bei Cayleygraphen ist zu bemerken:

- Schleifen entsprechen Einheiten im Erzeugendensystem.
- Ist zu einem Element $s \in S$, welches keine Einheit ist, auch dessen inverses Element s^{-1} im Erzeugendensystem enthalten, entstehen Rückwärtskanten. D.h. zu einer Kante der Form (g, h) entsteht die Kante (h, g) in die entgegengesetzte Richtung. In der Betrachtung von ungerichteten Graphen werden beide miteinander identifiziert.
- Mehrfache Kanten sind in dieser Notation ausgeschlossen, können aber eingefügt werden. Das Erzeugendensystem S sollte dann als endliche Teilmenge von $G \times \mathbb{N}_0$ betrachtet werden. Dabei gibt die zweite Komponente an, ob und wie oft ein Element der Gruppe im Erzeugendensystem enthalten ist. Allerdings wird dadurch die Notation wesentlich komplizierter.

Für das Wachstum von Cayleygraphen gilt:

- Das Wachstum eines metrischen Cayleygraphen entspricht dem des kombinatorischen Cayleygraphen (alle Knoten haben Abstand eins). Das

Wachstum ist von jedem Knoten aus genau gleich, denn Cayleygraphen sind translationsinvariant.

- Dies entspricht dem Wachstum der Gruppe G, wobei Umgebungen auf endlich erzeugten Gruppen definiert werden als

$$V_n(G) := \left\{ g \in G \text{ mit } g = \prod_{k=1}^{n} s_k : s_k \vee s_k^{-1} \in S \right\}.$$

Gromov zeigte 1981 in [Gro81]:

Satz 3.3.3. *Eine endlich erzeugte Gruppe ist genau dann von polynomiellem Wachstum, wenn sie virtuell nilpotent ist.*

Es gibt also Charakterisierungen von polynomiell wachsenden Cayleygraphen. Der Grad des Wachstums ist immer eine natürliche Zahl und abelsche Gruppen sind immer polynomiell wachsend. Die Erklärungen dazu und weitere Erläuterungen finden sich zum Beispiel in Kapitel 1 von [Sch08]. Dabei hängt der Grad des Wachstums nicht von den Elementen des Erzeugendensystems oder der Größe des Erzeugendensystems ab, sondern nur von der Gruppe selbst.

Definition 3.3.4. Sei $\Gamma(G,S)$ ein metrischer Cayleygraph. Für eine Kante $e = (g,h)$ zu dem Erzeuger $s = g^{-1}h$, d.h. $(g,h) = (g,gs)$, wird durch die Gruppenoperation auf G eine Operation $\circ : E \times G \to E$ definiert:

$$e \circ k := (k \cdot i(e), k \cdot j(e)) = (kg, kh) = (kg, kgg^{-1}h) = (kg, kgs)$$

für alle $e \in E$ und $k \in G = V$.

Diese Abbildung erhält die Gruppenstruktur, d.h. eine Kante mit Erzeuger s wird wieder auf eine Kante mit Erzeuger s abgebildet.

Satz 3.3.5. *Sei $\Gamma(G,S)$ ein metrischer Cayleygraph mit polynomiellem Wachstum, (P,L) eine Parametrisierung der Randbedingungen der Form (RB:P,L,S) für einen Knoten mit Knotengrad $2|S|$, also der doppelten Anzahl an Erzeugern. Sei weiter für jeden Erzeuger $s \in S$ ein Potential ν_s definiert, welches bezüglich der Kante $(1,1s)$ die Eigenschaften (pot:char,dichte,unord) erfüllt. Dann ist der Operator $H^{P,L}(\omega)$ mit*

$$\begin{aligned} H^{P,L}(\omega)f &:= -f'' + (\nu_s f_{(g,gs)})_{g\in G}, \\ \mathrm{D}(H^{P,L}(\omega)) &:= \{f \in W^{2,2}(X_E) \text{ mit } \forall\, v \in V : Pf(v) = 0, \\ &\qquad\qquad Lf(v) + (1-P)f'(v) = 0\} \end{aligned}$$

ergodisch und somit sein Spektrum deterministisch.

Beweis. Für die Ergodizität sind laut Definition 2.2.4 eine ergodische Operatorfamilie $T_k : \Omega \to \Omega$ und eine unitäre Familie von Abbildungen U_k auf $L^2(X_E)$ nötig, welche hier wie folgt gewählt werden können:

$$\begin{aligned} q_e(T_k(\omega)) &:= q_{e\circ k^{-1}}(\omega) \qquad \text{für alle } k \in G, \\ (U_k f)_e(t) &:= f_{(e\circ k)}(t), \qquad (U_k^* f)_e(t) = f_{e\circ k^{-1}}(t) \qquad \text{für alle } k \in G. \end{aligned}$$

Analog zur Rechnung auf $\mathbb{Z}^d$ ergibt sich durch T_k eine Hin- und U_k ein Rückverschiebung, welche die Kovarianz-Bedingung erfüllt. Zusammen mit Hilfssatz 2.2.3 liefert Satz 2.2.1 das deterministische Spektrum für $H^{P,L}(\omega)$. □

Bemerkung 3.3.6. Als Abschluss der Arbeit werden Verallgemeinerungsmöglichkeiten und Hinweise wie diese realisiert werden können angegeben.

1. Eine qualitative Verbesserung der Ergebnisse: Spektrale Lokalisierung mit exponentiell fallenden Eigenfunktionen kann eventuell mit der Bootstrap Multiskalenanalyse von Germinet und Klein (siehe zum Beispiel [GK01]) erreicht werden. Dabei werden mehrere Multiskalenanalysen mit verschiedenen Abfalldefinitionen hintereinander geschalten. Unter anderem ist ein polynomielles Fallen der lokalen Resolventen Ausgangspunkt einer weiteren MSA.

   Aus exponentiellem Fallen sollte auch dynamische Lokalisierung zu schlussfolgern sein.

2. Das gleichmäßig polynomielle Wachstum von unten der metrischen Graphen ist notwendig: Wenn es nicht da ist, dann folgt für die Anzahl der Knoten im Raster: $|V_{R,r}(x)| \leq c_2 \frac{R^d}{r}$. Wird damit Schritt 1 berechnet und der Exponent nach α umgestellt, ergibt sich $\alpha < \frac{4+4\xi}{4d+2\xi}$, was nur für $d = 1$ garantiert größer als 1 ist.

   Eventuell kann dies durch Anpassung der maximalen Anzahl an (n, λ, ω)-schlechten Mengen in Schritt 1 erreicht werden. Dies würde aber alle Induktionsparameter ändern und alle Argumentationen, in denen der Überdeckungssatz 2.4.8 verwendet wird. Wesentlich wird nur der Induktionssatz beeinflusst. Die Änderungen sind nicht trivial und das Ergebnis noch unklar. Eine variable Anzahl schlechter Umgebungen wurde allerdings schon in [DK89] verwendet.

3. Die Behandlung komplexerer Potentiale ist auch denkbar. Zum Beispiel könnten die Einzelplatzpotentiale ν_e nicht mehr kompakt auf einer Kante getragen sein, sondern auf unendlich vielen Kanten. Ein Lokalisierungsbeweis mit Multiskalenanalyse dazu befindet sich in [KSS98]. Die Hauptidee ist den Operator bzw. das schnell fallende Potential nach

unten abzuschätzen durch ein Potential mit kompaktem Träger – denn sonst geht die Unabhängigkeit verloren (welche in Schritt 1 und 3 der MSA benutzt wird). Zum Abschätzen nach unten ist das Studium mit charakteristischen Funktionen sehr hilfreich.

Es sind auch andere Typen von Potentialen behandelbar – zum Beispiel Potentiale vom „breather type potential“.

4. Mithilfe der Multiskalenanalyse können andere zufällige Modelle betrachtet werden. Z.B. zufällige δ-Randbedingungen oder zufällige Kantenlängen, wofür jeweils eine neue Wegner-Abschätzung notwendig ist. Für $\mathbb{Z}^d$ ist diese für beide Fälle schon vorhanden und in [KP08] und [KP09] nachzulesen.

5. Alle hier angegebenen Modelle sind Einteilchenmodelle. Es können auch Mehrteilchenmodelle betrachtet werden. Dafür sind zuerst wieder Randbedingungen für den zugehörigen negativen Laplace-Operator zu bestimmen. Hierzu gibt es eine Vorarbeit über kompakte metrische Graphen von Bolte und Kerner, welche demnächst erscheint. Einen Lokalisierungbeweis mit Multiskalenanalyse für ein Mehrteilchenmodell gibt es zum Beispiel in [CS09].

Literatur

[AF03] Robert A. Adams und John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Second. Bd. 140. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[AM93] Michael Aizenman und Stanislav Molchanov. „Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation“. In: *Comm. Math. Phys.* 157.2 (1993), S. 245–278.

[ASW06] Michael Aizenman, Robert Sims und Simone Warzel. „Absolutely continuous spectra of quantum tree graphs with weak disorder“. In: *Comm. Math. Phys.* 264.2 (2006), S. 371–389.

[Aiz+06] Michael Aizenman u. a. „Moment analysis for localization in random Schrödinger operators“. In: *Invent. Math.* 163.2 (2006), S. 343–413.

[And58] Philip W. Anderson. „Absence of Diffusion in Certain Random Lattices“. In: *Phys. Rev.* 109 (1958), S. 1492–1505.

[Arn67] Vladimir Igorevich Arnol′d. „On a characteristic class entering into conditions of quantization“. In: *Funkcional. Anal. i Priložen.* 1 (1967), S. 1–14.

[BCH97] Jean-Marie Barbaroux, Jean-Michel Combes und Peter D. Hislop. „Localization near band edges for random Schrödinger operators“. In: *Helv. Phys. Acta* 70.1-2 (1997). Papers honouring the 60th birthday of Klaus Hepp and of Walter Hunziker, Part II (Zürich, 1995), S. 16–43.

[BGP08] Jochen Brüning, Vladimir Geyler und Konstantin Pankrashkin. „Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators“. In: *Rev. Math. Phys.* 20.1 (2008), S. 1–70.

[BSW95] Dirk Buschmann, Günter Stolz und Joachim Weidmann. „One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions“. In: *J. Reine Angew. Math.* 467 (1995), S. 169–186.

[Ber+06] Gregory Berkolaiko u. a., Hrsg. *Quantum graphs and their applications*. Bd. 415. Contemporary Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2006, S. x+307. ISBN: 0-8218-3765-6.

[CS09] Victor Chulaevsky und Yuri Suhov. „Multi-particle Anderson localisation: induction on the number of particles“. In: *Math. Phys. Anal. Geom.* 12.2 (2009), S. 117–139.

[CT73] Jean-Michel M. Combes und Lawrence E. Thomas. „Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators“. In: *Comm. Math. Phys.* 34 (1973), S. 251–270.

[Chr90] Michael Christ. „A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral“. In: *Colloq. Math.* 60/61.2 (1990), S. 601–628.

[DK89] Henrique von Dreifus und Abel Klein. „A new proof of localization in the Anderson tight binding model“. In: *Comm. Math. Phys.* 124.2 (1989), S. 285–299.

[EHS07] Pavel Exner, Mario Helm und Peter Stollmann. „Localization on a quantum graph with a random potential on the edges“. In: *Rev. Math. Phys.* 19.9 (2007), S. 923–939.

[FKW07] Stephen A. Fulling, Peter A. Kuchment und Justin H. Wilson. „Index theorems for quantum graphs“. In: *J. Phys. A* 40.47 (2007), S. 14165–14180.

[FLM00] Werner Fischer, Hajo Leschke und Peter Müller. „Spectral localization by Gaussian random potentials in multi-dimensional continuous space“. In: *J. Statist. Phys.* 101.5-6 (2000), S. 935–985.

[FS83] Jürg Fröhlich und Thomas Spencer. „Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy“. In: *Comm. Math. Phys.* 88.2 (1983), S. 151–184.

[Frö+85] Jürg Fröhlich u. a. „Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model“. In: *Comm. Math. Phys.* 101.1 (1985), S. 21–46.

[GHV08] Michael J. Gruber, Mario Helm und Ivan Veselić. „Optimal Wegner estimates for random Schrödinger operators on metric graphs“. In: *Analysis on graphs and its applications*. Bd. 77. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008, S. 409–422.

[GK01] François Germinet und Abel Klein. „Bootstrap multiscale analysis and localization in random media“. In: *Comm. Math. Phys.* 222.2 (2001), S. 415–448.

[GLV07] Michael J. Gruber, Daniel H. Lenz und Ivan Veselić. „Uniform existence of the integrated density of states for random Schrödinger operators on metric graphs over $\mathbb{Z}^d$“. In: *J. Funct. Anal.* 253.2 (2007), S. 515–533.

[Gro81] Mikhael Gromov. „Groups of polynomial growth and expanding maps“. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 53 (1981), S. 53–73.

[HP09] Peter D. Hislop und Olaf Post. „Anderson localization for radial tree-like quantum graphs“. In: *Waves Random Complex Media* 19.2 (2009), S. 216–261.

[Har00] Mark Harmer. „Hermitian symplectic geometry and extension theory“. In: *J. Phys. A* 33.50 (2000), S. 9193–9203.

[Hel07] Mario Helm. „Lokalisierung auf Gittergraphen mit zufälligem Potential“. Dissertation. TU Chemnitz, 2007. URL: `http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:ch1-200701721`.

[KM10] Aleksey S. Kostenko und Mark M. Malamud. „1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set“. In: *J. Differential Equations* 249.2 (2010), S. 253–304.

[KM82] Werner Kirsch und Fabio Martinelli. „On the ergodic properties of the spectrum of general random operators“. In: *J. Reine Angew. Math.* 334 (1982), S. 141–156.

[KP08] Frédéric Klopp und Konstantin Pankrashkin. „Localization on quantum graphs with random vertex couplings“. In: *J. Stat. Phys.* 131.4 (2008), S. 651–673.

[KP09] Frédéric Klopp und Konstantin Pankrashkin. „Localization on quantum graphs with random edge lengths“. In: *Lett. Math. Phys.* 87.1-2 (2009), S. 99–114.

[KS00] Vadim V. Kostrykin und Robert Schrader. „Kirchhoff's rule for quantum wires. II. The inverse problem with possible applications to quantum computers“. In: *Fortschr. Phys.* 48.8 (2000), S. 703–716.

[KS99] Vadim V. Kostrykin und Robert Schrader. „Kirchhoff's rule for quantum wires“. In: *J. Phys. A* 32.4 (1999), S. 595–630.

[KSS98] Werner Kirsch, Peter Stollmann und Günter Stolz. „Anderson localization for random Schrödinger operators with long range interactions“. In: *Comm. Math. Phys.* 195.3 (1998), S. 495–507.

[Kat95] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Reprint of the 1980 edition. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[Kir08] Werner Kirsch. „An invitation to random Schrödinger operators“. In: *Random Schrödinger operators*. Bd. 25. Panor. Synthèses. With an appendix by Frédéric Klopp. Paris: Soc. Math. France, 2008, S. 1–119.

[Kuc04] Peter A. Kuchment. „Quantum graphs. I. Some basic structures“. In: *Waves Random Media* 14.1 (2004). Special section on quantum graphs, S107–S128.

[Kuc08] Peter Kuchment. „Quantum graphs: an introduction and a brief survey“. In: *Analysis on graphs and its applications*. Bd. 77. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008, S. 291–312.

[LSS08] Daniel Lenz, Carsten Schubert und Peter Stollmann. „Eigenfunction expansions for Schrödinger operators on metric graphs“. In: *Integral Equations Operator Theory* 62.4 (2008), S. 541–553.

[LSV] Daniel Lenz, Carsten Schubert und Ivan Veselić. „Unbounded Quantum Graphs with unbounded Boundary Conditions“. In Vorbereitung.

[MH84] Fabio Martinelli und Helge Holden. „On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(\mathbf{R}^\nu)$“. In: *Comm. Math. Phys.* 93.2 (1984), S. 197–217.

[Mon+06] Anne Boutet de Monvel u. a. „Localization near fluctuation boundaries via fractional moments and applications“. In: *J. Anal. Math.* 100 (2006), S. 83–116.

[PSS] Felix Pogorzelski, Fabian Schwarzenberger und Christian Seifert. „Uniform existence of the integrated density of states on metric Cayley graphs“. URL: `http://arxiv.org/abs/1106.5724`.

[PSW89] Thomas Poerschke, Günter Stolz und Joachim Weidmann. „Expansions in generalized eigenfunctions of selfadjoint operators“. In: *Math. Z.* 202.3 (1989), S. 397–408.

[PTV11] Norbert Peyerimhoff, Martin Tautenhahn und Ivan Veselić. „Wegner estimate for alloy-type models with sign-changing exponentially decaying single-site potentials“. In: *TU Chemnitz Preprint* (2011). URL: `http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/preprint/2011/PREPRINT_09.php`.

[Pan06] Konstantin Pankrashkin. „Resolvents of self-adjoint extensions with mixed boundary conditions“. In: *Rep. Math. Phys.* 58.2 (2006), S. 207–221.

[RM] Constanza Rojas-Molina. „Characterization of the Anderson metal-insulator transport transition for non ergodic operators and application“. URL: `http://arxiv.org/abs/1110.4652`.

[Sch06] Carsten Schubert. „Laplace-Operatoren auf Quantengraphen“. Diplomarbeit. TU Chemnitz, 2006. URL: `http://www.tu-chemnitz.de/~carst/DA_Schubert.pdf`.

[Sch08] Fabian Schwarzenberger. „Polynomiell wachsende Gruppen: Geometrie, Spektren und Rückkehrwahrscheinlichkeiten“. Diplomarbeit. TU Chemnitz, 2008. URL: `http://www-user.tu-chemnitz.de/~fabis/diplomarbeit.pdf`.

[Sch] Carsten Schubert. „Localization for Quantum Graphs with a random potential and polynomial growth“. In Vorbereitung.

[Sto01] Peter Stollmann. *Caught by disorder*. Bd. 20. Progress in Mathematical Physics. Bound states in random media. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 2001.

Thesen

1. Die vorliegende Dissertation widmet sich dem Studium von Quantengraphen mit zufälligem Potential.

   Bei metrischen Graphen nehmen die Kanten eine wichtige Rolle ein. Jede Kante bekommt eine Länge zugewiesen und wird mit einem entsprechend langen Intervall identifiziert. Funktionen auf dem metrischen Graphen werden nun auf den Intervallen, die den Kanten entsprechen definiert. Damit kommt den Kanten eine wichtigere Rolle zu als bei kombinatorischen Graphen. Bei der Definition von Differentialoperatoren auf metrischen Graphen werden die Kanten an benachbarten Knoten durch Randbedingungen verknüpft. Dazu werden die Grenzwerte der Funktionen und deren erste Ableitung in den Knoten benutzt.

   Ein Quantengraph ist ein metrischer Graph mit einem selbstadjungierten Differentialoperator. In der vorliegenden Arbeit wird als Differentialoperator der negative Laplace-Operator gewählt, welcher Teil vieler partieller Differentialgleichungen ist.

2. In der Literatur gibt es bisher zwei Herangehensweisen selbstadjungierte negative Laplace-Operatoren auf metrischen Graphen zu definieren. Werden beide vereinigt, dann ergeben sich folgende Resultate:

   - Auf einem metrischen Graphen mit einer gleichmäßig nach unten beschränkten Kantenlänge ist der negative Laplace-Operator genau dann selbstadjungiert, wenn in jedem Knoten für die Randbedingungen ein Lagrange'scher Unterraum gewählt wird.
   - Randbedingungen können mittels einer Familie von Projektionen (P_v) und einer Familie selbstadjungierter Operatoren (L_v) parametrisiert werden. Diese Parametrisierungen entsprechen allen transversalen Lagrange'schen Unterräumen. Dies sind alle Lagrange'schen Unterräume, die sich als Graphen von Operatoren (welche mit L_v identifiziert werden können) darstellen lassen. Für endlichen Knotengrad gibt es keinen nicht-transversalen Lagrange'schen Unterraum, für unendlichen Knotengrad ist dies unklar.

     Für alle Parametrisierungen mittels der Familien (P_v) und (L_v), die einen nach unten beschränkten negativen Laplace-Operator liefern, kann eine assoziierte quadratische Form angegeben werden. Unter den Randbedingungen entsprechen diese allen Operatoren

zu denen die Familie (L_v^+), des positiven Teils von L_v, gleichmäßig nach oben beschränkt ist. Diese negativen Laplace-Operatoren werden mit $H^{P,L}$ bezeichnet.

3. Zu den Laplace-Operatoren wird ein zufälliges Potential als Produkt einer Familie unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit einer Familie von Einzelplatzpotentialen auf den Kanten gebildet. Dabei soll die Zufallsvariable ω_e absolut stetig sein und deren Wahrscheinlichkeitsmaß als Träger ein beschränktes Intervall besitzen. Die Einzelplatzpotentiale ν_e sind auf den Kanten entsprechenden Intervallen definiert und deren wesentlicher Wertebereich liegt in einem beschränkten Intervall positiver reeller Zahlen. Als zufällige Operatorfamilie ergibt sich dann

$$H^{P,L}(\omega) = H^{P,L} + (w_e \cdot \nu_e)_{e \in E}.$$

4. Für diese Familie von Operatoren soll nun Lokalisierung betrachtet werden. Lokalisierung bedeutet dabei das Auftreten reinen Punktspektrums mit exponentiell oder polynomiell fallenden Eigenfunktionen. Für stetige Modelle kann dies oft nur am unteren Ende des Spektrums, d.h. in der Nähe der Grundzustandenergie, und für hohe Undordnung gezeigt werden. Dabei entspricht eine hohe Unordnung der Anforderung an die Zufallsvariable sich nicht zu sehr am unterem Rand ihres Trägers zu konzentrieren.

   In der Literatur gibt es bisher nur Ergebnisse, welche eine symmetrische Struktur des Graphen, eine einschränkende Wahl der Randbedingungen und der Einzelplatzpotentiale voraussetzen. Meist wird alles gleichzeitig gefordert. Die einzige Beweismethode, für welche eine Adaption mit relativ wenigen Änderungen absehbar ist, ist die Multiskalenanalyse. Mittels dieser sind bisher Ergebnisse für metrische Graphen auf $\mathbb{Z}^d$ bewiesen.

   Der Ablauf des Lokalisierungsbeweises mittels Multiskalenanalyse lautet dabei wie folgt:

   - Es gibt eine Entwicklung des Operators in verallgemeinerte Eigenfunktionen, welche höchstens polynomiell wachsen.
   - Für ein bestimmtes Energieintervall sind die lokalen Resolventen fallend, d.h. was die Resolvente des Operators auf endlichen Gebieten vom Inneren zum Rand des Gebietes überträgt, fällt exponentiell/polynomiell mit der Größe der Gebiete.
   - Die beiden ersten Punkte ergeben zusammen spektrale Lokalisierung, d.h. reines Punktspektrum, und exponentiell/polynomiell fallende Eigenfunktionen.

5. Die Multiskalenanalyse liefert die Existenz einer gegen unendlich wachsenden Folge von Längenskalen mit zugehörigen Aussagen über exponentiellem/polynomiellem Fallen der lokalen Resolventen. Diese Aussage wird induktiv gezeigt, d.h. von der Existenz einer Anfangslängenskala wird iterativ der Schluss auf eine größere Längenskala bewiesen. Dazu sind einige Abschätzungen und Beziehungen notwendig welche für allgemeine metrische Graphen mit beliebigen Operatoren der Form $H^{P,L}(\omega)$ bewiesen werden:

    6. Um das Fallen der Resolventen induktiv zu beweisen, müssen Gebiete zur größeren Längenskala durch kleinere überdeckt werden. Es ist also eine Überdeckung des metrischen Graphen mit gewissen Umgebungen mit festem Radius notwendig. Diese kann aus einem gleichmäßig polynomiellem Wachstum des metrischen Graphen gewonnen werden.

       Für allgemeine metrische Graphen ist die Überdeckung nicht mehr so präzise kontrollierbar, wie zum Beispiel durch Würfel in der Maximumsnorm im Fall der Gittergraphen $\mathbb{Z}^d$. Daraus resultieren schlechtere Abschätzungen, die in der Multiskalenanalyse zur Folge haben, dass nur noch ein polynomieller Abfall der lokalen Resolventen geschlussfolgert werden kann.

    7. Die Combes-Thomas-Abschätzung liefert einen exponentiellen Abfall der lokalen Resolventen – vorausgesetzt der reelle Energieparameter befindet sich in einer bekannten Lücke im Spektrum (d.h. in der Resolventenmenge) mit gewissem Abstand zum Spektrum. Das Fallen hängt von der Größe der bekannten Lücke, dem Abstand des Energierparameters zum Lückenrand und dem Abstand der beiden Mengen, zwischen denen die Resolvente überträgt, ab.

    8. Die geometrische Resolventenungleichung stellt eine Beziehung zwischen den Resolventen zu unterschiedlichen Längenskalen her und ermöglicht den induktiven Schluss des Abfallens der lokalen Resolventen.

    9. Eine Wegner-Abschätzung für das allgemeine Modell wurde schon in [GHV08] bewiesen. Die Wegner-Abschätzung liefert eine Aussage über die Verteilung von Eigenwerten von Einschränkungen des Operators auf endliche induzierte Teilgraphen. Sie ist eine Abschätzung an den Erwartungswert der Anzahl der Eigenwerte einer Einschränkung in einem kleinem Intervall um ein Energieniveau, welche hauptsächlich durch die Anzahl der Kanten des induzierten Teilgraphen bestimmt wird.

10. Mittels dieser Abschätzungen kann die Multiskalenanalyse auf metrische

Graphen angepasst werden und ein Abfall der lokalen Resolventen bewiesen werden.

11. Die Existenz von verallgemeinerten Eigenfunktionen für Spektralmaß fast alle Spektralwerte des Operators $H^{P,L}(\omega)$, welche höchstens polynomiell wachsen, wurde in [LSS08] gezeigt. Dies liefert, zusammen mit dem polynomiellen Abfall der lokalen Resolventen, ein polynomielles Abfallen der verallgemeinerten Eigenfunktionen. Diese sind also echte Eigenfunktionen und somit die zugehörigen Spektralwerte Eigenwerte – zumindest in einem kleinem Intervall um die Grundzustandsenergie. Als wichtige praktische Aussage lässt sich mittels des RAGE-Theorems nun die Abwesenheit von Transport durch das Medium zu diesen Energien schlussfolgern.

12. Das Endergebnis der Lokalisierung liefert folgende Aussage: Mit Wahrscheinlichkeit eins hat $H^{P,L}(\omega)$ in einem kleinen Intervall um die Grundzustandenergie reines Punktspektrum. Es ist im Allgemeinen aber nicht klar, wie viele dieser Realisierungen dort überhaupt Spektrum haben. Ohne bestimmte Voraussetzung an die Symmetrie des Graphen, die Wahl der Randbedingungen in den Knoten und der Einzelplatzpotentiale auf den Kanten, ist keine Aussage für fast alle Realisierungen $H^{P,L}(\omega)$ zu treffen. Dies ist zum Beispiel nur für Cayleygraphen möglich.