Beitrag zur numerischen Beschreibung des funktionellen Verhaltens von Piezoverbundmodulen

Von der Fakultät für Maschinenbau der
Technischen Universität Chemnitz

genehmigte

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor–Ingenieur
(Dr.–Ing.)

vorgelegt

von: Dipl.–Ing. Burkhard Kranz
geboren am: 29. April 1968 in Radeberg

eingereicht am: 19. September 2011

Gutachter: Prof. Dr.–Ing.habil. Prof.E.h. Dr.–Ing.E.h.mult. Dr.h.c.
Reimund Neugebauer

Prof. Dr.–Ing. Thomas Sattel

Chemnitz, den 12. Juni 2012

Impressum

Beitrag zur numerischen Beschreibung des funktionellen Verhaltens von Piezoverbundmodulen

Autor:
Burkhard Kranz

Herausgeber:
Prof. Dr.–Ing. habil. Prof. E. h. Dr.–Ing. E. h. mult. Dr. h. c.
Reimund Neugebauer

Wichtiger Hinweis:
Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Einer digitalen Veröffentlichung über
MONARCH, dem Dokumenten- und Publikationsserver der TU Chemnitz bzw.
Qucosa®, dem sächsischen Dokumenten- und Publikationsserver
wird in diesem Zusammenhang ausdrücklich zugestimmt.

© 2012 Fraunhofer–Institut für
Werkzeugmaschinen und Umformtechnik IWU
Reichenhainer Straße 88, 09126 Chemnitz

Verlag Wissenschaftliche Scripten
Kaiserstrasse 32, 08209 Auerbach

ISBN: 978-3-942267-52-6

Bibliographische Beschreibung

Burkhard Kranz

Beitrag zur numerischen Beschreibung des funktionellen Verhaltens von Piezoverbundmodulen

Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Chemnitz, Institut für Werkzeugmaschinen und Produktionsprozesse, Chemnitz, 2012

167 Seiten,
40 Abbildungen,
14 Tabellen,
117 Literaturverweise

Referat: Die Arbeit befasst sich mit der effizienten Simulation des funktionellen Verhaltens von Piezoverbundmodulen als Aktor oder Sensor zur Schwingungsbeeinflussung mechanischer Strukturen.

Ausgehend von einem FE–Modell werden über den Ansatz energetischer Äquivalenz die effektiven elektro–mechanischen Materialparameter ermittelt. Zur Berücksichtigung im Inneren der Einheitszelle liegender Elektroden werden die elektrischen Randbedingungen der Homogenisierungslastfälle angepasst. Die Homogenisierungslastfälle werden auch genutzt, um Phasenkonzentrationen für die Beanspruchungen der Verbundkomponenten zu ermitteln. Diese Phasenkonzentrationen werden eingesetzt, um aus dem effektiven Gesamtmodell die Beanspruchungen der Komponenten zu extrahieren.

Zur dynamischen Modellbildung wird die Zustandsraumbeschreibung verwendet. Die Überführung einer piezo–mechanischen FE–Diskretisierung in ein Zustandsraummodell gelingt mit der Betrachtung der mechanischen Freiheitsgrade als Zustandsvariablen. Zur Abbildung der elektrischen Impedanz im Zustandsraum muss die elektrische Kapazitätsmatrix als Durchgangsmatrix einbezogen werden. Die Reduktion des Zustandsraums basiert auf der modalen Superposition. Die modale Transformationsbasis wird um Moden ergänzt, die die Verformung bei statischer elektrischer Erregung charakterisieren. Die Zustandsraumbeschreibung wird sowohl für eine Potential- als auch für eine Ladungserregung ausgeführt. Das Zustandsraummodell wird unter Verwendung von Filtermatrizen um Ausgangssignale für die mechanischen und elektrischen Beanspruchungsgrößen erweitert. Dies gestattet eine Kopplung der Zustandsraummodelle mit den Beanspruchungsanalysen.

Die Anwendung der Berechnungsmethode wird am Beispiel der im SFB/TRR PT–PIESA entwickelten Piezo–Metall–Module demonstriert, die durch direkte Integration von piezokeramischen Basiselementen in Blechstrukturen gekennzeichnet sind.

Schlagworte: Piezoverbundmodul, Simulation, Homogenisierung, Beanspruchung, Zustandsraummodell

Bibliographic Description

Burkhard Kranz

Contribution to the numerical characterisation of the functional behaviour of piezo composite modules

Dissertation at the Department of Mechanical Engineering at Chemnitz University of Technology, Institute for Machine Tools and Production Processes, Chemnitz, 2012

167 pages,
40 figures,
14 tables,
117 references

Abstract: This thesis deals with the efficient simulation of the functional behaviour of piezo composite modules for applications as actuators or sensors to influence vibrations of machine structures.

Based on a FE–discretisation the effective electro–mechanical material parameters of the piezo composite modules are determined with an ansatz of energetic equivalence. To consider electrodes which are located inside the representative volume element the electrical boundary conditions of the load cases for homogenisation are adapted. The load cases for homogenisation are also used to determine the phase concentrations (or fluctuation fields) of stress/strain and electric field/electric displacement field in the composite constituents. These phase concentrations are required to extract stress and strain of the composite components based on the overall model with effective material parameters.

For dynamical modelling a state space representation is used. The transformation of a FE–discretisation of the piezo–mechanical system into a state space model is possible by choosing the mechanical degree of freedom as state variables. For consideration of the electrical impedance in the state space model the electrical stiffness respectively capacitance matrix has to incorporate as feedthrough matrix. The dynamical model reduction of the state space model is based on modal superposition. For the correct reproduction of the electrical impedance the modal transformation basis has to be amended by deformation modes which represent the deformation behaviour due to static electrical excitation at the electrodes. The state space representation is built for potential and charge excitation. The state space model is enhanced by filter matrices to incorporate output signals for stress/strain and also for electric field/electric displacement field. This allows the coupling of the state space models with the stress analyses.

The application of the simulation method is demonstrated using the example of the piezo–metal–modules developed in the CRC/TR PT–PIESA (German: SFB/TRR PT–PIESA). These piezo–metal–modules are characterised by direct integration of piezoceramic base elements in sheet metal structures.

Keywords: piezo composite module, simulation, homogenisation, stress, strain, state space model

Le savant n'étudie pas la nature
parce que cela est utile;
il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et
il y prend plaisir parce qu'elle est belle.
Si la nature n'était pas belle,
elle ne vaudrait pas le peine d'être connue, . . .

. . . je veux parler de cette beauté plus intime
qui vient de l'ordre harmonieux des parties,
et qu'une intelligence pure peut saisir.

Henri Poincaré [1908]: *Science et Méthode.* Paris

Der Gelehrte studiert die Natur nicht,
weil das etwas Nützliches ist;
er studiert sie, weil er daran Freude hat, und
er hat Freude daran, weil sie so schön ist.
Wenn die Natur nicht so schön wäre,
so wäre es nicht der Mühe wert, sie kennenzulernen, . . .

. . . Ich will von der viel intimeren Schönheit reden,
welche aus der harmonischen Ordnung der Teile hervorgeht
und welche von der reinen Intelligenz erfasst werden kann.

Henri Poincaré [1914]: *Wissenschaft und Methode.* Berlin

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fraunhofer–Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik im Rahmen des Sonderforschungsbereiches/Transregio 39 »Großserienfähige Produktionstechnologien für leichtmetall- und faserverbundbasierte Komponenten mit integrierten Piezosensoren und -aktoren« PT–PIESA, gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Herrn Prof. Reimund Neugebauer danke ich für die Initiierung des SFB/TRR 39 und die damit verbundene Anregung des Themas sowie für die Übernahme der Betreuung. Bei Herrn Prof. Thomas Sattel bedanke ich mich für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats.

Meinen Kollegen der Abteilung »Adaptronik und Akustik« danke ich für die gute Zusammenarbeit und manche konstruktive Diskussion. Aus der Vielzahl der Kollegen möchte ich namentlich hervorheben: Herrn Dr. Welf-Guntram Drossel als Teilprojektleiter innerhalb des SFB/TRR 39 und meinen primären wissenschaftlichen Gesprächspartner, Herrn André Bucht, Herrn Kenny Pagel und Herrn Sebastian Hensel als Ansprechpartner für die vielen Detailfragen einer wissenschaftlichen Arbeit sowie Herrn Christoph Ohsenbrügge, meinen Zimmerkollegen, für die kurzfristig notwendigen Meinungsäußerungen. Herrn Björn Senf danke ich vor allem dafür, dass er mich während des Verfassens der Arbeit weitgehend von anderweitigen Aufgaben entlastet hat. Herr Dr. Hans-Jürgen Roscher übernahm die fachliche Detailkorrektur der Abhandlung und hat mich damit auch immer wieder aufs Neue motiviert. Herzlichen Dank dafür.

Ich danke meinen Eltern, dass sie mir eine Ausbildung ermöglicht haben, durch die der Grundstein für diese Arbeit gelegt wurde. Meiner Familie danke ich für die Rücksicht und Unterstützung beim Verfassen der Arbeit.

Besonders herzlich bedanke ich mich bei Herrn Wolfgang Geilhufe, ohne dessen einfühlsame persönliche Begleitung diese Arbeit nicht entstanden wäre, bei Herrn Dr. Matthias Grimsel, der die Arbeit konzeptionell und sprachlich korrigierte und erst durch seine Zusage dazu die Fertigstellung der Arbeit ermöglichte und bei Herrn Holger Kunze für jedwede Unterstützung.

Ich widme diese Arbeit meinem Vater.

Burkhard Kranz Dresden, den 15. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis **13**

Tabellenverzeichnis **15**

1 Einleitung **17**
1.1 Piezoverbundmodule . . . 17
1.2 Zielstellung der Arbeit . . . 19
1.3 Aufbau der Abhandlung . . . 20

2 Grundlagen **21**
2.1 Piezoelektrizität . . . 21
2.2 Aufbau von Piezoverbundmodulen . . . 23
2.3 Modellierung piezoelektrischer Kontinua . . . 25
2.3.1 Gleichgewichtsbeziehungen . . . 25
2.3.2 Kinematische Beziehungen . . . 25
2.3.3 Randbedingungen . . . 26
2.3.4 Materialbeziehungen . . . 27
2.3.5 Finite–Elemente–Formulierung . . . 31
2.4 Zustandsraumbeschreibung mechanischer Systeme . . . 33

3 Stand der Forschung **37**
3.1 Ermittlung effektiver Materialparameter piezoelektrischer Verbunde . . . 37
3.2 Zustandsraum und Modellreduktion für piezoelektrische Modelle . . . 41
3.3 Entwicklungsbedarf . . . 44

4 Beanspruchungsermittlung für piezo–mechanische Verbunde **47**
4.1 Problembeschreibung und Lösungsansatz . . . 47
4.2 Homogenisierung der Materialparameter . . . 48
4.2.1 Energiebasierte Einheitszellenmethode . . . 48
4.2.2 Makroskopisch orthotropes Verhalten des Piezoverbundes . . . 50
4.2.3 Randbedingungen der Einheitszelle . . . 51
4.3 Lokalisierung der Beanspruchungen . . . 56
4.4 Demonstrationsmodell Piezofaserverbund . . . 58

5 Zustandsraumbeschreibung piezo–mechanischer Systeme 63
5.1 Problembeschreibung und Lösungsansatz . . . 63
5.2 Spezifikation der elektrischen Erregung . . . 66
5.2.1 Potentialerregung . . . 66
5.2.2 Ladungserregung . . . 67
5.3 Vollständiger Zustandsraum . . . 69
5.4 Reduzierter Zustandsraum . . . 71
5.4.1 Modale Beschreibung . . . 71
5.4.2 Erweiterung der Reduktionsbasis durch statische Moden . . . 77
5.5 Ein- und Ausgangsgrößen . . . 84
5.5.1 Filtermatrizen . . . 84
5.5.2 Reduktion der Durchgangsmatrix und der Modalmatrizen . . . 85
5.5.3 Abgeleitete Ausgangsgrößen . . . 87
5.6 Demonstrationsmodell Plattenstreifen . . . 89
5.6.1 Finite–Elemente–Modell . . . 89
5.6.2 Modellvergleich . . . 91
5.7 Eigenschaften und Möglichkeiten der Zustandsraummodelle . . . 93

6 Gesamtmodell 95
6.1 Berechnungsablauf . . . 95
6.2 Anwendung auf Piezo–Metall–Module . . . 97
6.2.1 Aufbau und Funktionsweise . . . 97
6.2.2 Finite–Elemente–Modelle . . . 99
6.2.3 Effektive Materialparameter und Beanspruchungsgrößen . . . 103
6.2.4 Modellvergleich . . . 105
6.3 Diskussion . . . 109
6.3.1 Bedeutung der Beanspruchungsermittlung . . . 109
6.3.2 Modellierungsalternativen . . . 109

7 Zusammenfassung 111

Literaturverzeichnis 115

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis 125

Begriffserklärungen 131

Anhang **135**

A Relationen der elektro–mechanischen Materialparameter **137**

B Einheitszelle mit inneren Elektroden **139**
B.1 Vergleich der Homogenisierungsansätze 139
B.2 Verbund aus materialgleichen Komponenten 144

C Neun–Knoten–Basismodell **147**
C.1 Amplitudenfrequenzgänge bei Potentialerregung 148
C.2 Transformation der Systemparameter 150

D Vektoren und Matrizen der Zustandsraummodelle **153**

E Generierung der Modelldaten mit dem FEM–System ANSYS **157**

F Eigenmoden und Amplitudenfrequenzgänge des Demonstrationsmodells Plattenstreifen **161**

Lebenslauf **167**

Abbildungsverzeichnis

1.1 Zielstellung der Abhandlung 20

2.1 Phasendiagramm von Blei–Zirkonat–Titanat 21
2.2 Dielektrische Hysterese 21
2.3 Schmetterlingshysterese der Dehnung 22
2.4 Dehnungshysterese bei unipolarer Anregung 22
2.5 ›Macro Fiber Composite‹ Aktor/Sensor, Draufsicht und Querschnitt 24
2.6 Piezo–Metall–Modul, Draufsicht und Querschnitt 24
2.7 Schematischer Aufbau von Piezoverbundmodulen 24
2.8 Allgemeines Blockschaltbild eines Zustandsraummodells 34

4.1 Modelltransformation durch Homogenisierung 47
4.2 Ausrichtung des elektrischen Feldes in der Einheitszelle 53
4.3 Übertragung der realen elektrischen Last auf Einheitszelle und Gesamtmodell 56
4.4 Einordnung der Einheitszelle in den Gesamtverbund 57
4.5 Finite–Elemente–Netz der Einheitszelle des Demonstrationsmodells Piezofaserverbund 58
4.6 Energiedichten für eine Einheitsverzerrung (Schubdehnung) des Demonstrationsmodells Piezofaserverbund 60
4.7 Energiedichten für eine Einheitsverzerrung (Normaldehnung) des Demonstrationsmodells Piezofaserverbund 61
4.8 Phasenkonzentrationen des Demonstrationsmodells Piezofaserverbund 61

5.1 Finite–Elemente–Netz des Demonstrationsmodells Plattenstreifen 90
5.2 Amplitudenfrequenzgänge für Ladung und Dehnung bei Potentialerregung des Demonstrationsmodells Plattenstreifen 92
5.3 Amplitudenfrequenzgänge für Potential und Dehnung bei Ladungserregung des Demonstrationsmodells Plattenstreifen 93

6.1 Schematische Darstellung des Berechnungsablaufes 96
6.2 Blockschaltbild zur Integration der Phasenkonzentrationen in die Systemsimulation 96
6.3 Aufbau und Abmessungen des Piezo–Metall–Moduls 98

6.4 Geometrie und Finite–Elemente–Netz des vollständigen Detailmodells für das Piezo–Metall–Modul . . . 100
6.5 Finite–Elemente–Netz des Modells des Piezo–Metall–Moduls mit homogener aktiver Schicht . . . 101
6.6 Finite–Elemente–Netz der Einheitszelle des Piezo–Metall–Moduls . . . 102
6.7 Phasenkonzentrationen der Einheitszelle des Piezo–Metall–Moduls . . . 104
6.8 Amplitudenfrequenzgänge für die Normalspannung bei Potentialerregung des Piezo–Metall–Moduls . . . 106
6.9 Amplitudenfrequenzgänge für die Normalspannung bei Ladungserregung des Piezo–Metall–Moduls . . . 106
6.10 Amplitudenfrequenzgänge für das effektive elektrische Feld bei Ladungserregung des Gesamtmodells des Piezo–Metall–Moduls . . . 108
6.11 Beanspruchungsgrenzwerte . . . 110

B.1 Einheitszelle mit inneren Elektroden . . . 140

C.1 Darstellung des Neun–Knoten–Basismodells . . . 147
C.2 Amplitudenfrequenzgänge für die Verschiebungen x_1 bis x_4 des Basismodells bei Potentialerregung . . . 148
C.3 Amplitudenfrequenzgänge für die Verschiebungen x_5 bis x_8 des Basismodells bei Potentialerregung . . . 149
C.4 Amplitudenfrequenzgänge für das elektrische Übertragungsverhalten des Basismodells . . . 151

F.1 Eigenmoden 1 bis 4 des Demonstrationsmodells Plattenstreifen . . . 162
F.2 Eigenmoden 5 bis 8 des Demonstrationsmodells Plattenstreifen . . . 163
F.3 Amplitudenfrequenzgänge bei Potentialerregung des Demonstrationsmodells Plattenstreifen . . . 164
F.4 Amplitudenfrequenzgänge bei Ladungserregung des Demonstrationsmodells Plattenstreifen . . . 165

Tabellenverzeichnis

4.1 Einheitslastfälle zur Bestimmung der effektiven Materialparameter eines orthotropen piezoelektrischen Verbundes . . . 52
4.2 Bezeichnung der Phasenkonzentrationen . . . 57
4.3 Materialparameter der Komponenten und effektive Materialparameter $\boldsymbol{c}^{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ des Demonstrationsmodells Piezofaserverbund . . . 59
4.4 Effektive Materialparameter $\boldsymbol{c}^{\mathrm{D}}$, $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{S}}$ des Demonstrationsmodells Piezofaserverbund . . . 59

5.1 Bezeichnung der Modelldimensionen . . . 63
5.2 Dimensionen der Zustandsraumreduktion . . . 74
5.3 Geometrieparameter und Materialien des Demonstrationsmodells Plattenstreifen . . . 90
5.4 Materialparameter der Komponenten des Demonstrationsmodells Plattenstreifen . . . 90
5.5 Eigenmoden des Demonstrationsmodells Plattenstreifen . . . 91
5.6 Modellbezeichnungen . . . 91
5.7 Vergleich der Zustandsraumformulierungen . . . 94

6.1 Materialparameter der Komponenten des Piezo–Metall–Moduls . . . 101
6.2 Effektive Materialparameter $\boldsymbol{c}^{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ des Piezo–Metall–Moduls . . . 103
6.3 Umfang und Berechnungsaufwand der Modelle des Piezo–Metall–Moduls . . . 108

1 Einleitung

1.1 Piezoverbundmodule

Aktuelle Entwicklungen zielen auf die funktionelle Erweiterung technischer Güter bei gleichzeitig verringertem Energie- und Ressourceneinsatz [Neugebauer et al. 2009]. In Fachbereichen wie dem Maschinen- und Fahrzeugbau bildet die Verwendung von Funktionswerkstoffen einen Ansatzpunkt, dieses Ziel zu erreichen.

Funktionswerkstoffe zeichnen sich im Vergleich zu herkömmlichen Konstruktionswerkstoffen durch spezielle Eigenschaften aus, die ihren Einsatz über eine mechanische Stützfunktion hinaus gestatten. Oft kann die Wirkung der Funktionswerkstoffe über die Kopplung verschiedener physikalischer Felder beschrieben werden.

Piezoelektrische Materialien sind Funktionswerkstoffe, die ihre elektrische Polarisation in Abhängigkeit von einer mechanischen Verformung ändern (direkter piezoelektrischer Effekt) beziehungsweise sich in Abhängigkeit von einem einwirkenden elektrischen Feld mechanisch verformen (inverser piezoelektrischer Effekt). Die Piezoelektrizität wird durch eine Kopplung des mechanischen mit dem elektrischen Feld charakterisiert.

Neben massiven piezokeramischen Bauteilen gibt es eine Vielzahl von piezoelektrischen Verbundstrukturen für die Anwendung als Aktor oder Sensor. Die wesentlichen Bauformen wie Piezostapelaktor, Piezofolienaktor oder Piezofaserverbund verwenden dünne Grundformen wie Platten, Folien und Fasern als piezokeramische Basiselemente, da für herkömmliche Piezokeramiken zur statischen Erzeugung einer praktisch relevanten Dehnung von 1 ‰ eine elektrische Feldstärke in der Größenordnung von 1 kV/mm notwendig ist. Bei Verwendung dünner Basiselemente mit geringem Elektrodenabstand kann die erforderliche elektrische Ansteuerspannung vergleichsweise gering gehalten werden.

In den letzten Jahren wurde eine Reihe verschiedenartiger Piezoverbundmodule auf Basis von Kunststoffträgermaterialien entwickelt [Williams et al. 2002]. Diese Ausführungsformen umfassen zum Beispiel ›Active Fiber Composites‹ (AFC) [Bent 1997], ›Macro Fiber Composite‹ Aktoren/Sensoren (MFC) [Wilkie et al. 2000], DuraAct–Flächenwandler [Wierach 2003] und ›Multilayer piezo composites‹ [Wierach 2006]. Auch die Herstellung thermoplast–basierter Piezomodule zur unmittelbaren Integration in Faserverbundstrukturen ist Gegenstand der aktuellen Forschung [Dunn 2002; Hufenbach et al. 2009a,b].

Vorteile der Piezoverbundmodule gegenüber monolithischen piezokeramischen Elementen sind eine vergleichsweise hohe Flexibilität, Schadenstoleranz, Zuverlässigkeit und Lebensdauer. Wesentlicher Nachteil der Piezoverbundmodule im Hinblick auf die Herstellung aktiver Gesamtstrukturen ist die Notwendigkeit einer separaten Applikation der Pie-

zoverbundmodule auf das in vielen Anwendungsfällen des Maschinen- und Fahrzeugbaus metallische Basisbauteil. Die Fixierung der Piezoverbundmodule erfolgt in der Regel manuell durch 2–Komponenten–Klebstoffe, durch die allerdings eine zusätzliche Nachgiebigkeit in die Gesamtstruktur eingefügt wird.

Eine alternative Möglichkeit ist die direkte Integration von piezokeramischen Basiselementen (Fasern, Stäbchen) unmittelbar in das metallische Trägermaterial, um den separaten Applikationsschritt in der Prozesskette zu eliminieren.

Diese Grundidee wird im SFB/TRR 39[1] bei der Entwicklung von Piezo–Metall–Modulen verfolgt [Neugebauer 2007, 2009]. Bei der Integration der piezokeramischen Basiselemente in das metallische Trägermaterial ist eine Reihe technologischer Fragestellungen wie die Erzeugung der Kavitäten, das Einlegen und Fixieren der piezokeramischen Basiselemente sowie die Herstellung von elektrischer Kontaktierung und Isolierung zu lösen. Diese technologischen Fragestellungen werden momentan noch intensiv untersucht [Peter et al. 2009; Schubert et al. 2009, 2010a,b].

Alle diese Piezoverbundmodule mit unterschiedlichsten mechanischen Trägermaterialien sind universell zur Schwingungsdetektion und -beeinflussung [Irschik 2002; Sodano et al. 2004b; Song et al. 2006], ›Energy Harvesting‹ [Sodano et al. 2004a; Anton et al. 2007] und ›Structural Health Monitoring‹ [Park et al. 2003; Raghavan et al. 2007; Inman et al. 2007] einsetzbar bzw. für diesen Einsatz vorgesehen. Für die Auslegung dieser dynamischen Anwendungen werden dynamische Modelle benötigt [Hurlebaus et al. 2006]. Mit Hinblick auf die zu erzielende Funktionalität des Gesamtbauteils ist die simulative Integration des elektro–mechanischen Verhaltens der Piezoverbundmodule in dynamische Gesamtmodelle zu betrachten.

Eine Beanspruchungscharakterisierung der Piezoverbundmodule ist in diesem Zusammenhang in zweierlei Hinsicht von Interesse, zum einen mit Hinblick auf eine mechanische Schädigung der Piezoelemente und zum anderen mit Hinblick auf eine funktionelle Schädigung der Piezoelemente durch mechanisch induzierte Depolarisation [vgl. z. B. Hall 2001; Zhou 2003].

Dabei ist für diejenigen Piezoverbundmodule, die bei der Integration der Piezoelemente auf nachgiebige Klebstoff- bzw. Zwischenschichten verzichten (wie z. B. die Piezo–Metall–Module) und damit eine effiziente elektro–mechanische Ankopplung erzielen, das Risiko einer Schädigung höher, da eine unmittelbare Beanspruchungsübertragung zwischen Trägermaterial und Piezoelement zu erwarten ist. Das heißt, auch für eine Optimierung der Ankopplungsbedingungen von Piezoverbundmodulen ist eine Beanspru-

[1] Sonderforschungsbereich/Transregio 39 »Großserienfähige Produktionstechnologien für leichtmetall- und faserverbundbasierte Komponenten mit integrierten Piezosensoren und -aktoren« PT–PIESA, gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (SFB/TRR 39)

chungscharakterisierung erforderlich, da eine Abwägung zwischen funktioneller Optimierung und Schädigungsempfindlichkeit erfolgen muss.

1.2 Zielstellung der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung und systematische Darstellung eines Verfahrens zur effizienten numerischen Simulation des funktionellen Verhaltens von Piezoverbundmodulen auf Basis der Finite–Elemente–Methode (FEM).[2] Die Piezoverbundmodule werden dabei verallgemeinernd als periodische piezo–mechanische Strukturen betrachtet, deren Komponentenabmessungen wesentlich kleiner als das zugrundeliegende passive Bauteil sind. Mit der vorgestellten Systematik soll zum einen die Voraussetzung geschaffen werden, solche piezo–mechanischen Strukturen in Gesamtbauteilmodelle einzubinden, sei es auf der Ebene der FEM oder sei es auf der Ebene der Systemsimulation. Andererseits soll ermöglicht werden, aufgrund der Gesamtmodelle auf die Beanspruchungen der Detailkomponenten der Piezoverbundmodule im Anwendungsfall zu schließen. Aspekte der Dynamik sollen dabei berücksichtigt werden.

Es erfolgt eine Konzentration auf die elektrische Erregung der betrachteten piezo–mechanischen Systeme. Die Behandlung der rein mechanischen Erregungen eines solchen Systems kann mit den bekannten Verfahren der Mechanik erfolgen.

Für die Integration von Piezoverbundstrukturen in FE–Modelle übergeordneter Strukturebenen (Bauteil, Maschinen-/Anlagenkomponenten, Gesamtmaschine) ist die Verwendung von gemittelten Materialparametern für die Piezoverbundmodule erforderlich, da eine Diskretisierung der Gesamtmodelle in der Größenordnung der eingesetzten Piezoelemente im Allgemeinen nicht mit vertretbarem Berechnungsaufwand auszuführen ist. Die Bestimmung der effektiven Materialparameter erfolgt mittels Homogenisierung der Materialparameter. Die Rückführung der mit den effektiven Materialparametern bestimmten Beanspruchungen auf die Beanspruchungen der Verbundkomponenten erfolgt durch Lokalisierung der Beanspruchungen.

Für die Integration von Piezoaktoren und -sensoren in Systemsimulationen z. B. für den Regelungs- oder Schaltungsentwurf bietet sich eine Zustandsraumbeschreibung an, wie sie standardmäßig in der Regelungstechnik verwendet wird. Die Ableitung von Zustandsraummodellen aus einer FE–Diskretisierung von piezo–mechanischen Systemen wird in dieser Abhandlung vorgestellt. Für eine effiziente Behandlung der resultierenden Zustandsraummodelle ist dabei die Anzahl der beschreibenden Zustände bzw. Zustandsvariablen möglichst gering zu halten. Die FE–Diskretisierung ist einer Modellreduktion zu

[2] Für die Simulationen wird kommerziell verfügbare Software [ANSYS; MATLAB] eingesetzt.

unterziehen. Eine Erweiterung der Zustandsraummodelle unter Verwendung von Dehnungssignalen als Ausgangsgrößen ermöglicht die simulative Rückkopplung zum FE–Modell zwecks Ermittlung der Beanspruchungen aus der Systemsimulation heraus.

Bild 1.1 verdeutlicht die Zielstellung der Arbeit.

1.3 Aufbau der Abhandlung

Die Grundlagen der numerischen Beschreibung von piezoelektrischen Materialien wird in Kapitel 2 vorgestellt, bevor in Kapitel 3 der aktuelle Stand der Forschung zu den Schwerpunkten Homogenisierung/Lokalisierung und Zustandsraumbeschreibung/Modellreduktion in Bezug auf piezoelektrische Materialien diskutiert wird.

In Kapitel 4 wird das in dieser Abhandlung verwendete Verfahren zur Homogenisierung von Materialparametern und Lokalisierung der Beanspruchungen für allgemeine Piezoverbundmodule dargestellt. Kapitel 5 widmet sich der dynamischen Beschreibung der piezo–mechanischen Systeme mit Herleitung der Zustandsraumbeschreibung. In Kapitel 6 werden die Zustandsraumbeschreibung und die Beanspruchungsermittlung zusammengeführt. Dabei wird in Abschnitt 6.2 die Anwendung der Gesamtmethode am Beispiel der Piezo–Metall–Module demonstriert.

Kapitel 7 gibt eine Zusammenfassung der Arbeit.

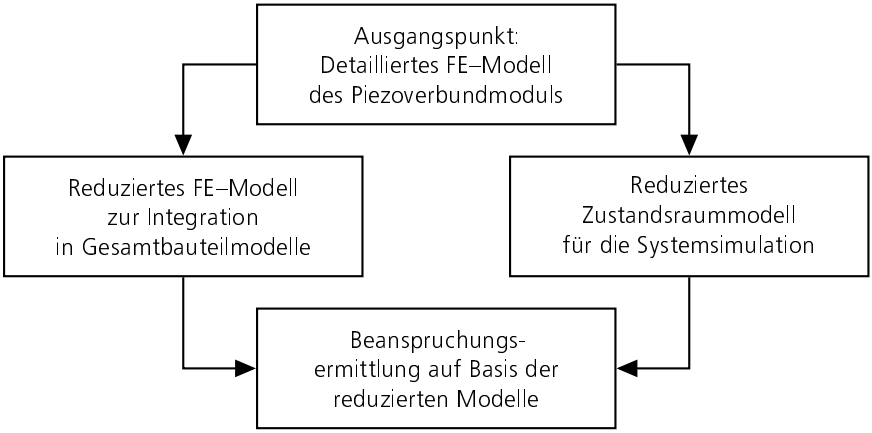


Bild 1.1: *Zielstellung der Abhandlung*

2 Grundlagen

2.1 Piezoelektrizität

Der piezoelektrische Effekt ist durch das Auftreten einer dielektrischen Verschiebung bei einer äußeren Verformung des piezoelektrischen Materials gekennzeichnet.

Bei den technisch relevanten, polykristallinen, piezoelektrischen Keramiken wie Bariumtitanat oder Blei–Zirkonat–Titanat (PZT) wird die Piezoelektrizität unmittelbar durch Ferroelektrizität hervorgerufen.

Wie im vereinfachten Phasendiagramm für PZT (Bild 2.1, [Jaffe et al. 1971; Ivers-Tiffée et al. 2007]) verdeutlicht wird, tritt für solche Keramiken die Perowskit–Struktur unterhalb der Curie–Temperatur je nach Mischungsverhältnis rhomboedrisch oder tetragonal auf. Dies ist mit der Ausbildung von permanenten Ladungsverschiebungen im Kristall verbunden (spontane Polarisation). Bei polykristallinen Werkstoffen wird die spontane Polarisation im Allgemeinen nicht nach außen wirksam, da sich aufgrund unterschiedlicher Orientierungen die spontanen Polarisationsvektoren der einzelnen Domänen gegenseitig aufheben.

Das Wirken eines starken äußeren elektrischen Feldes E_{Pol} (Polarisierung) führt zu einer Ausrichtung der Polarisationsvektoren der einzelnen Kristalle (Ferroelektrizität) und damit zur Ausbildung einer Polarisation P der Keramik, die auch nach Entfernen des elektri-

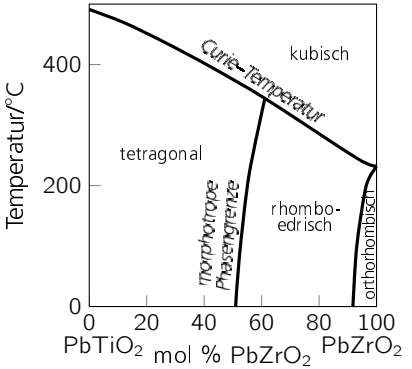


Bild 2.1: *(Vereinfachtes) Phasendiagramm von Blei–Zirkonat–Titanat*

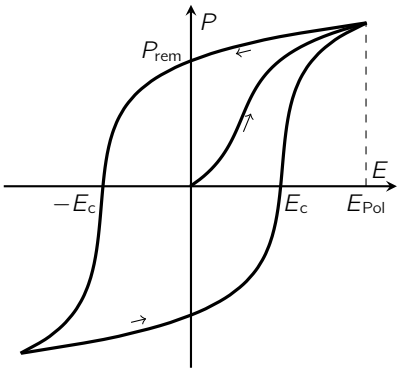


Bild 2.2: *Dielektrische Hysterese*

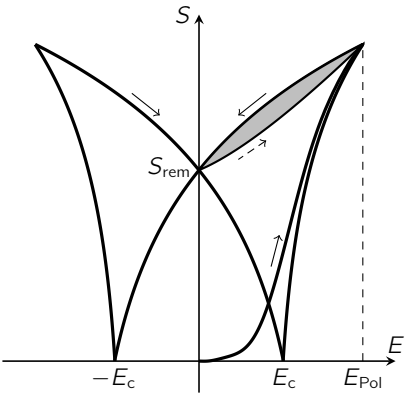


Bild 2.3: *Schmetterlingshysterese der Dehnung*

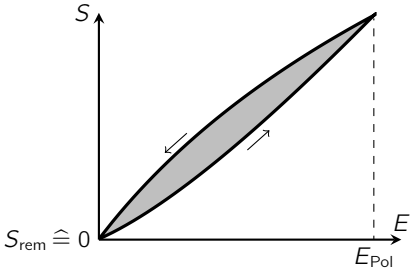


Bild 2.4: *Dehnungshysterese bei unipolarer Anregung*

schen Feldes im Wesentlichen als remanente Polarisation P_{rem} verbleibt. Diese remanente Polarisation P_{rem} ist mit einer remanenten Dehnung S_{rem} verbunden (Piezoelektrizität).

Das makroskopische Verhalten bei veränderlichem, äußerem elektrischen Feld kann mit der dielektrischen Hysterese (auch Polarisationshysterese) nach Bild 2.2 und durch die sogenannte »Schmetterlingshysterese« der Dehnung entsprechend Bild 2.3 dargestellt werden.

Für die technische Anwendung der Piezokeramiken als Aktor wird im Allgemeinen nach der Polarisierung der unipolare Betriebsbereich $0 \leq E \leq E_{Pol}$ genutzt. Bipolarer Betrieb mit einem äußeren elektrischen Feld, das dem ursprünglichen Polarisierungsfeld entgegengerichtet ist, führt bei Überschreiten der Koerzitivfeldstärke E_c zu einer Umpolarisierung der Keramik. Bei bipolarem Betrieb im eingeschränkten Bereich $-E_c < E \leq E_{Pol}$ ist im Vergleich zum unipolaren Betrieb eine stärkere Nichtlinearität und Hysterese zu verzeichnen (vgl. dazu Abbildungen 2.2 und 2.3).

Wird für ein Funktionsmodell der piezokeramischen Aktoren und Sensoren von einem bereits polarisierten Material ausgegangen, so kann als Dehnungsbezugspunkt der Zustand ohne Wirkung eines äußeren elektrischen Feldes mit remanenter Dehnung und remanenter Polarisation gewählt werden. Diese Wahl des Dehnungsbezugspunktes ist insofern auch anwendungsorientiert, da im Normalfall eine Applikation der bereits polarisierten piezokeramischen Elemente auf eine beanspruchungsfreie passive Struktur erfolgt. Die Abhängigkeit der Dehnung vom äußeren elektrischen Feld stellt sich für eine unipolare

Ansteuerung in diesem Anwendungskoordinatensystem entsprechend Bild 2.4 dar und ist mit einer Hysterese verbunden.

Bei Polarisierung im Anschluss an eine mechanische Integration wie dies z. B. für thermoplastverbundkompatible Piezomodule relevant ist [Hufenbach et al. 2009a,b], ist die Belastungsabhängigkeit der »Schmetterlingshysterese« von Bedeutung. Dies ist nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit, sondern wird z. B. durch Nicolai et al. [2007] untersucht.

Das Hystereseverhalten piezokeramischer Aktoren ist insbesondere bei einer Ansteuerung mit großen Feldstärkeänderungen (Großsignalverhalten) von Bedeutung. Für die Beschreibung der elektro–mechanischen Hysterese werden verschiedene Ansätze untersucht [Smith 2005; Damjanovic 2005; Hegewald 2008; Kuhnen 2008; Kaltenbacher et al. 2010]. In dieser Arbeit wird das Hystereseverhalten nicht betrachtet.

Mit den ferroelektrischen und piezoelektrischen Eigenschaften von Piezokeramiken ist auch immer Pyroelektrizität verbunden. Die in dieser Arbeit im Fokus stehende Anwendung der Piezokeramiken als Aktor oder Sensor für dynamische, mechanische Systeme betrifft einen wesentlich höheren Frequenzbereich als für Temperaturänderungen solcher Systeme zu erwarten ist. Für quasistatische Zustandsänderungen der Piezokeramiken erfolgt andererseits aufgrund von elektrischen Verlustströmen ein Ladungsabbau. Deshalb wird der pyroelektrische Effekt in dieser Arbeit vernachlässigt.

2.2 Aufbau von Piezoverbundmodulen

In diesem Abschnitt wird der prinzipielle Aufbau von Piezoverbundmodulen dargestellt. Es werden wesentliche Aspekte für die Modellbildung erläutert, die sich aus Aufbau und Funktionsweise ergeben.

In den Abbildungen 2.5 und 2.6 sind beispielhaft zwei verschiedene Piezoverbundmodule fotografisch abgebildet. Unabhängig von der konkreten materiellen und geometrischen Ausformung bestehen die Piezoverbundmodule aus einem oder mehreren strukturellen Trägermaterialien, dem eigentlichen piezoelektrischen Körper bzw. mehreren piezoelektrischen Basiselementen und einem Elektrodenpaar (vgl. Bild 2.7). Je nach Anwendungsfall ist auch die Verwendung mehrerer unabhängiger Elektrodenpaare in einem Piezoverbundmodul denkbar.

Die Elektroden dienen im aktorischen Betrieb der Piezoverbundmodule dazu, ein elektrisches Feld möglichst verlustarm in den piezoelektrischen Körper einzukoppeln bzw. den piezoelektrischen Körper einem elektrischen Feld auszusetzen. Dazu wird eine elek-

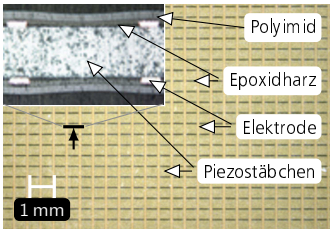


Bild 2.5: *›Macro Fiber Composite‹ Aktor/Sensor, Draufsicht[a] und Querschnitt[b] entlang einer Piezofaser*

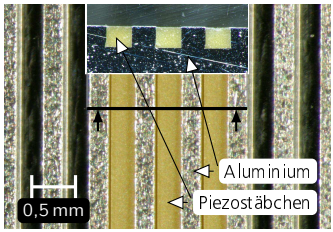


Bild 2.6: *Piezo–Metall–Modul[c], Draufsicht und Querschnitt eines Versuchsmusters zur Untersuchung des Fügens der Piezostäbchen in die Metallkavitäten (hier ohne Elektroden und Isolation)*

[a] bereitgestellt von Frau Dr. Andrea Böhm, Fraunhofer IWU
[b] bereitgestellt von Herrn Sebastian Hensel, Fraunhofer IWU
[c] [Schubert et al. 2010a]

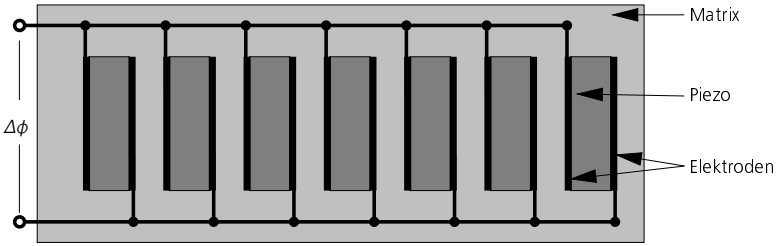


Bild 2.7: *Schematischer Aufbau von Piezoverbundmodulen*

trische Potentialdifferenz zwischen dem Elektrodenpaar angelegt bzw. den Elektroden Ladungen zugeführt. Dies ist als elektrische Randbedingung im Modell abzubilden.

Das elektrische Feld im Inneren des piezoelektrischen Körpers und die zugehörigen elektrischen Potentiale werden von der Potential- bzw. Ladungsdifferenz an den Elektroden *und* von der mechanischen Verformung des piezoelektrischen Körpers bestimmt. Der von der mechanischen Verformung abhängige Teil wird auch als dehnungsinduziertes Potential [›strain induced potential‹ z. B. bei Benjeddou 2008] bezeichnet.

Für die Modellbildung ist wesentlich, dass zwischen den äußeren Potentialen an den Elektroden und den Potentialen im Inneren unterschieden wird. Freie Ladungen treten im Inneren des piezoelektrischen Körpers nicht auf, sondern nur als Randbedingung oder Reaktionslast an den Elektroden. Die elektrischen Randbedingungen bzw. Reaktionslasten *an den Elektroden* sind die elektrischen Ein- oder Ausgangsgrößen eines

piezo–mechanischen Systems mit Piezoverbundmodulen. Dahingegen können die mechanischen Größen wie Kraft, Verschiebung oder Dehnung an beliebigem Ort des piezo–mechanischen Systems als Ein- oder Ausgangsgrößen von Interesse sein.

2.3 Modellierung piezoelektrischer Kontinua

Die Darstellung der Grundgleichungen für piezoelektrische Körper in diesem Abschnitt orientiert sich an dem Übersichtsartikel zur FE–Modellierung piezoelektrischer Strukturen von Benjeddou [2000]. Es wird eine Variablenbezeichnung in Anlehnung an [IEEE UFFC Committee on Piezoelectric Crystals 1996] verwendet. Die Grundgleichungen werden in tensorieller Schreibweise eingeführt, wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird. Im Späteren erfolgt ein Übergang zur vektoriellen Schreibweise unter Verwendung der Voigtschen Notation.

2.3.1 Gleichgewichtsbeziehungen

Die Basis der Modellierung eines piezoelektrischen Körpers Ω wird durch das volumenbezogene, mechanische Kräftegleichgewicht (Impulsbilanz) (2.1) und das elektrostatische Gleichgewicht (Ladungsbilanz) (2.2) gebildet:

$$\varrho\,\ddot{u}_i = T_{ij,j} + f_i \qquad \text{mit: } i,j \in \{1,2,3\} \tag{2.1}$$

$$D_{i,i} = 0 \quad , \tag{2.2}$$

wobei ϱ die Dichte, u_i die Komponenten der Verschiebung, T_{ij} die Komponenten der mechanischen Spannung[3], f_i die Volumenkräfte und D_i Komponenten der elektrischen Flussdichte[4] bezeichnen. Freie Volumenladungen treten in piezokeramischen Werkstoffen nicht auf und werden deshalb in Gleichung (2.2) nicht berücksichtigt.

2.3.2 Kinematische Beziehungen

Die mechanischen Verzerrungen S_{ij} ergeben sich für kleine Verformungen aus den Ortsableitungen der Verschiebungen u_i. Eine Erweiterung für große Verformungen und die Verwendung erweiterter Dehnungsmaße erscheint für piezo–mechanische Systeme nicht

[3] In dieser Arbeit wird der Begriff »Spannung« ohne weiteren Zusatz stets im Sinne der mechanischen Spannung verwendet. Für die elektrische Spannung wird der Begriff »Potentialdifferenz« verwendet.

[4] Die elektrische Flussdichte D wird auch als Verschiebungsdichte oder dielektrische Verschiebung benannt.

angebracht, da Piezokeramiken im Allgemeinen nur geringe Dehnungen (maximal im unteren einstelligen Promillebereich) erzeugen und ertragen [vgl. z. B. Dittmer et al. 2010, Tabelle II].

Die Richtungskomponenten des elektrischen Feldes E_i werden mit dem negativen Gradienten des elektrischen Potentials ϕ gebildet:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.3}$$

$$E_i = -\phi_{,i} \quad . \tag{2.4}$$

2.3.3 Randbedingungen

Ein piezoelektrischer Körper Ω kann an seiner Oberfläche bzw. an seinem Rand Γ verschiedenartigen Randbedingungen bzw. einer Kombination dieser Randbedingungen ausgesetzt sein. Im Allgemeinen werden unterschieden:

1. mechanische Randbedingungen
   (a) für die Verschiebungen auf dem Teilrand Γ_u (wesentliche, geometrische bzw. Dirichlet–Randbedingung)

   $$u_i = u_i^\mathrm{o} \quad , \tag{2.5}$$

   (b) für die Spannungen an der Oberfläche auf dem Teilrand Γ_T (natürliche, dynamische bzw. Neumann–Randbedingung)

   $$T_{ij}\, n_j = p_i^\mathrm{o} \quad , \tag{2.6}$$

2. elektrische Randbedingungen
   (a) für das Potential auf dem Teilrand Γ_ϕ (wesentliche Randbedingung)

   $$\phi = \phi^\mathrm{o} \quad , \tag{2.7}$$

   (b) für die Ladungen an der Oberfläche auf dem Teilrand Γ_D (natürliche Randbedingung)

   $$D_i\, n_i = -\sigma^\mathrm{o} \quad . \tag{2.8}$$

Potentialrandbedingungen und von Null verschiedene Ladungsrandbedingungen sind örtlich nur den Elektroden zuzuordnen.

Für die mechanischen Randbedingungen ergeben sich aus dem Aufbau der Piezoverbundmodule a priori keine Einschränkungen hinsichtlich des konkreten Ortes der jeweiligen Randbedingung.

2.3.4 Materialbeziehungen

Allgemein

Mit den in Abschnitt 2.1 beschriebenen Eingrenzungen kann das piezo–mechanische Verhalten mit Hilfe eines linearen, elektro–elastischen Zusammenhanges zwischen den mechanischen Größen Spannung T_{ij} und Verzerrung S_{ij} sowie den elektrischen Größen Flussdichte D_i und Feldstärke E_i beschrieben werden [Ikeda 1996; Benjeddou 2000]:

$$T_{ij} = c^{\mathrm{E}}_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \qquad \text{mit: } i,j,k,l \in \{1,2,3\} \tag{2.9}$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon^{\mathrm{S}}_{ik} E_k \quad . \tag{2.10}$$

Dabei bezeichnen c^{E}_{ijkl}, e_{kij} und $\varepsilon^{\mathrm{S}}_{ik}$ in der entsprechenden Reihenfolge die elastischen Steifigkeitskoeffizienten bei konstantem elektrischen Feld, die piezoelektrischen Spannungskoeffizienten und die Permittivitäten bei konstanter mechanischer Dehnung. Eine Herleitung dieser Materialgleichungen auf Grundlage der elektrischen Enthalpie kann z. B. bei Butz [2006, Kapitel 3] gefunden werden.

Werden statt Verzerrung S_{ij} und Feldstärke E_i andere Zusammenstellungen von unabhängigen Größen und zugehörige thermodynamische Potentiale betrachtet, so erhält man folgende drei alternative Materialbeschreibungen [Ikeda 1996]:

$$T_{ij} = c^{\mathrm{D}}_{ijkl} S_{kl} - h_{kij} D_k \tag{2.11}$$

$$E_i = -h_{ikl} S_{kl} + \beta^{\mathrm{S}}_{ik} D_k \quad , \tag{2.12}$$

$$S_{ij} = s^{\mathrm{E}}_{ijkl} T_{kl} + d_{kij} E_k \tag{2.13}$$

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon^{\mathrm{T}}_{ik} E_k \quad , \tag{2.14}$$

$$S_{ij} = s^{\mathrm{D}}_{ijkl} T_{kl} + g_{kij} D_k \tag{2.15}$$

$$E_i = -g_{ikl} T_{kl} + \beta^{\mathrm{T}}_{ik} D_k \quad . \tag{2.16}$$

Die Größen c^{D}_{ijkl}, s^{D}_{ijkl} und s^{E}_{ijkl} bezeichnen dabei die elastische Steifigkeit bzw. Nachgiebigkeit bei konstanter elektrischer Flussdichte bzw. konstantem elektrischen Feld. Die piezoelektrischen Kopplungskoeffizienten werden je nach Gleichungsgruppe mit h_{kij}, d_{kij} und g_{kij} benannt. Die Größen β^{S}_{ik} und β^{T}_{ik} stehen für die reziproken Permittivitäten bei konstanter mechanischer Dehnung bzw. Spannung.

Die Materialparameter der vier gleichwertigen Materialbeschreibungen können ineinander überführt werden (s. Anhang A). Hersteller von technischen Piezokeramiken stellen im Allgemeinen ausgewählte Materialparameter bezogen auf die Gleichungen (2.13) und (2.14) zur Verfügung [vgl. z. B. PI Ceramic], also Nachgiebigkeiten s^{E}_{ijkl} und piezoelektrische Verzerrungskonstanten d_{kij}. Im FEM–System ANSYS® werden Parametereingaben entsprechend den Gleichungen (2.9) und (2.10) sowie den Gleichungen (2.13) und (2.14) umgesetzt [ANSYS, Theoriehandbuch: Kapitel Piezoelektrizität].

Polarisation

In Dielektrika setzt sich die elektrische Flussdichte D aus einem materialunabhängigen und einem materialimmanenten Anteil zusammen. Der materialimmanente Anteil entspricht der im Körper induzierten Polarisation P (angegeben in eindimensionaler Darstellung, vgl. dazu z. B. [Piefort 2001, Abschnitt 2.1]):

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad . \tag{2.17}$$

Entsprechend dem materiellen Zusammenhang zwischen elektrischer Flussdichte D und elektrischem Feld E in Dielektrika kann die Polarisation P angegeben werden mit:

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0) E \quad . \tag{2.18}$$

In piezoelektrischen Körpern kommt zu dieser feldinduzierten Polarisation die dehnungsinduzierte Polarisation eS hinzu:

$$P = (\varepsilon - \varepsilon_0) E + eS \quad , \tag{2.19}$$

was wiederum zur Materialgleichung (2.10) führt:

$$D = eS + \varepsilon^{S} E \quad . \tag{2.20}$$

Die Aufteilung der elektrischen Flussdichte in den materialunabhängigen Anteil $\varepsilon_0 E$ und die materialgebundene Polarisation P ist für die Betrachtungen dieser Abhandlung nicht relevant, da Polarisierungsvorgänge und Hystereseverhalten der Piezoverbundmodule

(und damit eine weitere Aufteilung von Polarisation und Dehnung in reversible und irreversible Anteile [Hegewald 2008]) entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 2.1 nicht untersucht werden.

Die Polarisation liefert keinen Beitrag zu den freien Ladungen [Piefort 2001]. Dementsprechend ist das elektrostatische Gleichgewicht mit Gleichung (2.2) und den Randbedingungen nach Gleichung (2.7) bzw. (2.8) basierend auf der elektrischen Flussdichte D ausreichend beschrieben.

Die Berücksichtigung der remanenten Polarisation piezoelektrischer Körper P_{rem} und der mit ihr verbundenen remanenten Dehnung S_{rem} in den Materialgleichungen führt zu der folgenden Form:

$$T = c^{\mathrm{E}}(S - S_{\mathrm{rem}}) - eE \tag{2.21}$$

$$D = e(S - S_{\mathrm{rem}}) + \varepsilon^{\mathrm{S}} E + P_{\mathrm{rem}} \quad . \tag{2.22}$$

Diese Formulierung entspricht der linearisierten Darstellung des piezoelektrischen Verhaltens in Koordinatensystemen nach Bild 2.2 bzw. 2.3, die Materialgleichungen (2.9) und (2.10) hingegen beziehen sich auf das Koordinatensystem nach Bild 2.4. Eine remanente Polarisation ist essentiell für die Ausbildung piezoelektrischen Verhaltens in Piezokeramiken. In die funktionelle Beschreibung des piezoelektrischen Verhaltens muss sie jedoch nicht explizit einbezogen werden. Wesentlich ist lediglich die Berücksichtigung der Ausrichtung des remanenten Polarisationsvektors bei der konkreten Formulierung der Richtungsabhängigkeit des Materialverhaltens.

Richtungsabhängigkeit

Die allgemeine Materialmodellierung unter Verwendung von Tensoren stellt den formalen Rahmen zur Beschreibung von richtungsabhängigen Materialparametern zur Verfügung. Die konkrete Ausformung der Richtungsabhängigkeit ist jedoch nicht zu erkennen.

Bei technisch relevanten, polykristallinen, piezoelektrischen Keramiken tritt eine Materialvorzugsrichtung auf, die Ausrichtung des remanenten Polarisationsvektors. Sowohl das elastische und das dielektrische Verhalten als auch die piezoelektrische Kopplung in Polarisationsrichtung unterscheiden sich quantitativ von den anderen (rechtwinklig zur Polarisationsrichtung liegenden) Koordinatenrichtungen. Das homogene piezoelektrische Material kann im Allgemeinen als transversal isotropes Material beschrieben werden.

In [IEEE UFFC Committee on Piezoelectric Crystals 1996, Tabelle 8] sind für alle 32 Kristallklassen die konkreten Richtungsabhängigkeiten und die entsprechenden Materialmatrixbelegungen angegeben; ebenso die Zuordnung, ob die jeweilige Kristallklasse piezo-

elektrisches Verhalten zeigt. In der vorliegenden Arbeit werden diese weiteren möglichen Richtungsabhängigkeiten jedoch nicht explizit ausgeführt, da für die betrachteten polykristallinen Piezokeramiken lediglich die Kristall- bzw. Symmetrieklasse *6mm* und damit hexagonales bzw. transversal isotropes Materialverhalten von Belang ist [IEEE UFFC Committee on Piezoelectric Crystals 1996, Seite 23].

Bei Bezeichnung der drei kartesischen Koordinatenrichtungen mit 1, 2 und 3 kennzeichnet die 3–Richtung im Allgemeinen die Polarisationsrichtung. Das Verhalten in 1– und 2–Richtung ist identisch. Die entsprechenden Indizes der Materialparameter müssen nicht unterschieden werden.

Das elastische Verhalten wird für transversal isotropes Material mit 5 unabhängigen Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitskonstanten beschrieben, das dielektrische Verhalten durch 2 Permittivitätskoeffizienten.

Für die betrachteten piezokeramischen Materialien sind drei piezoelektrische Kopplungen zu verzeichnen:

1. Ein elektrisches Feld E_3 in Polarisationsrichtung bewirkt eine Normaldehnung S_{33} in Polarisationsrichtung. Diese Kopplung wird als d_{33}–Effekt[5] bezeichnet.

2. Ein elektrisches Feld E_3 in Polarisationsrichtung bewirkt auch eine Normaldehnung S_{11} bzw. S_{22} quer zur Polarisationsrichtung. Diese Kopplung wird als d_{31}–Effekt[5] bezeichnet.

3. Ein elektrisches Feld E_1 bzw. E_2 quer zur Polarisationsrichtung bewirkt eine Schubverzerrung S_{31} bzw. S_{32} in der Ebene, die vom Polarisationsvektor und dem angelegten elektrischen Feld aufgespannt wird. Diese Kopplung wird als d_{15}–Effekt[5] bezeichnet.

Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Spannungs- und Verzerrungstensoren und des transversal isotropen Materialverhaltens sowie der auftretenden piezoelektrischen Kopplungen kann die Materialbeschreibung nach den Gleichungen (2.9) und (2.10) bei

[5] Der erste Index des Kopplungskoeffizienten gibt hierbei die Richtung des angelegten Feldes an, der zweite Index die Verzerrungsrichtung, wobei dafür die Voigtsche Notation verwendet wird.

Verwendung der Voigtschen Notation[6] in der Vektor/Matrixschreibweise konkretisiert werden:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^{\mathrm{E}} & c_{12}^{\mathrm{E}} & c_{13}^{\mathrm{E}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^{\mathrm{E}} & c_{11}^{\mathrm{E}} & c_{13}^{\mathrm{E}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^{\mathrm{E}} & c_{13}^{\mathrm{E}} & c_{33}^{\mathrm{E}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{\mathrm{E}} & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{\mathrm{E}} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}^{\mathrm{E}} - c_{12}^{\mathrm{E}}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^{\mathrm{S}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^{\mathrm{S}} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} . \tag{2.23}$$

Zur formalen Verdeutlichung der physikalischen Effekte Elastizität, Permittivität und piezoelektrische Kopplung kann die Materialmatrix nach Gleichung (2.23) aufgeteilt werden:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}} & -\boldsymbol{e}' \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

oder, dazu äquivalent, symmetrisch dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}} & \boldsymbol{e}' \\ \boldsymbol{e} & -\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{S} \\ -\boldsymbol{E} \end{pmatrix} . \tag{2.25}$$

Die Matrix der piezoelektrischen Spannungskonstanten $\boldsymbol{e}$ wird in dieser Abhandlung, wie in Gleichung (2.24) eingeführt, als Matrix mit 3 Zeilen und 6 Spalten betrachtet[7]. Der erste Index gibt die Richtung des elektrischen Feldes an, der zweite Index die Verformungsrichtung.

2.3.5 Finite–Elemente–Formulierung

Eine schwache Variationsformulierung der Gleichgewichtsbedingungen (Abschnitt 2.3.1) bei Berücksichtigung von zusätzlichen mechanischen Dämpfungskräften, den Feldbezie-

[6] Die Voigtsche Notation berücksichtigt die Symmetrie der Spannungs- und Verzerrungstensoren und reduziert die verwendeten Richtungsindizes (s. Begriffserklärungen). Variable Indizes der Spannungen und Verzerrungen, die sich auf die Voigtsche Notation beziehen, werden im Weiteren mit μ und ν bezeichnet, im Gegensatz zu den variablen Indizes der tensoriellen Komponenten i, j, k und l.

[7] Im FEM–System ANSYS® erfolgt die Notation der Matrix der piezoelektrischen Spannungskonstanten als Matrix mit 6 Zeilen und 3 Spalten [vgl. ANSYS].

hungen (Abschnitt 2.3.2) und dem Materialgesetz (Abschnitt 2.3.4) führt unter Verwendung von Formfunktionen $\boldsymbol{N}_{\mathrm{u}}$ und $\boldsymbol{N}_{\Phi}$ als Finite–Elemente–Ansätze für die Verschiebungen und Potentiale zu einem Matrizen–Gleichungssystem als Bewegungsgleichung des diskretisierten piezo–mechanischen Systems:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi} \\ \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\Phi} & \boldsymbol{K}_{\Phi\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad . \tag{2.26}$$

Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{u}$ den Vektor der mechanischen Freiheitsgrade (DOF) des Modells (Knotenverschiebungen) und $\boldsymbol{\phi}$ den Vektor der elektrischen DOF des Modells (Knotenpotentiale) sowie $\boldsymbol{M}$ die mechanische Massenmatrix, $\boldsymbol{C}$ die mechanische Dämpfungsmatrix, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}$ die mechanische Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi}$ die piezoelektrische Kopplungsmatrix und $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$ die elektrische Steifigkeits- bzw. Kapazitätsmatrix. Die Matrizen $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}$ und $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$ sind symmetrisch.

Der Vektor der äußeren Knotenkräfte wird mit $\boldsymbol{F}$ benannt und der Vektor der (negativen) Knotenladungen mit $\boldsymbol{Q}$. Im Weiteren wird mit dem Begriff *verallgemeinerte Kräfte* der vollständige Lastvektor aus mechanischen Kräften $\boldsymbol{F}$ und elektrischen Ladungen $\boldsymbol{Q}$ verstanden. *Verallgemeinerte Verschiebungen* steht in Analogie dazu für den vollständigen Vektor der DOF des Systems, also für die mechanischen Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und die elektrischen Potentiale $\boldsymbol{\phi}$.

Herleitungen dieser Bewegungsgleichung auf Grundlage der schwachen Variationsformulierung des Gleichgewichtes werden u. a. durch Allik et al. [1970]; Thomas et al. [2009] und Dinkler et al. [2010] vorgestellt.

Im FEM–System ANSYS® wird diese Bewegungsgleichung (2.26) für 8-, 10- und 20-knotige 3D–Solid–Elementtypen (SOLID5, SOLID98, SOLID227, SOLID226) sowie für 4- und 8-knotige 2D–Solid–Elementtypen (PLANE13, PLANE223) umgesetzt. Die im FEM–System ANSYS® verwendete Diskretisierung basiert auf der Materialbeschreibung entsprechend der Gleichungen (2.9)/(2.10) bzw. Gleichung (2.23) [ANSYS; Allik et al. 1970]. Die Variationsformulierung führt dazu, dass

- die Gesamtsteifigkeitsmatrix symmetrisiert wird (obwohl in der Materialgleichung (2.24) für die piezoelektrische Kopplung die negative Transponierte für den piezoelektrischen Kopplungsterm auftritt),
- die Komponenten der elektrischen Steifigkeitsmatrix mit den negativen Permittivitäten gebildet werden und
- der elektrische Lastvektor $\boldsymbol{Q}$ für die negativen elektrischen Ladungen steht.

Da in dieser Abhandlung die Ladungen $\boldsymbol{Q}$ entweder als äußere Lasten oder als Randbedin-

gungsreaktionen des jeweils betrachteten piezo–mechanischen Systems auftreten (also am Systemrand), muss diese Vorzeichenkonvention nicht explizit berücksichtigt werden. Zu beachten ist sie, wenn das piezo–mechanische System an andere elektrische Teilsysteme angekoppelt wird.

Die Entwicklung von piezoelektrischen Schalen-, Platten- und Balkenelementtypen ist Gegenstand weiterführender Forschung [Benjeddou 2000; Piefort 2001; Mesecke-Rischmann 2004; Lammering et al. 2006; Marinkovic 2007] und hat bisher nur beschränkten Eingang in kommerzielle FE–Systeme gefunden.

2.4 Zustandsraumbeschreibung mechanischer Systeme

Die Zustandsraumdarstellung ist eine Form der Modellierung allgemeiner dynamischer Systeme mit Hilfe eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese Darstellungsform wird z. B. beim Regelungsentwurf eingesetzt [Föllinger 1994]. Zusätzlich zum System der Differentialgleichungen wird eine algebraische Matrix–Gleichung zur Definition der Ausgangsgrößen des Systems verwendet. Die allgemeine Form eines Zustandsraummodells besteht aus der Zustandsgleichung (2.27) und der Ausgangsgleichung (2.28):

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(t) \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{L}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{U}\boldsymbol{f}(t) \quad , \tag{2.28}$$

wobei $\boldsymbol{z}$ den Zustandsvektor repräsentiert, $\boldsymbol{f}$ den Eingangsvektor und $\boldsymbol{y}$ den Ausgangsvektor. Die verwendeten Matrizen werden wie folgt bezeichnet: $\boldsymbol{A}$ ist die Systemmatrix, $\boldsymbol{B}$ die Eingangs- bzw. Steuermatrix, $\boldsymbol{L}$ die Ausgangs- bzw. Beobachtungsmatrix und $\boldsymbol{U}$ die Durchgangsmatrix. Für lineare, zeitinvariante Systeme sind die Matrixkomponenten konstant. Die Zeitabhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{y}$ wird im Weiteren nicht mehr explizit angegeben. Ein Zustandsraummodell kann als Blockschaltbild entsprechend Bild 2.8 dargestellt werden.

Die Bewegungsgleichung rein mechanischer Systeme (2.29), als Teil der piezo–mechanischen Bewegungsgleichung (2.26), kann in eine Zustandsraumdarstellung nach den Gleichungen (2.27) und (2.28) überführt werden, wenn die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ (also die DOF des FE–Modells) und die ersten zeitlichen Ableitungen (Geschwindigkeiten) $\dot{\boldsymbol{u}}$ als Zustandsvektor $\boldsymbol{z}$ zusammengefasst werden [Hardtke et al. 1997; Hatch 2001]:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \tag{2.29}$$

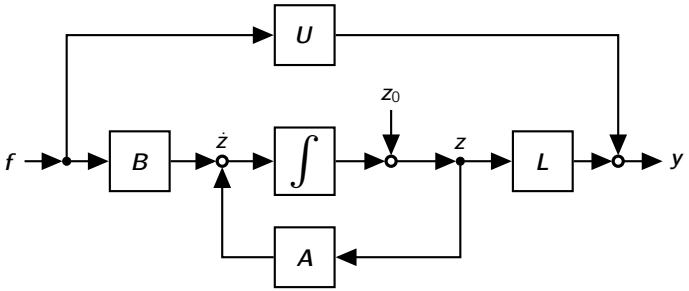


Bild 2.8: *Allgemeines Blockschaltbild eines Zustandsraummodells*

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{M}^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{F} \tag{2.31}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} \quad . \tag{2.32}$$

Die Systemgleichung (2.31) enthält hierbei die invertierte Massenmatrix $\boldsymbol{M}^{-1}$. Die Ausgangsgleichung (2.32) ist an dieser Stelle so formuliert, dass alle Verschiebungen und Geschwindigkeiten als Ausgangsgrößen betrachtet werden. Falls nur ausgewählte Verschiebungen und Geschwindigkeiten als Ausgangsgrößen von Interesse sind, reduziert sich die Belegung der Ausgangsmatrix $\boldsymbol{L}$. Sofern keine Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{u}}$ oder Kräfte $\boldsymbol{F}$ als Ausgangsgrößen erfasst werden, tritt im mechanischen Zustandsraummodell kein Durchgangsterm $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{f}$ auf.

Die Zustandsraumdarstellung ist a priori ein Modell im Zeitbereich. Es kann mit Hilfe der Laplace–Transformation:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad \text{mit: } s = \delta + \mathrm{i}\omega \tag{2.33}$$

in den Bild- bzw. Frequenzbereich überführt werden. Für zeitinvariante Systeme bleiben die Modellmatrizen unverändert bestehen:

$$s\boldsymbol{Z}(s) - z_0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(s) \tag{2.34}$$

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{L}\boldsymbol{Z}(s) + \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}(s) \quad . \tag{2.35}$$

Die Umsetzung der Laplace–Transformation erfolgt im Allgemeinen in Systemsimulationsprogrammen wie z. B. [MATLAB®]. Damit stehen zur Darstellung des Antwortverhaltens des Modells sowohl die Formen des Zeitbereiches (Sprung- und Impulsantwort) als auch die Formen des Frequenzbereiches (Übertragungsfunktion, Pol–Nullstellen–Diagramm, Ortskurve, . . .) zur Verfügung.

3 Stand der Forschung

3.1 Ermittlung effektiver Materialparameter piezoelektrischer Verbunde

Die praktische Entwicklung von Piezoverbundmodulen für die Verwendung als Aktor oder Sensor wurde in den letzten Jahren durch theoretische Überlegungen zur Modellbildung begleitet. Dabei wurde der Ermittlung der effektiven Materialparameter piezoelektrischer Verbundwerkstoffe eine wesentliche Bedeutung zugemessen.

Wesentliche Grundlagen für die Bestimmung effektiver Materialparameter für mechanische Verbundwerkstoffe wurden durch Hill [1963] mit den Darlegungen zu der, im Späteren Hill–Mandel–Bedingung bezeichneten, Äquivalenz der Formänderungsenergiedichte des inhomogenen Verbundes und des effektiven, homogenen Materials gelegt. Ebenso führte Hill [1965] das Konzept der selbstkonsistenten Modelle ein. Auf diesen Arbeiten basieren auch die späteren Untersuchungen zu piezoelektrischen Verbunden.

Für die piezoelektrischen Verbunde wurde eine erste Homogenisierungsmethode durch Skinner et al. [1978] und Newnham et al. [1978] mit der Kombination von Parallel- und Serienschaltung (Voigt– und Reuss–Modelle) entwickelt. Weitere wesentliche Arbeiten, die auf analytischem Wege effektive Materialparameter piezoelektrischer Verbunde bestimmen, stammen von Schulgasser [1992], Dunn et al. [1993], Bent et al. [1997] und Tan et al. [2001]. Die analytischen Methoden reichen von klassischen Mischungsregeln auf Grundlage der Volumenanteile der Verbundbestandteile [Schulgasser 1992] über die sogenannte ›unified field‹–Methode (UFM) [Bent et al. 1997] bis zu asymptotischen Ansätzen (›asymptotic homogenisation‹–Methode (AHM)) [Bravo-Castillero et al. 2001; Sabina et al. 2001]. Diese analytischen Modelle sind numerisch effizient und liefern im Rahmen ihrer Annahmen Abschätzungen für die effektiven Materialparameter. Wesentlicher Nachteil dieser analytischen Methoden ist der Umstand, dass geometrische Vereinfachungen der Verbundstruktur und vereinfachende Annahmen zur Einkopplung des elektrischen Feldes vorgenommen werden. Eine räumlich veränderliche Polarisationssrichtung und gekrümmte Feldlinien, wie sie z. B. bei interdigital elektrodierten MFC auftreten, können damit nicht bzw. nur näherungsweise behandelt werden.

Deshalb wird seit einigen Jahren verstärktes Augenmerk auf die Entwicklung FEM–basierter Homogenisierungsmethoden gelegt. Diese FEM–basierten Methoden gehen alle von einem repräsentativen Teilvolumen bzw. einer Einheitszelle (EZ) des Piezoverbundes aus (Einheitszellenmethode, ›unit cell‹–Methode). Mit Hilfe spezieller Randbedingungen

werden Lastfälle für die EZ konstruiert, aus deren Ergebnissen die effektiven Materialparameter hergeleitet werden.

Bent et al. [1997] nutzen ein FE–Modell für interdigital elektrodierte Piezofaserverbunde zum Vergleich ausgewählter Materialparameter mit den analytisch mittels ›unified field‹–Methode (UFM) bestimmten Werten. Schubmoduli werden dabei nicht betrachtet. Die Ausrichtung der Polarisierung wird auch im FE–Modell vereinfacht einheitlich in Faserlängsrichtung angesetzt.

Auch Poizat et al. [1999] konzentrieren sich auf die longitudinalen und transversalen Komponenten der piezoelektrischen Kopplungsmatrix $\boldsymbol{e}$. Sie untersuchen verschiedene Faserformen und Anordnungen.

In der Arbeit von Pettermann et al. [2000] werden für die Bestimmung des vollständigen Satzes von Materialparametern entsprechend einem transversal isotropen piezoelektrischen Verbund Randbedingungen für die EZ konstruiert. Dabei werden Masterknoten für jeden Rand verwendet. Pettermann et al. bestimmen die effektiven Materialparameter anhand der an den Masterknoten vorgegebenen effektiven Verschiebungen und Potentiale und den daraus resultierenden Reaktionskräften bzw. elektrischen Ladungen.

Beckert et al. [2001, 2003] verwenden die Einheitszellenmethode, um Bezugswerte für die effektiven Materialparameter von Verbunden aus piezobeschichteten Fasern bzw. interdigital elektrodierten Piezofaserverbunden zum Vergleich mit analytisch ermittelten Materialparametern zu erhalten. Konkrete Details zur Gestaltung der Randbedingungen der EZ werden nicht angegeben.

Steinhausen [2002] nutzt in seiner Arbeit eine Reihe von speziell konstruierten Lastfällen, um ausgewählte Materialparameter für piezokeramische 1–3 Komposite für Ultraschallanwendungen abzuleiten. Die Randbedingungen werden dabei explizit für jeden Rand vorgegeben. Die Methode wird in der Arbeit von Steinhausen vor allem verwendet, um eine analytische Abschätzung auf Grundlage der Mischungsregel abzugleichen. Diese analytische Abschätzung wird dann im Umkehrschluss genutzt, um aus gemessenen Materialparametern des Piezoverbundes auf die realen Materialparameter des Piezomaterials zu schließen. Steinhausen setzt das FE–Modell der EZ auch ein, um Schwingformen und Impedanzspektren des Piezoverbundes zu ermitteln.

Lenglet et al. [2002, 2003]; Lenglet [2003] kombinieren die Einheitszellenmethode mit einer Wellenausbreitungsberechnung um den vollständigen Materialparametersatz für einen Piezofaserverbund mit zylindrischen Fasern zu bestimmen. Mit der Wellenausbreitungsberechnung ermitteln Lenglet et al. die elastischen Schubmoduli und die mit einer Schubverzerrung verbundene piezoelektrische Konstante e_{15}. Die Wellenausbreitungsberechnung ist nach Einschätzung von Lenglet et al. die für diese Lastfälle einfachere Me-

thode im Vergleich zur Einheitszellenmethode und zwar aufgrund der Kompliziertheit der notwendigen Randbedingungen an der EZ. Wie in Kapitel 4 gezeigt wird, unterscheiden sich die Randbedingungen für die verschiedenen Einheitslastfälle bei entsprechender Formalisierung jedoch nicht dem Wesen nach.

In den Arbeiten von Berger et al. [2005, 2006] werden wie durch Pettermann et al. [2000] für die EZ allgemeine Randbedingungen konstruiert, um den vollständigen linearen piezoelektrischen Materialparametersatz für Piezoverbundmodule mit zylindrischen Piezofasern zu bestimmen. Berger et al. [2006] verwenden dabei keine Masterknoten, sondern Zwangsbedingungen zwischen den Knoten gegenüberliegender Ränder, wobei dieses Grundkonzept für die verschiedenen betrachteten Lastfälle stark spezialisiert wird. Berger et al. [2010] wenden diese Methodik auch für Piezofaserverbunde mit zufällig verteilten Fasern an. Die EZ enthält in diesem Fall mehrere statistisch verteilte Fasern. Auch Fröhlich [2001] verwendet stochastisch zusammengesetzte repräsentative Volumenelemente um effektive Materialparameter piezoelektrischer Polykristalle, ausgehend von einer zufälligen Orientierung der Kristallkörner, zu bestimmen.

Weitere Autoren wie z. B. Enab [2009]; Deraemaeker et al. [2009, 2010] nutzen den Ansatz von Berger et al. [2006] bzw. eine vergleichbare Methodik, um die effektiven Materialparameter spezieller Anordnungen (hexagonale EZ bei Enab) bzw. spezieller Piezoverbundmodule (wie z. B. MFC bei Deraemaeker et al.) zu bestimmen. Deraemaeker et al. spezialisieren den allgemeinen Ansatz, indem die Periodizität des Piezoverbundmoduls nur in einzelnen Koordinatenrichtungen berücksichtigt wird bzw. die Normalspannung in Dickenrichtung des MFC vernachlässigt wird.

Bei Deraemaeker et al. [2010] wird auch explizit das Problem innerhalb der EZ liegender Elektroden adressiert. Bei der Einkopplung des elektrischen Feldes über Elektroden, die innerhalb der zu betrachtenden EZ liegen (z. B. Interdigitalelektroden bei MFC), entspricht die Feldeinkopplung für die Homogenisierungslastfälle an den Rändern der EZ nicht den realen Gegebenheiten. Deraemaeker et al. verwenden deshalb Makrovariablen für das elektrische Potential und die elektrische Ladung an den Elektroden für die elektrischen Homogenisierungslastfälle. Ähnliches Vorgehen wurde auch bereits durch Beckert et al. [2001] für piezobeschichteten Fasern und den Autor der vorliegenden Arbeit für Piezohohlfasern [Kranz et al. 2005] praktiziert.

Allen aufgeführten Arbeiten ist gemeinsam, dass die Auswertung der Lastfälle an der EZ über die Bestimmung von mittleren Spannungen und elektrischen Flussdichten bei vorgegebenen mittleren Dehnungen und elektrischen Feldstärken erfolgt. Eine in der vorliegenden Arbeit demonstrierte Alternative ist die energetische Äquivalenz von inhomogener EZ und effektivem Material, wie sie für mechanische Verbundmaterialien durch

Hill [1963] angegeben wurde. Die formale Erweiterung der Hill–Mandel–Bedingung auf piezoelektrische Materialien wird durch Hori et al. [1998] und auch He [2004] hergeleitet. Wie Hori et al. und He zeigen, entspricht die auf Grundlage von gemittelten Beanspruchungen (Spannungen und Verzerrungen sowie elektrische Feldstärken und Flussdichten) ermittelte elektrische Enthalpie der gemittelten elektrischen Enthalpie *unter der Voraussetzung homogener Randbedingungen* (s. [Hori et al. 1998, Gleichung (8)] bzw. [He 2004, Gleichungen (9) und (10)]):

$$\bar{T}_{ij}\,\bar{S}_{ij} - \bar{D}_i\,\bar{E}_i = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} \left(T_{ij}\,S_{ij} - D_i\,E_i\right)\, d\Omega \qquad \text{mit: } i,j \in \{1,2,3\} \tag{3.1}$$

gilt genau dann, wenn gilt:

$$0 = \int_{\Gamma} \left[\left(u_i - \bar{S}_{ij}\,x_j\right)\left(T_{ij}\,n_j - \bar{T}_{ij}\,n_j\right) - \left(\phi - \bar{E}_i\,x_i\right)\left(D_i\,n_i - \bar{D}_i\,n_i\right)\right]\, d\Gamma \quad . \tag{3.2}$$

Das heißt, die Betrachtung der gemittelten Beanspruchungen ist bei Gewährleistung homogener Randbedingungen der Betrachtung der gemittelten Enthalpie äquivalent. Die energiebasierte Auswertung erscheint allerdings vorteilhafter bei der Umsetzung bzw. Formalisierung der Methodik wie in Kapitel 4 gezeigt wird. Zudem können bei direkter Auswertung der elektrischen Enthalpie ebenso Einheitszellen mit im Inneren liegenden Elektroden betrachtet werden.

Die diskutierten Arbeiten zur Modellbildung für Piezoverbundmodule beschränken sich auf die Bestimmung der effektiven Materialparameter. Eine Ermittlung von Beanspruchungen der Piezoverbundmodule auf Grundlage der effektiven Materialparameter erfolgt nicht.

Die energiebasierte Auswertung insbesondere bei Verwendung von Einheitslastfällen kann auch zur Bestimmung der Beanspruchungen der Piezoverbundkomponenten genutzt werden. Dies wurde nach Kenntnis des Autors für piezoelektrische Verbunde bisher noch nicht ausgeführt. Schmidt [2001] stellt dieses Verfahren der Lokalisierung der Beanspruchungen für elastische Strukturen und eine Umsetzung mit dem FEM–System ANSYS® am Beispiel von Fichtenholz vor. In der vorliegenden Abhandlung wird die Methodik, aufbauend auf der Arbeit von Schmidt [2001] und eigenen Arbeiten [Kranz et al. 2005, 2006], auf piezoelektrische Verbunde ausgeweitet.

3.2 Zustandsraum und Modellreduktion für piezoelektrische Modelle

Entsprechend dem Einsatz piezoelektrischer Materialien in dynamischen Anwendungen wird auch das dynamische Verhalten von piezoelektrischen Systemen untersucht und modelliert.

Hagood et al. [1990] entwickeln auf der Grundlage von Ritz–Vektoren zur räumlichen Diskretisierung des piezoelektrischen Kontinuums ein Zustandsraummodell für potential- und ladungserregte piezoelektrische Systeme. Sie verwenden dieses Zustandsraummodell eines Balkens mit piezoelektrischen Elementen zur Ankopplung einer elektrischen Schaltung für eine Widerstandsdämpfung bzw. eine Verschiebungsrückführung im geregelten Betrieb. Im Vergleich mit Experimenten stellen Hagood et al. Abweichungen bei der Abbildung der Nullstellen der Übertragungsfunktionen fest, die mit der Beschränkung auf wenige Ritz–Vektoren begründet werden.

Von Agnes [1995] wird für eine mit einem Piezoelement ausgerüstete Platte analytisch ein modales Modell hergeleitet. In das Modell geht dabei nur eine Wirkrichtung des Piezoelementes ein. Angewandt wird das Modell zur Untersuchung simultaner aktiver und passiver Schwingungsbeeinflussung.

In seiner Arbeit zur FE–Simulation von piezoelektrischen Strukturen geht Piefort [2001] auch auf die Überführung des FE–Modells in ein Zustandsraummodell ein. Piefort betrachtet dabei potentialerregte Systeme, die er mittels modaler Transformation und modaler Reduktion behandelt. Die Übertragungsfunktion des Verhältnisses von Sensorladung/Sensorstrom und elektrischer Aktorspannung als Maß für die elektrische Admittanz bzw. Impedanz des Systems korrigiert Piefort durch Verwendung einer Restmode (›residual mode‹). Auch Piefort stellt ohne diese Korrektur eine Nullstellenverschiebung der Übertragungsfunktion fest. Er weist auch auf die Auswirkungen dieser Nullstellenverschiebung für den Regelungsentwurf hin.

Durch Reaves et al. [2003] wird die Konstruktion eines Zustandsraummodells eines piezo–mechanischen Systems auf Grundlage der Analogie von piezoelektrischem Verhalten und Wärmeausdehnung beschrieben. Wie durch Côté et al. [2004] gezeigt wurde, führt diese Analogie für statische und dynamische Simulationen zu identischen Ergebnissen im Vergleich zu vollständigen piezoelektrischen Modellen. Allerdings beschränkt die Formulierung des Wärmeausdehnungsverhaltens z. B. im FEM–System ANSYS® die Anwendung auf die Normaldehnungskomponenten der piezoelektrischen Kopplung. Die Impedanz des piezo–mechanischen Systems wird bei Nutzung der Wärmeausdehnungsanalogie nicht betrachtet.

Auch Becker et al. [2006] untersuchen wie Hagood et al. [1990] die Ankopplung einer elektrischen Schaltung für eine Widerstandsdämpfung eines piezo–mechanischen Systems. Sie verwenden dafür eine modal reduzierte Zustandsraumbeschreibung ohne statische Korrektur bzw. ohne Korrektur durch Restmoden. Für die Untersuchung des Dämpfungseinflusses einer passiven elektrischen Widerstandsschaltung ist solch eine Korrektur nicht zwingend erforderlich, da die Widerstandsdämpfung auf die Resonanzbereiche der betrachteten Moden abgestimmt wird. Statisches Niveau und mögliche Nullstellenverschiebung der Übertragungsfunktionen sind für die Widerstandsdämfung nicht von primärem Interesse.

Einen wesentlichen Beitrag zur effizienten Modellierung piezo–mechanischer Strukturen leisten Collet und Cunefare [2008]. Sie konzipieren ein Vorgehen zur Ableitung eines piezoelektrischen Superelementes. Superelemente sind in der FE–Methode Modellstrukturen, die mit einer wesentlich reduzierten Anzahl von DOF ein im jeweiligen Anwendungsbereich äquivalentes Verhalten im Vergleich zu einem vollständig vernetzten Modell erzielen. Aufbauend auf der heutzutage wahrscheinlich am häufigsten eingesetzten Methode zur dynamischen Modellreduktion in der Strukturdynamik nach Craig und Bampton [1968] (vgl. auch [Craig et al. 1976], ›Component mode synthesis‹ in [ANSYS]) erweitern Collet et al. den Transformationsansatz aus mechanischen Eigenmoden und mechanischen statischen Moden entsprechend Craig und Bampton um statische Moden der elektrischen DOF. Sie erreichen damit für potentialerregte piezo–mechanische Systeme eine korrekte Abbildung der Impedanz. Eine explizite Nutzung dieser Reduktionsmethode für eine Zustandsraumbeschreibung wird durch Collet et al. nicht ausgeführt.

Ashwin et al. [2009] folgen einem ähnlichen Reduktionsansatz wie Craig und Bampton mit mechanischen Eigenmoden und mechanischen statischen Moden, wenden diesen Ansatz aber auf ein piezo–mechanisches Modell an. Sie separieren dadurch die passive Struktur von dem aktiven, piezoelektrischen Teilsystem. Da sie in der zugrundegelegten Bewegungsgleichung als elektrische Parameter Aktorpotential (Erregungsgröße) und Sensorpotential (Ergebnisgröße) verwenden, und die elektrische Ladung explizit nicht auftritt, stellt sich die Frage der korrekten Impedanzabbildung bei der Modellreduktion nicht. Ashwin et al. können für ihren Modellansatz deshalb (anders als Collet et al.) auf elektrische Moden verzichten, sind in ihren Modellaussagen damit aber auch auf das mechanische Teilsystem beschränkt.

Thomas et al. [2009] entwickeln eine FE–Formulierung für dünne, flächige piezoelektrische Elemente mit Elektroden auf den jeweiligen Ober- und Unterseiten. Sie nutzen dabei als diskrete elektrische Variablen das Potential und die Ladung an den Elektroden der piezoelektrischen Elemente. Interne elektrische DOF treten in diesem Modell nicht auf. Mit

Hilfe einer modalen Zerlegung reduzieren Thomas et al. das FE–Modell. Da sie das reduzierte Modell in erster Linie wie z. B. auch Becker et al. [2006] für die Abbildung einer Widerstandsdämpfung nutzen, diskutieren sie das Problem der Nullstellenverschiebung infolge der modalen Reduktion nicht.

Ein alternatives Vorgehen verwenden Dinkler et al. [2010] zur effizienten Simulation piezoelektrischer Elemente. Auf analytischem Wege beschreiben sie die elektro–mechanische Kopplung von dünnen, zylindrischen Piezoplatten, die in Dickenrichtung polarisiert sind, und binden die analytischen Lösungen als Kompatibilitätsbedingungen auf dem Rand zwischen dem piezoelektrischen Bereich und der passiven Plattenstruktur ihres Gesamtmodells ein. Dinkler et al. erzielen mit dieser Makroelementformulierung eine sehr gute Übereinstimmung im Vergleich zu einem vollständig vernetzten Modell. Diese berechnungseffiziente Methode ist allerdings auf die betrachteten dünnen, zylindrischen Piezoelemente beschränkt. Auf allgemeine Geometrien piezoelektrischer Elemente sind die analytischen Lösungen nicht zu übertragen.

Neben der modalen Reduktion, die vor allem im Bereich der Strukturdynamik angewandt wird, existieren weitere Modellreduktionsverfahren, deren Eignung für piezo–mechanische Modelle noch Untersuchungsgegenstand ist. Aufgeführt seien hier Krylov–Subspace–Approximation [Bai 2002; Han et al. 2005; Rudnyi et al. 2006] und balancierte Realisierung [Benner 2006; Bonin et al. 2009], die aus dem Bereich der Regelungstechnik stammen.

Zum Beispiel wenden Kurch et al. [2009] die Krylov–Subspace–Approximation zur effizienten Modellbildung einer mit piezokeramischen Elementen ausgerüsteten Platte wiederum mit dem Anwendungsziel einer Widerstandsdämpfung an. Ungünstig erscheint, dass nach der Modellreduktion des piezo–mechanischen Systems die Singularität der Gesamtmassenmatrix noch behandelt werden muss.

Aus Sicht der ingenieurtechnischen Anwendung bieten diese für die Strukturdynamik neuen Reduktionsverfahren ein großes Potential. Ihre Akzeptanz wird allerdings dadurch erschwert, dass die physikalische Bedeutung der modellbeschreibenden Zustandsgrößen verloren geht.

Aus der vorgestellten Literaturübersicht ist ersichtlich, dass im Bezug auf die effiziente dynamische Simulation von piezo–mechanischen Systemen die folgenden Punkte von Bedeutung sind:

- Eine Zustandsraumbeschreibung ist als Schnittstelle zur Regelungstechnik und zum Schaltungsentwurf ein wesentliches Werkzeug.
- Eine Modellreduktion, die aufbauend auf einer modalen Zerlegung des Systems sowohl das mechanische als auch das elektrische Teilsystem korrekt abbilden soll,

muss auch statische Moden des elektrischen Teilsystems in die Reduktionsbasis einbeziehen.

- Für die Abbildung elektrodierter Piezoelemente sind das elektrische Potential und die elektrische Ladung an den Elektroden die wesentlichen elektrischen Variablen des Modells.
- Eine aufgeteilte Betrachtung von passivem mechanischen Teilsystem und aktivem piezoelektrischen Teilsystem führt zu einem effizienten Gesamtmodell.

3.3 Entwicklungsbedarf

Die Erörterung des aktuellen Standes der Forschung zur Ermittlung effektiver Materialparameter und zur effizienten dynamischen Modellbildung piezo–mechanischer Systeme lässt auch Defizite erkennen, insbesondere im Hinblick auf die Anwendung für Piezoverbundmodule:

- Eine Beanspruchungsermittlung für die Komponenten der Piezoverbundmodule unter Verwendung von effektiven Materialparametern wurde bisher nicht realisiert.
- Die Zustandsraumbeschreibungen verwenden lediglich Verschiebungsgrößen als mechanische Ausgangsgrößen. Eine Betrachtung von Verzerrungs- bzw. Beanspruchungsgrößen erfolgt bisher nicht. Es wird in den dynamischen Modellen im Wesentlichen die Wirkung der Piezoelemente auf die passive Struktur untersucht, jedoch nicht die mechanische Rückwirkung im Bezug auf die Beanspruchung der Piezokomponenten.
- Bei der Ausführung der Modelle erfolgt fast ausschließlich eine Beschränkung auf potentialerregte Systeme, obwohl durch Hagood et al. [1990] auch der Fall der ladungserregten Systeme eingeführt und besprochen wurde. Für die experimentelle Umsetzung der Anregung von piezoelektrischen Systemen mit gesteuerten Stromquellen (Stromverstärker) ist eine Modellbildung für Ladungserregung von wesentlicher Bedeutung. Der Einsatz von Stromquellen bei der Ansteuerung von Piezoaktoren gewinnt zunehmend an Bedeutung, da damit ein verringertes Hystereseverhalten erzielt wird [Dörlemann et al. 2002].
- Den Anwendungsschwerpunkt für die Demonstration der von den verschiedenen Autoren entwickelten dynamischen Modelle bilden dünne, massive, piezoelektrische Platten, die mit einem elektrischen Feld in Dickenrichtung angesteuert werden. Piezoverbundmodule werden in diesem Zusammenhang bisher nicht behandelt.

Aus der vorangehenden Darstellung ist ersichtlich, dass sich das Ziel dieser Abhandlung, effiziente Berechnungsmodelle für Piezoverbundmodule unter Berücksichtigung von dynamischer Betrachtung und Beanspruchungsermittlung zu schaffen, in die aktuelle Entwicklung einordnet und die angesprochenen Schwachstellen aufnimmt.

4 Beanspruchungsermittlung für piezo–mechanische Verbunde

4.1 Problembeschreibung und Lösungsansatz

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, werden in piezoelektrischen Verbundstrukturen in erster Linie piezokeramische Elemente mit geringer Dicke (100 µm–Größenordnung) verwendet, damit die erforderlichen elektrischen Ansteuerspannungen (bei Verwendung des piezoelektrischen Verbundes als Aktor) vergleichsweise gering gehalten werden können. Damit tritt bei der Anwendung der piezoelektrischen Verbunde in Bauteilen und Systemen des Maschinen- und Fahrzeugbaus ein beträchtlicher Dimensionsunterschied zwischen Gesamtstruktur und Piezoelementen in der Größenordnung von fünf Zehnerpotenzen auf.

Für eine effiziente Simulation des Verhaltens solcher Strukturen mittels FEM ergibt sich die Schwierigkeit der abgestimmten örtlichen Diskretisierung. Eine Diskretisierung das Gesamtbauteiles in der Größenordnung der Piezoelemente ist im Allgemeinen nicht möglich. Dies würde unverhältnismäßig große und aufwendige Modelle generieren. Deshalb ist die Verwendung gemittelter Materialparameter notwendig. Diese gemittelten (effektiven) Materialparameter erhält man durch Homogenisierung. Mit den effektiven Materialparametern lässt sich ein Modell aufbauen, das in seiner Ortsdiskretisierung nicht mehr von den realen Abmessungen der piezoelektrischen Basiselemente des Verbundes abhängig ist.

Da für Piezoverbundmodule wie z. B. d_{33}–MFC und die im SFB/TRR 39 entwickelten Piezo–Metall–Module nicht nur die Abmessungen der piezoelektrischen Basiselemente, sondern auch der Elektrodenabstand ein wesentliches Kriterium der Ortsdiskretisierung darstellt, muss das vereinfachte Modell auch die elektrische Lasteinleitung »homogenisieren«. In Bild 4.1 ist die erforderliche Modelltransformation schematisch dargestellt.

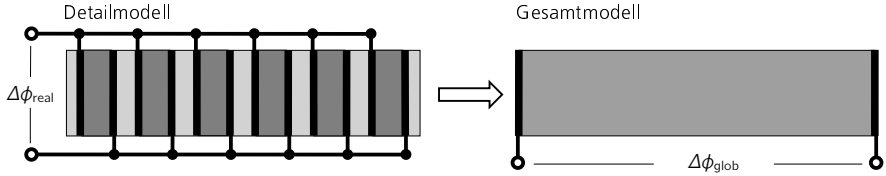


Bild 4.1: *Modelltransformation durch Homogenisierung*

Es ist simulationstechnisch erstrebenswert, die elektrische Anregung des Piezoverbundmoduls durch ein einzelnes Elektrodenpaar an den äußeren Rändern des Moduls zu modellieren. Bei Verwendung der realen elektrischen Ansteuerspannung an diesem effektiven Elektrodenpaar muss der veränderte Elektrodenabstand durch Anpassung der Materialparameter korrigiert werden, um das reale elektrische Feld abzubilden.[8]

Alternativ dazu kann die effektive elektrische Ansteuerspannung als Produkt der realen Ansteuerspannung und der Anzahl der parallel geschalteten Elektrodenpaare gewählt werden.

Bei der Wahl der elektrischen Randbedingungen zur Homogenisierung der Materialparameter ist die Art der gewählten elektrischen »Lasthomogenisierung« zu beachten.

4.2 Homogenisierung der Materialparameter

4.2.1 Energiebasierte Einheitszellenmethode

Grundlage der in dieser Abhandlung vorgestellten Methode zur Homogenisierung der Materialparameter ist die Einheitszellenmethode. Diese Homogenisierungsmethode ermittelt die Materialkennwerte des effektiven Materials aus dem Verformungsverhalten eines repräsentativen Teilvolumens des Verbundes. Die Existenz einer Einheitszelle setzt eine Periodizität innerhalb des Verbundes voraus. Diese Periodizität kann in den meisten Fällen zumindest näherungsweise angenommen werden.

Kernpunkt der hier dargelegten Variante der Einheitszellenmethode ist die Gleichheit der (verallgemeinerten) potentiellen Energie der betrachteten inhomogenen Einheitszelle (EZ) und eines dimensionsgleichen homogenen Materialvolumens (EZ_{homo}) mit effektiven Materialparametern. Für die elastischen Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitskoeffizienten eines Verbundes wurde diese Grundidee z. B. durch Schmidt [2001] unter Verwendung der elastischen Formänderungsenergie vorgestellt und am Beispiel von Fichtenholz ausgeführt. In der vorliegenden Abhandlung wird die Erweiterung des Verfahrens für piezoelektrische Materialien behandelt.

Im Vergleich zur Mittelwertbildung für die Spannungen und Dehnungen (wie z. B. durch Berger et al. [2005, 2006] verwendet) gestattet die energiebezogene Betrachtung eine strengere Formalisierung des Berechnungsablaufes und der Auswertung der zugrundeliegenden FE–Simulationen. Die energiebezogene Betrachtung eröffnet die Möglichkeit vereinfachter Abschätzungen (vgl. Anhang B), die bei der Diskussion der elektrischen

[8] Diese Möglichkeit wurde z. B. von Peter-Christian Eccardt, Schulungsreferent der CADFEM GmbH, beim Seminar »ANSYS Piezoelektrizität 03.07.2002« für Piezostapelaktoren vorgeschlagen.

Randbedingungen für die EZ (s. Abschnitt *Einheitszelle mit Elektroden* auf Seite 53) von Bedeutung sind.

Für piezoelektrische Materialien wird die elektrische Enthalpiedichte H als zugrundeliegendes thermodynamisches Potential betrachtet. Sie kann in die volumenspezifischen Energiedichten der elastische Formänderung W_{elas}, des elektrischen Feldes W_{elek} und der piezoelektrischen Kopplung W_{piez} aufgeteilt werden [vgl. z. B. Ikeda 1996]:

$$H = \frac{1}{2}\left[\quad \boldsymbol{T}' \boldsymbol{S} \quad - \quad \boldsymbol{D}' \boldsymbol{E} \quad \right] \tag{4.1}$$

$$H = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{S}' \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}\prime} \boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}' \boldsymbol{e} \boldsymbol{S}) - (\boldsymbol{S}' \boldsymbol{e}' \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}' \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}\prime} \boldsymbol{E}) \right] \tag{4.2}$$

$$H = \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{S}' \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}} \boldsymbol{S}}_{} \quad - \quad \underbrace{\boldsymbol{E}' \boldsymbol{e} \boldsymbol{S}}_{} \quad - \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{E}' \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}} \boldsymbol{E}}_{} \tag{4.3}$$

$$H = \quad W_{\text{elas}} \quad - \quad W_{\text{piez}} \quad - \quad W_{\text{elek}} \quad . \tag{4.4}$$

Die einzelnen Energiedichteanteile der EZ werden mit den lokalen mechanischen Verzerrungen $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ und dem lokalen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ anhand eines FE–Modells für verschiedene Lastfälle bestimmt:

$$W_{\text{elas}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{S}'(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \tag{4.5}$$

$$W_{\text{piez}}(\boldsymbol{x}) = \quad \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \tag{4.6}$$

$$W_{\text{elek}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \quad , \tag{4.7}$$

wobei sich die Gesamtenthalpie der EZ aus der Summation über alle finiten Elemente der EZ ergibt:

$$\int_{\mathrm{EZ}} H \, d\Omega = \sum_{\text{elem}} \left(W_{\text{elas,elem}} - W_{\text{piez,elem}} - W_{\text{elek,elem}} \right) \Omega_{\text{elem}} \quad . \tag{4.8}$$

Die elektrische Enthalpie der EZ soll der elektrischen Enthalpie des homogenen Materialvolumens $\mathrm{EZ}_{\text{homo}}$ mit effektiven Beanspruchungen $\bar{\boldsymbol{S}}$, $\bar{\boldsymbol{E}}$ und effektiven Materialparametern $\bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{E}}$, $\bar{\boldsymbol{e}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{S}}$ entsprechen:

$$\int_{\mathrm{EZ}} H \, d\Omega = \int_{\mathrm{EZ}} \left(W_{\text{elas}} - W_{\text{piez}} - W_{\text{elek}} \right) \, d\Omega$$

$$= \int_{\mathrm{EZ}_{\text{homo}}} H \, d\Omega = \left(\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{S}}' \bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{E}} \bar{\boldsymbol{S}} - \bar{\boldsymbol{E}}' \bar{\boldsymbol{e}} \bar{\boldsymbol{S}} - \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{E}}' \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{S}} \bar{\boldsymbol{E}} \right) \Omega_{\mathrm{EZ}} \quad . \tag{4.9}$$

Die effektiven Materialparameter $\bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{E}}$, $\bar{\boldsymbol{e}}$ und $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{S}}$ sind bei Vorgabe der effektiven Beanspruchungen $\bar{\boldsymbol{S}}$ und $\bar{\boldsymbol{E}}$ durch Randbedingungen an der EZ die einzigen Unbekannten der Gleichung (4.9) und können aus dem Gleichungssystem der Lastfälle bestimmt werden.

Je nach konkreter Richtungsabhängigkeit des makroskopischen Verhaltens des piezo–mechanischen Verbundes wird eine unterschiedliche Anzahl unabhängiger Lastfälle benötigt, um alle Komponenten der Materialparametermatrizen $\bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{E}}$, $\bar{\boldsymbol{e}}$ und $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{S}}$ zu bestimmen.

4.2.2 Makroskopisch orthotropes Verhalten des Piezoverbundes

Die Richtungsabhängigkeit des Materialverhaltens des piezo–mechanischen Verbundes hängt zum einen von der Polarisationsrichtung der piezoelektrischen Komponenten des Verbundes ab. Zum anderen ist die Ausrichtung und Anordnung der piezoelektrischen Komponenten und der Elektroden im Verbund wesentlich für die Richtungsabhängigkeit des makroskopischen (effektiven) Materialverhaltens.

Da in technisch relevanten Piezoverbunden wie z. B. Piezostapelaktoren, MFC oder auch neuartigen Piezokompositaktoren [Gebhardt et al. 2005] die piezoelektrischen Elemente in der Regel parallel zueinander angeordnet sind und in einer isotropen Matrix eingebettet sind, kann man für die Anisotropie des makroskopischen (effektiven) Materialverhaltens im Allgemeinen Orthotropie ansetzen. Für verschiedene Piezoverbundmodule ist eine weitere Eingrenzung auf tetragonales oder hexagonales (bzw. transversal isotropes) Verhalten möglich.

Zur Beschreibung eines orthotropen piezoelektrischen Materials sind entsprechend Gleichung (4.10) neun unabhängige elastische Konstanten, fünf piezoelektrische Konstanten und drei dielektrische Konstanten erforderlich.

Das effektive Material wird beschrieben durch:

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \\ \bar{T}_5 \\ \bar{T}_6 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \\ \bar{D}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}^{\mathrm{E}}_{11} & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{12} & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{31} \\ \bar{c}^{\mathrm{E}}_{12} & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{22} & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{32} \\ \bar{c}^{\mathrm{E}}_{13} & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{23} & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{44} & 0 & 0 & 0 & -\bar{e}_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{55} & 0 & -\bar{e}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}^{\mathrm{E}}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{15} & 0 & \bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{24} & 0 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}_{22} & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{32} & \bar{e}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \\ \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \end{pmatrix} . \tag{4.10}$$

Aus diesem Materialgesetz leiten sich die Energiedichteanteile der EZ_{homo} in Abhängigkeit von den effektiven Verzerrungen bzw. dem effektiven elektrischen Feld her:

$$\overline{W}_{\text{elas}} = \frac{1}{2}\left(\bar{c}^{\text{E}}_{11}\,\bar{S}_1{}^2 + \bar{c}^{\text{E}}_{22}\,\bar{S}_2{}^2 + \bar{c}^{\text{E}}_{33}\,\bar{S}_3{}^2 + 2\,\bar{c}^{\text{E}}_{12}\,\bar{S}_1\,\bar{S}_2 + 2\,\bar{c}^{\text{E}}_{13}\,\bar{S}_1\,\bar{S}_3 + 2\,\bar{c}^{\text{E}}_{23}\,\bar{S}_2\,\bar{S}_3 + \bar{c}^{\text{E}}_{44}\,\bar{S}_4{}^2 + \bar{c}^{\text{E}}_{55}\,\bar{S}_5{}^2 + \bar{c}^{\text{E}}_{66}\,\bar{S}_6{}^2\right) \tag{4.11}$$

$$\overline{W}_{\text{piez}} = \bar{e}_{31}\,\bar{E}_3\,\bar{S}_1 + \bar{e}_{32}\,\bar{E}_3\,\bar{S}_2 + \bar{e}_{33}\,\bar{E}_3\,\bar{S}_3 + \bar{e}_{24}\,\bar{E}_2\,\bar{S}_4 + \bar{e}_{15}\,\bar{E}_1\,\bar{S}_5 \tag{4.12}$$

$$\overline{W}_{\text{elek}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\varepsilon}^{\text{S}}_{11}\,\bar{E}_1{}^2 + \bar{\varepsilon}^{\text{S}}_{22}\,\bar{E}_2{}^2 + \bar{\varepsilon}^{\text{S}}_{33}\,\bar{E}_3{}^2\right) \quad . \tag{4.13}$$

Aus diesen Energiedichtegleichungen ist ersichtlich, dass Einheitslastfälle für die effektiven Verzerrungen $\bar{S}_\mu = \bar{S}^{\text{I}}_\mu$ bzw. das effektive elektrische Feld $\bar{E}_i = \bar{E}^{\text{I}}_i$ so konstruiert werden können, dass jeweils nur ein unbekannter effektiver Materialparameter »aktiv« ist. Damit können alle effektiven Materialparameter unmittelbar aus der mit dem FE–Modell der EZ ermittelten elektrischen Enthalpie bestimmt werden.

In der Tabelle 4.1 sind sämtliche Einheitslastfälle aufgeführt, die zur Bestimmung der effektiven Materialparameter eines orthotropen piezoelektrischen Verbundes verwendet werden.

4.2.3 Randbedingungen der Einheitszelle

Die Randbedingungen der EZ müssen

- die effektiven Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{S}}$ bzw. das effektive elektrische Feld $\bar{\boldsymbol{E}}$ als normierte äußere Last der EZ vorgeben und
- die Periodizität der EZ gewährleisten.

Bei der Formulierung der elektrischen Randbedingungen ist die Platzierung der Elektroden in Bezug auf die betrachtete EZ zu berücksichtigen. Dazu werden zwei Fälle unterschieden:

1. Die Elektroden sind nicht Bestandteil der EZ. Die Einkopplung des elektrischen Feldes erfolgt in Bezug auf die EZ von außen. Dieser Fall ist z. B. für die durch Steinhausen [2002] untersuchten piezoelektrischen 1–3–Komposite für Ultraschallwandler relevant.
2. Die Elektroden sind, wie die piezoelektrischen Basiselemente des Verbundes, periodisch angeordnet und bestimmen damit die EZ in gleicher Weise wie die piezo-

Tabelle 4.1: *Einheitslastfälle zur Bestimmung der effektiven Materialparameter eines orthotropen piezoelektrischen Verbundes*

LF	$\bar{S}_1^{\mathrm{I}}$	$\bar{S}_2^{\mathrm{I}}$	$\bar{S}_3^{\mathrm{I}}$	$\bar{S}_4^{\mathrm{I}}$	$\bar{S}_5^{\mathrm{I}}$	$\bar{S}_6^{\mathrm{I}}$	$\bar{E}_1^{\mathrm{I}}$	$\bar{E}_2^{\mathrm{I}}$	$\bar{E}_3^{\mathrm{I}}$	zu bestimmender Materialparameter	effektiver Energieanteil
1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	$\bar{c}_{11}^{\mathrm{E}}$	
2	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	$\bar{c}_{22}^{\mathrm{E}}$	$\overline{W}_{\mathrm{elas}}$
3	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	$\bar{c}_{33}^{\mathrm{E}}$	
4	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	$\bar{c}_{44}^{\mathrm{E}}$	
5	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	$\bar{c}_{55}^{\mathrm{E}}$	
6	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	$\bar{c}_{66}^{\mathrm{E}}$	
7	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	$\bar{c}_{12}^{\mathrm{E}}$	
8	**1**	0	**1**	0	0	0	0	0	0	$\bar{c}_{13}^{\mathrm{E}}$	
9	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	$\bar{c}_{23}^{\mathrm{E}}$	
10	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	$\bar{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{S}}$	$\overline{W}_{\mathrm{elek}}$
11	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	$\bar{\varepsilon}_{22}^{\mathrm{S}}$	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	$\bar{\varepsilon}_{33}^{\mathrm{S}}$	
13	0	0	**1**	0	0	0	0	0	**1**	$\bar{e}_{33}$	
14	**1**	0	0	0	0	0	0	0	**1**	$\bar{e}_{31}$	$\overline{W}_{\mathrm{piez}}$
15	0	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**	$\bar{e}_{32}$	
16	0	0	0	0	**1**	0	**1**	0	0	$\bar{e}_{15}$	
17	0	0	0	**1**	0	0	0	**1**	0	$\bar{e}_{24}$	

elektrischen Basiselemente. Die Elektroden sind Bestandteil der EZ. Die Einkopplung des elektrischen Feldes erfolgt in Bezug auf die EZ von innen. Dies trifft z. B. auf die d_{33}–MFC und die im SFB/TRR 39 entwickelten Piezo–Metall–Module zu.

Einheitszelle ohne Elektroden

Die Periodizität der EZ wird durch Zwangsbedingungen zwischen den DOF der zugeordneten Ränder der EZ gewährleistet. Dabei repräsentieren die inhomogenen Anteile der Zwangsbedingungen die aufzuprägenden effektiven Verzerrungen bzw. das effektive elektrische Feld. Für die Beziehungen der DOF an den Rändern $x_1 = x_1^0 =$ konstant gilt:

$$u_1(x_1^0 + l_{\mathrm{EZ},1}, x_2, x_3) - u_1(x_1^0, x_2, x_3) = l_{\mathrm{EZ},1}\,\bar{S}_1 \tag{4.14}$$

$$u_2(x_1^0 + l_{\mathrm{EZ},1}, x_2, x_3) - u_2(x_1^0, x_2, x_3) = l_{\mathrm{EZ},1}\,\frac{\bar{S}_6}{2} \tag{4.15}$$

$$u_3(x_1^0 + l_{\mathrm{EZ},1}, x_2, x_3) - u_3(x_1^0, x_2, x_3) = l_{\mathrm{EZ},1}\,\frac{\bar{S}_5}{2} \tag{4.16}$$

$$\phi(x_1^0 + l_{\mathrm{EZ},1}, x_2, x_3) - \phi(x_1^0, x_2, x_3) = l_{\mathrm{EZ},1}\,\bar{E}_1 \quad , \tag{4.17}$$

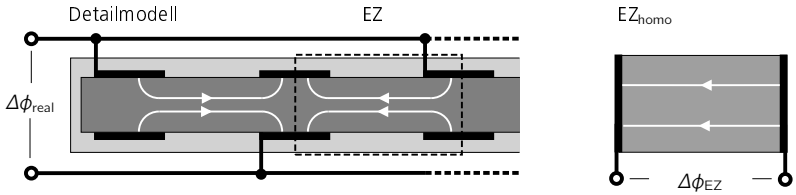


Bild 4.2: *Ausrichtung des elektrischen Feldes in EZ und EZ_{homo} bei d_{33}–MFC (Die im Bild gegenüberliegenden Elektroden liegen jeweils auf gleichem Potential. Dies wird durch Verwendung gekoppelter interdigitaler Fingerelektroden auf Ober- und Unterseite erreicht.)*

wobei $\bar{S}_\mu$ und $\bar{E}_i$ die effektiven Verzerrungen und Feldstärken in den entsprechenden Koordinatenrichtungen angeben und $l_{EZ,1}$ die Länge der EZ in 1–Richtung bezeichnet [vgl. Schmidt 2001; Berger et al. 2005].

Für die Ränder $x_2 = x_2^0 =$ konstant und $x_3 = x_3^0 =$ konstant lassen sich entsprechende Beziehungen angeben.

Die Umsetzung der DOF–Beziehungen im FEM–System ANSYS® erfolgt mittels sogenannter Zwangsgleichungen (›constraint equations‹), deren inhomogene Anteile lastfallspezifisch angepasst werden.

Mit der Lastfalltabelle 4.1, den Energiedichtegleichungen (4.11) bis (4.13) und den Randbedingungsgleichungen (4.14) bis (4.17) sind die Grundlagen zur Bestimmung effektiver Materialparameter eines makroskopisch orthotropen piezoelektrischen Verbundes gegeben. Bei Anpassung hinsichtlich anderer Anisotropie des Verbundes (tetragonales oder hexagonales Verhalten) reduziert sich die Anzahl der erforderlichen Einheitslastfälle. Eine Anpassung hinsichtlich eingeschränkter Periodizität (z. B. bei ebenen bzw. flächigen Verbundstrukturen wie z. B. MFC) ist durch Eliminierung der entsprechenden Periodizitätsbedingungen in den Randbedingungsgleichungen (4.14) bis (4.17) möglich. Ebenso wird eine Spezialisierung in Bezug auf den Beanspruchungszustand (ebener Spannungs- oder Dehnungszustand) durch Nullsetzen der entsprechenden Beanspruchungskomponenten erzielt.

Einheitszelle mit Elektroden

Bei Piezoverbundmodulen wie z. B. interdigital elektrodierten MFC, deren Elektroden innerhalb der zu betrachtenden EZ liegen, entspricht die reale Ausrichtung des elektrischen Feldes (und damit auch die Polarisationsrichtung) nicht zwangsläufig dem elektrischen Feld, wie es im homogenisierten Modell an den Rändern der EZ eingeprägt wird (vgl. Bild 4.2).

Für die Piezoverbundmodule mit inneren Elektroden ist die Homogenisierung auf Grundlage eines geeigneten Postulates über die Zuordnung des realen elektrischen Feldes zum effektiven elektrischen Feld der EZ auszuführen. Dieses Postulat betrifft sowohl die Ausrichtung als auch die Größe des elektrischen Feldes.

Für interdigital elektrodierte d_{33}–MFC entspricht die Faserlängsachse der hauptsächlichen Polarisations- und Feldrichtung mit lokalen Abweichungen im Bereich nahe der Elektroden. Deshalb ist es sinnvoll, die Faserlängsachse als Polarisations- und Feldrichtung der homogenen $\mathrm{EZ}_{\mathrm{homo}}$ zu betrachten [Deraemaeker et al. 2010]. Für piezobeschichtete Fasern [Beckert et al. 2001] oder Piezohohlfasern [Kranz et al. 2005], die radial über die Dicke der Schicht bzw. Hohlfaser elektrodiert sind, ist eine exakte Übertragung der lokal veränderlichen Polarisations- und Feldrichtung auf die $\mathrm{EZ}_{\mathrm{homo}}$ nicht möglich. Es ist eine globale Richtung, z. B. die Faserlängsrichtung, als modellhafte Feldrichtung der $\mathrm{EZ}_{\mathrm{homo}}$ festzulegen.

Bei Berücksichtigung der realen Elektroden in der EZ sind die elektrisch relevanten Homogenisierungslastfälle nach Tabelle 4.1 so zu modfizieren, dass die Einkopplung des elektrischen Feldes nicht über die inhomogenen Anteile der Zwangsbedingung (4.17) erfolgt, sondern durch Potentialvorgabe an den Elektroden. Für diesen Fall erweist sich die unmittelbare Auswertung der elektrischen Enthalpie als vorteilhaft gegenüber der Auswertung auf Basis gemittelter Beanspruchungsgrößen, da bei unmittelbare Auswertung der elektrischen Enthalpie die Realisierung homogener Randbedingungen nach Gleichung (3.2) nicht erforderlich ist. Ein Vergleich der Homogenisierung auf Basis gemittelter Beanspruchungsgrößen und auf Basis der Enthalpie wird für einen eindimensionalen Verbund im Anhang B (Abschnitt B.1) analytisch ausgeführt.

In diesem Zusammenhang ist die Wahl der äußeren elektrischen »Lasthomogenisierung« von Belang. Mit dem Übergang von der realen Elektrodenstruktur auf die homogenisierte $\mathrm{EZ}_{\mathrm{homo}}$ ändert sich der für die elektrische Feldverteilung relevante Elektrodenabstand. Damit variiert auch die spezifische elektrische Energie der EZ, was dem Grundgedanken der Einheitszellenmethode von der energetischen Äquivalenz entsprechend ausgeglichen werden muss. Zur Korrektur können

a) die elektrische Potentialdifferenz $\Delta\phi$ und/oder

b) die feldrelevanten Materialparameter $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ und $\boldsymbol{e}$

angepasst werden. Diese beiden Korrekturmöglichkeiten sind aus den Bestimmungsgleichungen für die piezoelektrische Energiedichte (4.12) und die dielektrische Energiedichte (4.13) ersichtlich. Für die dielektrische Energiedichte ergibt sich z. B. bei Betrachtung einer

einzelnen Koordinatenrichtung und vereinfachender Substitution des elektrischen Feldes durch $E = \Delta\phi / b$, wobei b den relevanten Elektrodenabstand bezeichnet:

$$W_{\text{elek}} = \frac{1}{2} \varepsilon^{S} \frac{(\Delta\phi)^2}{b^2} \quad . \tag{4.18}$$

Das heißt, sobald bei der Modellbildung von der realen Elektrodenstruktur des Piezoverbundmoduls abgewichen werden muss bzw. wird ($b_{\text{real}} \rightarrow b_{\text{modell}}$), gibt es neben den effektiven Materialparametern ($\bar{\varepsilon}^{S}$, $\bar{e}$) eine weitere freie Größe $\Delta\phi_{\text{modell}} = f(\Delta\phi_{\text{real}})$ zur Gewährleistung der energetischen Äquivalenz der inhomogenen (EZ) und der homogenen Einheitszelle (EZ_{homo}). In diesem Fall ist für die Angabe der effektiven Materialparameter die Spezifizierung der zugehörigen elektrischen Last notwendig.

Eine mögliche Prämisse für die Wahl der an den Rändern der EZ_{homo} anzusetzenden Potentialdifferenz geht davon aus, dass mit der Homogenisierungsmethode bei materialidentischen Verbundkomponenten, also quasi homogenem Verbund, als effektive Materialparameter die tatsächlichen Materialparameter bestimmt werden. Dieser Ansatz kann jedoch für die Permittivität und für die piezoelektrischen Konstanten nur erreicht werden, wenn der reale Elektrodenabstand b_{real} der halben Länge l_{EZ} der EZ entspricht. Der Ort der Elektroden im homogenen Verbund hat folglich einen wesentlichen Einfluss auf die effektiven Materialparameter. Eine Ableitung und Diskussion dieses Ansatzes ist in Anhang B (Abschnitt B.2) angegeben.

Ein anderer Ansatzpunkt ist die Gleichheit der Potentialdifferenz an den realen Elektroden und an den Rändern der EZ_{homo} ($\Delta\phi_{\text{real}} = \Delta\phi_{\text{EZ}}$). Bei diesem Vorgehen entsprechen die effektiven Materialparameter eines homogenen Verbundes sowohl für die Permittivität als auch für die piezoelektrische Kopplung nicht den tatsächlichen Materialparametern. Andererseits bietet dieser Ansatz eine geeignete Schnittstelle zur Abbildung der elektrischen Last im Gesamtmodell (vgl. Problembeschreibung im Abschnitt 4.1). Voraussetzung ist, dass die EZ genau ein Elektrodenpaar enthält. Dadurch kann ein Gesamtmodell mit den effektiven Materialparametern aufgebaut werden, das als globale elektrische Last $\Delta\phi_{\text{glob}}$ an den Rändern des Moduls das Produkt aus realer Potentialdifferenz und der Anzahl der parallel geschalteten Elektrodenpaare verwendet.

In Bild 4.3 wird diese zweistufige Modellierung verdeutlicht.

Für die Übertragung einer Ladungserregung von der Einheitszelle bzw. vom Homogenisierungsmodell (Q_{EZ}) auf das Gesamtmodell (Q_{glob}) liefert die Betrachtung der jeweiligen elektrischen Kapazität die entsprechende Beziehung. Ausgangspunkt ist die erforderliche Gleichheit des elektrischen Feldes:

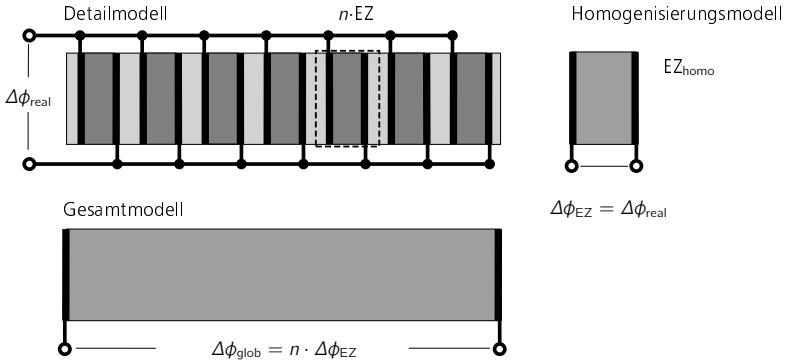


Bild 4.3: *Übertragung der realen elektrischen Last auf EZ und Gesamtmodell*

$$\frac{\Delta\phi_{EZ}}{l_{EZ}} = \frac{\Delta\phi_{glob}}{n \cdot l_{EZ}} \quad , \qquad \frac{Q_{EZ}}{\Delta\phi_{EZ}} = \varepsilon \frac{A}{l_{EZ}} \quad , \qquad \frac{Q_{glob}}{\Delta\phi_{glob}} = \varepsilon \frac{A}{n \cdot l_{EZ}} \tag{4.19}$$

$$\Rightarrow Q_{EZ} = Q_{glob} \quad . \tag{4.20}$$

Das heißt, die anregende Ladung an den Stirnelektroden des Gesamtmodells Q_{glob} entspricht der Ladung Q_{EZ} an der EZ bzw. an jedem Elektrodenpaar.

4.3 Lokalisierung der Beanspruchungen

Ein wesentlicher Vorteil der Betrachtung des vollständigen Satzes von Einheitslastfällen besteht in der unmittelbaren Bereitstellung von Phasenkonzentrationen für die Beanspruchungen (Verzerrungen und Spannungen) und die elektrischen Feldgrößen (Feldstärke und Flussdichte). Unter Phasenkonzentrationen werden in der vorliegenden Abhandlung die Beanspruchungsfelder in der EZ aufgrund einer effektiven Einheitsbeanspruchung entsprechend der Grundlastfälle 1...6 und 10...12 der Tabelle 4.1 verstanden. Diese Phasenkonzentrationen werden benötigt, um aus den am Bauteilmodell mit den effektiven Materialparametern ermittelten Beanspruchungen die lokalen Beanspruchungen der Verbundkomponenten zu ermitteln. Erst die lokalen Beanspruchungen gestatten eine Beanspruchungsbeurteilung, wenn man Festigkeits- bzw. Bruchkennwerte der Basismaterialien zu Grunde legt.

Die Phasenkonzentrationen werden in dieser Abhandlung entsprechend Tabelle 4.2 bezeichnet.

Tabelle 4.2: *Bezeichnung der Phasenkonzentrationen*

Symbol	Bedeutung
$X^{SS}_{\mu\nu}$	Verzerrung S_μ in der EZ aufgrund einer effektiven Einheitsverzerrung $\bar{S}^{I}_{\nu}$
$X^{SE}_{\mu j}$	Verzerrung S_μ in der EZ aufgrund eines effektiven Einheitsfeldes $\bar{E}^{I}_{j}$
$X^{TS}_{\mu\nu}$	Spannung T_μ in der EZ aufgrund einer effektiven Einheitsverzerrung $\bar{S}^{I}_{\nu}$
$X^{TE}_{\mu j}$	Spannung T_μ in der EZ aufgrund eines effektiven Einheitsfeldes $\bar{E}^{I}_{j}$
$X^{ES}_{i\nu}$	Feldstärke E_i in der EZ aufgrund einer effektiven Einheitsverzerrung $\bar{S}^{I}_{\nu}$
X^{EE}_{ij}	Feldstärke E_i in der EZ aufgrund eines effektiven Einheitsfeldes $\bar{E}^{I}_{j}$
$X^{DS}_{i\nu}$	Flussdichte D_i in der EZ aufgrund einer effektiven Einheitsverzerrung $\bar{S}^{I}_{\nu}$
X^{DE}_{ij}	Flussdichte D_i in der EZ aufgrund eines effektiven Einheitsfeldes $\bar{E}^{I}_{j}$

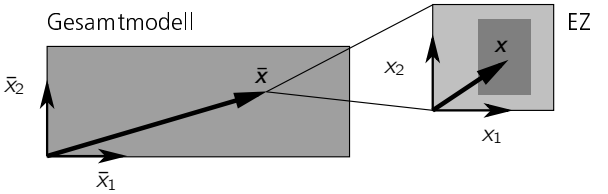


Bild 4.4: *Einordnung der Einheitszelle in den Gesamtverbund*

Geht man davon aus, dass die EZ klein im Vergleich zum Volumen des Gesamtverbundes ist, bzw. klein in Bezug auf den Beanspruchungsgradienten im Gesamtverbund, so ist die einzelne EZ als Teil des Gesamtverbundes konstanten Beanspruchungen an ihren Rändern ausgesetzt. Die Einheitslastfälle nach Abschnitt 4.2.2 liefern die Reaktion der EZ auf eine konstante Einheitsbeanspruchung in der jeweiligen Richtung und an den jeweiligen Rändern der EZ.

Die konkrete Lage einer EZ im Gesamtverbund ist bei Verwendung von gemittelten Materialparametern nicht bekannt. Jeder materielle Punkt des homogenisierten Gesamtverbundes repräsentiert eine EZ (vgl. Bild 4.4). Zur Lokalisierung der Beanspruchungen werden deshalb zwei Ortsvektoren verwendet: $\bar{\boldsymbol{x}}$ zur Beschreibung des materiellen Punktes des homogenisierten Gesamtverbundes und $\boldsymbol{x}$ zur Ortsauflösung in der EZ.

Die lokalen Verzerrungen S_μ (d. h. die Verzerrungen der Verbundkomponenten) am globalen Ort $\bar{\boldsymbol{x}}$ werden aus den effektiven Verzerrungen $\bar{S}_\nu$ und den effektiven elektrischen Feldstärken $\bar{E}_j$ unter Verwendung der Phasenkonzentrationen $X^{SS}_{\mu\nu}$ und $X^{SE}_{\mu j}$ ermittelt:

$$S_\mu(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = X^{SS}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})\,\bar{S}_\nu(\bar{\boldsymbol{x}}) + X^{SE}_{\mu j}(\boldsymbol{x})\,\bar{E}_j(\bar{\boldsymbol{x}})$$
$$\text{mit: } \mu, \nu \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ und } j \in \{1,2,3\} \quad . \qquad (4.21)$$

Für die lokalen mechanischen Spannungen T_μ, das lokale elektrische Feld E_i und die lokale elektrische Flussdichte D_i gelten entsprechende Gleichungen:

$$T_\mu(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = X^{\mathrm{TS}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})\,\bar{S}_\nu(\bar{\boldsymbol{x}}) + X^{\mathrm{TE}}_{\mu j}(\boldsymbol{x})\,\bar{E}_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{4.22}$$

$$E_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = X^{\mathrm{ES}}_{i\nu}(\boldsymbol{x})\,\bar{S}_\nu(\bar{\boldsymbol{x}}) + X^{\mathrm{EE}}_{ij}(\boldsymbol{x})\,\bar{E}_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{4.23}$$

$$D_i(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = X^{\mathrm{DS}}_{i\nu}(\boldsymbol{x})\,\bar{S}_\nu(\bar{\boldsymbol{x}}) + X^{\mathrm{DE}}_{ij}(\boldsymbol{x})\,\bar{E}_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad . \tag{4.24}$$

Damit lassen sich sämtliche Beanspruchungen der Verbundkomponenten aus den am Gesamtmodell mit effektiven Materialparametern berechneten effektiven Beanspruchungen ableiten.

4.4 Demonstrationsmodell Piezofaserverbund

Zur Demonstration der Methode und zum Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren wird in diesem Abschnitt die Homogenisierung mit der energiebasierten Einheitszellenmethode auf einen Piezofaser–Epoxidharz–Verbund mit 60 % Volumenanteil Piezofaser angewandt. In Bild 4.5 wird das verwendete FE–Netz der EZ dargestellt.

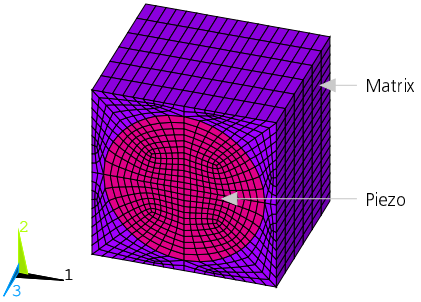


Bild 4.5: *Finite–Elemente–Netz der Einheitszelle eines Piezofaser–Epoxidharz–Verbundes mit* 60 % *Volumenanteil Piezofaser*

Die verwendeten Materialparameter der Komponenten der EZ zur Beschreibung des transversal isotropen Verhaltens nach Gleichung (2.23) wurden bei Berger et al. [2006] entnommen und sind in Tabelle 4.3 aufgeführt.

Bei der Berechnung der Einheitslastfälle nach Tabelle 4.1 wird eine Einheitsdehnung von $\bar{S}^{\mathrm{I}}_\mu = 1$ und ein elektrisches Einheitsfeld von $\bar{E}^{\mathrm{I}}_i = 10\,\mathrm{GV/m}$ angesetzt, damit für alle Lastfälle Energieanteile in der gleichen Größenordnung ermittelt werden und die Mate-

Tabelle 4.3: *Materialparameter der Komponenten der Einheitszelle [Berger et al. 2006] und effektive Materialparameter $\boldsymbol{c}^{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ des Piezofaser–Epoxidharz–Verbundes mit 60 % Volumenanteil Piezofaser*

Material	c_{11}^{E}	c_{12}^{E}	c_{13}^{E}	c_{33}^{E}	c_{44}^{E}	c_{66}^{E}	e_{31}	e_{33}	e_{15}	$\varepsilon_{11}^{\mathrm{S}}$	$\varepsilon_{33}^{\mathrm{S}}$
	GPa						C/m^2			nC/(V m)	
PZT-7A	154,8	83,2	82,7	131,3	25,7	(35,8)	−2,12	9,52	9,35	4,065	2,079
Epoxidharz	8,0	4,4	4,4	8,0	1,8	(1,8)	–	–	–	0,037	0,037
Verbund	25,0	8,8	11,8	54,6	6,7	4,6	−0,20	6,46	0,05	0,157	1,283

Tabelle 4.4: *Effektive Materialparameter $\boldsymbol{c}^{\mathrm{D}}$, $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{S}}$ des Piezofaser–Epoxidharz–Verbundes mit 60 % Volumenanteil Piezofaser*

Referenz	c_{11}^{D}	c_{12}^{D}	c_{13}^{D}	c_{33}^{D}	c_{44}^{D}	c_{66}^{D}	h_{31}	h_{33}	h_{15}	β_{11}^{S}	β_{33}^{S}
	GPa						GV/m			GV m/C	
Gl. (4.9)	25,06	8,79	10,81	87,10	6,67	4,61	−0,157	5,035	0,328	6,372	0,780
Berger	25,17	8,71	10,82	86,97	6,66	4,64	−0,157	5,034	0,328	6,364	0,781
Pettermann	25,19	8,76	10,84	87,10	6,70	4,64	−0,157	5,034	0,330	6,341	0,780

rialparameter mit vergleichbarer Genauigkeit bestimmt werden können. Die ermittelten effektiven Materialparameter sind ebenfalls in Tabelle 4.3 eingetragen.

Als Vergleichswerte stehen durch Berger et al. [2006] und Pettermann et al. [2000] ermittelte effektive Materialparameter für den betrachteten Verbund zur Verfügung. Diese effektiven Materialparameter werden jedoch in Bezug auf die Materialbeschreibung nach den Gleichungen (2.11)/(2.12) angegeben. Die Umrechnung wird entsprechend der folgenden Gleichungen vorgenommen (s. auch Anhang A):

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{S}} = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}\right)^{-1} \tag{4.25}$$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{S}}\,\boldsymbol{e} \tag{4.26}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{D}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}} + \boldsymbol{e}^{'}\,\boldsymbol{h} \quad . \tag{4.27}$$

Der Vergleich der mit der energiebasierten Einheitszellenmethode bestimmten effektiven Materialparameter und den Literaturangaben erfolgt in Tabelle 4.4. Es sind nur geringfügige Abweichungen festzustellen. Damit bestätigt sich die Gleichartigkeit der Homogenisierung mittels energiebasierter Einheitszellenmethode und bei Mittelung der Beanspruchungsgrößen.

Die Betrachtung der Energieanteile vereinfacht eine Erklärung besonderer Verbundmerkmale. In Bild 4.6 sind z. B. die Energiedichten der elastischen Formänderung W_{elas} und der piezoelektrischen Kopplung W_{piez} für den Lastfall einer effektiven Schubdehnung $\bar{S}_4^{\mathrm{I}} = 1$

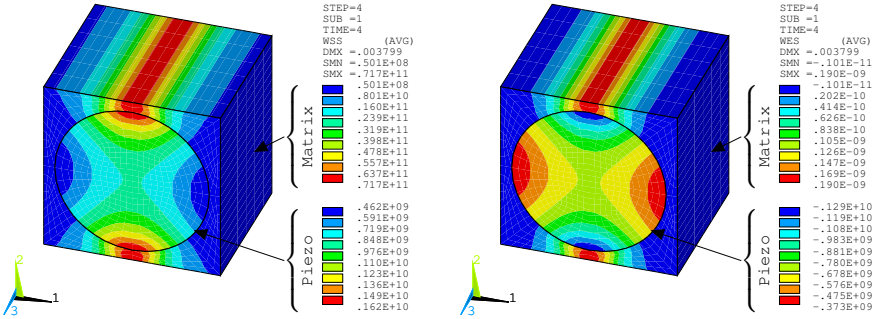


Bild 4.6: *Energiedichten für eine Einheitsverzerrung* $\bar{S}_4^{\mathrm{I}} = 1$ *(Schubdehnung) der Einheitszelle eines Piezofaser–Epoxidharz–Verbundes mit* 60 % *Volumenanteil Piezofaser; links: Energiedichte der elastischen Formänderung (in* $\mathrm{J/m^3}$*), rechts: Energiedichte der piezoelektrischen Kopplung (in* $\mathrm{J/m^3}$*)*

(Lastfall 4 entsprechend Tabelle 4.1) dargestellt. Dieser Lastfall ist ein rein mechanischer Lastfall, bei dem das effektive elektrische Feld und damit die effektiven Energiedichten der piezoelektrischen Kopplung und des elektrischen Feldes verschwinden.

Aus den Abbildungen ist jedoch ersichtlich, dass für die Piezofaser die Energiedichte der piezoelektrischen Kopplung in der gleichen Größenordnung auftritt, wie die Energiedichte der elastischen Formänderung. Für die Gesamtenthalpie, aus der sich der Schubmodul $\bar{c}_{44}^{\mathrm{E}}$ bestimmt, ist auch der piezoelektrische und der dielektrische Energiedichteanteil zu berücksichtigen. Das heißt, der effektive mechanische Schubmodul $\bar{c}_{44}^{\mathrm{E}}$ des Verbundes wird auch vom piezoelektrischen Kopplungsverhalten beeinflusst, das aufgrund des unterschiedlich elastischen Verhaltens der Verbundkomponenten auch für diesen rein mechanischen Lastfall angeregt wird.

Für einen homogenen Körper ist diese Verkopplung nicht relevant. Auch für die Lastfälle zur Bestimmung der anderen mechanischen Materialparameter tritt dieses Phänomen nicht auf (vgl. dazu Bild 4.7). Die Energiedichten der piezoelektrischen Kopplung und des elektrischen Feldes sind für diese Lastfälle im Vergleich zur Energiedichte der elastischen Formänderung zu vernachlässigen.

Exemplarisch sind in Bild 4.8 die Phasenkonzentrationen für die Normalspannung T_1 quer zur Faserlängsachse infolge einer Einheitsverzerrung $\bar{S}_3^{\mathrm{I}}$ und eines Einheitsfelds $\bar{E}_3^{\mathrm{I}}$ jeweils in Faserlängsachse abgebildet.

Mit der energiebasierten Einheitszellenmethode steht ein weitgehend formalisiertes Verfahren zur Homogenisierung von Materialparametern piezoelektrischer Verbunde und

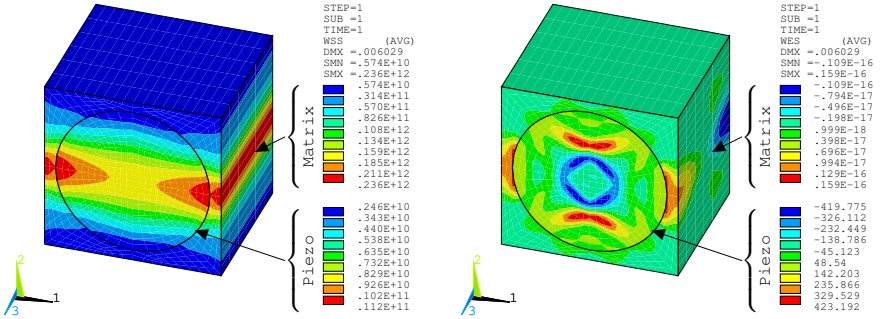


Bild 4.7: *Energiedichten für eine Einheitsverzerrung $\bar{S}_1^{\mathrm{I}} = 1$ (Normaldehnung) der Einheitszelle eines Piezofaser–Epoxidharz–Verbundes mit 60 % Volumenanteil Piezofaser;*
links: Energiedichte der elastischen Formänderung (in $\mathrm{J/m^3}$),
rechts: Energiedichte der piezoelektrischen Kopplung (in $\mathrm{J/m^3}$)

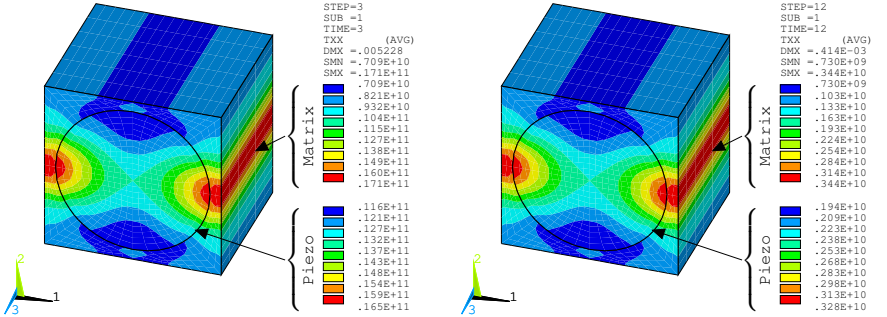


Bild 4.8: *Phasenkonzentrationen der Einheitszelle eines Piezofaser–Epoxidharz–Verbundes mit 60 % Volumenanteil Piezofaser;*
links: X_{13}^{TS}, Normalspannung T_1 (in Pa) aufgrund einer Einheitsverzerrung $\bar{S}_3^{\mathrm{I}} = 1$,
rechts: X_{13}^{TE}, Normalspannung T_1 (in Pa) aufgrund eines elektrischen Einheitsfeldes $\bar{E}_3^{\mathrm{I}} = 10\,\mathrm{GV/m}$

Module unter Berücksichtigung der Elektrodenanordnung zur Verfügung. Die Betrachtung der Phasenkonzentrationen gestattet eine Beanspruchungsermittlung der Verbund- bzw. Modulkomponenten auf Grundlage von Modellen, die die effektiven Materialparameter verwenden.

5 Zustandsraumbeschreibung piezo–mechanischer Systeme

5.1 Problembeschreibung und Lösungsansatz

Ein wesentliches Anwendungsgebiet von piezoelektrischen Sensoren und Aktoren ist die Erfassung und Beeinflussung von Schwingungen mechanischer Strukturen. Um Regler für solche mechatronischen Systeme zu entwerfen, werden üblicherweise Zustandsraummodelle verwendet, die auf reduzierten Modellen des mechanischen Teilsystems aufbauen [Hatch 2001]. Durch Brecher et al. [2008] wird z. B. ein Zustandsraummodell für ein mit Piezoaktoren versehenes Bohrwerkzeug zum Reglerentwurf eingesetzt. Das bei Brecher et al. [2008] erstellte Modell basiert auf wenigen konzentrierten Parametern. Auch Wittstock [2007] verwendet das Konzept der konzentrierten Parameter zur Modellbildung einer piezobasierten Vorrichtung zur Schwingungsbeeinflussung im Antriebsstrang von Werkzeugmaschinen.

Andererseits werden oft FE–Modelle eingesetzt, um Kontinua zu charakterisieren. Dies ist insofern das effizientere Vorgehen im Vergleich zu einer Modellbildung mit konzentrierten Parametern, da basierend auf 3D–CAD–Systemen und leistungsfähigen Vernetzungsalgorithmen eine FE–Diskretisierung im Allgemeinen schnell erzielt wird. Die Ableitung konzentrierter Parameter aus CAD–Modellen erfordert im Allgemeinen größeren Aufwand bei der Modellstrukturierung und Parameterbestimmung.

Deshalb ist es wünschenswert, wenn nicht sogar erforderlich, während des Entwurfprozesses von mechatronischen Systemen detaillierte FE–Modelle in Zustandsraumdarstellungen zu überführen. Für piezo–mechanische Systeme bedeutet dies konkret, die diskretisierte Bewegungsgleichung (2.26) in eine Form entsprechend den Gleichungen (2.27) und (2.28) zu bringen.

Tabelle 5.1: *Bezeichnung der Modelldimensionen*

Bedeutung	Gesamtsystem	=	Mechanik	+	Elektrik	
Anzahl der Freiheitsgrade	g	=	g_m	+	g_e	
Anzahl der Eingangsgrößen	v	=	v_m	+	v_e	$(v \ll g)$
Anzahl der Ausgangsgrößen	w	=	w_m	+	w_e	$(w \ll g)$
Anzahl der Zustandsgrößen	$2r$					$(r \ll g)$

Mit Angabe der Matrixdimensionen ergibt sich folgende Darstellung:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}|^{g_m,g_m} & \mathbf{o}|^{g_m,g_e} \\ \mathbf{o}|^{g_e,g_m} & \mathbf{o}|^{g_e,g_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{u}}|^{g_m,1} \\ \ddot{\boldsymbol{\phi}}|^{g_e,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}|^{g_m,g_m} & \mathbf{o}|^{g_m,g_e} \\ \mathbf{o}|^{g_e,g_m} & \mathbf{o}|^{g_e,g_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}|^{g_m,1} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}}|^{g_e,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{uu}|^{g_m,g_m} & \boldsymbol{K}_{u\phi}|^{g_m,g_e} \\ \boldsymbol{K}'_{u\phi}|^{g_e,g_m} & \boldsymbol{K}_{\phi\phi}|^{g_e,g_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}|^{g_m,1} \\ \boldsymbol{\phi}|^{g_e,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}|^{g_m,1} \\ \boldsymbol{Q}|^{g_e,1} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

⇓ Transformation

$$\dot{\boldsymbol{z}}|^{2r,1} = \boldsymbol{A}|^{2r,2r}\,\boldsymbol{z}|^{2r,1} + \boldsymbol{B}|^{2r,v}\,\boldsymbol{f}|^{v,1} \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{y}|^{w,1} = \boldsymbol{L}|^{w,2r}\,\boldsymbol{z}|^{2r,1} + \boldsymbol{U}|^{w,v}\,\boldsymbol{f}|^{v,1} \quad . \tag{5.3}$$

Die Dimensionen der Matrizen und Vektoren werden in der Form $|^{Zeilen,Spalten}$ angegeben. Dabei werden die Dimensionsbezeichnungen entsprechend Tabelle 5.1 verwendet.

Die diskretisierte Bewegungsgleichung (5.1) wird durch die Vernetzung des piezo–mechanischen Bauteils mit einem FE–Programm wie z. B. dem FEM–System ANSYS® erstellt. Die Systemmatrizen bzw. abgeleitete Modellparameter sind aus dem FE–Modell zu extrahieren, aufzubereiten und in einem Systemsimulationsprogramm wie z. B. MATLAB® in eine Zustandsraumformulierung zu bringen.

In Abschnitt 2.4 wurden die Grundlagen zur Überführung von mechanischen Systemen bzw. deren diskretisierter Bewegungsgleichung (2.29) in Zustandsraummodelle dargelegt. Bei dem dort vorgestellten Verfahren wird die inverse Massenmatrix verwendet. Eine analoge Behandlung von piezo–mechanischen Systemen ist nicht möglich, da die Gesamtmassenmatrix der diskretisierten Bewegungsgleichung von piezo–mechanischen Systemen (Gleichung (2.26) bzw. (5.1)) singulär ist. Die elektrischen Freiheitsgrade (Potentiale) sind für piezo–mechanische Systeme nicht mit einer Trägheit assoziiert.

Die Singularität der Gesamtmassenmatrix kann z. B. mittels Singulärwertzerlegung eliminiert werden, wie dies z. B. durch Kurch et al. [2009] im Zusammenhang mit einer Krylov–Subspace–Modellreduktion angewandt wurde. Dabei verliert man jedoch die Zuordnung der Modellfreiheitsgrade zu den physikalischen Beschreibungsgrößen des Systems. Ausgehend von einer FE–Diskretisierung ist zudem die Zuordnung der Singulärwerte der Ge-

samtmassenmatrix zu den elektrischen Freiheitsgraden bekannt und kann unmittelbar bei der Modellerstellung verwendet werden.

Dazu wird die diskretisierte Bewegungsgleichung für piezo–mechanische Systeme (5.1) in einen differentiellen Teil und einen algebraischen Teil aufgeteilt.

Der differentielle Teil der Bewegungsgleichung umfasst die Dynamik der mechanischen Struktur sowie die piezoelektrische Kopplung und wird häufig als Aktorgleichung bezeichnet [vgl. z. B. Hagood et al. 1990]:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{u\phi}}\,\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{F} \quad . \tag{5.4}$$

Der algebraische Teil beschreibt den unmittelbaren Zusammenhang zwischen elektrischer Ladung und elektrischem Potential unter Berücksichtigung der piezoelektrischen Kopplung. Diese Gleichung wird auch mit Sensorgleichung bezeichnet:

$$\boldsymbol{K}'_{\mathrm{u\phi}}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{\phi\phi}}\,\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{Q} \quad . \tag{5.5}$$

Der algebraische Charakter der Gleichung (5.5) ist im Weiteren für die Unterscheidung der elektrischen Erregung des betrachteten piezo–mechanischen Systems von Bedeutung. Entgegen der klassischen (und im FEM–System ANSYS® umgesetzten) Interpretation der Ladung $\boldsymbol{Q}$ als elektrische Kraftgröße sind aus mathematischer Sicht Ladung $\boldsymbol{Q}$ und Potential $\boldsymbol{\phi}$ gleichartig, da lediglich algebraisch verknüpft. Sie können wahlweise als Kraft- oder Verschiebungsgröße interpretiert werden.

Im Weiteren wird deshalb ein Verfahren vorgestellt, dass den algebraischen Charakter der Sensorgleichung (5.5) unmittelbar ausnutzt.[9] Dafür werden im Zustandsvektor $\boldsymbol{z}$ nicht alle DOF des piezo–mechanischen Systems und deren Geschwindigkeiten zusammengefasst, sondern nur die mechanischen:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.6}$$

Die Beschränkung auf die mechanischen DOF als Zustandsgrößen ist dadurch motiviert, dass nur die mechanischen Freiheitsgrade mit einer Masse verbunden sind. Diese Wahl gestattet es auch, die elektrischen Größen Ladung und Potential wahlweise als Eingangs- oder Ausgangsgröße des Zustandsraummodells zu betrachten.

[9] Die Grundzüge der Methode wurden durch den Autor bereits in [Kranz 2009; Kranz et al. 2010; Neugebauer et al. 2010b] dargelegt.

5.2 Spezifikation der elektrischen Erregung

Im Weiteren ist eine Unterscheidung hinsichtlich der elektrischen Erregung des piezo–mechanischen Systems notwendig:

- Potentialerregung (PE) tritt bei Verwendung von (elektrischen) Spannungsquellen zur Ansteuerung von Piezoaktoren auf.
- Ladungserregung (LE) wirkt bei Verwendung von Stromquellen.

Aufgrund des algebraischen Charakters der Sensorgleichung (5.5) lassen sich für beide elektrischen Erregungen strukturell ähnliche Bewegungsgleichungen aufstellen, die die jeweilige elektrische Erregungsgröße (Potential oder Ladung) der *rechten Seite* der Bewegungsgleichung zuordnet und die jeweils andere elektrische Größe als abhängige Variable formuliert. Diese Bewegungsgleichungen werden in diesem Abschnitt dargestellt.

5.2.1 Potentialerregung

Aus den Gleichungen (5.4) und (5.5) folgt unmittelbar:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}\,\boldsymbol{\phi} \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\phi}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_{\phi\phi}\,\boldsymbol{\phi} \quad . \tag{5.8}$$

Im Vektor $\boldsymbol{Q}$ sind die Ladungen aller Diskretisierungsknoten enthalten. Die Ladungsfreiheit im Inneren des piezoelektrischen Körpers (vgl. Abschnitt 2.2) ist durch diese Formulierung der Ladung als abhängige Größe nicht von vornherein gegeben. Sie kann durch Substitution der inneren elektrischen Potentiale $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}$ durch die äußeren Elektrodenpotentiale $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}}$ erzwungen werden. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\phi_{\mathrm{a}}} \\ \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\phi_{\mathrm{i}}} \end{pmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{\phi_{\mathrm{a}}\phi_{\mathrm{a}}} & \boldsymbol{K}_{\phi_{\mathrm{a}}\phi_{\mathrm{i}}} \\ \boldsymbol{K}'_{\phi_{\mathrm{a}}\phi_{\mathrm{i}}} & \boldsymbol{K}_{\phi_{\mathrm{i}}\phi_{\mathrm{i}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.9}$$

woraus folgt:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}} = -\boldsymbol{K}^{-1}_{\phi_{\mathrm{i}}\phi_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\phi_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{K}^{-1}_{\phi_{\mathrm{i}}\phi_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{K}'_{\phi_{\mathrm{a}}\phi_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \quad . \tag{5.10}$$

Das Eliminieren der inneren Potentiale $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}$ entspricht einer statischen Kondensation nach Guyan [Guyan 1965]) und ist exakt, da keine Trägheitsterme involviert sind.

Mit der Substitutionsgleichung (5.10) werden die Gleichungen (5.7) und (5.8) auf die äußeren elektrischen Größen reduziert:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{u}} + \left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\mathrm{u}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}^{'}\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{a}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}^{'}\right)\boldsymbol{\phi}_\mathrm{a} \quad (5.11)$$

$$\boldsymbol{Q}_\mathrm{a} = \left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{a}}^{'} - \boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}^{'}\right)\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{a}} - \boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}^{'}\right)\boldsymbol{\phi}_\mathrm{a} \quad . \quad (5.12)$$

Diese Gleichungsgruppe beschreibt das Verhalten eines piezo–mechanischen Systems bei Anregung durch mechanische Kräfte und Potentialvorgaben an den Elektroden. Sie kann zur Verdeutlichung der Gleichungsstruktur formalisiert werden:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\mathrm{u},\mathrm{PE}}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi,\mathrm{PE}}\,\boldsymbol{\phi}_\mathrm{a} \quad (5.13)$$

$$\boldsymbol{Q}_\mathrm{a} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi,\mathrm{PE}}^{'}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{PE}}\,\boldsymbol{\phi}_\mathrm{a} \quad (5.14)$$

mit:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\mathrm{u},\mathrm{PE}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\mathrm{u}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}^{'} \quad (5.15)$$

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi,\mathrm{PE}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{a}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}^{'} \quad (5.16)$$

$$\boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{PE}} = \boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{a}} - \boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}^{'} \quad . \quad (5.17)$$

Dabei kennzeichnet $\boldsymbol{\phi}_\mathrm{a}$ den Vektor der elektrischen Erregungen (hier: Potentiale an den Elektroden) und $\boldsymbol{Q}_\mathrm{a}$ den Vektor der abhängigen elektrischen Größen (hier: Ladungen an den Elektroden).

Die Systemmatrizen können z. B. mit dem in Anhang E beschriebenen Verfahren aus dem FEM–System ANSYS® extrahiert werden und bei entsprechender Komponentenvereinbarung für die inneren und äußeren (Elektroden-) Knoten des Modells aufgeteilt und partitioniert werden.

5.2.2 Ladungserregung

Für die Ladungserregung erhält man durch Umstellen der Sensorgleichung (5.5) aus den Gleichungen (5.4) und (5.5):

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{u}} + \left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\mathrm{u}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}^{'}\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{Q} \quad (5.18)$$

$$\boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}^{'}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{Q} \quad . \quad (5.19)$$

Bei Ladungserregung ist eine explizite Eliminierung der inneren elektrischen Potentiale nicht erforderlich. Die Ladungsfreiheit der inneren Diskretisierungsknoten wird durch ausschließliche Ladungsvorgabe an den Elektroden gewährleistet.

An dieser Stelle wird die Unterscheidung von natürlichen und wesentlichen Randbedingungen für die elektrischen DOF deutlich (vgl. Abschnitt 2.3.3): Die Ladungsfreiheit er-

gibt sich als natürliche Randbedingung »von selbst«, ein Nullpotential als wesentliche Randbedingung muss erzwungen werden (vgl. Abschnitt 5.2.1).

Durch Partitionierung der Inversen der elektrischen Steifigkeits- bzw. Kapazitätmatrix

$$\boldsymbol{J}_{\phi\phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_a} & \boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_i} \\ \boldsymbol{J}'_{\phi_a\phi_i} & \boldsymbol{J}_{\phi_i\phi_i} \end{pmatrix} = \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1} \tag{5.20}$$

und der piezoelektrischen Kopplungsmatrix

$$\boldsymbol{K}_{u\phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_{u\phi_a} & \boldsymbol{K}_{u\phi_i} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

lässt sich die Darstellung auf die Ladungen $\boldsymbol{Q}_a$ und Potentiale $\boldsymbol{\phi}_a$ an den Elektroden beschränken:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} + \left(\boldsymbol{K}_{uu} - \boldsymbol{K}_{u\phi}\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}'_{u\phi}\right)\boldsymbol{u} \\ = \boldsymbol{F} - \left(\boldsymbol{K}_{u\phi_a}\,\boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_a} + \boldsymbol{K}_{u\phi_i}\,\boldsymbol{J}'_{\phi_a\phi_i}\right)\boldsymbol{Q}_a \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\boldsymbol{\phi}_a = -\left(\boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_a}\,\boldsymbol{K}'_{u\phi_a} + \boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_i}\,\boldsymbol{K}'_{u\phi_i}\right)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_a}\,\boldsymbol{Q}_a \quad . \tag{5.23}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Ladungserregung entsprechen in ihrer Struktur den Bewegungsgleichungen für die Potentialerregung (vgl. Gleichungen (5.13) und (5.14)):

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{uu,LE}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{K}_{u\phi,LE}\,\boldsymbol{Q}_a \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{\phi}_a = -\boldsymbol{K}'_{u\phi,LE}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{J}_{\phi\phi,LE}\,\boldsymbol{Q}_a \tag{5.25}$$

mit:

$$\boldsymbol{K}_{uu,LE} = \boldsymbol{K}_{uu} - \boldsymbol{K}_{u\phi}\,\boldsymbol{J}_{\phi\phi}\,\boldsymbol{K}'_{u\phi} \tag{5.26}$$

$$\boldsymbol{K}_{u\phi,LE} = \left(\boldsymbol{K}_{u\phi_a}\,\boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_a} + \boldsymbol{K}_{u\phi_i}\,\boldsymbol{J}'_{\phi_a\phi_i}\right) \tag{5.27}$$

$$\boldsymbol{J}_{\phi\phi,LE} = \boldsymbol{J}_{\phi_a\phi_a} \quad . \tag{5.28}$$

Der Vektor $\boldsymbol{Q}_a$ steht für den Vektor der elektrischen Erregungen (hier: Ladungen an den Elektroden) und der Vektor $\boldsymbol{\phi}_a$ für den Vektor der abhängigen elektrischen Größen (hier: Potentiale an den Elektroden). Lediglich das Vorzeichen der verschiebungsbezogenen Terme in den Sensorgleichungen (5.14) und (5.25) unterscheidet die Struktur der Gleichungsgruppen für Potentialerregung und Ladungserregung.

5.3 Vollständiger Zustandsraum

Die strukturelle Ähnlichkeit der Bewegungsgleichungen für Potentialerregung und Ladungserregung gestattet eine weitgehend übereinstimmende Überführung in den Zustandsraum (ZR). Die Herleitung wird explizit für die Potentialerregung dargestellt und auf die Ladungserregung übertragen.

Potentialerregung

Wie in Abschnitt 5.1 bereits eingeführt, wird als Zustandsvektor $\boldsymbol{z}$ der Vektor der mechanischen DOF und der zugehörigen Geschwindigkeiten verwendet. Als Eingangsvektor $\boldsymbol{f}_{\mathrm{PE}}$ des Zustandsraummodells mit Potentialerregung werden die mechanischen Kräfte $\boldsymbol{F}$ und die elektrischen Potentiale an den Elektroden $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}}$ zusammengefasst. Als Ausgangsgrößen $\boldsymbol{y}_{\mathrm{PE}}$ des Zustandsraummodells sind die Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und die elektrischen Ladungen an den Elektroden $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}}$ von Interesse. Eine Beschränkung auf eine engere Teilauswahl wird vorerst nicht vorgenommen:

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{f}_{\mathrm{PE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{y}_{\mathrm{PE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.29}$$

Das mit diesen Ansätzen präzisierte Zustandsraummodell entsprechend den Gleichungen (5.2) und (5.3) wird partitioniert:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{11} & \boldsymbol{L}_{12} \\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{L}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12} \\ \boldsymbol{U}_{21} & \boldsymbol{U}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.31}$$

Die Teilmatrizen $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12} \ldots \boldsymbol{U}_{22}$ können per Koeffizientenvergleich nach geringfügiger Umstellung bzw. unmittelbar aus den Gleichungen (5.13) und (5.14) bestimmt werden. Damit wird das Zustandsraummodell für ein piezo–mechanisches System mit Potentialerregung durch die Systemgleichung (5.32) und die Ausgangsgleichung (5.33) beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{u\upsilon,PE}} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \boldsymbol{M}^{-1} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{u\phi,PE}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{o} \\ \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u\phi,PE}} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{K}_{\mathrm{\phi\phi,PE}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.33}$$

Im Gegensatz zu einem rein mechanischen System (vgl. Abschnitt 2.4) tritt in der Zustandsraumbeschreibung für piezo–mechanische Systeme eine Durchgangsmatrix auf. Diese Durchgangsmatrix wird für potentialerregte Systeme von der elektrischen Steifigkeits- bzw. Kapazitätsmatrix $\boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{PE}}$ gebildet und ist essentiell für die korrekte Abbildung der elektrischen Impedanz des Gesamtsystems.

Nach Rückführung der formalen Matrizen $\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu,PE}}$, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi,\mathrm{PE}}$ und $\boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{PE}}$ entsprechend den Gleichungen (5.15) bis (5.17) lautet das Zustandsraummodell:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}\\ \ddot{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}-\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}^{\prime}\right) & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \dot{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix}\\ &\quad+\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{M}^{-1} & -\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{a}}-\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}^{\prime}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{\phi}_\mathrm{a}\end{pmatrix} \qquad (5.34)\\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{Q}_\mathrm{a}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{a}}^{\prime}-\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi_\mathrm{i}}^{\prime} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \dot{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix}\\ &\quad+\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{a}}-\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{i}\phi_\mathrm{i}}^{-1}\boldsymbol{K}_{\phi_\mathrm{a}\phi_\mathrm{i}}^{\prime}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{\phi}_\mathrm{a}\end{pmatrix} \quad . \qquad (5.35)\end{aligned}$$

Ladungserregung

Als Zustandsvektor $\boldsymbol{z}$ für das ladungserregte System wird wie für die Potentialerregung der Vektor der mechanischen DOF und der entsprechenden Geschwindigkeiten verwendet. Als Eingangsvektor $\boldsymbol{f}_{\mathrm{LE}}$ werden die (herkömmlichen) verallgemeinerten Kraftgrößen, d. h. die mechanischen Kräfte $\boldsymbol{F}$ und die elektrischen Ladungen an den Elektroden $\boldsymbol{Q}_\mathrm{a}$, zusammengefasst. Als elektrische Ausgangsgrößen treten nunmehr neben den mechanischen Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ die elektrischen Potentiale an den Elektroden $\boldsymbol{\phi}_\mathrm{a}$ auf:

$$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \dot{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix}\quad,\qquad \boldsymbol{f}_{\mathrm{LE}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{Q}_\mathrm{a}\end{pmatrix}\quad,\qquad \boldsymbol{y}_{\mathrm{LE}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{\phi}_\mathrm{a}\end{pmatrix}\quad. \qquad (5.36)$$

Ein Koeffizientenvergleich des mit diesen Ansätzen präzisierten Zustandsraummodells

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}\\ \ddot{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \dot{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{Q}_\mathrm{a}\end{pmatrix} \qquad (5.37)$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{\phi}_\mathrm{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_{11} & \boldsymbol{L}_{12}\\ \boldsymbol{L}_{21} & \boldsymbol{L}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \dot{\boldsymbol{u}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12}\\ \boldsymbol{U}_{21} & \boldsymbol{U}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{Q}_\mathrm{a}\end{pmatrix} \qquad (5.38)$$

mit den Gleichungen (5.22) und (5.23) liefert unmittelbar die Systemgleichung (5.39) und die Ausgangsgleichung (5.40) einer Zustandsraumdarstellung eines piezo–mechanischen Systems mit Ladungserregung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u\Phi}}\,\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u\Phi}}^{'}\right) & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \boldsymbol{M}^{-1} & -\boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi_{\mathrm{a}}}\,\boldsymbol{J}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{a}}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{J}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{i}}}^{'}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{o} \\ -\left(\boldsymbol{J}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{a}}}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi_{\mathrm{a}}}^{'} + \boldsymbol{J}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{i}}}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi_{\mathrm{i}}}^{'}\right) & \mathbf{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{J}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{a}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.40}$$

In der Formulierung des Zustandsraummodells für ladungserregte piezo–mechanische Systeme wird die Durchgangsmatrix von der inversen Kapazitätsmatrix $\boldsymbol{J}_{\Phi\Phi} = \boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}^{-1}$ bzw. der den Elektroden zugeordneten Teilmatrix $\boldsymbol{J}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{a}}}$ gebildet.

5.4 Reduzierter Zustandsraum

5.4.1 Modale Beschreibung

Die Zustandsraumdarstellungen durch die Gleichungen (5.32)/(5.33) sowie (5.39)/(5.40) umfassen alle mechanischen DOF $\boldsymbol{u}$ des FE–Modells und die entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{u}}$ als Zustände des Systems. Damit sind diese Zustandsraummodelle im Allgemeinen nicht für eine Integration in eine Systemsimulation geeignet, da sie numerisch zu aufwendig sind.

Eine Modellreduktion hinsichtlich der Anzahl der Zustandsgrößen kann mit den bekannten Modellreduktionsmethoden der Mechanik erzielt werden (vgl. Abschnitt 3.2). Dabei sind nur die mechanischen DOF zu betrachten, da nur diese als Zustandsvariablen verwendet werden (vgl. Abschnitt 5.1). In dieser Abhandlung wird als ingenieurtechnisch relevante Methode die Transformation in den Modalraum mit Reduktion der Eigenwerte demonstriert [vgl. z. B. Dresig et al. 2009].

Die Transformation zwischen dem vollständigen Vektor der mechanischen DOF $\boldsymbol{u}$ und dem reduzierten Vektor der transformierten Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r}$ erfolgt durch eine Projektionsmatrix $\mathfrak{T}$:

$$\boldsymbol{u} = \mathfrak{T}\,\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \quad . \tag{5.41}$$

Wählt man als Projektionsmatrix $\mathcal{T}$ die Modalmatrix $\mathcal{V}$ (Matrix der Eigenformen) des ungedämpften Systems, wobei diese Modalmatrix nur Eigenformen für eine beschränkte Anzahl von Eigenwerten enthält, so erhält man eine reduzierte Systembeschreibung auf modaler Basis.

Für schwach gedämpfte Systeme, wie sie im Allgemeinen im Maschinen- und Fahrzeugbau anzutreffen sind (abgesehen vom Einsatz expliziter diskreter Dämpferelemente) entsprechen die Eigenwerte und -formen in ausreichender Näherung denen des entsprechenden ungedämpften Systems. Bei der Verwendung von massen- bzw. steifigkeitsproportionaler Dämpfung treten keine komplexen Eigenmoden auf, so dass die modale Zerlegung des ungedämpften Systems und eine nachträgliche Einbeziehung der Dämpfung die effizienteste Methode zur dynamischen Modellierung solcher Systeme darstellt [Hatch 2001, Kapitel 7].

Auch für die Systembeschreibung auf modaler Basis ist eine Unterscheidung der piezo–mechanischen Systeme in potentialerregte und ladungserregte Systeme notwendig, da sich die zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen unterscheiden. Basis der Modalanalyse bildet jeweils die erregungsfreie, ungedämpfte Bewegungsgleichung. Die elektrischen Ein- und Ausgangsgrößen werden in der Erörterung der modalen Beschreibung nicht auf die Potentiale und Ladungen an den Elektroden beschränkt, wie dies für den vollständigen Zustandsraum ausgeführt wurde. Diese Reduktion auf die Elektroden wird im Weiteren durch Ausnutzung der Entkopplung und Verwendung von Filtermatrizen (Abschnitt 5.5.1) erzielt.

Potentialerregung

Für potentialerregte Systeme bildet Gleichung (5.7) unter Vernachlässigung der Dämpfung $\boldsymbol{C}$ und Ausschluss der Erregungen $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\phi} = \mathbf{o}$ die Basis der Modalanalyse:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}\,\boldsymbol{u} = \mathbf{o} \quad . \tag{5.42}$$

Dies ist die homogene Bewegungsgleichung des rein mechanischen Systems bei Eliminierung aller elektrischen DOF, d. h., das piezo–mechanische System ist elektrisch kurzgeschlossen (›closed circuit‹, Bezeichnung durch Hochstellung z. B. $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}$).

Als Lösung der Modalanalyse erhält man:

- die Spektralmatrix $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}}$ (Diagonalmatrix der Eigenwerte/Eigenkreisfrequenzen)

$$\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\overset{\mathrm{c}}{\omega_i}^2) \quad , \tag{5.43}$$

- die Modalmatrix $\overset{c}{\mathcal{V}}$ (Matrix der massen–normierten Eigenvektoren)

$$\overset{c}{\mathcal{V}}{}' \boldsymbol{M} \overset{c}{\mathcal{V}} = \boldsymbol{I} \quad . \tag{5.44}$$

Der Vektor der modalen Koordinaten $\boldsymbol{q}_d$ ergibt sich aus:

$$\boldsymbol{u} = \overset{c}{\mathcal{V}} \boldsymbol{q}_d \quad . \tag{5.45}$$

Für die potentialerregten Systeme wird zusätzlich die elektrische Modalmatrix der Ladungen $\overset{c}{\mathcal{V}}_Q$ benötigt. Die in dieser Modalmatrix zusammengefassten elektrischen Eigenvektoren sind im strengen Sinne keine Eigenvektoren, sondern Linearkombinationen der eigentlichen (mechanischen) Eigenvektoren. Die Bezeichnungen *elektrische Eigenvektoren* und *elektrische Modalmatrix* werden in dieser Abhandlung verwendet, um die Bedeutung dieser Vektoren zur Beschreibung der Eigenform der elektrischen Größen (Ladungen oder Potentiale) zu verdeutlichen. Zur Unterscheidung der Modalmatrizen werden Indizes zur Bezeichnung der jeweils enthaltenen Größen verwendet. Die elektrische Modalmatrix der Ladungen $\overset{c}{\mathcal{V}}_Q$ leitet sich aus Gleichung (5.8) unter Beachtung der Erregungsfreiheit $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{o}$ her:

$$\overset{c}{\mathcal{V}}_u = \overset{c}{\mathcal{V}} \tag{5.46}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{K}_{u\phi}' \boldsymbol{u} \tag{5.47}$$

$$\overset{c}{\mathcal{V}}_Q = \boldsymbol{K}_{u\phi}' \overset{c}{\mathcal{V}}_u \quad . \tag{5.48}$$

Die elektrische Modalmatrix der Ladungen $\overset{c}{\mathcal{V}}_Q$ enthält für jede Eigenform den vollständigen Vektor der Reaktionsladungen an den zu Null gesetzten (also an allen) elektrischen DOF und ist wie die mechanische Modalmatrix $\overset{c}{\mathcal{V}}_u$ unmittelbares Ergebnis einer Modalanalyse des FE–Modells.

Mit den mechanischen und elektrischen Modalmatrizen $\overset{c}{\mathcal{V}}_u$ bzw. $\overset{c}{\mathcal{V}}_Q$ kann die Bewegungsgleichung für potentialerregte piezo–mechanische Systeme (5.7) einschließlich der Erregungen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{\phi}$ transformiert werden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underbrace{\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}' \boldsymbol{M} \overset{c}{\mathcal{V}}_u} & \cdot & \underbrace{\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}^{-1} \ddot{\boldsymbol{u}}} & + & \underbrace{\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}' \overset{c}{\boldsymbol{K}} \overset{c}{\mathcal{V}}_u} & \cdot & \underbrace{\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}^{-1} \boldsymbol{u}} & = & \overset{c}{\mathcal{V}}_u{}' \boldsymbol{F} & \underbrace{-\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}' \boldsymbol{K}_{u\phi}} & \cdot \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{I} & \cdot & \ddot{\boldsymbol{q}}_d & + & \overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}} & \cdot & \boldsymbol{q}_d & = & \overset{c}{\mathcal{V}}_u{}' \boldsymbol{F} & - & \overset{c}{\mathcal{V}}_Q{}' \cdot \boldsymbol{\phi} \end{array} \quad . \tag{5.49}$$

Diese modale Beschreibung des potentialerregten piezo–mechanischen Systems ist aufgrund der Diagonalform der Spektralmatrix $\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}}$ eine Serie von g_m entkoppelten Differential-

Tabelle 5.2: *Dimensionen der Zustandsraumreduktion*

Bezeichnung	Gesamtmodell	$\Rightarrow$	reduziertes Modell
Vektor der modalen Koordinaten	$\boldsymbol{q}_\mathrm{d} \mid^{g_\mathrm{m},1}$	$\Rightarrow$	$\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \mid^{r,1}$
Spektralmatrix	$\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}} \mid^{g_\mathrm{m},g_\mathrm{m}}$	$\Rightarrow$	$\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}}_r \mid^{r,r}$
mechanische Modalmatrix	$\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_\mathrm{u} \mid^{g_\mathrm{m},g_\mathrm{m}}$	$\Rightarrow$	$\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} \mid^{g_\mathrm{m},r}$
elektrische Modalmatrix	$\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_\mathrm{Q} \mid^{g_\mathrm{e},g_\mathrm{m}}$	$\Rightarrow$	$\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q},r} \mid^{g_\mathrm{e},r}$

gleichungen für jeweils eine modale Koordinate $q_{\mathrm{d},i}$ $(i = 1 \ldots g_\mathrm{m})$, wobei g_m die Anzahl der mechanischen DOF des Gesamtmodells angibt (s. Tabelle 5.1). Zusätzlich zu den Termen der modalen Form der Bewegungsgleichung für rein mechanische Systeme wird die elektrische Potentialerregung $\boldsymbol{\phi}$ über die elektrische Modalmatrix $\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_\mathrm{Q}$ eingebunden. Die Entkopplung der Differentialgleichungen gestattet es im Weiteren, durch ausschließliche Betrachtung ausgewählter Eigenwerte $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r}$, eine Modellreduktion vorzunehmen.

Je nach Anwendung und interessierendem Frequenzbereich sind andere Aspekte bei der Wahl der relevanten Eigenwerte zu beachten. Die einfachste Form der Modellreduktion berücksichtigt nur die ersten r Eigenwerte des Systems (modales Abschneiden, ›unsorted modal truncation‹). Andere Formen berücksichtigen eine Wichtung der Eigenwerte entsprechend dem statischen Übertragungsfaktor bzw. der Resonanzüberhöhung der entsprechenden Übertragungsfunktion [Hatch 2001].

Die Dimensionen der zu betrachtenden Vektoren und Matrizen reduzieren sich entsprechend Tabelle 5.2.

Die Transformation in den Zustandsraum erfolgt mit den Ansätzen:

$$\boldsymbol{z}_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{f}_\mathrm{PE} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{y}_\mathrm{PE} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.50}$$

Das heißt, ausgewählte modale Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r}$ und ihre ersten Zeitableitungen $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r}$ bilden den reduzierten Zustandsvektor $\boldsymbol{z}_r$, als Ein- und Ausgangsgrößen werden jedoch die physikalischen Größen ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{Q}$) verwendet.

Die Systemgleichung des Zustandsraummodells für potentialerregte piezo–mechanische Systeme mit modalen Koordinaten folgt unmittelbar aus der modal transformierten Bewegungsgleichung (5.49):

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}}_r & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} & -\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{Q},r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.51}$$

Analog zur Behandlung von Dämpfung in mechanischen Systemen kann auch hier eine Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{C}_\mathrm{q}$ einbezogen werden. Dies gestattet die Einbindung von modaler und konstanter Dämpfung (Lehr'sches Dämpfungsmaß ζ) sowie von massenproportionaler (α–) und steifigkeitsproportionaler (β–) Dämpfung [Nasdala 2010]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}}_r & -\boldsymbol{C}_\mathrm{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} & -\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{Q},r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.52}$$

Die Ausgangsgleichung des Zustandsraummodells erhält man aus Gleichung (5.8) in Verbindung mit der Definition der modalen Koordinaten (5.45) und den elektrischen Eigenvektoren nach Gleichung (5.48):

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q},r} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{K}_{\Phi\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.53}$$

Die elektrische Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$ in der Durchgangsmatrix lässt sich nicht durch modale Größen des Systems substituieren. Ihre Dimension $|^{g_\mathrm{e},g_\mathrm{e}}$ bleibt bei Betrachtung aller elektrischen DOF als Ein- bzw. Ausgangssignal erhalten.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Gleichungen (5.52) und (5.53) das piezo–mechanische System vollständig beschreiben, wenn der vollständige Vektor der modalen Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},g_\mathrm{m}}$ als Basis des Zustandsraumes verwendet wird. Durch die modale Transformation wird das Systemverhalten nicht verändert.

Auch wenn hier als modale Basis die Eigenwerte und Eigenformen des kurzgeschlossenen Systems dienen, sind durch Berücksichtigung der Modalmatrix der Ladungen $\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_\mathrm{Q}$ und der Kapazitätsmatrix $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$ in der Zustandsraumbeschreibung alle Resonanzen und Antiresonanzen sowohl in ihrer Frequenzlage als auch mit den entsprechenden Amplitudenverhältnissen enthalten. Dies wird im Anhang C anhand eines piezo–mechanischen Basismodells verdeutlicht und analytisch aufgezeigt.

Ladungserregung

Für ladungserregte Systeme leitet sich die Basis für die Modalanalyse aus Gleichung (5.18) unter Vernachlässigung der Dämpfung $\boldsymbol{C}$ und Ausschluss der Erregungen $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$ her:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \left(\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi}\,\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\Phi}\right)\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad . \tag{5.54}$$

Dieses System kann wiederum als rein mechanisches Modell angesehen werden, wobei eine modifizierte (Ersatz–)Steifigkeit $\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}$ auftritt:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{u} = \mathbf{o} \tag{5.55}$$

mit:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}^{'} \quad . \tag{5.56}$$

Diese Steifigkeit $\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}$ ist die Steifigkeit des piezo–mechanischen Systems mit offenen elektrischen Anschlussklemmen (›open circuit‹).

In Analogie zum Vorgehen in Abschnitt 5.4.1 werden durch eine Modalanalyse die Spektralmatrix $\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}$ und die Modalmatrix $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ des elektrisch offenen Systems bestimmt:

- Spektralmatrix $\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}$ (Diagonalmatrix der Eigenwerte/Eigenkreisfrequenzen)

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}} = \mathrm{diag}(\overset{\circ}{\omega}_i^{\,2}) \quad , \tag{5.57}$$

- Modalmatrix $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$ (Matrix der massen–normierten Eigenvektoren)

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}{}' \boldsymbol{M}\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}} = \boldsymbol{I} \quad . \tag{5.58}$$

Damit lässt sich der Vektor der modalen Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}$ angeben:

$$\boldsymbol{u} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}} \quad . \tag{5.59}$$

Zusätzlich zu diesen Größen wird die Modalmatrix der elektrischen Potentiale $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi}$ benötigt. Die elektrische Modalmatrix $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi}$ ergibt sich aus der Beziehung zwischen den elektrischen und den mechanischen DOF unter Beachtung der Erregungsfreiheit $\boldsymbol{Q} = \mathbf{o}$ (s. Gleichung (5.19)):

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}} \tag{5.60}$$

$$\boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}^{'}\boldsymbol{u} \tag{5.61}$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi} = -\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}^{'}\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u}} \quad . \tag{5.62}$$

Mit den mechanischen und elektrischen Modalmatrizen $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u}}$ bzw. $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi}$ kann die Bewegungs-

gleichung für ladungserregte piezo–mechanische Systeme (5.18) einschließlich der Erregungen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{Q}$ transformiert werden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underbrace{\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}{}' \boldsymbol{M} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}}_{\boldsymbol{I}} & \cdot & \underbrace{\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}{}^{-1} \ddot{\boldsymbol{u}}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}} & + & \underbrace{\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}{}' \boldsymbol{K} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}}_{\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}} & \cdot & \underbrace{\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}{}^{-1} \boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}} & = & \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}{}' \boldsymbol{F} & \underbrace{-\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}{}' \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi} \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}}_{\overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\phi}{}'} & \cdot & \boldsymbol{Q} \\ & & & & & & & & & & \end{array} \quad . \tag{5.63}$$

Die Transformation in den Zustandsraum erfolgt wiederum unter Verwendung eines reduzierten Vektors der modalen Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r}$. Als Ein- und Ausgangsgrößen werden die physikalischen, verallgemeinerten Kraft- ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{Q}$) und Verschiebungsgrößen ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\phi}$) verwendet:

$$\boldsymbol{z}_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{f}_{\mathrm{LE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{y}_{\mathrm{LE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.64}$$

Die Systemgleichung des Zustandsraummodells mit modalen Koordinaten wird unter Einbeziehung einer modalen Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}}$ unmittelbar aus Gleichung (5.63) abgeleitet:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}_r & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r}{}' & \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\phi,r}{}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.65}$$

Die Ausgangsgleichung des Zustandsraummodells erhält man aus der Substitutionsgleichung für die elektrischen Potentiale (5.19) in Verbindung mit der Definition der modalen Koordinaten (5.59) und den elektrischen Eigenvektoren nach Gleichung (5.62):

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{0} \\ \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\phi,r} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.66}$$

Die Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{J}_{\phi\phi} = \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}$ in der Durchgangsmatrix lässt sich nicht durch modale Größen des Systems substituieren und behält bei Betrachtung aller elektrischen DOF als Ein- bzw. Ausgangssignal ihre Dimension $|^{g_e,g_e}$.

5.4.2 Erweiterung der Reduktionsbasis durch statische Moden

Aus der Diskussion des Standes der Forschung (vgl. Abschnitt 3.2) ist bekannt, dass eine korrekte Abbildung des elektrischen Übertragungsverhaltens auf Grundlage einer modalen Beschreibung bei zusätzlicher Berücksichtigung statischer Moden gelingt [Collet

et al. 2008]. Die Verwendung statischer Verformungsmoden bei elektrischer Anregung basiert hier nicht auf einer systemtheoretischen Herleitung, sondern beruht auf den publizierten Erfahrungen. Auch bei der Erweiterung der Reduktionsbasis durch statische Moden ist eine Unterscheidung von potentialerregten und ladungserregten Systemen angebracht.

Potentialerregung

Das statische Verformungsverhalten bei Anregung durch elektrische Potentiale wird ausgehend von Gleichung (5.7) durch Auslassen der dynamischen Terme und Vernachlässigung der mechanischen Kräfte beschrieben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}\,\boldsymbol{u} &= -\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}\,\boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{u} &= \underbrace{-\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}}\,\boldsymbol{\phi} \qquad (5.67) \\ \boldsymbol{u} &= \qquad \mathcal{P} \qquad \boldsymbol{\phi} \quad . \qquad (5.68) \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathcal{P}$ enthält in ihren Spalten alle Verschiebungskomponenten bei Anregung durch ein Einheitspotential an jeweils einem elektrischen DOF.

Zur Verwendung in der Reduktionsbasis werden die Verschiebungsvektoren bei Anregung durch ein Einheitspotential an jeder aktiven Elektrode des piezo–mechanischen Modells in einer Teilmatrix $\mathcal{P}_{\mathrm{io}} \subseteq \mathcal{P}$ zusammengefasst. Zur Bestimmung der Matrix $\mathcal{P}_{\mathrm{io}}$ sind also statische Lastfälle entsprechend der Anzahl der Potentialeingänge bzw. aktiven Elektroden zu berechnen. Dabei werden alle Potentialeingänge mit Nullpotential belegt. Je Lastfall wird jeweils einer anderen Elektrode das Einheitspotential zugeordnet. Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}$ zur Reduktion der Bewegungsgleichung wird aus der reduzierten Modalmatrix des elektrisch kurzgeschlossenen Systems $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{u},r}$ und der Matrix der statischen Moden bei Potentialanregung $\mathcal{P}_{\mathrm{io}}$ zusammengesetzt:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{u},r} & \mathcal{P}_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \quad . \qquad (5.69)$$

Der Vektor der mechanischen DOF wird mit dieser Transformationsmatrix $\mathcal{T}$ auf den Vektor der generalisierten Koordinaten $\boldsymbol{q}$ reduziert:

$$\boldsymbol{u} = \mathcal{T}\,\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{V}}_{\mathrm{u},r} & \mathcal{P}_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \quad . \qquad (5.70)$$

Die Bewegungsgleichung für potentialerregte piezo–mechanische Systeme (5.7) wird diesem Ansatz entsprechend transformiert:

$$\underbrace{\mathcal{T}' M \mathcal{T}} \cdot \underbrace{\mathcal{T}^{-1} \ddot{u}} + \underbrace{\mathcal{T}' \overset{c}{K} \mathcal{T}} \cdot \underbrace{\mathcal{T}^{-1} u} = \underbrace{\mathcal{T}' F} - \underbrace{\mathcal{T}' K_{u\phi} \phi}$$
$$M^{\mathcal{T}} \cdot \ddot{q} + \overset{c}{K}^{\mathcal{T}} \cdot q = F^{\mathcal{T}} - \phi^{\mathcal{T}} \tag{5.71}$$

mit:

$$M^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \overset{c}{\mathcal{V}}'_{u,r} M \overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r} & \overset{c}{\mathcal{V}}'_{u,r} M \mathcal{P}_{io} \\ \mathcal{P}'_{io} M \overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r} & \mathcal{P}'_{io} M \mathcal{P}_{io} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \overset{c}{\mathcal{V}}'_{u,r} M \mathcal{P}_{io} \\ \mathcal{P}'_{io} M \overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r} & \mathcal{P}'_{io} M \mathcal{P}_{io} \end{pmatrix} \tag{5.72}$$

$$\overset{c}{K}^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \overset{c}{\mathcal{V}}'_{u,r} \overset{c}{K} \overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r} & \overset{c}{\mathcal{V}}'_{u,r} \overset{c}{K} \mathcal{P}_{io} \\ \mathcal{P}'_{io} \overset{c}{K} \overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r} & \mathcal{P}'_{io} \overset{c}{K} \mathcal{P}_{io} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{c}{\Lambda}_r & \overset{c}{\mathcal{V}}'_{u,r} \overset{c}{K} \mathcal{P}_{io} \\ \mathcal{P}'_{io} \overset{c}{K} \overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r} & \mathcal{P}'_{io} \overset{c}{K} \mathcal{P}_{io} \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

$$F^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \overset{c}{\mathcal{V}}'_{u,r} \\ \mathcal{P}'_{io} \end{pmatrix} \cdot F \tag{5.74}$$

$$\phi^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \overset{c}{\mathcal{V}}'_{Q,r} \\ \mathcal{P}'_{io} K_{u\phi} \end{pmatrix} \cdot \phi \quad . \tag{5.75}$$

Lediglich die linken oberen Teilmatrizen der transformierten Massen- und Steifigkeitsmatrix lassen sich wie bei der modalen Transformation (vgl. Abschnitt 5.4.1) durch die Einheitsmatrix I bzw. die Matrix der Eigenwerte $\overset{c}{\Lambda}_r$ substituieren. In den anderen Teilmatrizen treten Matrixprodukte mit den vollständigen mechanischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen M bzw. $\overset{c}{K} = K_{uu}$ auf. Dementsprechend müssen die zugehörigen Modalmatrizen $\overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r}$ bzw. statischen Moden $\mathcal{P}_{io}$ auch auf dem vollständigen Vektor der mechanischen DOF basieren. Die ausmultiplizierten Matrixprodukte entsprechen dann in ihrer Dimension der Anzahl der generalisierten Koordinaten $q = (q_{d,r}\ q_s)'$.

Bei der Einbeziehung der statischen Moden in die Reduktionsbasis tritt keine vollständige Entkopplung des Gleichungssystems wie bei rein modaler Beschreibung auf.

In der Sensorgleichung (5.8) zur Beschreibung der Ladung als Ausgangsgröße des Zustandsraummodells ist die Transformationsmatrix nur für den Kopplungsterm zur Mechanik von Belang:

$$Q = K'_{u\phi} \mathcal{T} \cdot q + K_{\phi\phi} \cdot \phi \tag{5.76}$$

$$= \left(\underbrace{K'_{u\phi} \overset{c}{\mathcal{V}}_{u,r}} \quad K'_{u\phi} \mathcal{P}_{io} \right) \cdot \begin{pmatrix} q_{d,r} \\ q_s \end{pmatrix} + K_{\phi\phi} \cdot \phi \tag{5.77}$$

$$= \left(\overset{c}{\mathcal{V}}'_{Q,r} \quad K'_{u\phi} \mathcal{P}_{io} \right) \cdot \begin{pmatrix} q_{d,r} \\ q_s \end{pmatrix} + K_{\phi\phi} \cdot \phi \quad . \tag{5.78}$$

Mit den Gleichungen (5.71) und (5.78) lässt sich nunmehr das Zustandsraummodell aufbauen. Wegen der vereinfachten Schreibweise wird dafür hier die Formulierung als Deskriptor–System der Form:

$$\boldsymbol{Y} \cdot \dot{z} = \boldsymbol{A} \cdot z + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{f} \tag{5.79}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{L} \cdot z + \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{f} \tag{5.80}$$

gewählt.[10] Inwieweit die speziellen Eigenschaften von Deskriptor–Systemen für piezo–mechanische Modelle ausgenutzt werden können, ist Gegenstand aktueller mathematischer Forschung.[11]

Die resultierende Zustandsraumbeschreibung piezo–mechanische Systeme mit Potentialerregung setzt sich zusammen aus:

a) dem Zustands-, Eingangs- und Ausgangsvektor:

$$z_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{f}_{\mathrm{PE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{y}_{\mathrm{PE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.81}$$

b) der Systemgleichung

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{I} & \mathbf{o} & \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r}\, \boldsymbol{M}\, \mathcal{P}_{\mathrm{io}} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \boldsymbol{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathcal{P}'_{\mathrm{io}}\, \boldsymbol{M}\, \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & \mathcal{P}'_{\mathrm{io}}\, \boldsymbol{M}\, \mathcal{P}_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \boldsymbol{I} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}}_r & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}} & -\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r}\, \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{K}}\, \mathcal{P}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \boldsymbol{I} \\ -\mathcal{P}'_{\mathrm{io}}\, \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{K}}\, \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & -\mathcal{P}'_{\mathrm{io}}\, \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{K}}\, \mathcal{P}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} & -\overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{Q},r} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathcal{P}'_{\mathrm{io}} & -\mathcal{P}'_{\mathrm{io}}\, \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.82}$$

[10] Eine Umsetzung mit MATLAB erfolgt mit Hilfe der Funktion `dss`.

[11] Persönliche Mitteilung von Herrn Jens Saak, Mitarbeiter von Herrn Prof. Peter Benner (Max–Planck–Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme Magdeburg), über die Betreuung einer Diplomarbeit.

c) und der Ausgangsgleichung

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \\ \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q},r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\phi}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{K}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.83}$$

Die Dimension dieses Zustandsraummodells wird durch die Anzahl der einbezogenen Eigenmoden und die Anzahl der aktiven Elektroden bestimmt, da je aktiver Elektrode eine statische Ergänzungsmode verwendet wird.

Ladungserregung

Für die Ladungserregung ist Gleichung (5.18) mit der Ersatzsteifigkeit $\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}$ entsprechend Gleichung (5.56) Ausgangspunkt der Betrachtung. Auslassen der dynamischen Terme und Vernachlässigung der mechanischen Kräfte führt zur Beschreibung des statischen Verformungsverhaltens bei Ladungsanregung:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi} \cdot \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{u} = \underbrace{-\overset{\circ}{\boldsymbol{K}}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi} \cdot \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}} \cdot \boldsymbol{Q} \tag{5.84}$$

$$\boldsymbol{u} = \qquad \boldsymbol{\mathfrak{Q}} \qquad \cdot \boldsymbol{Q} \quad . \tag{5.85}$$

Die Matrix $\boldsymbol{\mathfrak{Q}}$ enthält in ihren Spalten alle Verschiebungskomponenten bei Anregung des piezo–mechanischen Systems durch eine Einheitsladung an jeweils einem elektrischen DOF. Von Interesse für die Reduktionsbasis sind die Verschiebungsvektoren bei Anregung durch eine Einheitsladung an jeder aktiven Elektrode des piezo–mechanischen Modells, die in einer Teilmatrix $\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{\mathrm{io}} \subseteq \boldsymbol{\mathfrak{Q}}$ zusammengefasst werden. Die Matrix $\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{\mathrm{io}}$ ermittelt man durch statische Lastfälle entsprechend der Anzahl der Ladungseingänge bzw. aktiven Elektroden.

Die Transformationsmatrix $\boldsymbol{\mathfrak{T}}$ zur Reduktion der Bewegungsgleichung bei Ladungsanregung wird aus der reduzierten Modalmatrix des elektrisch offenen Systems $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r}$ und der Matrix der statischen Moden bei Ladungsanregung $\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{\mathrm{io}}$ zusammengesetzt:

$$\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r} & \boldsymbol{\mathfrak{Q}}_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.86}$$

Die Reduktionstransformation für den Vektor $\boldsymbol{u}$ der mechanischen DOF und die Bewe-

gungsgleichung für ladungserregte piezo–mechanische Systeme (5.18) können folgendermaßen notiert werden:

$$\boldsymbol{u} = \mathfrak{T} \cdot \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \tag{5.87}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \underbrace{\mathfrak{T}' M \mathfrak{T}} & \cdot & \underbrace{\mathfrak{T}^{-1} \ddot{\boldsymbol{u}}} & + & \underbrace{\mathfrak{T}' \overset{\circ}{K} \mathfrak{T}} & \cdot & \underbrace{\mathfrak{T}^{-1} \boldsymbol{u}} & = & \underbrace{\mathfrak{T}' \boldsymbol{F}} & - & \underbrace{\mathfrak{T}' K_{\mathrm{u}\Phi} K_{\Phi\Phi}^{-1} \boldsymbol{Q}} \\ M^{\mathfrak{T}} & \cdot & \ddot{\boldsymbol{q}} & + & \overset{\circ}{K}^{\mathfrak{T}} & \cdot & \boldsymbol{q} & = & \boldsymbol{F}^{\mathfrak{T}} & - & \boldsymbol{Q}^{\mathfrak{T}} \end{array} \tag{5.88}$$

mit:

$$M^{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} M \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} M \Omega_{\mathrm{io}} \\ \Omega'_{\mathrm{io}} M \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \Omega'_{\mathrm{io}} M \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} M \Omega_{\mathrm{io}} \\ \Omega'_{\mathrm{io}} M \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \Omega'_{\mathrm{io}} M \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \tag{5.89}$$

$$\overset{\circ}{K}{}^{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} \overset{\circ}{K} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} \overset{\circ}{K} \Omega_{\mathrm{io}} \\ \Omega'_{\mathrm{io}} \overset{\circ}{K} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \Omega'_{\mathrm{io}} \overset{\circ}{K} \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\Lambda}_r & \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} \overset{\circ}{K} \Omega_{\mathrm{io}} \\ \Omega'_{\mathrm{io}} \overset{\circ}{K} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \Omega'_{\mathrm{io}} \overset{\circ}{K} \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \tag{5.90}$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} \\ \Omega'_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{F} \tag{5.91}$$

$$\boldsymbol{Q}^{\mathfrak{T}} = \begin{pmatrix} -\overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\Phi,r} \\ \Omega'_{\mathrm{io}} K_{\mathrm{u}\Phi} K_{\Phi\Phi}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{Q} \quad . \tag{5.92}$$

Das Potential als Ausgangsgröße wird beschrieben nach Gleichung (5.19) unter Berücksichtigung der Transformationsmatrix:

$$\boldsymbol{\phi} = -K_{\Phi\Phi}^{-1} K'_{\mathrm{u}\Phi} \mathfrak{T} \cdot \boldsymbol{q} + K_{\Phi\Phi}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \tag{5.93}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{-K_{\Phi\Phi}^{-1} K'_{\mathrm{u}\Phi} \overset{\circ}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r}} & -K_{\Phi\Phi}^{-1} K'_{\mathrm{u}\Phi} \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} + K_{\Phi\Phi}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \tag{5.94}$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathcal{V}}{}'_{\Phi,r} & -K_{\Phi\Phi}^{-1} K'_{\mathrm{u}\Phi} \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} + K_{\Phi\Phi}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \quad . \tag{5.95}$$

Das resultierende Zustandsraummodell für ladungserregte piezo–mechanische Systeme lautet (in Deskriptor–Form):

a) Zustands-, Eingangs- und Ausgangsvektor:

$$\boldsymbol{z}_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{f}_{\mathrm{PE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{y}_{\mathrm{PE}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.96}$$

b) Systemgleichung

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{I} & \mathbf{o} & \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}{}'_{\mathrm{u},r}\, \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \boldsymbol{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{io}}\, \boldsymbol{M}\, \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{io}}\, \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \boldsymbol{I} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\overset{\circ}{\boldsymbol{\Lambda}}_r & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}} & -\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}{}'_{\mathrm{u},r}\, \overset{\circ}{\boldsymbol{K}}\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{io}}\, \overset{\circ}{\boldsymbol{K}}\, \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & -\boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{io}}\, \overset{\circ}{\boldsymbol{K}}\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \\ &\qquad + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}{}'_{\mathrm{u},r} & \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}{}'_{\phi,r} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{io}} & -\boldsymbol{\Omega}'_{\mathrm{io}}\, \boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}\, \boldsymbol{K}^{-1}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{5.97}$$

c) Ausgangsgleichung

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi,r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{K}^{-1}_{\phi\phi}\, \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\phi}\, \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{K}^{-1}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.98}$$

Die Dimension des Zustandsraummodells wird wiederum durch die Anzahl der einbezogenen Eigenmoden und die Anzahl der aktiven Elektroden bestimmt.

5.5 Ein- und Ausgangsgrößen

5.5.1 Filtermatrizen

Im Allgemeinen ist nur eine wesentlich beschränkte Auswahl der Freiheitsgrade bzw. Kraftgrößen eines Systems als Eingangssignal oder Ausgangssignal einer Zustandsraumbeschreibung von Interesse. Die Zustandsraumbeschreibungen mit den Gleichungspaaren (5.32)/(5.33), (5.39)/(5.40), (5.52)/(5.53) sowie (5.65)/(5.66) sind jedoch mit den vollständigen Ein- bzw. Ausgangsvektoren $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{y}$ formuliert worden. Insbesondere die elektrischen Ein- und Ausgangsgrößen sind für Piezoverbundmodule auf die Potentiale und Ladungen an den Elektroden beschränkt (vgl. Abschnitt 2.2).

Eine Reduktion der zu betrachtenden Ein- und Ausgangssignale kann unter Verwendung von Filtermatrizen $\boldsymbol{B}_{\mathrm{io}}$ und $\boldsymbol{L}_{\mathrm{io}}$ für die Ein- und Ausgangsvektoren erzielt werden:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{io}} \cdot \boldsymbol{f}_{\mathrm{io}} \quad , \qquad \boldsymbol{y}_{\mathrm{io}} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{io}} \cdot \boldsymbol{y} \quad . \tag{5.99}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{f}_{\mathrm{io}}$ und $\boldsymbol{y}_{\mathrm{io}}$ stellen die tatsächlichen Ein- bzw. Ausgangsvektoren dar, die keine Null–Elemente enthalten. Die Filtermatrizen $\boldsymbol{B}_{\mathrm{io}}$ und $\boldsymbol{L}_{\mathrm{io}}$ können in einen für die mechanischen DOF relevanten Teil und einen für die elektrischen DOF relevanten Teil aufgeteilt werden.

Die Elemente dieser Filtermatrizen nehmen nur Werte von Null und Eins an und zwar in der Weise, dass in jeder Spalte der Eingangsfiltermatrix $\boldsymbol{B}_{\mathrm{io}}$ und in jeder Zeile der Ausgangsfiltermatrix $\boldsymbol{L}_{\mathrm{io}}$ nur jeweils eine Eins steht. Damit wird die Auswahl der tatsächlichen Ein- bzw. Ausgangssignale realisiert.

Die Dimension der Filtermatrizen ergibt sich aus der Anzahl der tatsächlichen Ein- bzw. Ausgangssignale und der Anzahl der Freiheitsgrade im System. Die Matrixdimensionen sind in den folgenden Gleichungen als obere Indizes entsprechend Tabelle 5.1 auf Seite 63 angegeben.

Die tatsächlichen Ein- und Ausgangsvektoren lassen sich für potentialerregte und ladungserregte Systeme wie folgt darstellen:

Potentialerregte Systeme

Eingangsvektor

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}\big|^{g_{\mathrm{m}},1} \\ \boldsymbol{\phi}\big|^{g_{\mathrm{e}},1} \end{pmatrix}\Bigg|^{g,1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{F,io}}\big|^{g_{\mathrm{m}},v_{\mathrm{m}}} & \mathbf{o}\big|^{g_{\mathrm{m}},v_{\mathrm{e}}} \\ \mathbf{o}\big|^{g_{\mathrm{e}},v_{\mathrm{m}}} & \boldsymbol{B}_{\phi,\mathrm{io}}\big|^{g_{\mathrm{e}},v_{\mathrm{e}}} \end{pmatrix}\Bigg|^{g,v} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{io}}\big|^{v_{\mathrm{m}},1} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{io}}\big|^{v_{\mathrm{e}},1} \end{pmatrix}\Bigg|^{v,1} \tag{5.100}$$

Ausgangsvektor

$$\left(\begin{matrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{io}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{io}} \end{matrix} \right) \Bigg|^{w,1} = \left(\begin{matrix} \boldsymbol{L}_{\mathrm{u,io}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}} \end{matrix} \right) \Bigg|^{w,g} \cdot \left(\begin{matrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q} \end{matrix} \right) \Bigg|^{g,1} , \tag{5.101}$$

Ladungserregte Systeme

Eingangsvektor

$$\left(\begin{matrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{matrix} \right) \Bigg|^{g,1} = \left(\begin{matrix} \boldsymbol{B}_{\mathrm{F,io}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{B}_{\mathrm{Q,io}} \end{matrix} \right) \Bigg|^{g,v} \cdot \left(\begin{matrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{io}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{io}} \end{matrix} \right) \Bigg|^{v,1} \tag{5.102}$$

Ausgangsvektor

$$\left(\begin{matrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{io}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{io}} \end{matrix} \right) \Bigg|^{w,1} = \left(\begin{matrix} \boldsymbol{L}_{\mathrm{u,io}} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{L}_{\phi,\mathrm{io}} \end{matrix} \right) \Bigg|^{w,g} \cdot \left(\begin{matrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{matrix} \right) \Bigg|^{g,1} . \tag{5.103}$$

5.5.2 Reduktion der Durchgangsmatrix und der Modalmatrizen

Potentialerregte Systeme

Die formale Reduktion der Ein- und Ausgangsvektoren ist für die Dimensionierung der Durchgangsmatrix von Bedeutung. Der von Null verschiedene Teil der Durchgangsmatrix verkettet den Vektor der Potentiale mit dem Vektor der Ladungen. Für ein potentialerregtes System lautet der betreffende Teil der Ausgangsgleichung (s. Gleichung (5.53)) unter Einbeziehung der Filtermatrizen $\boldsymbol{B}_{\phi,\mathrm{io}}$ und $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}}$ entsprechend den Gleichungen (5.100) und (5.101):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{io}} &= \boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}} \cdot \boldsymbol{Q} \\ &= \boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}} \cdot \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q},r} \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}} \cdot \boldsymbol{K}_{\phi\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} \\ &= \underbrace{\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}} \cdot \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q},r}} \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} + \underbrace{\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}} \cdot \boldsymbol{K}_{\phi\phi} \cdot \boldsymbol{B}_{\phi,\mathrm{io}}} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{io}} \\ &= \quad \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q},r,\mathrm{io}} \quad \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} + \qquad \boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{io}} \qquad \cdot \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{io}} \quad . \end{aligned} \tag{5.104}$$

Die Dimension der elektrischen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{io}}$ für die tatsächlichen Ein- und Ausgangsgrößen entspricht folgenden Angaben:

$$\boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{io}}\big|^{w_\mathrm{e},v_\mathrm{e}} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}}\big|^{w_\mathrm{e},g_\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{K}_{\phi\phi}\big|^{g_\mathrm{e},g_\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{B}_{\phi,\mathrm{io}}\big|^{g_\mathrm{e},v_\mathrm{e}} \quad . \tag{5.105}$$

Da in jeder Spalte der Eingangsfiltermatrix $\boldsymbol{B}_{\Phi,\mathrm{io}}$ und in jeder Zeile der Ausgangsfiltermatrix $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Q,io}}$ jeweils nur eine Eins enthalten ist, werden mit dieser Transformation genau die Elemente der vollständigen Matrix $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$ ausgewählt, die die tatsächlichen Eingangspotentiale mit den tatsächlichen Ausgangsladungen verknüpfen. Das heißt, bei einer Bestimmung der elektrischen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi,\mathrm{io}}$ mit Hilfe des FEM–Systems ANSYS® sind nur die statischen elektrischen Lastfälle zu berücksichtigen, die unmittelbar auf den tatsächlichen Eingangsgrößen beruhen. Diese müssen nur für die tatsächlichen Ausgangsgrößen ausgewertet werden. Für eine detaillierte Darstellung des praktischen Vorgehens bei der Extraktion der Modelldaten mit Hilfe des FEM–Systems ANSYS® sei auf Anhang E verwiesen.

Die elektrische Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi,\mathrm{io}}$ für die tatsächlichen Ein- und Ausgangsgrößen entspricht bei Betrachtung aller im piezo–mechanischen Modell enthaltenen Elektroden der im Abschnitt 5.2.1 eingeführten Matrix $\boldsymbol{K}_{\Phi_\mathrm{a}\Phi_\mathrm{a}}$ als Teil der Gesamtkapazitätsmatrix $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$.

Aus Gleichung (5.104) ist auch ersichtlich, dass die in der Ausgangsgleichung auftretende Modalmatrix $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q},r}$ durch die Anwendung der Filtermatrix $\boldsymbol{L}_{\mathrm{io}}$ zur reduzierten Modalmatrix $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q},r,\mathrm{io}}$ verkürzt wird. In der Modalmatrix $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q},r,\mathrm{io}}$ sind aufgrund der Null–Eins–Belegung der Filtermatrix $\boldsymbol{L}_{\mathrm{io}}$ nur die für die tatsächlichen Ausgangsladungen relevanten Komponenten enthalten. Diese Reduktion der Modalmatrix ist auch für die Modalmatrix der Verschiebungen $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r}$ ($\rightarrow \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r,\mathrm{io}}$) gültig. Bei kollokierter Wahl der Ein- und Ausgangsgrößen, d. h., zu jeder Kraft- bzw. Potentialeingangsgröße gehört eine dem DOF des FE–Modells entsprechende Verschiebungs- bzw. Ladungsausgangsgröße, unterscheiden sich die Modalmatrizen für die Eingangsmatrix nicht von den Modalmatrizen für die Ausgangsmatrix.

Ladungserregte Systeme

Für die ladungserregten piezo–mechanischen Systeme gilt für die Dimensionierung der Durchgangsmatrix eine analoge Betrachtung bezüglich der Inversen der elektrischen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{J}_{\Phi\Phi} = \boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}^{-1}$. Die dimensionsreduzierte Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{J}_{\Phi\Phi,\mathrm{io}}$ ergibt sich aus:

$$\boldsymbol{J}_{\Phi\Phi,\mathrm{io}}|^{w_\mathrm{e},v_\mathrm{e}} = \boldsymbol{L}_{\Phi,\mathrm{io}}|^{w_\mathrm{e},g_\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{J}_{\Phi\Phi}|^{g_\mathrm{e},g_\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{Q,io}}|^{g_\mathrm{e},v_\mathrm{e}} \tag{5.106}$$

mit den Filtermatrizen $\boldsymbol{L}_{\Phi,\mathrm{io}}$ und $\boldsymbol{B}_{\mathrm{Q,io}}$ für ladungserregte Systeme (s. Gleichungen (5.102) und (5.103)).

Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen gilt:

$$\boldsymbol{J}_{\phi\phi,\mathrm{io}} = (\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1})_{\mathrm{io}} \neq (\boldsymbol{K}_{\phi\phi,\mathrm{io}})^{-1} \quad . \tag{5.107}$$

Die Spalten und Zeilenreduktion erfolgt erst nach der Inversion bzw. indirekt über das im Anhang E beschriebene Verfahren.

Für die Reduktion der für die Zustandsraumbeschreibung von ladungserregten Systemen verwendeten Modalmatrizen gilt das Gleiche wie für die potentialerregten Systeme. Die Anwendung der Filtermatrizen $\boldsymbol{B}_{\mathrm{io}}$ und $\boldsymbol{L}_{\mathrm{io}}$ führt zu Modalmatrizen $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r,\mathrm{io}}$ und $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi,r,\mathrm{io}}$, in denen nur die Komponenten enthalten sind, die den tatsächlichen Ein- und Ausgangsgrößen zugeordnet sind.

5.5.3 Abgeleitete Ausgangsgrößen

Das in Abschnitt 5.5.1 eingeführte Konzept der Ein- und Ausgangsfiltermatrizen kann auch genutzt werden, Dehnungen (oder andere auf ein finites Element bezogene Feldgrößen wie z. B. die elektrische Feldstärke) als Ausgangssignal des Zustandsraummodells zu konstruieren. Dies ist mit Hinblick auf die praktische Umsetzung von Regelungskonzepten in Anlagen des Maschinen- und Fahrzeugbaus insofern von Bedeutung, da die lokale Erfassung von Dehnungen, z. B. mit Hilfe von Dehnungsmessstreifen, oft einfacher und kostengünstiger zu realisieren ist, als eine Verschiebungsmessung, z. B. mit Glasmaßstäben.

Für die Zielstellung dieser Arbeit bildet die Einbeziehung von Dehnungssignalen in das Zustandsraummodell den Verknüpfungspunkt für die Kopplung der dynamischen Beschreibungen in diesem Kapitel mit den Beanspruchungsanalysen des Kapitels 4.

Ausgangspunkt für die Einbeziehung von Dehnungssignalen in das Zustandsraummodell ist die Verzerrungs–Verschiebungs–Matrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{elem}}$ eines finiten Elementes, die den Zusammenhang zwischen dem Vektor der Elementverzerrungen $\boldsymbol{S}_{\mathrm{elem}}$ und dem Vektor der Knotenverschiebungen eines Elementes $\boldsymbol{u}_{\mathrm{elem}}$ angibt:

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{elem}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{elem}} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{elem}} \quad . \tag{5.108}$$

Die Verzerrungs–Verschiebungs–Matrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{elem}}$ hängt von den geometrischen Knotenkoordinaten, den Ansatzfunktionen $\boldsymbol{N}_{\mathrm{u}}$ und deren örtlichen Ableitungen unter Berücksichtigung der Verzerrungs–Verschiebungs–Beziehung (2.3) ab. Sie wird bei der Diskretisierung eines FE–Modells berechnet. Für das Gesamtmodell können die elementweise ermittelten Verzerrungs–Verschiebungs–Matrizen $\boldsymbol{R}_{\mathrm{elem}}$ in einer Gesamtmatrix $\boldsymbol{R}$ zusam-

mengefasst werden. Für eine detaillierte Darstellung sei auf Lehrbücher zur FEM wie z. B. [Bathe et al. 2002] verwiesen.

Mit der Verzerrungs–Verschiebungs–Matrix $\boldsymbol{R}$ des Gesamtmodells wird aus dem vollständigen Vektor der Knotenverschiebungen $\boldsymbol{u}$ der vollständige Vektor der Elementverzerrungen $\boldsymbol{S}$ ermittelt:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u} \quad . \tag{5.109}$$

Für das Zustandsraummodell bedeutet dies, dass die Verzerrungs–Verschiebungs–Matrix $\boldsymbol{R}$ des Gesamtmodells als Ausgangsfiltermatrix verwendet werden kann, um aus dem Vektor der Verschiebungsausgangssignale einen Vektor der Dehnungssignale abzuleiten. Die Ausgangsgleichungen der Zustandsraumbeschreibungen auf modaler Basis unter Einbeziehung statischer Moden (5.83) und (5.98) lassen sich dementsprechend um Dehnungssignale erweitern. Dies wird hier für das Modell der Potentialanregung (5.83) gezeigt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u} &= \underbrace{\boldsymbol{R} \cdot \mathcal{V}_{\mathrm{u},r}} \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} + \underbrace{\boldsymbol{R} \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{io}}} \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ &= \quad \mathcal{V}_{\mathrm{S},r} \ \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} + \quad \mathcal{P}_{\mathrm{S}} \ \cdot \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \quad . \end{aligned} \tag{5.110}$$

Das Produkt $\boldsymbol{R} \cdot \mathcal{V}_{\mathrm{u},r}$ kann als Modalmatrix der Verzerrungen interpretiert werden und ist als solche unmittelbares Ergebnis einer numerischen Modalanalyse. Wie für die elektrischen Eigenvektoren gilt auch für die Eigenvektoren der Verzerrungen, dass diese keine Eigenvektoren im eigentlichen Sinne, sondern Linearkombinationen der Eigenvektoren der Verschiebungen sind.

Das Produkt $\boldsymbol{R} \cdot \mathcal{P}_{\mathrm{io}}$ gibt die Verzerrungen für diejenigen statischen Lastfälle an, die in die Transformationsbasis mit eingehen (vgl. Abschnitt 5.4.2).

Als Ausgangsgleichung der Zustandsraummodelle auf modaler Basis und statischen Moden lässt sich nunmehr unter Einbeziehung von Dehnungen angeben:

- für potentialerregte Systeme

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{S},r} & \mathbf{o} & \mathcal{P}_{\mathrm{S}} & \mathbf{o} \\ \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & \mathcal{P}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \\ \overset{\mathrm{c}}{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q},r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{K}'_{\mathrm{u}\phi}\,\mathcal{P}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{K}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.111}$$

- für ladungserregte Systeme

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{S},r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S}} & \mathbf{o} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r} & \mathbf{o} & \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi,r} & \mathbf{o} & -\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\phi}\,\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{io}} & \mathbf{o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \\ \boldsymbol{q}_{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.112}$$

Diese Ausgangsgleichungen der Zustandsraummodelle sind für vollständige Verzerrungsvektoren $\boldsymbol{S}$ formuliert worden. Für eine Reduktion der Anzahl der zu betrachtenden Dehnungssignale im Ausgangsvektor können wiederum Ausgangsfiltermatrizen entsprechend Abschnitt 5.5.1 eingesetzt werden.

5.6 Demonstrationsmodell Plattenstreifen

Im folgenden Abschnitt werden anhand eines Demonstrationsbeispiels die mit den Zustandsraummodellen ermittelten Amplitudenfrequenzgänge und die am vollständigen FE–Modell berechneten Frequenzgänge für eine elektrische Erregung verglichen, um die Güte der Zustandsraummodelle einzuschätzen.

Als Demonstrationsbeispiel dient ein Plattenstreifen mit teilweise einseitiger, piezoelektrischer Schicht in Anlehnung an die typische Verwendung von flächigen Piezoverbundmodulen als Biegeaktoren bzw. -sensoren.

5.6.1 Finite–Elemente–Modell

Das zugrundeliegende FE–Netz des Plattenstreifens ist in Bild 5.1 dargestellt. Die verwendeten Geometrie- und Materialparameter sind in den Tabellen 5.3 und 5.4 zusammengefasst. Der dünne Plattenstreifen mit rechteckiger Grundfläche ist an einer der beiden Stirnseiten eingespannt.

Die piezoelektrische Schicht wird im FEM–System ANSYS® mit Hilfe piezoelektrischer Solidelemente (SOLID5) modelliert, da eine piezoelektrische Schalenformulierung nicht zur Verfügung steht. Das Basisblech wird mit Solid–Shell–Elementen (SOLSH190) abgebildet. Dieser Elementtyp implementiert das Verhalten einer Schale bei Verwendung einer Volumenvernetzung. Mit der Volumenvernetzung der Solid–Shell–Elemente ist die Kompatibilität zu den piezoelektrischen Solidelementen gegeben [ANSYS].

Die Piezoschicht ist in Richtung der Längsachse des Plattenstreifens (x-Richtung) polari-

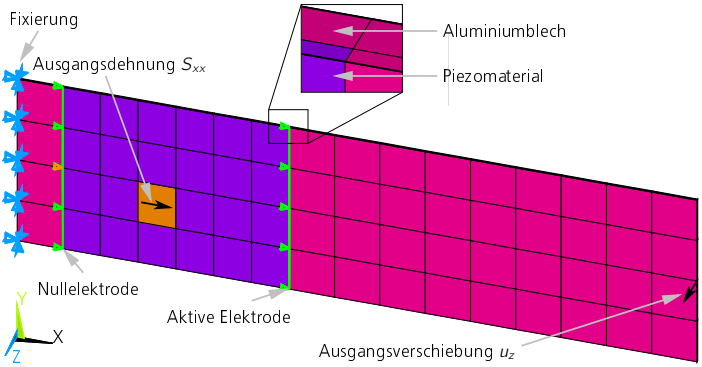


Bild 5.1: *Finite–Elemente–Netz des Plattenstreifens mit piezoelektrischer Schicht*

Tabelle 5.3: *Geometrieparameter und Materialien des Plattenstreifens*

Parameter	Plattenstreifen	Piezoschicht
Länge	300 mm	100 mm
Breite	80 mm	80 mm
Dicke	1,0 mm	0,3 mm
x–Position		20 mm
Material	Aluminium	PZT

siert. Das elektrische Feld zur Ansteuerung der Piezoschicht wird durch die Potential- bzw. Ladungsdifferenz zweier Elektroden an den beiden Stirnseiten der Piezoschicht eingekoppelt (vgl. Bild 5.1). Die elektrischen DOF der Knoten dieser Stirnseiten werden jeweils miteinander gekoppelt. Dieses Modell bildet damit z. B. vereinfacht das prinzipielle Verhalten von d_{33}–MFC ab, ohne die interdigitale Elektrodierung modellmäßig auszuführen.

Tabelle 5.4: *Materialparameter der Komponenten des Plattenstreifens*

Material	c_{11}^E	c_{12}^E	c_{13}^E	c_{33}^E	c_{44}^E	c_{66}^E	e_{31}	e_{33}	e_{15}	ε_{11}^S	ε_{33}^S
	GPa						C/m^2			nC/(V m)	
PZT[a]	157	120	94	106	18	19	−4,9	16,7	12,1	8	7
Aluminium	94	40	40	94	27	27	–	–	–	–	–

[a] Exemplarischer Datensatz im Rahmen des SFB/TRR 39 bereitgestellt von Herrn Uwe Scheithauer, Fraunhofer IKTS.

Tabelle 5.5: *Eigenmoden des Demonstrationsmodells Plattenstreifen*

	Eigenfrequenz in Hz bei		Eigenform
Nr.	kurzgeschlossenen Elektroden	offenen Elektroden	
1	8,7	9,7	1. Biegung
2	56,3	56,3	2. Biegung
3	69,9	69,9	1. Torsion
4	151,1	155,6	3. Biegung
5	204,7	204,7	2. Torsion
6	316,2	321,8	4. Biegung
7	376,0	376,0	3. Torsion
8	549,9	550,3	5. Biegung

Tabelle 5.6: *Modellbezeichnungen*

	Modell	Erregung	Gleichung
`FEP`	vollständige FE–Simulation	Potential	(2.26)
`FEQ`	vollständige FE–Simulation	Ladung	(2.26)
`ZXP`	ZR mit vollständigen Systemmatrizen	Potential	(5.34)(5.35)
`ZXQ`	ZR mit vollständigen Systemmatrizen	Ladung	(5.39)(5.40)
`ZDP`*x*	ZR mit *x* modalen Koordinaten	Potential	(5.52)(5.53)
`ZDQ`*x*	ZR mit *x* modalen Koordinaten	Ladung	(5.65)(5.66)
`ZSP`*x*+*y*	ZR mit *x* modalen und *y* statischen Moden	Potential	(5.82)(5.83)
`ZSQ`*x*+*y*	ZR mit *x* modalen und *y* statischen Moden	Ladung	(5.97)(5.98)

Das dynamische Verhalten des Demonstrationsmodells wird durch die in Tabelle 5.5 angegebenen Eigenformen charakterisiert. Abbildungen dazu sind im Anhang F zu finden. Nur einige Eigenformen werden von der piezoelektrischen Schicht beeinflusst.

5.6.2 Modellvergleich

Die für den Modellvergleich verwendeten System- bzw. Modellbezeichnungen sind in Tabelle 5.6 aufgeführt.

Bild 5.2 zeigt die Amplitudenfrequenzgänge des Dehnungssignals auf der Piezoschicht (vgl. Bild 5.1) und des Ladungssignals an der aktiven Elektrode bei Potentialanregung für das vollständige FE–Modell und zwei reduzierte modale Zustandsraummodelle (ohne und mit statischer Ergänzungsmode). Analog dazu sind in Bild 5.3 die entsprechenden Amplitudenfrequenzgänge bei Ladungsanregung (Dehnung und Potential) dargestellt.

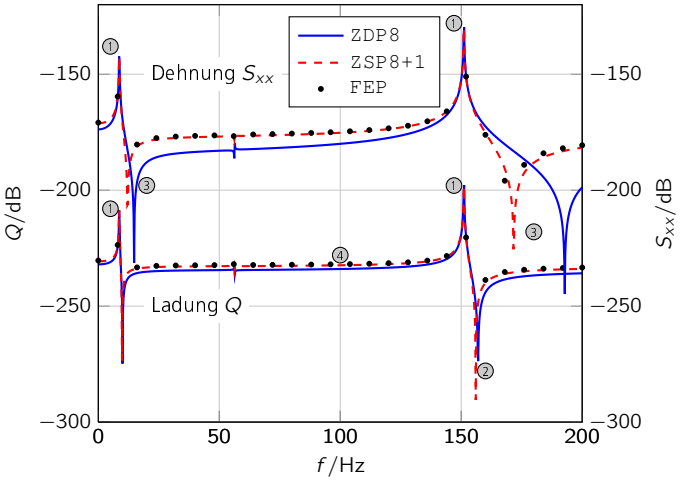


Bild 5.2: *Amplitudenfrequenzgänge für Ladung und Dehnung bei Potentialerregung des Plattenstreifens (Erläuterung der Markierungen s. Text)*

Die Frequenzgänge des ausgewählten Verschiebungssignals (s. Bild 5.1) für die betrachteten Modelle einschließlich des Zustandsraummodells mit vollständigen Systemmatrizen sind in Anhang F zusammengefasst. Das Zustandsraummodell mit vollständigen Systemmatrizen gibt das Verhalten des vollständigen FE–Modells exakt wieder. Für das Verschiebungssignal sind die Abweichungen durch die modale Reduktion im betrachteten Frequenzbereich zu vernachlässigen.

Beim Vergleich der Frequenzgänge ist zu erkennen, dass die jeweiligen Frequenzgangmaxima auch durch die reduzierten Zustandsraummodelle sowohl bei Potential- als auch bei Ladungserregung exakt wiedergegeben werden (Markierung ①). In den modal reduzierten Modellen ist demzufolge eine ausreichende Anzahl von Eigenmoden enthalten. Dies entspricht der üblichen ingenieurtechnischen Abschätzung, mindestens alle Eigenmoden aus dem doppelten interessierenden Frequenzbereich in ein reduziertes Modell einzubeziehen.

Auffällig ist, dass die aus der Literatur bekannte frequenzmäßige Nullstellenverschiebung

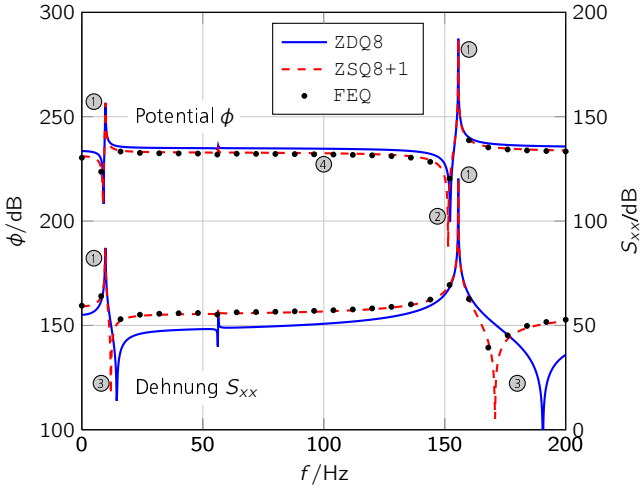


Bild 5.3: *Amplitudenfrequenzgänge für Potential und Dehnung bei Ladungserregung des Plattenstreifens (Erläuterung der Markierungen s. Text)*

bei den rein modalen Modellen `ZDP8` und `ZDQ8` sowohl bei den elektrischen Ausgangssignalen auftritt (Markierung ②), in viel stärkerem Maße jedoch bei dem betrachteten Dehnungssignal (Markierung ③). Für die elektrischen Ausgangssignale macht sich die fehlende statische Ergänzungsmode in erster Linie durch eine Abweichung im Niveau des Frequenzganges zwischen den Resonanzen (Markierung ④) bemerkbar.

Die Nullstellenverschiebung und die Niveaudifferenz können durch die Verwendung der zusätzlichen statischen Ergänzungsmode sowohl für die elektrischen Ausgangssignale als auch für das Dehnungssignal korrigiert werden (Modelle `ZSP8+1` und `ZSQ8+1`). Die modal reduzierten Modelle mit statischer Ergänzungsmode bilden das Verhalten des vollständigen FE–Modells im betrachteten Frequenzbereich hinreichend genau ab. Sie bieten insbesondere in Bezug auf die Frequenzauflösung eine höhere Flexibilität als die vollständige FE–Berechnung vor allem durch die wesentlich reduzierte Modellgröße.

5.7 Eigenschaften und Möglichkeiten der Zustandsraummodelle

Mit den Darlegungen dieses Kapitels stehen verschiedene Zustandsraumbeschreibungen für piezo–mechanische Systeme zur Verfügung:

Tabelle 5.7: *Vergleich der Zustandsraumformulierungen*

	Modell basiert auf	Komplexität	Dimension	Genauigkeit
ZX	System–Matrizen	hoch	wie FE-Modell	wie FE-Modell
ZD	Eigenmoden	einfach	reduziert	eingeschränkt
ZS	Eigen- und statischen Moden	sehr hoch	reduziert	gut

- die unmittelbar aus einem FE–Modell abgeleitet werden,
- die mechanische Krafterregung und elektrische Potential- oder Ladungserregung betrachten,
- die als Ausgangsgrößen sowohl mechanische Verschiebungen und Dehnungen als auch die elektrischen Größen Ladung oder Potential verwenden und
- die eine korrekte Abbildung der elektrischen Impedanz des betrachteten Systems ermöglichen.

Die drei wesentlichen Modellierungsstufen:

- systemmatrizen–basierte Beschreibung,
- modal–basierte Beschreibung und
- modal–basierte Beschreibung mit statischen Ergänzungsmoden

unterscheiden sich hinsichtlich Modellkomplexität, Modellgröße und Abbildungsgenauigkeit (Tabelle 5.7).

Die modal basierten Modelle gestatten eine einfache Reduktion der Dimension des Zustandsraumes.

Damit eignen sich diese Zustandsraumbeschreibungen zum einen für eine Regelungsauslegung[12] und zum anderen zur Auslegung der Ansteuerelektronik für die Piezoaktoren. Über die Auswertung der Impedanzfrequenzgänge ist darüber hinaus eine energetische Bewertung von piezo–mechanischen Systemen möglich.

Eine Zusammenstellung der Vektoren und Matrizen der Zustandsraumbeschreibungen für potential- und ladungserregte piezo–mechanische Systeme ist im Anhang D dieser Abhandlung enthalten. Die Extraktion der erforderlichen Modelldaten der FE–Diskretisierung auf Grundlage des FEM–Systems ANSYS® wird auszugsweise im Anhang E beschrieben.

[12] Ein Anwendungsbeispiel wird z. B. in [Neugebauer et al. 2010a] demonstriert.

6 Gesamtmodell

In diesem Kapitel wird der methodische Gesamtablauf beschrieben, mit dem aus der Systemsimulation heraus die Beanspruchungen der Komponenten von Piezoverbundmodulen abgeschätzt werden können. Dazu wird ein zweistufig reduzierendes Verfahren vorgeschlagen, das auf den Modellen der Kapitel 4 und 5 beruht.

6.1 Berechnungsablauf

In Bild 6.1 wird der vorgeschlagene Gesamtablauf schematisch dargestellt.

Ausgangspunkt ist die detaillierte geometrische und materielle Beschreibung der einzusetzenden Piezoverbundmodule sowie des passiven Bauteils und darauf aufbauend eine entsprechende Finite–Elemente–Diskretisierung.

Die erste Reduktionsstufe umfasst die Bestimmung der homogenisierten (effektiven) Materialparameter entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4 sowie die damit verbundene Ermittlung der Phasenkonzentrationen für die Beanspruchungen der Verbundkomponenten.

Die zweite Modellierungsstufe verwendet die homogenisierten (effektiven) Materialparameter des Piezoverbundmoduls in einem FE–Modell des zu untersuchenden Gesamtbauteils. Von dieser FE–Diskretisierung wird ein Zustandsraummodell entsprechend Kapitel 5 abgeleitet. Dieses Zustandsraummodell stellt als Ausgangsgrößen Beanspruchungen, insbesondere die mechanische Verzerrung und das elektrische Feld, des homogenisierten Piezoverbundmoduls an ausgewählten globalen Orten $\bar{\boldsymbol{x}}$ des Gesamtbauteils zur Verfügung.

Bei der Rücktransformation dienen die Phasenkonzentrationen für ausgewählte Orte $\boldsymbol{x}$ der EZ als Skalierungsfaktoren für diese Beanspruchungen. Aus der summarischen Überlagerung entsprechend den Gleichungen (4.21) bis (4.24) ergeben sich die gesuchten lokalen Beanspruchungen der Verbundkomponenten. Die Phasenkonzentrationen werden in der Systemsimulation entweder als zusätzliche Filtermatrizen für den Ausgangsvektor des Zustandsraummodells entsprechend Abschnitt 5.5.1 verarbeitet oder, wie im Blockschaltbild 6.2 verdeutlicht, als Durchgangsmatrix eines (statischen) Zustandsraummodells eingebunden, das mit der Zustandsraumbeschreibung des (homogenisierten) Gesamtmodells in Reihe geschaltet ist.

Durch Verwendung der effektiven elektro–mechanischen Materialparameter im Gesamtmodell kann das Gesamtmodell unabhängig von den realen Dimensionen der piezoelek-

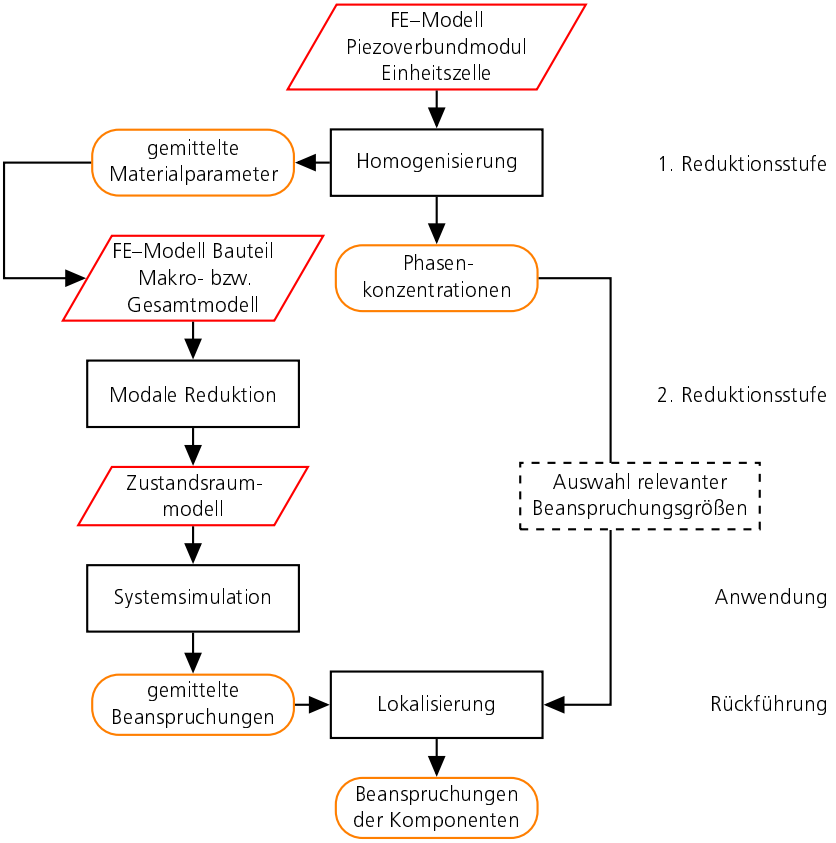


Bild 6.1: *Schematische Darstellung des Berechnungsablaufes*

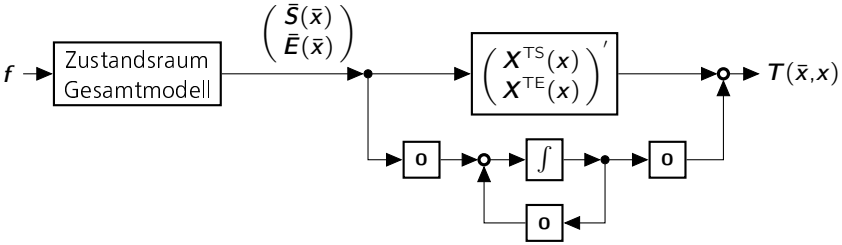


Bild 6.2: *Blockschaltbild zur Integration der Phasenkonzentrationen für die mechanischen Spannungen in die Systemsimulation als Durchgangsmatrix eines statischen Zustandsraummodells*

trischen Basiselemente diskretisiert werden. Insbesondere für die Verwendung der statischen Ergänzungsmoden bei der Zustandsraumbeschreibung ist dies vorteilhaft, da dabei Matrixmultiplikationen mit den vollständigen mechanischen Massen- und Steifigkeitsmatrizen des Gesamtmodells ausgeführt werden müssen (s. Abschnitt 5.4.2). Durch Vorschalten der Homogenisierung als erster Reduktionsstufe wird eine effiziente Zustandsraumbeschreibung ermöglicht. Der Einsatz der Phasenkonzentrationen gestattet die Beanspruchungsermittlung für die Verbundkomponenten.

6.2 Anwendung auf Piezo–Metall–Module

In diesem Abschnitt wird die Gesamtmethodik auf die Beanspruchungsermittlung für Piezo–Metall–Module (PMM) angewandt. Dabei werden die Ergebnisse, die mit den reduzierten Modellen entsprechend der methodischen Darstellung der Kapitel 4 und 5 erzielt werden, den Ergebnissen gegenübergestellt, die anhand eines vollständigen FE–Modells (Detailmodell) ermittelt werden.

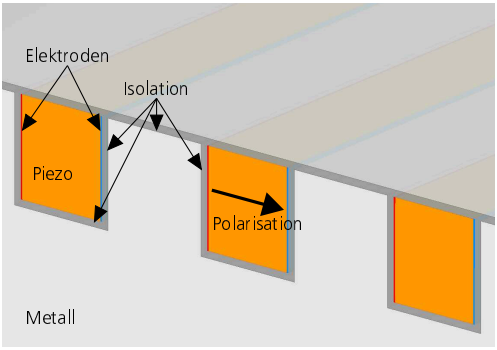
6.2.1 Aufbau und Funktionsweise

Piezo–Metall–Module (PMM) sind ein Entwicklungs- und Forschungsobjekt des SFB/TRR 39 [Drossel et al. 2007; Neugebauer 2007, 2009]. Bei der Entwicklung der PMM wird versucht, prismatische Piezostäbchen direkt in vorgefertigte Mikrokavitäten [Schubert et al. 2010b] an der Oberfläche eines Trägerbleches zu integrieren. Die polarisierten Piezostäbchen werden vor der Integration mit einer Elektrodierung ausgestattet. Zur Isolierung gegen das metallische Trägerblech wird die Oberfläche dieses Trägerbleches vor dem Einlegen der elektrodierten Piezostäbchen in die Kavitäten mit einer amorphen wasserstoffhaltigen Kohlenstoffschicht (a:CH, DLC, ›diamond like carbon‹) als Isolationsschicht versehen [Herrmann et al. 2007; Peter et al. 2009]. Die mechanische Fixierung und Vorspannung der Piezostäbchen in den Kavitäten erfolgt durch Verpressen der Trennwände der Kavitäten [Schubert et al. 2010a].[13] Die Piezostäbchen sollen abschließend oberflächlich mit einer weiteren Isolationsschicht versehen werden.

Mit der direkten Integration von piezokeramischen Basiselementen in das metallische Trägermaterial soll

- der separate Applikationsprozess von externen Piezomodulen auf die Blechoberfläche mittels Klebstoff eliminiert werden und

[13] Eine alternative Fertigungsmöglichkeit betrifft das Fügen durch Mikrospritzgießen unter Verwendung von leitenden bzw. isolierenden Funktionspolymeren [Kroll 2010].



Piezostäbchen	250 µm · 250 µm · 10 mm
Isolationsdicke	20 µm
Elektrodendicke	5 µm
Blechdicke	1,5 mm

Bild 6.3: *Aufbau und Abmessungen des Piezo–Metall–Moduls*

- eine effektivere elektro–mechanische Ankopplung erzielt werden.

Die detaillierte Technologie des Herstellungsprozesses und die konkrete Dimensionierung der PMM ist noch Gegenstand der Forschung im SFB/TRR 39.

Für eine funktionelle Charakterisierung der PMM mit der in dieser Abhandlung erläuterten Methodik werden FE–Modelle auf Basis der in Bild 6.3 dargestellten, idealisierten Topologie und Geometrie verwendet. Unabhängig von der konkreten Fertigungstechnologie beschreibt diese Topologie die angestrebten Gegebenheiten nach der Fertigung.

Unberücksichtigt bleiben geometrische Details wie Fasen und Kerbradien sowie technologische Abweichungen von der angegebenen Konstruktion (Oberflächenrauheiten, Winkelabweichungen, ...). Das heißt, eine Beanspruchungsbewertung im Sinne lokaler Beanspruchungskonzepte (wie z. B. der Kerbspannungslehre) ist mit den hier darzustellenden Ergebnissen nicht angebracht. Eine Erweiterung des Modells in dieser Hinsicht ist bei Vorliegen entsprechender Daten möglich, aber nicht Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Die prinzipielle Funktionsweise der PMM entspricht der Funktionsweise von oberflächlich applizierten MFC: Durch Beaufschlagung der Elektrodenpaare der PMM mit einer Potentialdifferenz wird in den Piezostäbchen ein elektrisches Feld eingeprägt. Der inverse piezoelektrische Effekt bewirkt eine Ausdehnung der Piezostäbchen in der Blechebene. Aufgrund der exzentrischen Positionierung der Piezostäbchen in Bezug auf den Blechquerschnitt wird damit eine Biegung des Bleches erzeugt. Dieser Zusammenhang ist auch sensorisch nutzbar. Das heißt, durch eine Biegeverformung des Bleches wird in den Piezostäbchen ein Ladung erzeugt, die über die Elektrodenpaare abgeführt und erfasst werden kann.

6.2.2 Finite–Elemente–Modelle

Aufgrund des Aufbaus und der Funktionsweise ist das prinzipielle Verhalten der PMM durch ein 2D–Modell mit ebenem Dehnungszustand abzubilden. Es wird deshalb der ANSYS®–Elementtyp PLANE13[14] zur Simulation gekoppelter Felder eingesetzt.

Der Montagevorgang und -zustand (Verpressen der Trennwände der Kavitäten) wird bei der funktionellen Charakterisierung nicht explizit berücksichtigt. Durch Schubert et al. [2010a] wurde gezeigt, dass durch das Verpressen der Kavitäten–Trennwände eine kraftschlüssige Verbindung mit weitgehend gleichmäßigem Kontaktdruck zwischen Piezostäbchen und Kavitätenwand hergestellt werden kann. Für die funktionelle Beschreibung wird deshalb von einer festen Verbindung zwischen Piezostäbchen und Kavitätenwand ausgegangen. Die Montagevorspannung beeinflusst das funktionelle Verhalten entsprechend dem verwendeten, linearen Materialgesetz nach Gleichung (2.23) nicht. Bei einer Beanspruchungsbewertung wäre die Montagevorspannung als Beanspruchungsoffset bzw. Mittellast zu berücksichtigen.

Die Ableitung einer EZ aus der Topologie der PMM muss berücksichtigen, dass die piezoelektrisch aktive Schicht nur einen Teil des Blechquerschnittes einnimmt und durch die elektrische Ansteuerung eine Biegung des Bleches erzeugt wird. Eine EZ über die gesamte Blechdicke müsste demnach ein gradiertes effektives Material generieren. Diese Gradierung müsste auch durch entsprechende FE–Typen im Makromodell abzubilden sein.

Ein Ansatzpunkt für die Abbildung eines gradierten piezoelektrischen Materials im Makromodell ist die Entwicklung von piezoelektrischen Sandwich-Elementtypen, wie sie z. B. von Mesecke-Rischmann [2004] und Marinkovic [2007] beschrieben werden. Diese Entwicklungen beruhen allerdings auf piezoelektrischen Schichten, die über ihre Dicke elektrisch angesteuert werden. Für die PMM ist die Ansteuerung durch eine Potentialdifferenz in der Schalen- bzw. Blechebene relevant.

In dieser Abhandlung wird deshalb bei der Wahl der EZ die aktive Schicht mit dem Piezomaterial und den Trennstegen zwischen den Kavitäten sowie der Isolation und der Elektrodierung von der passiven Trägerschicht getrennt. Die EZ umfasst nur die Materialien der aktiven Schicht. Im Makromodell erfolgt ein explizit zweischichtiger Aufbau mit dünner homogenisierter aktiver Schicht und dickerer passiver Grundschicht. Eine Reduktion auf eine Schalentheorie erfolgt in dieser Arbeit nicht.

Im Weiteren werden die einzelnen FE–Modelle für die PMM detailliert beschrieben. Ausgehend von einem vollständigen Detailmodell werden das Gesamtmodell mit homoge-

[14] Alternativ kann auch der ANSYS®–Elementtyp PLANE223 eingesetzt werden.

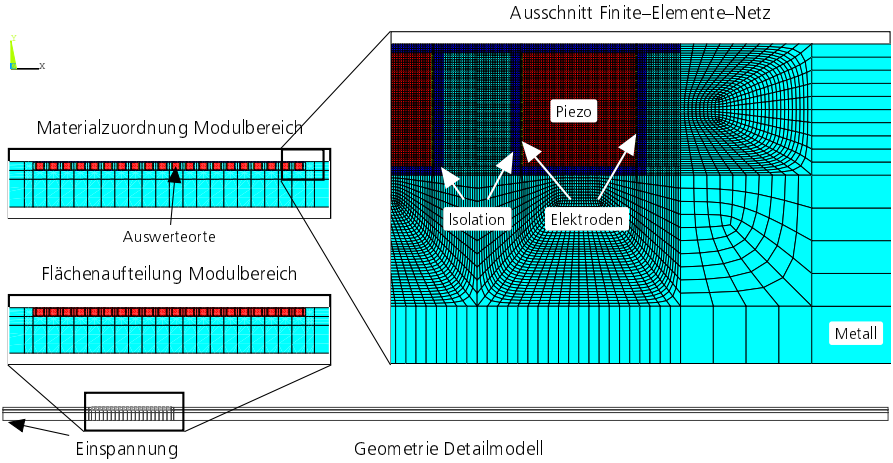


Bild 6.4: *Geometrie und Finite–Elemente–Netz des vollständigen Detailmodells des Piezo–Metall–Moduls*

nisierter Piezoschicht und das Modell der EZ der aktiven Schicht charakterisiert. Ebenso werden die erforderlichen Randbedingungen für die EZ behandelt, die sich aus den Gesamtmodellen ableiten.

Vollständiges Detailmodell

Als Demonstrationsbeispiel für die Anwendung der PMM dient, wie in Kapitel 5, ein einseitig eingespannter Plattenstreifen. In diesen Plattenstreifen sind in einem einspannungsnahen Bereich 20 Piezostäbchen entsprechend dem Aufbau der PMM nach Bild 6.3 integriert.

Im vollständigen Detailmodell sind Piezomaterial, Isolationsschicht und Elektroden in ihrer tatsächlichen Dimension diskretisiert. Die Berücksichtigung der umgebenden Luft zur Abbildung eines elektrischen Streufeldes ist nicht erforderlich. Vergleichsberechnungen zeigen, dass der Energiegehalt des elektrischen Feldes in der umgebenden Luft vernachlässigbar gering ist.

Die Potentialfreiheitsgrade der Elektroden sind so gekoppelt, dass die gleiche Potentialdifferenz an jedem zu einem Piezostäbchen gehörenden Elektrodenpaar wirkt. Der metallische Grundkörper liegt auf Nullpotential.

Das vollständige Detailmodell ist in Bild 6.4 dargestellt. Die verwendeten Materialparameter sind der Tabelle 6.1 bzw. für das Piezomaterial Tabelle 5.4 zu entnehmen.

Tabelle 6.1: *Materialparameter der Komponenten des Piezo–Metall–Moduls*

Parameter	Einheit	Blech	Isolation	Elektroden	Piezo
		Aluminium	a:CH[a]	Silber	
Dichte	$kg\,m^{-3}$	2700	2000	10 500	s. Tab. 5.4
Elastizitätsmodul	GPa	70	100	79	
Poissonzahl	-	0,3	0,25	0,39	
Permittivität	ε_0	-	3,4	-	

[a] amorphe wasserstoffhaltige Kohlenstoffschicht

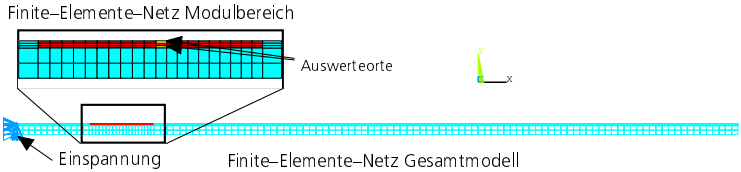


Bild 6.5: *Finite–Elemente–Netz des Gesamtmodells des Piezo–Metall–Moduls mit homogener aktiver Schicht*

Gesamt- bzw. Makromodell

Das Gesamtmodell mit Abbildung des PMM durch eine homogene aktive Schicht wird unmittelbar aus dem vollständigen Detailmodell durch Neuvernetzung des aktiven Bereiches erhalten. Die Vernetzung des aktiven Bereiches erfolgt dabei in der Netzdichte des übrigen Plattenstreifens (s. Bild 6.5). Dadurch wird die Anzahl der finiten Elemente im Modell in Größenordnungen reduziert. Umfasst das vollständige Detailmodell ca. 100.000 Elemente allein für den aktiven Bereich, so werden im Gesamtmodell lediglich 60 Elemente eingesetzt. Den Elementen des aktiven Bereiches werden die mit dem Modell der EZ ermittelten effektiven Materialparameter zugewiesen.

Die elektrische Anregung des Gesamtmodells soll durch Potential- bzw. Ladungsvorgabe an den Stirnseiten des aktiven Bereiches erfolgen, so dass ein elektrisches Feld in Längsrichtung der Platte (x–Richtung des globalen Koordinatensystems) erzeugt wird. Dazu sind die Potentialfreiheitsgrade der entsprechenden Knoten zu zwei Elektroden gekoppelt.

Um Störungen der inneren elektrischen Feldverteilung zu reduzieren, die durch die Eliminierung der realen inneren Elektroden hervorgerufen werden, werden die Potential-

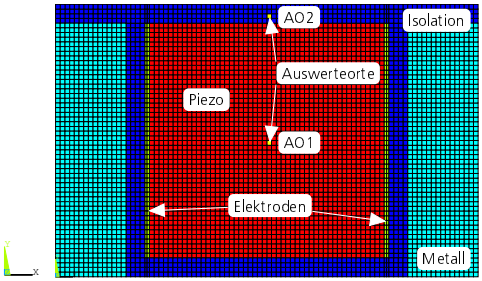


Bild 6.6: *Finite–Elemente–Netz der Einheitszelle des Piezo–Metall–Moduls*

freiheitsgrade der Knoten des aktiven Bereiches, die die gleiche x–Koordinate haben, ebenfalls gekoppelt.

Das Potential des metallischen Grundkörpers wird vollständig aus dem Modell eliminiert. Das Trägermaterial wird rein mechanisch betrachtet. Dies ist Voraussetzung dafür, dass die elektrischen Randbedingungen des PMM über die Stirnseiten des aktiven Bereiches aufgebracht werden können. Anderenfalls würden widersprüchliche elektrische Randbedingungen für die Randknoten gelten ($\phi_{Last} \neq 0$ infolge Lastvorgabe steht im Widerspruch zu $\phi_{Blech} = 0$ infolge Massepotential).

Modell der Einheitszelle

Das FE–Modell der EZ entspricht für die betrachtete Konfiguration genau einem Zwanzigstel des PMM–Bereiches des Detailsmodells. Die EZ umfasst also genau eine Kavität mit Piezomaterial und das zugehörige Elektrodenpaar. Die Isolation zum Grundblech bildet die Abgrenzung der EZ (s. Bild 6.6).

Zur Ermittlung der effektiven Materialparameter werden die mechanischen Periodizitätsrandbedingungen nach Abschnitt 4.2.3 angesetzt. Die Zwangsbedingungen für die mechanischen Freiheitsgrade werden an allen Rändern angesetzt (obwohl die Periodizität in Dickenrichtung nicht gegeben ist), da diese Zwangsbedingungen nicht nur die Periodizität abbilden, sondern ebenso die separate Formulierung der Homogenisierungslastfälle auf der Grundlage von Einheitsdehnungen ermöglichen. Da im Gesamtmodell das PMM als Bereich mit Elastizität in beiden Ortskoordinatenrichtungen abgebildet wird, wird der vollständige 2D–Materialparametersatz benötigt.

Für die elektrischen Randbedingungen sind weitere Gesichtspunkte zu berücksichtigen:

Zum einen wird die elektrische Last an im Inneren der EZ liegenden Elektroden aufgebracht. Dazu gelten die Betrachtungen im Abschnitt *Einheitszelle mit Elektroden* auf

Tabelle 6.2: *Effektive Materialparameter $\boldsymbol{c}^{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ des Piezo–Metall–Moduls*

	c^{E}_{xx}	c^{E}_{xy}	c^{E}_{yy}	c^{E}_{rz}	e_{xy}	e_{xx}	$\varepsilon^{\mathrm{S}}_{x}$
	c^{E}_{33}	c^{E}_{13}	c^{E}_{11}	c^{E}_{55}	e_{31}	e_{33}	$\varepsilon^{\mathrm{S}}_{33}$
	GPa				$\mathrm{C/m^2}$		nC/(V m)
PMM	104	66	125	28	−7,0	14,6	13,5

Seite 53. Das heißt, das Einheitsfeld wird als Potentialdifferenz an den Elektroden vorgegeben und das Potential an den gegenüberliegenden Rändern, die parallel zu den Elektroden verlaufen, wird der Periodizität entsprechend gekoppelt.

Zum anderen wird im Gesamtmodell die Dickenrichtung elektrisch nicht berücksichtigt, da nur in Längsrichtung ein elektrisches Feld aufgebracht wird[15]. Außerdem wird das Nullpotential des metallischen Trägermaterials im Gesamtmodell nicht explizit vorgegeben. Deshalb muss das Nullpotential des metallischen Trägers bereits beim Modell der EZ berücksichtigt werden, sowohl an den Knoten der in der EZ enthaltenen Metallelemente als auch am Rand der Isolation zum Kavitätenboden. Die äußere Oberfläche der abschließenden Isolation des PMM bleibt elektrisch frei, d. h. ohne Rand- oder Zwangsbedingungen.

6.2.3 Effektive Materialparameter und Beanspruchungsgrößen

Am 2D–Modell der EZ werden sieben Einheitslastfälle zur Ermittlung der effektiven Materialparameter des PMM betrachtet. Diese sieben Einheitslastfälle ergeben sich aus der Reduktion der Lastfälle nach Tabelle 4.1 auf den 2D–Fall unter Berücksichtigung von $\bar{S}^{\mathrm{I}}_1 = \bar{S}^{\mathrm{I}}_{yy}$, $\bar{S}^{\mathrm{I}}_3 = \bar{S}^{\mathrm{I}}_{xx}$, $\bar{S}^{\mathrm{I}}_5 = \bar{S}^{\mathrm{I}}_{xy}$ sowie $\bar{E}^{\mathrm{I}}_3 = \bar{E}^{\mathrm{I}}_x$. Bezogen auf das in Bild 6.6 erkenntliche Koordinatensystem ergeben sich die effektiven Materialparameter entsprechend Tabelle 6.2.

Die für das PMM wesentlichen Phasenkonzentrationen sind in der Bild 6.7 dargestellt. Dies sind die Normalspannungen T_{xx} infolge einer Einheitsdehnung $\bar{S}^{\mathrm{I}}_{xx}$ und infolge eines elektrischen Einheitsfeldes $\bar{E}^{\mathrm{I}}_x$.

[15] Die elektro–mechanische Kopplung in Dickenrichtung (d_{13}–Effekt) wird durch die Verwendung des vollständigen, effektiven 2D–Materialparametersatzes berücksichtigt.

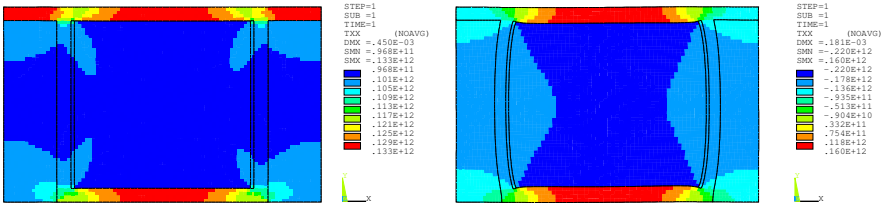


Bild 6.7: *Phasenkonzentrationen der Einheitszelle des Piezo–Metall–Moduls;*
links: X_{xx}^{TS}, *Normalspannung* T_{xx} *(in* Pa*) aufgrund einer Einheitsverzerrung* $\bar{S}_{xx}^{\mathrm{I}} = 1$,
rechts: X_{xx}^{TE}, *Normalspannung* T_{xx} *(in* Pa*) aufgrund eines elektrischen Einheitsfeldes* $\bar{E}_x^{\mathrm{I}} = 10\,\mathrm{GV\,m^{-1}}$

Besonderheiten bei Biegebeanspruchung

Die PMM sollen in erster Linie zur Beeinflussung von Biegeschwingungen in Blechstrukturen eingesetzt werden. Das heißt, die wesentliche Beanspruchungsart weist einen Beanspruchungsgradienten über die Höhe der entsprechenden EZ auf. Dies entspricht nicht der Verwendung von homogenen Einheitsverzerrungen bei der Bestimmung der effektiven Materialparameter und der Phasenkonzentrationen.

Infolgedessen sind zwei Abweichungen festzustellen:

1. Die mit den Einheitslastfällen ermittelte effektive Steifigkeit repräsentiert die reale Biegesteifigkeit nur annähernd. Je nach Verteilung der Steifigkeit über der Höhe der EZ wird die reale Biegesteifigkeit über- oder unterschätzt. Für die PMM liegen die Steifigkeiten der Komponenten in gleicher Größenordnung. Deshalb wird auf eine Korrektur dieser Abweichung in der vorliegenden Arbeit verzichtet.

2. Die mit den Einheitslastfällen ermittelten Phasenkonzentrationen repräsentieren die reale Beanspruchungsverteilung in der EZ nur annähernd. Unter der Voraussetzung, dass die aktive Schicht klein gegenüber der Gesamtblechdicke ist, können die Abweichungen vom Membranspannungszustand jedoch vernachlässigt werden. Für die PMM erfolgt deshalb eine Auswertung der Beanspruchungen ohne explizite Aufteilung in Membran- und Biegeanteile[16].

Soll eine Korrektur dieser Abweichungen vorgenommen werden, so ist ein Biegeeinheitslastfall für die EZ zu erstellen. Ein Ansatzpunkt dafür wurde in [Kranz et al. 2007] vorgestellt.

[16] Beim vorliegenden Dickenverhältnis von aktiver und passiver Schicht mit 1:5 entspricht dies nur einer groben Näherung, die hier aber aus Vereinfachungsgründen gerechtfertigt erscheint.

Auswahl der auszuwertenden Beanspruchungsgrößen

Aufgrund der Biegebelastung des Gesamtbauteiles charakterisiert die Normalspannung T_{xx} die wesentliche Beanspruchung. Deshalb wird der folgende Modellvergleich anhand der Normalspannung T_{xx} als repräsentativer Beanspruchungsgröße diskutiert. Die qualitativen Aussagen des Modellvergleiches lassen sich auch auf die Verzerrungsgrößen übertragen.

Für den Modellvergleich werden exemplarisch zwei Auswerteorte innerhalb des PMM ausgewählt. Es wird die 11. EZ des Detailmodells und innerhalb dieser EZ

AO1 die Mitte des Piezostäbchen zur Charakterisierung der Beanspruchungszustandes des Piezomaterials und

AO2 die Mitte der abdeckenden Isolation

betrachtet. Die Positionierung der Auswerteorte ist in den Modell–Abbildungen 6.4, 6.5 und 6.6 angegeben.

Aus der Darstellung der Phasenkonzentrationen in Bild 6.7 ist ersichtlich, dass die Normalspannung T_{xx} innerhalb des Piezomaterials weitgehend homogen verteilt ist und dass in der Isolationsschicht die höchste Normalspannung T_{xx} auftritt. Die ausgewählten Auswerteorte der EZ sind dementsprechend repräsentativ für das PMM.

6.2.4 Modellvergleich

In den Abbildungen 6.8 und 6.9 werden die Amplitudenfrequenzgänge der Normalspannung T_{xx} an den Auswerteorten AO1 und AO2 für Potential- und Ladungserregung des PMM in einem Frequenzbereich um die erste Eigenfrequenz bei ca. 130 Hz dargestellt. Die angegebenen Amplitudenfrequenzgänge beruhen auf verschiedenen Modellen, deren Bezeichnung dem Schema in Tabelle 5.6 folgt:

`FED` vollständiges FE–Detailmodell (s. Abschnitt *Vollständiges Detailmodell*),

`ZDG` Zustandsraummodell mit modalen Koordinaten, basierend auf der FE–Diskretisierung des Gesamtmodells (`FEG`, s. Abschnitt *Gesamt- bzw. Makromodell*) und effektiven Materialparametern sowie den Phasenkonzentrationen der EZ und

`ZSG` Zustandsraummodell mit modalen Koordinaten und einer statischen Mode, ebenfalls basierend auf der FE–Diskretisierung des Gesamtmodells (`FEG`, s. Abschnitt *Gesamt- bzw. Makromodell*) mit effektiven Materialparametern und den Phasenkonzentrationen der EZ.

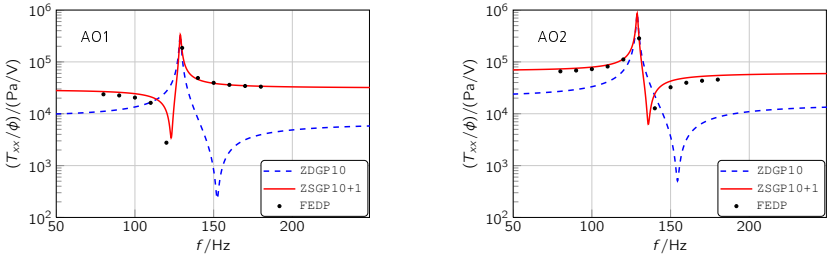


Bild 6.8: *Amplitudenfrequenzgänge für die Normalspannung T_{xx} bei Potentialerregung des Piezo–Metall–Moduls; links: Auswerteort AO1, rechts: Auswerteort AO2*

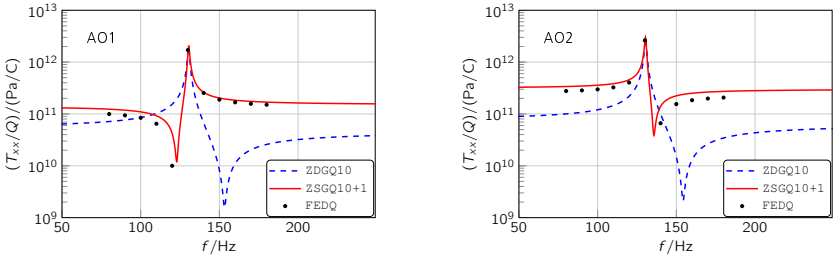


Bild 6.9: *Amplitudenfrequenzgänge für die Normalspannung T_{xx} bei Ladungserregung des Piezo–Metall–Moduls; links: Auswerteort AO1, rechts: Auswerteort AO2*

In den modal basierten Zustandsraummodellen (ZDG, ZSG) sind jeweils die ersten 10 Eigenwerte des Systems enthalten (bis ca. 25 kHz). Bezogen auf den betrachteten Frequenzbereich bis 250 Hz entspricht dies bei Betrachtung von Verschiebungssignalen einer ausreichend genauen Modellabbildung.

Für die modal basierten Zustandsraummodelle ZSG mit statischer Ergänzungsmode wird sowohl für Potential- als auch Ladungserregung eine gute Übereinstimmung mit den Referenzergebnissen des vollständigen Detailmodells erzielt. Die geringfügigen Abweichungen werden auf die im Abschnitt *Besonderheiten bei Biegebeanspruchung* auf Seite 104 diskutierten Eigenschaften der Modelle zurückgeführt.

Die rein modalen Zustandsraummodelle ZDG können die Amplitudenfrequenzgänge für die Beanspruchungen nicht angemessen wiedergeben. Lediglich das Beanspruchungsmaxima wird bezüglich Frequenz und Amplitude korrekt ermittelt.

Insbesondere für den Auswerteort AO1 wird in Bezug auf das Frequenzgangminimum im betrachteten Frequenzbereich ein wesentlich anderes Verhalten ausgewiesen als durch des Referenzmodell. Das Frequenzgangminimum liegt für die rein modalen Zustands-

raummodelle ZDG bei einer höheren Frequenz als das Frequenzgangmaximum, für das Referenzmodell FED bei einer niedrigeren Frequenz.

Das Auftreten einer Nullstelle im Frequenzgang der Spannung T_{xx} der Piezoschicht (Auswerteort AO1) vor der ersten Resonanz ist wie folgt zu erklären: Statisch wirkt die Ausdehnung der Piezoschicht gegen die Steifigkeit des passiven Materials. Das heißt, in der Piezoschicht tritt eine Normalspannung entgegen der Spannung im passiven Material auf. Für die erste Resonanz als Biegemode entspricht die Normalspannung des gesamten Querschnittes einer Biegespannungsverteilung. Die Spannung in der Piezoschicht und im passiven Material verhalten sich phasengleich. Beim Frequenzsweep von der statischen Belastung zur ersten Resonanz erfolgt demzufolge ein Übergang von einem gegenphasigen zu einem gleichphasigen Verhalten der Spannungen mit einem damit verbundenen Amplitudennulldurchgang. Da in den rein modalen Zustandsraummodellen ZDG die statischen Anteile nicht enthalten sind, wird diese Nullstelle falsch abgebildet.

Für den Auswerteort AO2 tritt bei den rein modalen Zustandsraummodelle ZDG eine wesentliche Verschiebung des Frequenzgangminimums zu einer höheren Frequenz im Vergleich zum Referenzmodell FED auf. Die für den Auswerteort AO1 beschriebene Problematik mit prinzipiell anderer Nullstellenlage ist nicht gegeben, da der Auswerteort AO2 zum passiven Material gehört.

Auch das Amplitudenniveau abseits der Extrema der Frequenzgänge wird nur unzureichend durch die rein modalen Zustandsraummodelle ZDG abgebildet.

Erklärt werden kann dieses Modellverhalten aus den wesentlichen Zusammenhängen der Beanspruchungsermittlung auf Grundlage der Phasenkonzentrationen und der Zustandsraumabbildung der elektrischen Größen:

Bei der Beanspruchungsermittlung auf Grundlage der Phasenkonzentrationen ist neben den effektiven mechanischen Verzerrungsgrößen $\bar{S}$ auch das effektive elektrische Feld $\bar{E}$ als Eingangsgröße der Bestimmungsgleichungen (4.21) bis (4.24) zu berücksichtigen. Die Abbildungsgenauigkeit für das elektrische Feld als örtlicher Gradient des Potentials im Zustandsraummodell ist jedoch, wie im Kapitel 5 für die elektrischen Größen gezeigt, maßgeblich von der Verwendung der statischen Ergänzungsmoden infolge elektrischer Einheitserregung abhängig. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts am konkreten Beispiel der PMM wird in Bild 6.10 für das Gesamtmodell mit effektiven Materialparametern der Frequenzgang für das effektive elektrische Feld bei Ladungserregung im Vergleich von FE–Ergebnis (FEG) und Zustandsraummodellen (ZDG, ZSG) gezeigt.

Die Verwendung statischer Ergänzungsmoden infolge elektrischer Einheitserregung ist für eine angemessene Abschätzung von Beanspruchungsgrößen auf Grundlage einer reduzierten Zustandsraumdarstellung erforderlich.

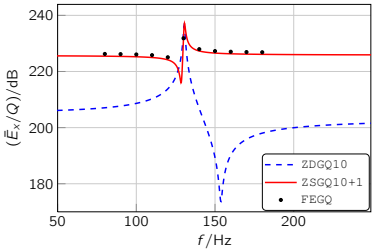


Bild 6.10: *Amplitudenfrequenzgänge für das effektive elektrische Feld $\bar{E}_x$ bei Ladungserregung des Gesamtmodells des Piezo–Metall–Moduls*

Zur Darstellung der Verringerung des Berechnungsaufwandes durch das in dieser Arbeit vorgestellte Berechnungsverfahren sind in Tabelle 6.3 wesentliche Kenngrößen der Modelle der PMM zusammengefasst.

Tabelle 6.3: *Umfang und Berechnungsaufwand der Modelle des Piezo–Metall–Moduls (Die CPU–Zeiten beziehen sich auf die Nutzung des FEM–Systems ANSYS® Rev. 12.1 bzw. des Systemsimulationsprogramms MATLAB® Rev. 2010b auf einer Intel®–Xeon®–X5460–Workstation (3,16 GHz, 32 GB RAM) unter Microsoft® Windows Server® 2003 operating system x64–Edition.)*

		Finite Elemente			Zustandsraum	
		EZ	FED	FEG	ZDG	ZSG
Anzahl der DOF/Zustandsgrößen		14 026	367 121	1495	10	11
CPU–Zeit (in s)	Homogenisierung (7 Lastfälle)	8,4	n/a	n/a	n/a	n/a
	Modellerstellung	n/a	n/a	n/a	3	6
	Statische Analyse	n/a	30	0,8	n/a	n/a
	Modalanalyse	n/a	510	1,4	n/a	n/a
	Frequenzgang (je Frequenz)	n/a	102	0,2	0,001	0,005

6.3 Diskussion

6.3.1 Bedeutung der Beanspruchungsermittlung

Die angemessene Abschätzung aller Charakteristiken der Frequenzgänge ist für unterschiedliche Anwendungsaspekte wichtig:

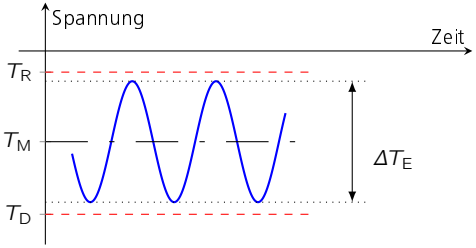
- Das Amplitudenmaximum kennzeichnet die Maximalbeanspruchung.
- Die frequenzmäßige Lage von Amplitudenminima bzw. -nullstellen ist für eine Reglerauslegung von Interesse, da die entsprechenden Beanspruchungsgrößen (für die Regelungsanwendung insbesondere Dehnungssignale) dort nur unzureichend genau erfasst werden können.
- Das Amplitudenniveau der mechanischen Spannung muss hinsichtlich zweier Kriterien beurteilt werden:
  - Der Betrag der Druckvorspannung zuzüglich der Schwingungsamplitude darf die maximal zulässige Spannung nicht überschreiten. Für das Piezomaterial wird die zulässige Spannung im Druckbereich im Wesentlichen von der Depolarisationsspannung bestimmt [Kamlah et al. 2008].
  - Die Schwingungsamplitude muss insbesondere für die PMM kleiner als die Druckvorspannung sein, da andernfalls der mechanische Kontakt zwischen Piezostäbchen und Kavitätenwand aufgehoben wird.

Aus diesen Kriterien lässt sich ableiten, dass die Montagevorspannung durch das Verpressen der Trennwände der Kavitäten höchstens die halbe maximal zulässige Spannung für das Piezomaterial erreichen darf. Zur maximalen Ausnutzung einer möglichen Spannungsschwingamplitude sollte die Vorspannung allerdings auch nahe der halben zulässigen Spannung liegen. Die Höhe der zulässigen elektrischen Anregung kann auf Grundlage der zulässigen Spannungsschwingamplitude mit den Übertragungsfunktionen der Abbildungen 6.8 und 6.9 ermittelt werden. Die Beanspruchungsgrenzwerte werden in Bild 6.11 verdeutlicht.

Bei einer Beanspruchungsbewertung sind die Beanspruchungen infolge mechanischer Anregung für den jeweiligen Anwendungsfall kumulativ zu betrachten.

6.3.2 Modellierungsalternativen

Für die Beanspruchungsermittlung an Modellen mit wesentlichen Dimensionsunterschieden, wie bei den Piezoverbundmodulen in der Anwendung an Maschinenstrukturen, gibt



$$|T_M| - \frac{\Delta T_E}{2} \geq |T_R| \geq 0$$

$$|T_M| + \frac{\Delta T_E}{2} \leq |T_D|$$

Bild 6.11: *Beanspruchungsgrenzwerte (T_R – minimale Restvorspannung, T_M – Montagevorspannung, T_D – Depolarisationsspannung, ΔT_E – Spannungsschwingamplitude infolge elektrischer Erregung)*

es im Rahmen der FEM neben der modalen Superposition weitere Alternativen auf Basis von Reduktionsverfahren:

- Bei der Substruktur–Technik[17] wird das Gesamtmodell aus einer Reihe identischer Superelemente aufgebaut, deren Verhalten durch auf die Randknoten reduzierte Systemmatrizen beschrieben wird. In der Gegenüberstellung zu dem in dieser Abhandlung vorgestellten Verfahren entsprechen die Superelemente der EZ. Die Vernetzungsreduktion wird bei dieser Technik dadurch eingeschränkt, dass alle Randknoten der Superelemente in das Gesamtmodell übernommen werden und jedes Superelement die Dimension der EZ umfasst.
- Bei der Submodell–Technik[17] wird ein ausgewählter Bereich des Gesamtmodells mit effektiven Materialparametern als Submodell extrahiert und wesentlich feiner vernetzt. Die Verschiebungsergebnisse am Gesamtmodell werden auf die Randknoten des Submodells interpoliert. Problematisch bei diesem Verfahren ist für die Piezoverbundmodule die Handhabung der elektrischen Potentialfreiheitsgrade. Das Gesamtmodell liefert aufgrund des homogenen effektiven Materials Potentialergebnisse für alle Knoten, im Submodell sind diese jedoch nur für die elektrisch aktiven Komponenten von Relevanz.

Der wesentliche Unterschied beider Berechnungsmethoden im Vergleich zu dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren liegt darin, dass die Beanspruchungsgrößen in ihrer örtlichen Verteilung ermittelt werden. Dies liefert zwar mehr Informationen, begründet aber auch, dass diese Methoden nicht für die Integration in eine Systemsimulation geeignet sind.

[17] Bezeichnung entsprechend [ANSYS]

7 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur numerischen Charakterisierung des funktionellen Verhaltens von Piezoverbundmodulen. Im Vordergrund steht dabei in erster Linie die verallgemeinernde methodische Darstellung. Die konkrete Anwendung wird am Beispiel der im SFB/TRR 39 entwickelten Piezo–Metall–Module demonstriert.

Ziel der vorgestellten Vorgehensweise ist es, basierend auf der Methode der Finiten Elemente und kommerziell verfügbaren Implementierungen wie dem FEM–System ANSYS® eine effiziente Modellbildung für Piezoverbundmodule in der Verwendung als Aktoren oder Sensoren zur geregelten Schwingungsbeeinflussung an Maschinenstrukturen zu ermöglichen. Dazu werden zwei wesentliche Schwerpunkte behandelt: das statische Verhalten eines repräsentativen Teilvolumens des Piezoverbundmoduls zur Homogenisierung der Materialparameter und die dynamische Modellreduktion eines piezo–mechanischen Systems zur Verwendung bei der Systemsimulation. Beide Schwerpunkte werden in einer Gesamtmethodik integriert.

Im Kapitel 4 wird gezeigt, wie mittels energiebasierter Einheitszellenmethode die effektiven elastischen, piezoelektrischen und dielektrischen Materialparameter des Piezoverbundes ermittelt werden können. Die energiebasierte Einheitszellenmethode mit expliziter Auswertung der elektrischen Enthalpie der Einheitszelle kann für eine weitgehende Formalisierung der Homogenisierungslastfälle genutzt werden und wurde bisher in dieser streng formalisierten Form für Piezoverbunde noch nicht angewandt. Eine bisher übliche, gesonderte Auswertung der elektrischen Feldgrößen mit Hilfe von Makrovariablen entfällt damit.

Besonderes Augenmerk wird dem Umstand gewidmet, dass bei der Betrachtung von Piezoverbundmodulen die Elektroden im Inneren der Einheitszelle positioniert sind. Dazu müssen die elektrischen Randbedingungen der Homogenisierungslastfälle angepasst werden. Es wird auch ausgeführt, weshalb bei der Ermittlung der effektiven Materialparameter die elektrische Last als frei wählbarer Parameter zu betrachten ist und die effektiven Materialparameter nur in unmittelbarer Verbindung mit der gewählten elektrischen Last in Gesamtmodellen verwendet werden können. Dieser Aspekt wurde bisher noch nicht in der Literatur erschöpfend diskutiert. Es wird der Vorschlag unterbreitet, bei der Homogenisierung die effektive elektrische Last entsprechend der realen Ansteuerspannung an den Elektroden zu wählen. Damit entspricht im Gesamtmodell die rechnerische elektrische Last einem ganzzahligen Vielfachen der realen Ansteuerspannung.

Die Homogenisierungslastfälle werden auch genutzt, um Phasenkonzentrationen für die Beanspruchungen der Verbundkomponenten zu ermitteln. Diese Phasenkonzentrationen

werden benötigt, um aus dem Gesamtmodell bei Verwendung der effektiven Materialparameter die Beanspruchungen der Verbundkomponenten zu extrahieren. Auch dies wurde, nach Kenntnis des Autors, für piezoelektrische Verbunde bisher noch nicht ausgeführt.

Der zweite Schwerpunkt, die dynamische Modellreduktion für piezo–mechanische Systeme, wird in Kapitel 5 behandelt. Die Überführung einer FE–Diskretisierung des piezo–mechanischen Systems in eine Zustandsraumbeschreibung gelingt mit der Betrachtung der mechanischen Freiheitsgrade als Zustandsvariablen. Zur Betrachtung der elektrischen Impedanz im Zustandsraummodell muss die elektrische Steifigkeits- bzw. Kapazitätsmatrix als Durchgangsmatrix einbezogen werden. Die dynamische Modellreduktion des Zustandsraummodells basiert auf der modalen Superposition. Zur korrekten Abbildung der elektrischen Impedanz muss die modale Transformationsbasis um Verformungsmoden ergänzt werden, die das Verformungsverhalten bei statischer elektrischer Erregung an den Elektroden charakterisieren.

Die Zustandsraumbeschreibung wird sowohl für eine Potential- als auch für eine Ladungserregung ausgeführt. Ein wesentlicher Unterschied für beide elektrischen Erregungen ergibt sich aus der Umsetzung der zugrundeliegenden Differentialgleichungen in der FE–Formulierung. Für die Potentialerregung an den Elektroden muss die Ladungsfreiheit (Quellenfreiheit) der inneren elektrischen Freiheitsgrade durch eine Substitutionsgleichung für die inneren Potentiale in Abhängigkeit von den äußeren Potentialen an den Elektroden erzwungen werden. Für die Ladungserregung an den Elektroden ergibt sich die Quellenfreiheit der inneren elektrischen Freiheitsgrade natürlich. Die Zustandsraumbeschreibung wird unter Verwendung von Filtermatrizen um Ausgangssignale für die mechanischen und elektrischen Beanspruchungsgrößen (Spannung und Verzerrung sowie elektrisches Feld und elektrische Flussdichte) erweitert. Dies gestattet eine Kopplung der Zustandsraummodelle mit den Beanspruchungsanalysen nach Kapitel 4.

Die vollständige Darlegung der Zustandsraummodellbildung für Ladungserregung, neben der üblicherweise betrachteten Potentialerregung, die Einbeziehung der mechanischen und elektrischen Beanspruchungsgrößen im Zustandsraummodell als auch die dadurch ermöglichte Kopplung mit den Beanspruchungsanalysen sind wesentliche Beiträge der vorliegenden Arbeit zur Erweiterung des Standes der Forschung.

Die Verknüpfung von Beanspruchungsanalyse und Zustandsraummodell erfolgt bei der Beschreibung des Gesamtablaufes in Kapitel 6. Unter Verwendung der Phasenkonzentrationen der Einheitslastfälle, die im Zusammenhang mit der Ermittlung der effektiven Materialparameter bestimmt werden, werden aus der Zustandsraumbeschreibung des Gesamtmodells mit effektiven Materialparametern Signale für die lokalen Beanspruchun-

gen der Verbundkomponenten abgeleitet. Da zur Ermittlung der lokalen Beanspruchungen sowohl die effektiven Verzerrungen als auch das effektive elektrische Feld verwendet werden, müssen für eine korrekte Abbildung dieser lokalen Beanspruchungen im Zustandsraummodell die statischen Ergänzungsmoden infolge elektrischer Erregung unbedingt mit eingesetzt werden.

Mit der Anwendung der vorgestellten Berechnungsmethode auf Piezo–Metall–Module werden Auslegungskriterien bezüglich der maximal zulässigen Spannungsschwingamplitude diskutiert. Mit den Amplitudenfrequenzgängen für die lokalen Beanspruchungen der Komponenten des Piezo–Metall–Moduls können aus den zulässigen Spannungsschwingamplituden die zulässigen elektrischen Erregungen ermittelt werden.

Mit der in dieser Abhandlung vorgestellten Methode steht ein Verfahren zur Verfügung, mit dem die lokalen Beanspruchungen eines Piezoverbundmoduls auf der Grundlage einer Zustandsraumbeschreibung des piezo–mechanischen Gesamtsystems effizient abgeschätzt werden können.

Literaturverzeichnis

AGNES, G. S. [1995]: *Development of a Modal Model for Simultaneous Active and Passive Piezoelectric Vibration Suppression*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 6(4):482–487. DOI: 10.1177/1045389X9500600405.

ALLIK, H. UND HUGHES, T. J. R. [1970]: *Finite element method for piezoelectric vibration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2(2):151–157. DOI: 10.1002/nme.1620020202.

ANSYS [2009]: ANSYS® Academic Teaching Advanced Revision 12.1. ANSYS, Inc., Canonsburg, US-PA.

ANTON, S. R. UND SODANO, H. A. [2007]: *A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006)*. Smart Materials and Structures, 16(3):R1.

ASHWIN, U.; RAJA, S. UND DWARAKANATHAN, D. [2009]: *A finite element based substructuring procedure for design analysis of large smart structural systems*. Smart Materials and Structures, 18(4):045006.

BAI, Z. [2002]: *Krylov subspace techniques for reduced–order modeling of large–scale dynamical systems*. Applied Numerical Mathematics, 43(1–2):9–44.

BATHE, K.-J. UND ZIMMERMANN, P. [2002]: *Finite–Elemente–Methoden*. Springer, Berlin, 2. Auflage.

BECKER, J.; FEIN, O.; MAESS, M. UND GAUL, L. [2006]: *Finite element–based analysis of shunted piezoelectric structures for vibration damping*. Computers and Structures, 84:2340–2350.

BECKERT, W.; KREHER, W.; BRAUE, W. UND ANTE, M. [2001]: *Effective properties of composites utilising fibres with a piezoelectric coating*. Journal of the European Ceramic Society, 21(10–11):1455–1458. DOI: 10.1016/S0955-2219(01)00040-1.

BECKERT, W. UND KREHER, W. S. [2003]: *Modelling piezoelectric modules with interdigitated electrode structures*. Computational Materials Science, 26:36–45. DOI: 10.1016/S0927-0256(02)00390-7.

BENJEDDOU, A. [2000]: *Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey*. Computers and Structures, 76:347–363.

BENJEDDOU, A. [2008]: *Piezoelectricity Experimentation, Modeling and Simulation: Common Practices and Realistic Considerations*. Advances in Science and Technology, 56:22–31.

BENNER, P. [2006]: *Numerical Linear Algebra for Model Reduction in Control and Simulation*. GAMM Mitteilungen, 29(2):275–296.

BENT, A. A. [1997]: *Active Fiber Composites for Structural Actuation*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology.

BENT, A. A. UND HAGOOD, N. W. [1997]: *Piezoelectric Fiber Composites with Interdigitated Electrodes*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 8(11):903–919. DOI: 10.1177/1045389X9700801101.

BERGER, H.; GABBERT, U.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J. UND GUINOVART-DÍAZ, R. [2010]: *A numerical homogenization technique for piezoelectric composites with arbitrary fiber distribution*. In: *11th Pan–American Congress of Applied Mechanics*. Foz do Iguaçu, PR, Brazil.

BERGER, H.; KARI, S.; GABBERT, U.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J. UND MAUGIN, G. A. [2006]: *Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties*. Smart Materials and Structures, 15(2):451.

BERGER, H.; KARI, S.; GABBERT, U.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; GUINOVART-DÍAZ, R.; OTERO, J. A. UND BRAVO-CASTILLERO, J. [2005]: *An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites*. International Journal of Solids and Structures, 42(21–22):5692–5714.

BERGMANN, W. [2008]: *Werkstofftechnik 1: Struktureller Aufbau von Werkstoffen — Metallische Werkstoffe - Polymerwerkstoffe - Nichtmetallisch–anorganische Werkstoffe*. Hanser, München, 6. Auflage.

BONIN, T.; ZÄH, M. F.; SOPPA, A.; FASSBENDER, H.; SAAK, J. UND BENNER, P. [2009]: *Modale versus moderne Ordnungsreduktionsverfahren: Effiziente Simulation von Werkzeugmaschinen*. Mechatronik, 11–12:46–47.

BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J. UND RODRÍGUEZ-RAMOS, R. [2001]: *Closed–form expressions for the effective coefficients of a fiber–reinforced composite with transversely isotropic constituents — II. Piezoelectric and square symmetry*. Mechanics of Materials, 33(4):237–248. DOI: 10.1016/S0167-6636(00)00060-0.

BRECHER, C.; SCHAUERTE, G. UND MERZ, M. [2008]: *Model based control of a piezo–actuated axis*. In: MITSUISHI, M.; UEDA, K. UND KIMURA, F. (Hrsg.), *Manufacturing Systems and Technologies for the New Frontier: The 41st CIRP Conference on Manufacturing Systems May 26–28, 2008, Tokyo, Japan*, Seiten 413–416. Springer London.

BUTZ, A. [2006]: *Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D–Stabstrukturen — Theorie und Finite–Element–Modellierung*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH).

COLLET, M. UND CUNEFARE, K. A. [2008]: *Modal Synthesis and Dynamical Condensation Methods for Accurate Piezoelectric Systems Impedance Computation*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 19(11):1251–1269.

CÔTÉ, F.; MASSON, P.; MRAD, N. UND COTONI, V. [2004]: *Dynamic and static modelling of piezoelectric composite structures using a thermal analogy with MSC/NASTRAN*. Composite Structures, 65(3–4):471–484.

CRAIG, R. R., JR. UND BAMPTON, M. C. C. [1968]: *Coupling of substructures for dynamic analyses*. AIAA Journal, 6:1313–1319. DOI: 10.2514/3.4741.

CRAIG, R. R., JR. UND CHANG, C.-J. [1976]: *A Review of Substructure Coupling Methods for Dynamic Analysis*. Technischer Bericht NASA CP-2001, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.

DAMJANOVIC, D. [2005]: *Hysteresis in Piezoelectric and Ferroelectric Materials*. In: MAYERGOYZ, I. UND G.BERTOTTI (Hrsg.), *The Science of Hysteresis*, Band 3. Elsevier.

DERAEMAEKER, A. UND NASSER, H. [2010]: *Numerical evaluation of the equivalent properties of Macro Fiber Composite (MFC) transducers using periodic homogenization*. International Journal of Solids and Structures, 47(24):3272–3285. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.08.006.

DERAEMAEKER, A.; NASSER, H.; BENJEDDOU, A. UND PREUMONT, A. [2009]: *Mixing Rules for the Piezoelectric Properties of Macro Fiber Composites*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 20(12):1475–1482.

DINKLER, D.; KOWALSKY, U. UND SCHUSTER, K. [2010]: *Finite–macro–element for modelling thin structures with integrated piezoelectric sensor–actor–elements*. Archive of Applied Mechanics, 80:151–160. DOI: 10.1007/s00419-009-0299-9.

DITTMER, R.; CLEMENS, F.; SCHÖNECKER, A.; SCHEITHAUER, U.; ISMAEL, M. R. UND GRAULE, T. [2010]: *Microstructural Analysis and Mechanical Properties of $Pb(Zr,Ti)O_3$ Fibers Derived by Different Processing Routes*. Journal of the American Ceramic Society, 93(8):2403–2410. DOI: 10.1111/j.1551-2916.2010.03742.x.

DÖRLEMANN, C.; MUSS, P.; SCHUGT, M. UND UHLENBROCK, R. [2002]: *New high speed current controlled amplifier for PZT multilayer stack actuators*. In: *Actuator 2002: 8th International Conference on New Actuators*. Bremen.

DRESIG, H. UND HOLZWEISSIG, F. [2009]: *Maschinendynamik*. Springer, Berlin Heidelberg, 9. Auflage.

DROSSEL, W.-G.; NEUGEBAUER, R. UND KRANZ, B. [2007]: *Study about possibilities for direct integration of piezo–fibers in sheet metal*. In: DAPINO, M. J. (Hrsg.), *Behavior and mechanics of multifunctional and composite materials 2007: 19–22 March 2007, San Diego, California, USA*, *Proceedings of SPIE*, Band 6526. SPIE.

DUNN, C. T. [2002]: *Thermoplastic Active Fiber Composites for Structural Actuation*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology.

DUNN, M. UND TAYA, M. [1993]: *Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites*. International Journal of Solids and Structures, 30(2):161–175. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90058-F.

ENAB, T. A. [2009]: *Numerical homogenization technique for calculating effective electromechanical coefficients of 1–3 piezocomposites*. In: *5th Saudi Technical Conference and Exhibition*. Riyadh.

FÖLLINGER, O. [1994]: *Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig Verlag, Heidelberg, 8. Auflage.

FRÖHLICH, A. [2001]: *Micromechanical model to determine effective material properties of piezoelectric polycrystals*. Dissertation, Universität Karlsruhe.

GEBHARDT, S. E.; SCHNETTER, J.; SCHÖNECKER, A. UND WITTSTOCK, V. [2005]: *Low voltage piezocomposite actuators based on PZT tubes and plates*. J. Phys. IV France, 128:195–200. DOI: 10.1051/jp4:2005128029.

GUYAN, R. J. [1965]: *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*. AIAA Journal, 3(2):380.

HAGOOD, N. W.; CHUNG, W. H. UND VON FLOTOW, A. [1990]: *Modelling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1(3):327–354. DOI: 10.1177/1045389X9000100305.

HALL, D. A. [2001]: *Review Nonlinearity in piezoelectric ceramics*. Journal of Materials Science, 36:4575–4601.

HAN, J. S.; RUDNYI, E. B. UND KORVINK, J. G. [2005]: *Efficient optimization of transient dynamic problems in MEMS devices using model order reduction*. Journal of Micromechanics and Microengineering, 15(4):822.

HARDTKE, H.-J.; HEIMANN, B. UND SOLLMANN, H. [1997]: *Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik II*. Fachbuchverlag, Leipzig.

HATCH, M. R. [2001]: *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. Chapman & Hall/CRC.

HE, Q. C. [2004]: *Variational and Microstructure–Independent Relations for Piezoelectric Composites*. J. Mater. Sci. Technol., 20:69–72.

HEGEWALD, T. [2008]: *Modellierung des nichtlinearen Verhaltens piezokeramischer Aktoren*. Dissertation, Universität Erlangen–Nürnberg.

HERRMANN, M.; PETER, S. UND RICHTER, F. [2007]: *Entwicklung von Isolatorschichten für metallbasierte Piezomodule*. In: Neugebauer [2007].

HILL, R. [1963]: *Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11(5):357–372.

HILL, R. [1965]: *A Self Consistent Mechanics of Composite Materials*. J. Mech. Phys. Sol, 13:213–222.

HORI, M. UND NEMAT-NASSER, S. [1998]: *Universal bounds for effective piezoelectric moduli*. Mechanics of Materials, 30(1):1–19.

HUFENBACH, W.; GUDE, M. UND HEBER, T. [2009a]: *Design and testing of novel piezoceramic modules for adaptive thermoplastic composite structures*. Smart Materials and Structures, 18(4):045012.

HUFENBACH, W.; GUDE, M. UND HEBER, T. [2009b]: *Development of novel piezoceramic modules for adaptive thermoplastic composite structures capable for series production*. Sensors and Actuators A: Physical, 156(1):22–27. DOI: 10.1016/j.sna.2009.04.006.

HURLEBAUS, S. UND GAUL, L. [2006]: *Smart structure dynamics*. Mechanical Systems and Signal Processing, 20(2):255–281. DOI: 10.1016/j.ymssp.2005.08.025.

IEEE UFFC COMMITTEE ON PIEZOELECTRIC CRYSTALS [1996]: *Publication and Proposed Revision of ANSI/IEEE Standard 176–1987 "ANSI/IEEE Standard on Piezoelectricity"*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 43(5):717–718 (+54). DOI: 10.1109/TUFFC.1996.535477.

IKEDA, T. [1996]: *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford science publications. Oxford University Press, Oxford.

INMAN, D. J. UND GRISSO, B. L. [2007]: *Adaptive Structures for Structural Health Monitoring*. In: WAGG, D.; BOND, I.; WEAVER, P. UND FRISWELL, M. (Hrsg.), *Adaptive Structures — Engineering Applications*, Kapitel 1, Seiten 1–30. John Wiley & Sons, Ltd.

IRSCHIK, H. [2002]: *A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation*. Engineering Structures, 24(1):5–11. DOI: 10.1016/S0141-0296(01)00081-5.

IVERS-TIFFÉE, E. UND VON MÜNCH, W. [2007]: *Werkstoffe der Elektrotechnik*. Lehrbuch Elektrotechnik. Teubner, Wiesbaden, 10. Auflage.

JAFFE, B.; COOK, W. R. UND JAFFE, H. [1971]: *Piezoelectric ceramics, Non–metallic solids*, Band 3. Academic Press, London.

KALTENBACHER, M.; KALTENBACHER, B.; HEGEWALD, T. UND LERCH, R. [2010]: *Finite Element Formulation for Ferroelectric Hysteresis of Piezoelectric Materials*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 21(8):773–785.

KAMLAH, M.; ZHOU, D. UND LASKEWITZ, B. [2008]: *Constitutive behaviour of ferroelectric piezoceramics: Experiments and modeling*. GAMM–Mitteilungen, 31(2):166–175. DOI: 10.1002/gamm.200890009.

KRANZ, B. [2009]: *Zustandsraumbeschreibung von piezo–mechanischen Systemen auf Grundlage einer Finite–Elemente–Diskretisierung*. In: *ANSYS Conference & 27th CADFEM Users' Meeting*. CADFEM GmbH, Leipzig.

KRANZ, B. UND DROSSEL, W.-G. [2005]: *Homogenisierung von Materialkennwerten und Lokalisierung von Beanspruchungen bei Kompositen mit Piezohohlfasern*. In: KUNA, M. (Hrsg.), *37. Tagung des DVM–Arbeitskreises Bruchvorgänge »Technische Sicherheit, Zuverlässigkeit und Lebensdauer«, DVM–Bericht*, Band 237, Seiten 345–353. Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V. (DVM).

KRANZ, B. UND DROSSEL, W.-G. [2006]: *Rechnerische Beanspruchungsermittlung bei adaptiven Kompositen mit piezokeramischen Fasern*. In: HANSELKA, H. (Hrsg.), *Zuverlässigkeit mechatronischer und adaptronischer Systeme: 1. Tagung des DVM–Arbeitskreises Zuverlässigkeit mechatronischer und adaptronischer Systeme: 15.–16. März 2006, Darmstadt, DVM–Bericht*, Band 901, Seiten 43–52. Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e.V. (DVM).

KRANZ, B. UND DROSSEL, W.-G. [2007]: *Berechnungsmodell für das elektro–mechanische Verhalten von flächigen Piezofaser–Metall–Modulen*. In: Neugebauer [2007], Seiten 7–11.

KRANZ, B. UND DROSSEL, W.-G. [2010]: *MIMO state space models of piezo–mechanical systems with exact impedance mapping*. In: *IV European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2010. CD–ROM*.

KROLL, L. [2010]: *Fertigungstechnologien für Piezomodule mit integrierten Keramikfaser–Kompositen und Funktionspolymeren zum Einsatz in aktiven metallischen Bauteilen*. http://www.pt-piesa.tu-chemnitz.de/P_2/de/a6.php. Abruf: 20. März 2011.

KUHNEN, K. [2008]: *Kompensation komplexer gedächtnisbehafteter Nichtlinearitäten in Systemen mit aktiven Materialien: Grundlagen — Erweiterte Methoden — Anwendungen*. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker, Aachen.

KURCH, M.; KLEIN, C. UND MAYER, D. [2009]: *A framework for numerical modeling and simulation of shunt damping technology*. In: PAWELCZYK, M. (Hrsg.), *Recent de-*

velopments in acoustics, noise and vibration. 16th International Congress on Sound and Vibration, ICSV 2009. Proceedings. CD–ROM.

LAMMERING, R. UND YANG, F. [2006]: *A Four–node Finite Element for Piezoelectric Shell Structures in Convective Coordinates*. Proc. Appl. Math. Mech., 6(1):237–238. DOI: 10.1002/pamm.200610099.

LENGLET, È. [2003]: *Contribution au développement d'une méthode d'homogénéisation des composites à fibres actives : application à la torsion de pales d'hélicoptère*. Dissertation, Université des sciences et technologies de Lille.

LENGLET, È. UND DELETOMBE, E. [2002]: *Numerical homogenization techniques for active control*. In: *IEEE Ultrasonics Symposium*, Seiten 1197–1200.

LENGLET, È.; HLADKY-HENNION, A.-C. UND DEBUS, J.-C. [2003]: *Numerical homogenization techniques applied to piezoelectric composites*. The Journal of the Acoustical Society of America, 113(2):826–833. DOI: 10.1121/1.1537710.

MARINKOVIC, D. [2007]: *A new finite composite shell element for piezoelectric active structures*. Dissertation, Universität Magdeburg.

MATLAB [2007]: MATLAB® R2007a. The MathWorks, Inc., Natick, US-MA.

MESECKE-RISCHMANN, S. [2004]: *Modellierung von flachen piezoelektrischen Schalen mit zuverlässigen finiten Elementen*. Dissertation, Helmut–Schmidt–Universität, Universität der Bundeswehr, Hamburg.

NASDALA, L. [2010]: *FEM–Formelsammlung Statik und Dynamik: Hintergrundinformationen, Tipps und Tricks*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 1. Auflage.

NEUGEBAUER, R. (Hrsg.) [2007]: *Großserienfähige Produktionstechnologien für leichtmetall- und faserverbundbasierte Komponenten mit integrierten Piezosensoren und -aktoren: 1. Wissenschaftliches Symposium des SFB/Transregio 39 PT–PIESA*. Fraunhofer–Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik IWU, Chemnitz.

NEUGEBAUER, R. (Hrsg.) [2009]: *Großserienfähige Produktionstechnologien für leichtmetall- und faserverbundbasierte Komponenten mit integrierten Piezosensoren und -aktoren: 2. Wissenschaftliches Symposium des SFB/Transregio 39 PT–PIESA*. Fraunhofer–Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik IWU, Chemnitz.

NEUGEBAUER, R.; DROSSEL, W.-G.; BUCHT, A.; KRANZ, B. UND PAGEL, K. [2010a]: *Control design and experimental validation of an adaptive spindle support for enhanced cutting processes*. CIRP Annals — Manufacturing Technology, 59(1):373–376. DOI: 10.1016/j.cirp.2010.03.029.

NEUGEBAUER, R.; DROSSEL, W.-G.; PAGEL, K. UND KRANZ, B. [2010b]: *Making of state space models of piezo–mechanical systems with exact impedance mapping and strain output signals*. In: *Mechatronics 2010, 12th Mechatronics Forum Biennial International Conference*, Band 2, Seiten 73–80.

NEUGEBAUER, R. UND LOPEZ, D. [2009]: *Höchste Wertschöpfung aus den Ressourcen: Ein Paradigmenwechsel beim Verbrauch ist dringend notwendig*. Intelligenter produzieren, 2009(2):13–15.

NEWNHAM, R. E.; SKINNER, D. P. UND CROSS, L. E. [1978]: *Connectivity and piezoelectric–pyroelectric composites*. Mat. Res. Bull., 13:525–536.

NICOLAI, M.; SCHOLEHWAR, T. UND SCHÖNECKER, A. [2007]: *Characterization of properties of PZT/SKN piezoceramics under electrical, mechanical and thermal loads*. In: HEINRICH, J. G. UND ANEZIRIS, C. (Hrsg.), *Proceedings of the 10th International Conference and Exhibition of the European Ceramic Society ECerS 2007*, Seiten 617–620. Göller Verlag, Baden–Baden.

PARK, G.; SOHN, H.; FARRAR, C. R. UND INMAN, D. J. [2003]: *Overview of Piezoelectric Impedance–Based Health Monitoring and Path Forward*. The Shock and Vibration Digest, 35(6):451–463.

PETER, S.; GÜNTHER, M.; BELSKY, P.; HAUSCHILD, D.; HERRMANN, M. UND RICHTER, F. [2009]: *Optimierung der Isolatorschichtabscheidung für metallbasierte Piezomodule*. In: Neugebauer [2009].

PETTERMANN, H. E. UND SURESH, S. [2000]: *A comprehensive unit cell model: a study of coupled effects in piezoelectric 1–3 composites*. International Journal of Solids and Structures, 37:5447–5464. DOI: 10.1016/S0020-7683(99)00224-3.

PI Ceramic [2010]: *Piezokeramische Werkstoffe*. http://piceramic.de/pdf/d_piezo_material.pdf. PI Ceramic GmbH, Lederhose, DE-SN. Abruf: 21.03.2011.

PIEFORT, V. [2001]: *Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*. Dissertation, Université Libre de Bruxelles.

POIZAT, C. UND SESTER, M. [1999]: *Effective properties of composites with embedded piezoelectric fibres*. Computational Materials Science, 16(1–4):89–97.

RAGHAVAN, A. UND CESNIK, C. E. S. [2007]: *Review of Guided–wave Structural Health Monitoring*. The Shock and Vibration Digest, 39(2):91–114.

REAVES, M. C. UND HORTA, L. G. [2003]: *Piezoelectric Actuator Modeling Using MSC/NASTRAN and MATLAB*. Technischer Bericht NASA/TM-2003-2 1265 1, Langley Research Center, Hanipton, Virginia.

RUDNYI, E. UND KORVINK, J. [2006]: *Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS*. In: DONGARRA, J.; MADSEN, K. UND WASNIEWSKI, J. (Hrsg.), *Applied Parallel Computing, Lecture Notes in Computer Science*, Band 3732, Seiten 349–356. Springer Berlin / Heidelberg.

SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; BRAVO-CASTILLERO, J. UND GUINOVART-DÍAZ, R. [2001]: *Closed–form expressions for the effective coefficients of a fibre–reinforced composite with transversely isotropic constituents. II: Piezoelectric and hexagonal symmetry*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49(7):1463–1479. DOI: 10.1016/S0022-5096(01)00006-0.

SCHMIDT, R. [2001]: *Berechnung elastischer Konstanten für inhomogene Bauteile mit periodischer Struktur*. In: *19th CAD–FEM Users' Meeting*.

SCHUBERT, A.; DROSSEL, W.-G.; POHL, R. UND KRANZ, B. [2010a]: *Investigation of a force–locked connection of micro piezo elements with aluminium carrier material*. Production Engineering, 4(4):399–405. DOI: 10.1007/s11740-010-0238-1.

SCHUBERT, A. UND POHL, R. [2009]: *Mikrostrukturierung von Al–Blechen mittels Durchsetzen — Werkzeuggestaltung und experimentelle Bewertung*. In: Neugebauer [2009].

SCHUBERT, A.; POHL, R. UND HACKERT, M. [2010b]: *Micro Impact Extrusion of Precision Cavities with Modular Dies*. In: VAN BRUSSEL, H.; SHORE, P.; SPAAN, H. UND BURKE, T. (Hrsg.), *Proceedings of the 10th international conference of the european society for precision engineering and nanotechnology*.

SCHULGASSER, K. [1992]: *Relationships between the effective properties of transversely isotropic piezoelectric composites*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 40(2):473–479. DOI: 10.1016/S0022-5096(05)80022-5.

SKINNER, D. P.; NEWNHAM, R. E. UND CROSS, L. E. [1978]: *Flexible Composite Transducers*. Mat. Res. Bull., 13(6):599–607.

SMITH, R. C. [2005]: *Smart material systems, model development*. Society for Industrial Mathematics.

SODANO, H. A.; INMAN, D. J. UND PARK, G. [2004a]: *A Review of Power Harvesting from Vibration using Piezoelectric Materials*. The Shock and Vibration Digest, 36(3):197–205. DOI: 10.1177/0583102404043275.

SODANO, H. A.; PARK, G. UND INMAN, D. J. [2004b]: *An investigation into the performance of macro–fiber composites for sensing and structural vibration applications*. Mechanical Systems and Signal Processing, 18(3):683–697. DOI: 10.1016/S0888-3270(03)00081-5.

SONG, G.; SETHI, V. UND LI, H.-N. [2006]: *Vibration control of civil structures using piezoceramic smart materials: A review*. Engineering Structures, 28(11):1513–1524. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.02.002.

STEINHAUSEN, R. [2002]: *Charakterisierung und Modellierung von piezoelektrischen 1–3 Kompositen*. Dissertation, Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg.

TAN, P. UND TONG, L. [2001]: *Micro–electromechanics models for piezoelectric–fiber–reinforced composite materials*. Composites Science and Technology, 61:759–769 (11). DOI: 10.1016/S0266-3538(01)00014-8.

THOMAS, O.; DEÜ, J.-F. UND DUCARNE, J. [2009]: *Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 80(2):235–268. DOI: 10.1002/nme.2632.

TRINDADE, M. A. UND BENJEDDOU, A. [2011]: *Finite element homogenization technique for the characterization of d_{15} shear piezoelectric macro–fibre composites*. Smart Materials and Structures, 20(7):075012.

WIERACH, P. [2003]: *Entwicklung Multifunktionaler Werkstoffsysteme mit piezokeramischen Folien im Leitprojekt Adaptronik*. In: *Adaptronic Congress*.

WIERACH, P. [2006]: *Low Profile Piezo Actuators Based on Multilayer Technology*. In: *17. International Conference on Adaptive Systems and Structures*. Taipei, Taiwan.

WILKIE, W. K.; BRYANT, R. G.; HIGH, J. W.; FOX, R. L.; HELLBAUM, R. F.; JALINK, J., ANTHONY; LITTLE, B. D. UND MIRICK, P. H. [2000]: *Low–cost piezocomposite actuator for structural control applications*. In: JACOBS, J. H. (Hrsg.), *Smart Structures and Materials 2000: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, Band 3991, Seiten 323–334. SPIE.

WILLIAMS, R. B.; PARK, G.; INMAN, D. J. UND WILKIE, W. K. [2002]: *An Overview of Composite Actuators with Piezoceramic Fibers*. In: *IMAC–XX: Conference on Structural Dynamics*. Los Angeles, CA.

WITTSTOCK, V. [2007]: *Piezobasierte Aktor–Sensor–Einheiten zur uniaxialen Schwingungskompensation in Antriebssträngen von Werkzeugmaschinen*. Dissertation, Technische Universität Chemnitz.

ZHOU, D. [2003]: *Experimental Investigation of Non–linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH).

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Skalare Größen werden in normaler Schriftstärke, Vektoren und Matrizen in fetter Schriftstärke dargestellt.

Notation	**Beschreibung**
	Lateinische Großbuchstaben
$\boldsymbol{A}$	Systemmatrix des Zustandsraummodells
$\boldsymbol{B}$	Steuermatrix (Eingangsmatrix) des Zustandsraummodells
$\boldsymbol{B}_{\mathrm{io}}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{F,io}}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{Q,io}}$, $\boldsymbol{B}_{\Phi,\mathrm{io}}$	Filtermatrix für den Eingangsvektor des Zustandsraummodells, die mechanischen Kräfte, die elektrischen Ladungen und die elektrischen Potentiale betreffend
$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}}$	Dämpfungsmatrix, Dämpfungsmatrix des modalen Modells
D, D_i, $\boldsymbol{D}$	elektrische Flussdichte (dielektrische Verschiebung), Komponenten und Vektor
$\bar{D}_i$, $\bar{\boldsymbol{D}}$	effektive (gemittelte) elektrische Flussdichte, Komponenten und Vektor
E, E_i, $\boldsymbol{E}$	elektrisches Feld (Feldstärke), Komponenten und Vektor
$\bar{E}_i$, $\bar{\boldsymbol{E}}$	effektives (gemitteltes) elektrisches Feld, Komponenten und Vektor
E_{c}	Koerzitivfeldstärke
E_{Pol}	elektrisches Feld bei der Polarisierung
$\boldsymbol{F}$	Vektor der mechanischen (Knoten)–Kräfte
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{io}}$	Vektor der mechanischen Kräfte, die als tatsächliches Eingangssignal des Zustandsraummodells betrachtet werden
H	elektrische Enthalpiedichte
$\boldsymbol{I}$	Einheitsmatrix
$\boldsymbol{J}_{\Phi\Phi}$	Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{J}_{\Phi\Phi} = \boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}^{-1}$
$\boldsymbol{K}_{\mathrm{uu}}$, $\boldsymbol{K}_{\mathrm{u}\Phi}$, $\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi}$	Steifigkeitsmatrix: mechanisch, piezoelektrisch (Kopplungsmatrix) und elektrisch (Kapazitätsmatrix)
$\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{K}}$, $\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{K}}$	mechanische Steifigkeitsmatrix des elektrisch kurzgeschlossenen Systems und des elektrisch offenen Systems
$\boldsymbol{K}_{\Phi\Phi,\mathrm{io}}$	elektrische Steifigkeitsmatrix für die tatsächlichen elektrischen Ein- und Ausgangsgrößen des Zustandsraummodells
$\boldsymbol{L}$	Messmatrix (Beobachtungsmatrix, Ausgangsmatrix) des Zustandsraummodells
$\boldsymbol{L}_{\mathrm{io}}$	Filtermatrix für den Ausgangsvektor des Zustandsraummodells
$\boldsymbol{M}$	mechanische Massenmatrix
$\boldsymbol{N}_{\mathrm{u}}$, $\boldsymbol{N}_{\Phi}$	Formfunktionen für die Verschiebungen und die Potentiale
P, P_{rem}	elektrische Polarisation, remanente Polarisation
$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{\mathrm{S}}$	Matrix der statischen Moden bei Potentialanregung, Verschiebungen und Verzerrungen
Q, $\boldsymbol{Q}$	elektrische Ladung, Vektor der (negativen Knoten)–Ladungen, s. Abschnitt 2.3.5

Notation	Beschreibung
$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{io}}$	Vektor der elektrischen Ladungen, die als tatsächliches Ein- bzw. Ausgangssignal des Zustandsraummodells betrachtet werden
$\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S}}$	Matrix der statischen Moden bei Ladungsanregung, Verschiebungen und Verzerrungen
$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}_{\mathrm{elem}}$	Verzerrungs–Verschiebungs–Matrix des Gesamtmodells und eines finiten Elementes
S, S_{ij}, S_μ, $\boldsymbol{S}$	mechanische Verzerrung (Dehnung), Komponenten und Vektor
$\bar{S}_\mu$, $\bar{\boldsymbol{S}}$	effektive (gemittelte) Verzerrungen, Komponenten und Vektor
$\boldsymbol{S}_{\mathrm{elem}}$	Vektor der mechanischen Verzerrungen eines finiten Elementes
S_{rem}	remanente Dehnung
T, T_{ij}, T_μ, $\boldsymbol{T}$	mechanische Spannung, Komponenten und Vektor
$\bar{T}_\mu$, $\bar{\boldsymbol{T}}$	effektive (gemittelte) mechanische Spannung, Komponenten und Vektor
$\boldsymbol{\mathcal{T}}$	Projektionsmatrix für die Modellreduktion
$\boldsymbol{U}$	Durchgangsmatrix des Zustandsraummodells
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$, $\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$, $\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$	Modalmatrix (Matrix der Eigenvektoren) des elektrisch kurzgeschlossenen Systems und des elektrisch offenen Systems
$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\mathrm{u}}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\mathrm{S}}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q}}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\Phi}$	Modalmatrix der Verschiebungen, der Verzerrungen, der Ladungen und der Potentiale
$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{_,r,\mathrm{io}}$	bezüglich der Anzahl der Eigenwerte und der Anzahl der enthaltenen DOF reduzierte Modalmatrix
W_{elas}, W_{piez}, W_{elek}	Energiedichte der elastischen Formänderung, der piezoelektrischen Kopplung und des elektrischen Feldes
$X_{\mu\nu}^{AB}$	Phasenkonzentration für die Größe $A_\mu \in \{S_\mu, T_\mu, E_\mu, D_\mu\}$ infolge einer Einheitsbeanspruchung $\bar{B}_\nu^{\mathrm{I}} \in \{\bar{S}_\nu^{\mathrm{I}}, \bar{E}_\nu^{\mathrm{I}}\}$
$\boldsymbol{Y}$	Deskriptormatrix des Zustandsraummodells
	Lateinische Kleinbuchstaben
b	Länge, Elektrodenabstand
c_{ijkl}^{D}, $c_{\mu\nu}^{\mathrm{D}}$, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{D}}$	elastische Steifigkeit bei konstanter elektrischer Flussdichte, Komponenten und Matrix
c_{ijkl}^{E}, $c_{\mu\nu}^{\mathrm{E}}$, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{E}}$	elastische Steifigkeit bei konstantem elektrischen Feld, Komponenten und Matrix
$\bar{c}_{ijkl}^{\mathrm{E}}$, $\bar{c}_{\mu\nu}^{\mathrm{E}}$, $\bar{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{E}}$	effektive (gemittelte) elastische Steifigkeit bei konstantem elektrischen Feld, Komponenten und Matrix
d_{kij}, $d_{k\mu}$	piezoelektrische Verzerrungskonstanten, Komponenten der piezoelektrischen Kopplung entsprechend Gleichung (2.13)
e_{kij}, $e_{k\mu}$,$\boldsymbol{e}$	piezoelektrische Spannungskonstanten, Komponenten der piezoelektrischen Kopplung entsprechend Gleichung (2.9) und Matrix
$\bar{e}_{k\mu}$,$\bar{\boldsymbol{e}}$	effektive (gemittelte) piezoelektrische Spannungskonstanten, Komponenten und Matrix

Notation	**Beschreibung**
f_i	äußere volumenbezogene Kraft, Komponenten
$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{LE}}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{PE}}$	Vektor der Eingangsgrößen des Zustandsraummodells bei Ladungserregung und bei Potentialerregung
$\boldsymbol{f}_{\mathrm{io}}$	Vektor der tatsächlichen Eingangsgrößen des Zustandsraummodells
g, g_{m}, g_{e}	Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamt–(FE)–modells, Anzahl der mechanischen und der elektrischen DOF
g_{kij}, $\boldsymbol{g}$	Komponenten der piezoelektrischen Kopplung entsprechend Gleichung (2.15) und Matrix
h_{kij}, $\boldsymbol{h}$	Komponenten der piezoelektrischen Kopplung entsprechend Gleichung (2.11) und Matrix
$l_{\mathrm{EZ},i}$	Länge, Abmessung der EZ in der Koordinatenrichtung i
n_i	Komponenten des auswärts gerichteten Normaleneinheitsvektors
p_i^{o}	Druckrandbedingung
$\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}$, $\boldsymbol{q}_{\mathrm{s}}$	Vektor der generalisierten Koordinaten der dynamischen (modalen) und statischen Moden
$\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r}$	reduzierter Vektor der modalen Koordinaten
r	Anzahl der im reduzierten Modell berücksichtigten Eigenwerte
s_{ijkl}^{D}	elastische Nachgiebigkeit bei konstanter elektrischer Flussdichte, Komponenten
s_{ijkl}^{E}	elastische Nachgiebigkeit bei konstantem elektrischen Feld, Komponenten
u, u_i, $\boldsymbol{u}$	Verschiebung (mechanischer Freiheitsgrad), Komponenten und Vektor
$\boldsymbol{u}_{\mathrm{elem}}$	Vektor der (Knoten)–Verschiebungen eines finiten Elementes
u_i^{o}	Verschiebungsrandbedingung
$\boldsymbol{u}_{\mathrm{io}}$	Vektor der Verschiebungen, die als tatsächliches Ausgangssignal betrachtet werden
$\mathfrak{v}$, $\overset{\mathrm{c}}{\mathfrak{v}}$, $\overset{\mathrm{o}}{\mathfrak{v}}$	Eigenvektor des elektrisch kurzgeschlossenen Systems und des elektrisch offenen Systems
v, v_{m}, v_{e}	Anzahl der Eingangsgrößen des Zustandsraummodells, Anzahl der mechanischen und elektrischen Eingangsgrößen
w, w_{m}, w_{e}	Anzahl der Ausgangsgrößen des Zustandsraummodells, Anzahl der mechanischen und elektrischen Ausgangsgrößen
$\boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{x}}$	Ortsvektor, Ortsvektor im homogenisierten Modell
$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{LE}}$, $\boldsymbol{y}_{\mathrm{PE}}$	Vektor der Ausgangsgrößen des Zustandsraummodells bei Ladungserregung und bei Potentialerregung
$\boldsymbol{y}_{\mathrm{io}}$	Vektor der tatsächlichen Ausgangsgrößen des Zustandsraummodells
$\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}_r$	Vektor der Zustandsgrößen des Zustandsraummodells, reduzierter Vektor der Zustandsgrößen
	Griechische Großbuchstaben
Γ, Γ_{u}, Γ_{T}, Γ_{ϕ}, Γ_{D}	Oberfläche (Rand) mit Verschiebungs-, Spannungs-, Potential- und Ladungsrandbedingung

Notation	Beschreibung
$\boldsymbol{\Lambda}$, $\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}}$, $\overset{o}{\boldsymbol{\Lambda}}$, $\boldsymbol{\Lambda}_r$	Spektralmatrix (Diagonalmatrix der Eigenwerte) des elektrisch kurzgeschlossenen Systems und des elektrisch offenen Systems, reduzierte Spektralmatrix
Ω	Volumen, Körper
	Griechische Kleinbuchstaben
β_{ik}^{S}, $\boldsymbol{\beta}^{S}$	Komponenten der reziproken Permittivität bei konstanter mechanischer Dehnung und Matrix
β_{ik}^{T}	Komponenten der reziproken Permittivität bei konstanter mechanischer Spannung
ε, ε_r	absolute und relative Permittivität
ε_0	elektrische Feldkonstante
ε_{ik}^{S}, $\boldsymbol{\varepsilon}^{S}$	Permittivität (dielektrische Leitfähigkeit) bei konstanter mechanischer Verzerrung, Komponenten und Matrix
$\bar{\varepsilon}_{ik}^{S}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{S}$	effektive (gemittelte) Permittivität bei konstanter mechanischer Verzerrung, Komponenten und Matrix
ε_{ik}^{T}	Permittivität (dielektrische Leitfähigkeit) bei konstanter mechanischer Spannung, Komponenten
λ, $\overset{c}{\lambda}$, $\overset{o}{\lambda}$	Eigenwert des elektrisch kurzgeschlossenen Systems und des elektrisch offenen Systems
ω	Eigenkreisfrequenz
ϕ, $\boldsymbol{\phi}$	elektrisches Potential (elektrischer Freiheitsgrad), Skalar und Vektor der (Knoten)–Potentiale
$\boldsymbol{\phi}_a$, $\boldsymbol{\phi}_i$	Vektor der aktiven Potentiale an den Elektroden und der inneren Potentiale
$\boldsymbol{\phi}_{io}$	Vektor der elektrischen Potentiale, die als tatsächliches Ein- bzw. Ausgangssignal betrachtet werden
ϕ^{o}	Potentialrandbedingung
ϱ	Dichte
σ^{o}	Randbedingung für die Oberflächenladungsdichte
	Obere Indizes
o	Randbedingung
i	Einheitsbeanspruchung, Einheitslast
$'$	transponiert
	Untere Indizes
a	aktiv
d	dynamisch, auf die modalen Moden bezogen
elas	elastisch
elek	elektrisch

Notation	**Beschreibung**
elem	elementbezogen, elementweise
i	innen
io	tatsächliche Ein- und Ausgangsgrößen (Input/Output)
LE	Ladungserregung
PE	Potentialerregung
piez	piezoelektrisch
rem	remanent
r	reduziert
s	statisch, auf die statischen Moden bezogen
	Textliche Abkürzungen
CAD	›Computer Aided Design‹, rechnergestützter Entwurf
DOF	Freiheitsgrade (›degrees of freedom‹)
EZ	Einheitszelle
EZ_{homo}	homogenes Materialvolumen, das den Dimensionen der inhomogenen Einheitszelle entspricht
FE	Finite–Elemente–Methode/Modell
MFC	›Macro Fiber Composite‹ Aktoren/Sensoren
PMM	Piezo–Metall–Modul
PZT	Blei–Zirkonat–Titanat (›Plumbum Zirconate Titanate‹)
SFB/TRR 39	Sonderforschungsbereich/Transregio 39 »Großserienfähige Produktionstechnologien für leichtmetall- und faserverbundbasierte Komponenten mit integrierten Piezosensoren und -aktoren« PT–PIESA, gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft
ZR	Zustandsraum

Begriffserklärungen

›Active Fiber Composites‹ (AFC) sind eine Form von flächigen Piezokompositmodulen mit zylindrischen Piezofasern.

Blei–Zirkonat–Titanat ist der derzeit technisch wichtigste piezokeramische Werkstoff für aktorische Anwendungen. Er wird durch einen Verbund von Blei–Zirkonat und Blei–Titanat gebildet. Je nach Mischungsverhältnis und Dotierung können die dielektrischen und piezoelektrischen Eigenschaften in einem gewissen Bereich eingestellt werden. Basierend auf der unterschiedlichen Domänenwandbeweglichkeit werden harte und weiche PZT–Werkstoffe unterschieden.

Curie–Temperatur ist die Temperaturgrenze im Phasendiagramm ferroelektrischer Materialien, die ferroelektrische Eigenschaften (unterhalb der Curie–Temperatur) und paraelektrischen (oberhalb der Curie–Temperatur) trennt.

Deskriptor–System bezeichnet eine allgemeine Formulierung von differential–algebraischen Systemen. Im Vergleich zur klassischen Zustandsraumdarstellung tritt eine weitere Matrix, die Deskriptor–Matrix $\boldsymbol{Y}$ auf: $\boldsymbol{Y}\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}$.
Meist wird die Desktriptormatrix mit $\boldsymbol{E}$ bezeichnet. In dieser Abhandlung würde dies mit der Wahl des Symbols für den Vektor des elektrischen Feldes kollidieren.

DuraAct–Flächenwandler sind eine Form von flächigen Piezokompositmodulen mit monolithischer Piezoplatte als piezoelektrischem Basiselement.

Einsteinsche Summenkonvention ist eine Konvention zur vereinfachten Schreibung von Summen. Sie besagt, dass über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produkts summiert wird. So gilt: $\boldsymbol{A}_{ik} \cdot \boldsymbol{B}_{kj} \mathrel{\widehat{=}} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ik} \cdot \boldsymbol{B}_{kj}$

Ferroelektrizität beschreibt die Eigenschaft von Festkörpern, ihre spontane Polarisation zu ändern, wenn ein äußeres elektrisches Feld angelegt wird.

Homogenisierung bezeichnet allgemein das Vorgehen zur Bestimmung effektiver (gemittelter) Materialparameter inhomogener Verbundstrukturen.

Konzentrierte Parameter bilden kontinuierliche Systeme durch singuläre Modellelemente wie z. B. Punktmasse, Feder- und Dämpferelement ab.

Lokalisierung bezeichnet das Vorgehen zur Bestimmung von Beanspruchungen von Verbundkomponenten auf der Grundlage von Beanspruchungen, die mit effektiven (gemittelten) Materialparametern berechneten wurden.

›Macro Fiber Composite‹ Aktoren/Sensoren (MFC) sind eine Form von flächigen Piezokompositmodulen aus prismatischen Piezofasern bzw. -stäbchen mit rechteckiger Querschnittsfläche der Piezoelemente.

Modellreduktion bezeichnet das allgemeine Verfahren zur Ableitung von Modellen mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden, Zustandsvariablen etc. für einen spezialisierten Anwendungsfall aus wesentlich umfangreicheren, universelleren und aufwendigeren Modellen.

Perowskit–Struktur benennt man die Kristallstruktur von PZT und gleichartiger Werkstoffe vom Typ ABX_3. Der Name leitet sich von Perowskit (Kalzium–Titan–Oxid), einem Vertreter dieses Kristalltyps her. Die Perowskit–Struktur tritt sowohl kubisch als auch in verzerrter Form (tetragonal, rhomboedrisch) auf [Bergmann 2008, Abschnitt D 1.1.3.1].

Piezoelektrizität beschreibt die Eigenschaft von Festkörpern, eine elektrische Ladung zu erzeugen, wenn diese Körper verformt werden.

Polarisation bezeichnet in dieser Abhandlung den Zustand der Kristallstruktur, bei dem elektrische Dipole auftreten.

Polarisierung bezeichnet in dieser Abhandlung den Vorgang, der zur Ausbildung einer remanenten Polarisation des polykristallinen Materials führt.

Pyroelektrizität beschreibt die Eigenschaft von Festkörpern, eine elektrische Ladung zu erzeugen, wenn diese Körper einer Temperaturänderung ausgesetzt werden.

Singulärwertzerlegung (›Singular Value Decomposition‹) ist eine faktorielle Zerlegung einer Matrix $\boldsymbol{M}$, so dass gilt: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{V}$. Die Matrizen $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ sind unitäre Matrizen, sie bestehen aus orthogonalen komplexen Vektoren. Die Diagonalwerte der reellen Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ heißen Singulärwerte. Nach einer Singulärwertzerlegung können z. B. die betragsmäßig kleinsten Singulärwerte und die zugeordneten Matrixzeilen bzw. -spalten eliminiert werden.

Voigtsche Notation ist eine Darstellung symmetrischer Tensoren als Matrizen bzw. Vektoren. Dabei wird die Anzahl der verwendeten Richtungsindizes reduziert ($11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, $23 \rightarrow 4$, $31 \rightarrow 5$, $12 \rightarrow 6$).

Die Schubkomponenten des Verzerrungstensors S_{ij} werden mit einem Faktor 2 in die üblicherweise verwendeten technischen Gleitungen überführt. Für den Verzerrungsvektor $\boldsymbol{S}' = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)$ gilt folgende Zuordnung der tensoriellen Komponenten S_{ij} zu den vektoriellen Komponenten S_μ: $S_{11}=S_1$, $S_{22}=S_2$, $S_{33}=S_3$, $2S_{23}=S_4$, $2S_{13}=S_5$, $2S_{12}=S_6$.

Zustandsraum bezeichnet eine Möglichkeit der Modellierung dynamischer Systeme mit Hilfe eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Anhang

Anhang A

Relationen der elektro–elastischen Materialparameter

Die Materialparameter der vier gleichwertigen Beschreibungen für lineares piezoelektrisches Materialverhalten (2.9)/(2.10) bis (2.15)/(2.16) können ineinander überführt werden. In diesem Anhang werden die Materialgleichungen und die Umrechnungsbeziehungen für die Matrixdarstellung auf Basis der Voigtschen Notation zusammengefasst:

Materialgleichungen

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}} \cdot \boldsymbol{S} - \boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{A.1}$$

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{S} - \boldsymbol{h}' \cdot \boldsymbol{D} \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{S}} \cdot \boldsymbol{D} \tag{A.2}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{\mathrm{E}} \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{d}' \cdot \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}^{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{g}' \cdot \boldsymbol{D} \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D} \tag{A.4}$$

Materialparameterbeziehungen

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{E}} = \left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{E}}\right)^{-1} \qquad \boldsymbol{s}^{\mathrm{D}} = \left(\boldsymbol{c}^{\mathrm{D}}\right)^{-1} \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{S}} = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{S}}\right)^{-1} \qquad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \tag{A.6}$$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{s}^{\mathrm{E}} \tag{A.7}$$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{S}} \cdot \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{d} \tag{A.8}$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{D}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{E}} + \boldsymbol{e}' \cdot \boldsymbol{h} \tag{A.9}$$

Mit diesem Gleichungssatz können ausgehend von der Materialbeschreibung mit den freien Variablen Verzerrung S und elektrische Feldstärke E alle Materialparameter der alternativen Materialbeschreibungen ermittelt werden.

Anhang B

Einheitszelle mit inneren Elektroden

In diesem Anhang wird ein eindimensionaler Verbund aus zwei piezoelektrischen Komponenten mit inneren Elektroden betrachtet. Diese Topologie entspricht z. B. dem prinzipiellen Aufbau von Piezostapelaktoren bzw. dem prinzipiellen Aufbau der Piezo–Metall–Module des SFB/TRR PT–PIESA.

Anhand dieses Verbundes werden die Homogenisierungsmethode auf Basis gemittelter Beanspruchungsgrößen, wie sie in der Literatur eingesetzt wird [z. B. Berger et al. 2006; Trindade et al. 2011], und die Homogenisierungsmethode auf Basis der elektrischen Enthalpie, wie sie in Kapitel 4 vorgestellt wurde, vergleichend diskutiert (Abschnitt B.1).

Im Abschnitt B.2 wird gezeigt, dass für einen Verbund aus materialidentischen Komponenten mit inneren Elektroden im Allgemeinen die effektiven Materialparameter $\bar{c}^{\mathrm{E}}$, $\bar{e}$ und $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ nicht den tatsächlichen Materialparametern c^{E}, e und ε^{S} entsprechen können.

B.1 Vergleich der Homogenisierungsansätze

Entsprechend Bild B.1 wird eine EZ mit:

- piezoelektrischen Komponenten Ω_1 und Ω_2,
- innen liegenden Elektroden ($l_{\mathrm{EZ}} - b_1 = b_2,\ b_2 > 0$) und
- Periodizität des elektrischen Feldes an den Stirnseiten A

eindimensional betrachtet. Die Indizierung bezieht sich in diesem Anhang dementsprechend nicht auf Richtungskomponenten, sondern auf die Bereiche Ω_1 und Ω_2.

Mechanik:

Die Einprägung der mechanischen Verzerrung erfolgt für die Homogenisierung durch Vorgabe von Verschiebungsdifferenzen an den gegenüberliegenden Rändern der EZ (vgl. Abschnitt 4.2.3). Diese Verschiebungsdifferenzvorgabe entspricht der für piezoelektrische Verbunde erweiterten Hill–Mandel–Bedingung nach Hori et al. [1998] bzw. He [2004] (s. Gleichung (3.2)). Folglich sind für die mechanischen Lastfälle die Homogenisierung auf Basis gemittelter Beanspruchungsgrößen und die Homogenisierung auf Basis der elektrischen Enthalpie äquivalent.

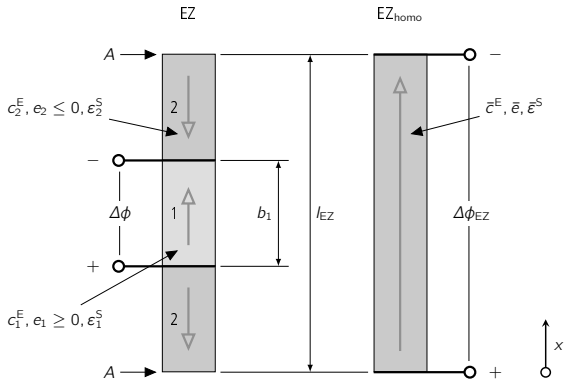


Bild B.1: *Einheitszelle mit inneren Elektroden. (Die Vorzeichen der piezoelektrischen Konstanten entsprechen der Polarisationsrichtung der Bereiche Ω_1 und Ω_2.)*

Elektrik:

Die Einprägung des elektrischen Feldes muss für die inhomogene EZ mit inneren Elektroden durch Potentialvorgabe an diesen inneren Elektroden erfolgen, damit die reale Feldverteilung abgebildet wird. Diese Potentialvorgabe an den inneren Elektroden in Verbindung mit den Periodizitätsbedingungen an den Rändern der EZ entspricht nicht der für piezoelektrische Verbunde erweiterten Hill–Mandel–Bedingung. Dementsprechend ist nicht zu erwarten, dass die Homogenisierung auf Basis gemittelter Beanspruchungsgrößen und die Homogenisierung auf Basis der elektrischen Enthalpie zu gleichen effektiven Materialkennwerten führen. Dies wird im Folgenden demonstriert.

Ermittlung der Beanspruchungsgrößen:

Das elektrische Feld in den Bereichen Ω_1 und Ω_2 ergibt sich unmittelbar aus der äußeren Potentiallast $\Delta\phi$:

$$E_1 = \frac{\Delta\phi}{b_1} \quad \text{und} \quad E_2 = -\frac{\Delta\phi}{b_2} \quad . \tag{B.1}$$

Die Verzerrungen S_1/S_2 ergeben sich aus der Gesamtverzerrung $\bar{S}$ und der Spannungsgleichheit in beiden Bereichen. Für die Spannung wird entsprechend dem piezoelektrischen Materialgesetz (2.23) die Abhängigkeit von Verzerrung und elektrischem Feld ver-

wendet. Das Vorzeichen des piezoelektrischen Spannungsanteils im Bereich Ω_2 ergibt sich entsprechend der negativen Ausrichtung des elektrischen Feldes E_2:

$$b_1 S_1 + b_2 S_2 = l_{EZ} \bar{S} \tag{B.2}$$

$$c_1^E S_1 - \frac{e_1 \Delta\phi}{b_1} = c_2^E S_2 + \frac{e_2 \Delta\phi}{b_2} \quad . \tag{B.3}$$

Daraus folgt[18]:

$$S_1 = \frac{e_1 b_2 + e_2 b_1}{b_1 (c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \Delta\phi + \frac{c_2^E (b_2 + b_1)}{(c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \bar{S} \tag{B.4}$$

$$S_2 = -\frac{e_1 b_2 + e_2 b_1}{b_2 (c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \Delta\phi + \frac{c_1^E (b_2 + b_1)}{(c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \bar{S} \tag{B.5}$$

und daraus abgeleitet:

$$D_1 = \frac{c_1^E \varepsilon_1^S b_2 + {e_1}^2 b_2 + c_2^E \varepsilon_1^S b_1 + e_1 e_2 b_1}{b_1 (c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \Delta\phi + \frac{c_2^E e_1 (b_2 + b_1)}{(c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \bar{S} \tag{B.6}$$

$$D_2 = -\frac{c_1^E \varepsilon_2^S b_2 + e_1 e_2 b_2 + c_2^E \varepsilon_2^S b_1 + {e_2}^2 b_1}{b_2 (c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \Delta\phi + \frac{c_1^E e_2 (b_2 + b_1)}{(c_1^E b_2 + c_2^E b_1)} \bar{S} \tag{B.7}$$

$$T_1 = T_2 = \frac{c_1^E e_2 - c_2^E e_1}{c_1^E b_2 + c_2^E b_1} \Delta\phi + \frac{c_1^E c_2^E (b_2 + b_1)}{c_1^E b_2 + c_2^E b_1} \bar{S} \quad . \tag{B.8}$$

Damit stehen alle elektrischen und mechanischen Beanspruchungsgrößen für beide Bereiche Ω_1 und Ω_2 in Abhängigkeit von der äußeren Potentiallast $\Delta\phi$ und der äußeren Verzerrung $\bar{S}$ zur Verfügung und können für die jeweiligen Lastfälle in Bezug auf die gemittelten Beanspruchungsgrößen bzw. die elektrische Enthalpie ausgewertet werden.

Die mittleren Beanspruchungsgrößen werden mit:

$$\bar{Z} = \frac{Z_1 b_1 + Z_2 b_2}{b_1 + b_2} \qquad \text{mit: } Z \in \{E, S, D, T\} \tag{B.9}$$

bestimmt, die elektrische Enthalpiedichte der eindimensionalen EZ mit:

$$H = \frac{1}{b_1 + b_2} \left[(T_1 S_1 - D_1 E_1) b_1 + (T_2 S_2 - D_2 E_2) b_2 \right] \quad . \tag{B.10}$$

[18] Auf die Darstellung der algebraischen Herleitung der Beziehungen wird hier verzichtet. Eine Überprüfung kann ausgehend von den angegebenen Gleichungen leicht vorgenommen werden.

Effektive Steifigkeit $\bar{c}^{\mathrm{E}}$ (mechanischer Lastfall, Index $_{\mathrm{me}}$)

Für den mechanischen Lastfall gilt:

$$\Delta\phi = 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{S} = \bar{S}^{\mathrm{I}} = 1 \quad . \tag{B.11}$$

Für die effektive Steifigkeit $\bar{c}^{\mathrm{E}}$ wird sowohl auf Basis der gemittelten Beanspruchungsgrößen (Index $_{\mathrm{avg}}$) als auch auf Basis der elektrischen Enthalpie (Index $_{\mathrm{enth}}$) die gleiche Abhängigkeit ermittelt:

$$\bar{c}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{avg}} = f(\bar{T}_{\mathrm{me}}, \bar{S}_{\mathrm{me}}) = \frac{\bar{T}_{\mathrm{me}}}{\bar{S}_{\mathrm{me}}} = \frac{c_1^{\mathrm{E}}\, c_2^{\mathrm{E}}\, (b_1 + b_2)}{c_1^{\mathrm{E}}\, b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\, b_1} \tag{B.12}$$

$$\bar{c}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{enth}} = f(H_{\mathrm{me}}) = 2\,\frac{H_{\mathrm{me}}}{(\bar{S}^{\mathrm{I}})^2} = \frac{c_1^{\mathrm{E}}\, c_2^{\mathrm{E}}\, (b_1 + b_2)}{c_1^{\mathrm{E}}\, b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\, b_1} \quad . \tag{B.13}$$

Effektive Permittivität $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ (elektrischer Lastfall, Index $_{\mathrm{el}}$)

Für den elektrischen Lastfall gilt:

$$\Delta\phi \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{S} = 0 \quad . \tag{B.14}$$

Die mittlere elektrische Feldstärke $\bar{E}$ ist für die EZ aufgrund der Periodizität des Potentials identisch Null und zwar unabhängig von der konkreten Potentialvorgabe an den inneren Elektroden. Eine Ermittlung der effektiven Permittivität $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ ist demzufolge auf Basis der gemittelten Beanspruchungsgrößen nicht angebracht:

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{avg}} = f(\bar{D}_{\mathrm{el}}, \bar{E}_{\mathrm{el}}) = \frac{\bar{D}_{\mathrm{el}}}{\bar{E}_{\mathrm{el}}} \qquad \to \infty \tag{B.15}$$

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{enth}} = f(H_{\mathrm{el}}) = -2\,\frac{H_{\mathrm{el}}}{\left(\frac{\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}}{b_1+b_2}\right)^2} = k\,\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}}\right)^2 \tag{B.16}$$

$$\text{mit: } k = \frac{(b_2+b_1)\,(c_1^{\mathrm{E}}\,\varepsilon_1^{\mathrm{S}}\,b_2^2 + {e_1}^2\,b_2^2 + c_1^{\mathrm{E}}\,\varepsilon_2^{\mathrm{S}}\,b_1\,b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\,\varepsilon_1^{\mathrm{S}}\,b_1\,b_2 + 2\,e_1\,e_2\,b_1\,b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\,\varepsilon_2^{\mathrm{S}}\,b_1^2 + {e_2}^2\,b_1^2)}{b_1\,b_2\,(c_1^{\mathrm{E}}\,b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\,b_1)} \quad .$$

Wie in Abschnitt 4.2.3 dargelegt wurde, ist die zu ermittelnde effektive Permittivität $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ abhängig von dem (frei wählbaren) Verhältnis der Potentialdifferenzen an der inhomogenen und an der homogenen EZ.

Effektive piezoelektrische Konstante $\bar{e}$ (gekoppelter Lastfall, Index $_{\mathrm{ko}}$)

Die effektive piezoelektrische Spannungskonstante $\bar{e}$ wird bei der Homogenisierung auf Basis der gemittelten Beanspruchungsgrößen im Allgemeinen nicht mit einem gekoppelten Lastfall berechnet, sondern aus der elektrischen Reaktion ($\bar{D}$) des mechanischen

Lastfalls ($\bar{S}$) bzw. aus der mechanischen Reaktion ($\bar{T}$) des elektrischen Lastfalls ($\bar{E}$). Aufgrund der zu Null verschwindenden mittleren elektrischen Feldstärke des elektrischen Lastfalls ($\bar{E}_{\mathrm{el}} = 0$) ist die Bestimmung der effektiven piezoelektrischen Spannungskonstante aus der mechanischen Reaktion des elektrischen Lastfalls hier nicht angebracht, sondern erfolgt mit dem mechanischen Lastfall:

$$\bar{e}_{\mathrm{avg}} = f(\bar{D}_{\mathrm{me}}, \bar{S}_{\mathrm{me}}) = \frac{\bar{D}_{\mathrm{me}}}{\bar{S}_{\mathrm{me}}} = \frac{c_1^{\mathrm{E}}\, e_2\, b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\, e_1\, b_1}{c_1^{\mathrm{E}}\, b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\, b_1} \quad . \tag{B.17}$$

Bei der Homogenisierung auf Basis der elektrischen Enthalpie wird der gekoppelte Lastfall ausgewertet. Für den gekoppelten Lastfall wird angesetzt:

$$\Delta\phi \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{S} = \bar{S}^{\mathrm{I}} = 1 \quad . \tag{B.18}$$

Bei der Bestimmung der effektiven piezoelektrischen Spannungskonstante aus der Enthalpie der EZ sind die bereits ermittelte effektive Steifigkeit $\bar{c}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{enth}}$ und die effektive Permittivität $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}_{\mathrm{enth}}$ zu berücksichtigen.

$$\bar{e}_{\mathrm{enth}} = f(H_{\mathrm{ko}}) = -\frac{H_{\mathrm{ko}} - \frac{1}{2}\,\bar{c}^{\mathrm{E}}\,\bar{S}^{\mathrm{I}2} + \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}\,\left(\frac{\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}}{b_1+b_2}\right)^2}{\bar{S}^{\mathrm{I}}\,\left(\frac{\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}}{b_1+b_2}\right)} \quad , \tag{B.19}$$

$$\bar{e}_{\mathrm{enth}} = \frac{(b_2+b_1)\,(c_2^{\mathrm{E}}\, e_1 - c_1^{\mathrm{E}}\, e_2)}{(c_1^{\mathrm{E}}\, b_2 + c_2^{\mathrm{E}}\, b_1)}\,\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}}\right) \quad . \tag{B.20}$$

Für die effektive piezoelektrische Spannungskonstante $\bar{e}$ wird auf Basis der gemittelten Beanspruchungsgrößen ($\bar{e}_{\mathrm{avg}}$) eine andere Abhängigkeit ermittelt als auf Basis der elektrischen Enthalpie ($\bar{e}_{\mathrm{enth}}$). Die Homogenisierung auf Basis der gemittelten Beanspruchungsgrößen liefert auch für den auswertbaren mechanischen Lastfall infolge der inneren Elektroden und der Periodizität an den Stirnseiten ein inkonsistentes Ergebnis. Für die Homogenisierung auf Basis der Enthalpie wird die in Abschnitt 4.2.3 dargestellte Abhängigkeit von dem (frei wählbaren) Verhältnis der Potentialdifferenzen an der inhomogenen und an der homogenen EZ ebenso wie für die effektive Permittivität $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ berücksichtigt.

Schlußfolgerung:

Bei Ermittlung der effektiven Materialparameter durch direkte Auswertung der elektrischen Enthalpie kann die energetische Äquivalenz von inhomogener und homogener EZ auch für piezoelektrische Verbunde mit inneren Elektroden erreicht werden.

Die Ermittlung der effektiven Materialparameter auf Grundlage gemittelter Beanspruchungsgrößen führt für piezoelektrische Verbunde mit inneren Elektroden zu inkonsis-

tenten Ergebnissen. Diese (in der Literatur verwendete) Methode müsste so modifiziert werden, dass die effektive dielektrische Verschiebung als Maß für die Ladung nicht als Mittelwert der Volumenanteile, sondern als Summe über das Gesamtvolumen bestimmt wird[19]. Diese physikalisch begründete, mathematisch aber nicht motivierte, separate Behandlung der Ladungsgröße führt auf die durch [Deraemaeker et al. 2010] verwendeten Makrovariablen für die elektrischen Größen an den Elektroden (vgl. Abschnitt 3.1).

B.2 Verbund aus materialgleichen Komponenten

Im diesem Abschnitt wird gezeigt, dass für einen Verbund aus materialidentischen Komponenten mit inneren Elektroden im Allgemeinen die effektiven Materialparameter $\bar{c}^{\mathrm{E}}$, $\bar{e}$ und $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ nicht den tatsächlichen Materialparametern c^{E}, e und ε^{S} entsprechen können. Dazu wird die im Abschnitt B.1 eingeführte EZ mit materialidentischen Komponenten betrachtet. Es gelte:

$$c_1^{\mathrm{E}} = c_2^{\mathrm{E}} = c^{\mathrm{E}} \quad , \qquad e_1 = |e_2| = e \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_1^{\mathrm{S}} = \varepsilon_2^{\mathrm{S}} = \varepsilon^{\mathrm{S}} \quad . \tag{B.21}$$

Aus den Gleichungen (B.13), (B.16) und (B.20) folgt für die Vereinbarung nach (B.21) unmittelbar:

- aus dem mechanischen Lastfall:

$$\bar{c}^{\mathrm{E}} = c^{\mathrm{E}} \quad , \tag{B.22}$$

- aus dem elektrischen Lastfall:

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}} = \left(\frac{(b_1 + b_2)^2}{b_1\, b_2}\, \varepsilon^{\mathrm{S}} + \frac{(b_2 - b_1)^2}{b_1\, b_2}\, \frac{e^2}{c^{\mathrm{E}}} \right) \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}} \right)^2 \quad , \tag{B.23}$$

- aus dem gekoppelten Lastfall:

$$\bar{e} = 2\, e \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}} \right) \quad . \tag{B.24}$$

Fragestellung:

Unter welchen Bedingungen entsprechen die effektiven Materialparameter $\bar{c}^{\mathrm{E}}$, $\bar{e}$ und $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ den tatsächlichen Materialparametern c^{E}, e und ε^{S} des Verbundes mit materialidentischen Komponenten?

[19] Hinweis von Herrn Prof. Thomas Sattel (Technische Universität Ilmenau).

Für die mechanische Steifigkeit c^{E} ist die Entsprechung von effektivem und tatsächlichem Wert gegeben (s. Gleichung (B.22)).

Die Gleichheit von effektivem und tatsächlichem Wert der piezoelektrischen Spannungskonstante e kann durch den Ansatz $\Delta\phi_{\mathrm{EZ}} = 2\,\Delta\phi$ erreicht werden (s. Gleichung (B.24)).

Für die Gleichheit der effektiven und tatsächlichen Permittivitätskonstante ε^{S} muss neben der Bedingung $\Delta\phi_{\mathrm{EZ}} = 2\,\Delta\phi$ auch gelten: $b_2 = b_1$ (s. Gleichung (B.23)).

Antwort:

Für beliebig innerhalb der EZ positionierte Elektroden können die effektiven Materialparameter $\bar{c}^{\mathrm{E}}$, $\bar{e}$ und $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ eines materialidentischen Verbundes nur unter speziellen Voraussetzungen, d. h. im Allgemeinen nicht, den tatsächlichen Materialparametern c^{E}, e und ε^{S} entsprechen.

Erläuterung:

Nur wenn beide Bereiche b_1 und b_2 gleich groß sind, sind die entsprechenden elektrischen Felder in diesen Bereichen ebenfalls gleich. Dies führt wegen ebenfalls gleicher mechanischer Spannung zu gleichen Verzerrungen in den Bereichen. Das Verhalten der gesamten EZ entspricht in diesem Fall zwei identischen Körpern halber Länge $b_1 = b_2 = l_{\mathrm{EZ}}/2$.

Sobald $b_1 \neq b_2$ gilt, unterscheiden sich die elektrischen Felder und damit die Verzerrungen in den beiden Bereichen, wobei die Verzerrungsverteilung von der Steifigkeit und der piezoelektrischen Spannungskonstante abhängig ist (s. Gleichungen (B.4) und (B.5)). Da das elektrische Feld in den piezoelektrischen Anteil der elektrischen Enthalpie linear, in den elektrischen Anteil jedoch quadratisch eingeht (vgl. Gleichungen (4.6) und (4.7)), führt dies zu einer Verschiebung der Energieanteile. Zum Beispiel wirkt für den rein elektrischen Lastfall nach außen nur der elektrische Anteil der elektrischen Enthalpiedichte ($\frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}\,\bar{E}^2$). Im Inneren der EZ treten jedoch piezoelektrische Kopplungsenergie und entsprechend mechanische Verzerrungsenergie auf. Folglich ist die effektive Permittivitätskonstante $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ abhängig von piezoelektrischer Spannungskonstante e und Steifigkeit c^{E} (s. Gleichungen (B.16) bzw. (B.23)).

Schlussfolgerung:

Die effektiven Materialparameter $\bar{e}$ und $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{S}}$ hängen sowohl vom realen Elektrodenabstand b_1 im Verhältnis zur Größe l_{EZ} der EZ als auch von der anzusetzenden Potentialdifferenz $\Delta\phi_{\mathrm{EZ}}$ an der EZ ab.

Anhang C

Neun–Knoten–Basismodell

In diesem Anhang werden Amplitudenfrequenzgänge für ein piezo–mechanisches Modell mit acht mechanischen und sieben elektrischen DOF für die Potentialerregung an einem dieser elektrischen DOF dargestellt. Es werden die Übertragungsfunktionen für alle acht Verschiebungen im Vergleich zwischen vollständiger FE–Berechnung (Modellbezeichnung `FEP`) und vollständigem modalem Zustandsraummodell (Modellbezeichnung `ZDP`) angegeben. Dies dient der Verdeutlichung, dass im Zustandsraummodell `ZDP` mit vollständigem Vektor der modalen Koordinaten $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},g_{\mathrm{m}}}$ die komplette Systeminformation enthalten ist.

Die Amplitudenfrequenzgänge für die Ladung bei Potentialerregung bzw. für das Potential bei Ladungserregung werden unmittelbar gegenübergestellt, nachdem in Abschnitt C.2 der Übergang von den Systemparametern des kurzgeschlossenen Systems zu den Parametern des offenen Systems gleichungsbezogen dargelegt wurde.

Details des zugrundeliegenden Basismodells sind der untenstehenden Abbildung zu entnehmen.

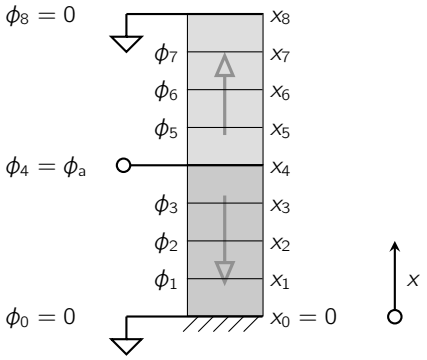


Bild C.1: *Darstellung des Neun–Knoten–Basismodells.*

C.1 Amplitudenfrequenzgänge bei Potentialerregung

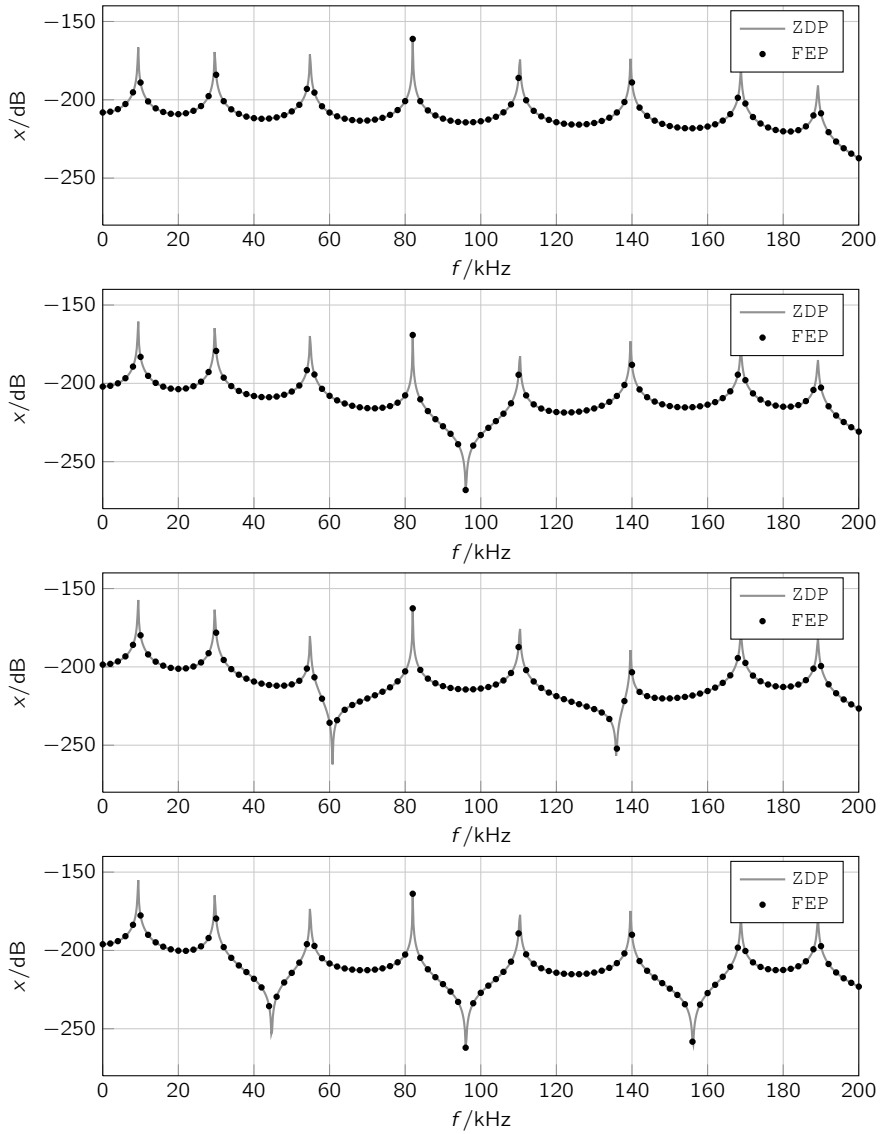


Bild C.2: *Amplitudenfrequenzgänge für die Verschiebungen bei Potentialerregung; von oben nach unten:* x_1, x_2, x_3, x_4.

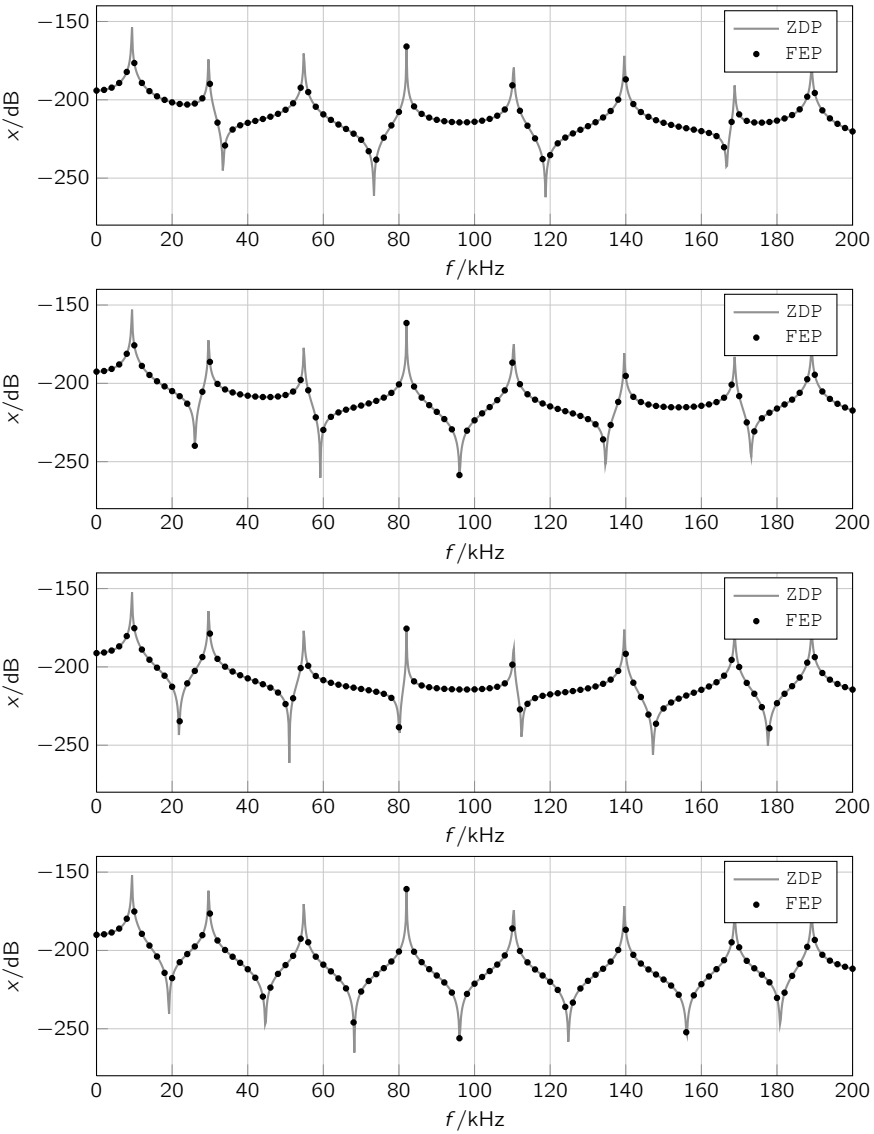


Bild C.3: *Amplitudenfrequenzgänge für die Verschiebungen bei Potentialerregung; von oben nach unten:* x_5, x_6, x_7, x_8.

C.2 Transformation der Systemparameter

In diesem Abschnitt wird durch Betrachtung der Bewegungsgleichungen für Potentialerregung (5.42) und Ladungserregung (5.54) bzw. der jeweiligen modalen Zerlegungen gezeigt, dass mit den in Abschnitt 5.4.1 verwendeten Systemparametern für die Potentialerregung (Spektralmatrix $\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}}$, Modalmatrix der Verschiebungen $\overset{c}{\mathcal{V}}_u$, Modalmatrix der Ladungen $\overset{c}{\mathcal{V}}_Q$ und Kapazitätsmatrix $\boldsymbol{K}_{\phi\phi}$) das System umfassend beschrieben ist, wenn der vollständige Modalraum betrachtet wird. Von den Systemparametern des kurzgeschlossenen Systems kann auf die Systemparameter des offenen Systems geschlossen werden. Diese Vorgehensweise ist umkehrbar. Die Systemparameter des kurzgeschlossenen Systems lassen sich auch aus den Systemparametern des offenen Systems ableiten.

$$\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}}, \overset{c}{\mathcal{V}}_u, \overset{c}{\mathcal{V}}_Q, \boldsymbol{K}_{\phi\phi} \Longleftrightarrow \overset{o}{\boldsymbol{\Lambda}}, \overset{o}{\mathcal{V}}_u, \overset{o}{\mathcal{V}}_\phi, \boldsymbol{K}_{\phi\phi}$$

Homogene Bewegungsgleichung des kurzgeschlossenen Systems (5.42):

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_{uu}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \tag{C.1}$$

$$(C.1) \Rightarrow \qquad \overset{c}{\mathcal{V}}{}'\,\boldsymbol{M}\,\overset{c}{\mathcal{V}} = \boldsymbol{I} \tag{C.2}$$

$$(C.2) \Rightarrow \qquad \boldsymbol{M} = (\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}')^{-1}\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1} \tag{C.3}$$

$$(C.1) \Rightarrow \qquad \overset{c}{\mathcal{V}}{}'\,\boldsymbol{K}_{uu}\,\overset{c}{\mathcal{V}} = \overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}} \tag{C.4}$$

$$(C.4) \Rightarrow \qquad \boldsymbol{K}_{uu} = (\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}')^{-1}\,\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}}\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1} \tag{C.5}$$

$$(5.48) \qquad \overset{c}{\mathcal{V}}_Q = \boldsymbol{K}'_{u\phi}\,\overset{c}{\mathcal{V}}_u \tag{C.6}$$

$$(C.6) \Rightarrow \qquad \boldsymbol{K}_{u\phi}\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}'_{u\phi} = (\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}')^{-1}\,\overset{c}{\mathcal{V}}_Q{}'\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\overset{c}{\mathcal{V}}_Q\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1} \tag{C.7}$$

Homogene Bewegungsgleichung des offenen Systems (5.54):

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \left(\boldsymbol{K}_{uu} - \boldsymbol{K}_{u\phi}\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\boldsymbol{K}'_{u\phi}\right)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \tag{C.8}$$

(C.8) mit (C.3)(C.5)(C.7) $\Rightarrow$ Eigenwertgleichung des offenen Systems:

$$(\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}')^{-1}\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1}\,\overset{o}{\lambda}\,\overset{o}{\mathfrak{v}}_u = \left((\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}')^{-1}\,\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}}\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1} - (\overset{c}{\mathcal{V}}_u{}')^{-1}\,\overset{c}{\mathcal{V}}_Q{}'\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\overset{c}{\mathcal{V}}_Q\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1}\right)\,\overset{o}{\mathfrak{v}}_u \tag{C.9}$$

$$\overset{o}{\lambda}\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1}\,\overset{o}{\mathfrak{v}}_u = \left(\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}} - \overset{c}{\mathcal{V}}_Q{}'\,\boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1}\,\overset{c}{\mathcal{V}}_Q\right)\,(\overset{c}{\mathcal{V}}_u)^{-1}\,\overset{o}{\mathfrak{v}}_u \tag{C.10}$$

Gleichung (C.10) ist die Eigenwertgleichung der Matrix $\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}} - \overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q}}{}' \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1} \overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q}}$, die aus den Systemparametern des kurzgeschlossenen Systems gebildet wird. Die Eigenwerte entsprechen den Eigenwerten des offenen Systems $\overset{o}{\lambda}$. Die Eigenvektoren $(\overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u}})^{-1} \overset{o}{\boldsymbol{\upsilon}}_{\mathrm{u}}$ sind eine Verknüpfung der Modalmatrix $\overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u}}$ des kurzgeschlossenen Systems und den Eigenvektoren des offenen Systems $\overset{o}{\boldsymbol{\upsilon}}_{\mathrm{u}}$. Diese können aus dieser Verknüpfung bestimmt werden.

Beim Übergang von den Parametern des kurzgeschlossenen Systems auf die Parameter des offenen Systems ist eine explizite Eigenwertzerlegung der Matrix $\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}} - \overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q}}{}' \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1} \overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q}}$ notwendig, da die Diagonalform der Spektralmatrix $\overset{c}{\boldsymbol{\Lambda}}$ des Zusatzterms $\overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q}}{}' \boldsymbol{K}_{\phi\phi}^{-1} \overset{c}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q}}$ wegen im Allgemeinen nicht erhalten bleibt.

Bild C.4 verdeutlicht, dass mit beiden Beschreibungsformen (kurzgeschlossenes und offenes System) identische Ergebnisse erhalten werden: Der Amplitudenfrequenzgang für die Ladung bei Potentialerregung entspricht dem reziproken Amplitudenfrequenzgang für das Potential bei Ladungserregung.

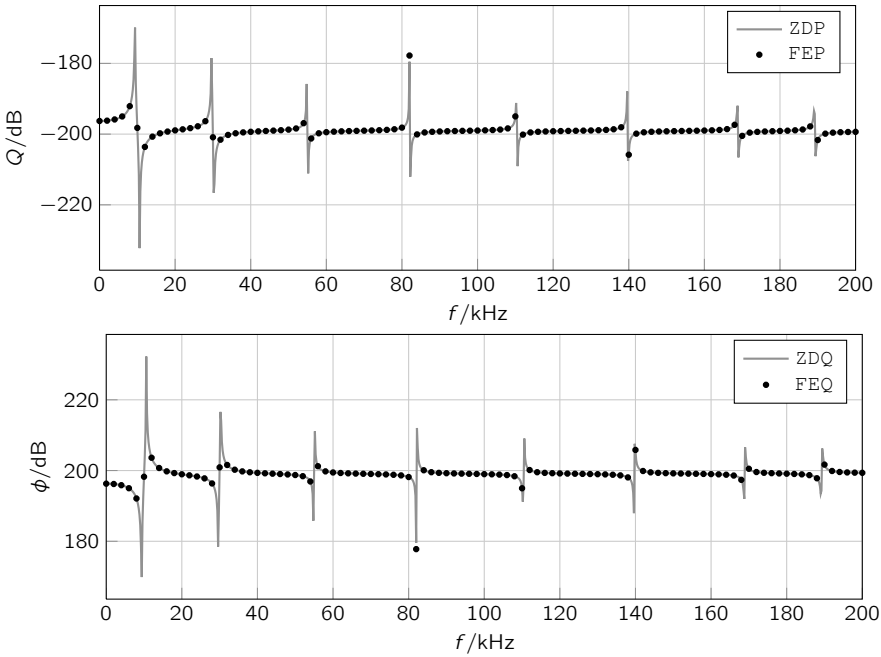


Bild C.4: *Amplitudenfrequenzgänge für das elektrische Übertragungsverhalten;*
oben: für die Ladung Q_{a} bei Potentialerregung,
unten: für das Potential ϕ_{a} bei Ladungserregung.

Anhang D

Vektoren und Matrizen der Zustandsraummodelle

Allgemeine Zustandsraumbeschreibung

$$\dot{z} = Az + Bf \tag{D.1}$$

$$y = Lz + Uf \tag{D.2}$$

Allgemeine Zustandsraumbeschreibung in Deskriptorform

$$Y\dot{z} = Az + Bf \tag{D.3}$$

$$y = Lz + Uf \tag{D.4}$$

Vollständige Zustandsraumbeschreibung auf Basis der Systemmatrizen (ZX) Gleichungen (D.1) und (D.2)

		Potentialerregung	Ladungserregung
Zustandsvektor	z	$\begin{pmatrix} u & \dot{u} \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} u & \dot{u} \end{pmatrix}'$
Eingangsvektor	f	$\begin{pmatrix} F & \phi_a \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} F & Q_a \end{pmatrix}'$
Ausgangsvektor	y	$\begin{pmatrix} u & Q_a \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} u & \phi_a \end{pmatrix}'$
Systemmatrix	A	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}\left(K_{uu} - K_{u\phi_i} K_{\phi_i\phi_i}^{-1} K'_{u\phi_i}\right) & -M^{-1}C \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -M^{-1}\left(K_{uu} - K_{u\phi} K_{\phi\phi}^{-1} K'_{u\phi}\right) & -M^{-1}C \end{pmatrix}$
Eingangsmatrix	B	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M^{-1} & -M^{-1}\left(K_{u\phi_a} - K_{u\phi_i} K_{\phi_i\phi_i}^{-1} K'_{\phi_a\phi_i}\right) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ M^{-1} & -M^{-1}\left(K_{u\phi_a} J_{\phi_a\phi_a} + K_{u\phi_i} J'_{\phi_a\phi_i}\right) \end{pmatrix}$
Ausgangsmatrix	L	$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \left(K_{u\phi_a} - K_{u\phi_i} K_{\phi_i\phi_i}^{-1} K'_{\phi_a\phi_i}\right)' & \mathbf{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\left(J_{\phi_a\phi_a} K'_{u\phi_a} + J_{\phi_a\phi_i} K'_{u\phi_i}\right) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
Durchgangsmatrix	U	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(K_{\phi_a\phi_a} - K_{\phi_a\phi_i} K_{\phi_i\phi_i}^{-1} K'_{\phi_a\phi_i}\right) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{\phi_a\phi_a} \end{pmatrix}$

Reduzierter Zustandsraum auf Basis von Eigenmoden (ZD)

Gleichungen (D.1) und (D.2)

		Potentialerregung	Ladungserregung
Zustandsvektor	$\boldsymbol{z}$	$\left(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \quad \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \right)'$	$\left(\boldsymbol{q}_{\mathrm{d},r} \quad \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d},r} \right)'$
Eingangsvektor	$\boldsymbol{f}$	$\left(\boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \right)'$	$\left(\boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \right)'$
Ausgangsvektor	$\boldsymbol{y}$	$\left(\boldsymbol{S} \quad \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}} \right)'$	$\left(\boldsymbol{S} \quad \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{a}} \right)'$
Systemmatrix	$\boldsymbol{A}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\Lambda}}_r & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ -\overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\Lambda}}_r & -\boldsymbol{C}_{\mathrm{q}} \end{pmatrix}$
Eingangsmatrix	$\boldsymbol{B}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}'_{\mathrm{u},r,\mathrm{io}} & -\overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}'_{\mathrm{Q},r,\mathrm{io}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}'_{\mathrm{u},r,\mathrm{io}} & \overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}'_{\phi,r,\mathrm{io}} \end{pmatrix}$
Ausgangsmatrix	$\boldsymbol{L}$	$\begin{pmatrix} \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{S},r,\mathrm{io}} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r,\mathrm{io}} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{c}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{Q},r,\mathrm{io}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{S},r,\mathrm{io}} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\mathrm{u},r,\mathrm{io}} & \mathbf{0} \\ \overset{\mathrm{o}}{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_{\phi,r,\mathrm{io}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
Durchgangsmatrix	$\boldsymbol{U}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{K}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{a}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{\Phi_{\mathrm{a}}\Phi_{\mathrm{a}}} \end{pmatrix}$

Reduzierter Zustandsraum auf Basis von Eigenmoden und statischen Moden ($\mathbb{ZS}$) Gleichungen (D.3) und (D.4)

		Potentialerregung	Ladungserregung
Zustandsvkt.	z	$\begin{pmatrix} q_{\mathrm{d},r} & \dot{q}_{\mathrm{d},r} & q_{\mathrm{s}} & \dot{q}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} q_{\mathrm{d},r} & \dot{q}_{\mathrm{d},r} & q_{\mathrm{s}} & \dot{q}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}'$
Eingangsvkt.	f	$\begin{pmatrix} F & \phi_{\mathrm{a}} \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} F & Q_{\mathrm{a}} \end{pmatrix}'$
Ausgangsvkt.	y	$\begin{pmatrix} S & u & Q_{\mathrm{a}} \end{pmatrix}'$	$\begin{pmatrix} S & u & \phi_{\mathrm{a}} \end{pmatrix}'$
Deskriptormtx.	Y	$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \overset{c}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} M \mathcal{P}_{\mathrm{io}} \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \mathcal{P}'_{\mathrm{io}} M \overset{c}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & 0 & \mathcal{P}'_{\mathrm{io}} M \mathcal{P}_{\mathrm{io}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \overset{o}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} M \Omega_{\mathrm{io}} \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & \Omega'_{\mathrm{io}} M \overset{o}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & 0 & \Omega'_{\mathrm{io}} M \Omega_{\mathrm{io}} \end{pmatrix}$
Systemmtx.	A	$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -\overset{c}{\Lambda}_r & -C_{\mathrm{q}} & -\overset{c}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} \overset{c}{K} \mathcal{P}_{\mathrm{io}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\mathcal{P}'_{\mathrm{io}} \overset{c}{K} \overset{c}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & 0 & -\mathcal{P}'_{\mathrm{io}} \overset{c}{K} \mathcal{P}_{\mathrm{io}} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -\overset{o}{\Lambda}_r & -C_{\mathrm{q}} & -\overset{o}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} \overset{o}{K} \Omega_{\mathrm{io}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -\Omega'_{\mathrm{io}} \overset{o}{K} \overset{o}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & 0 & -\Omega'_{\mathrm{io}} \overset{o}{K} \Omega_{\mathrm{io}} & 0 \end{pmatrix}$
Eingangsmtx.	B	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overset{c}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} & -\overset{c}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{Q},r} \\ 0 & 0 \\ \mathcal{P}'_{\mathrm{io}} & -\mathcal{P}'_{\mathrm{io}} K_{\mathrm{u}\phi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overset{o}{\mathcal{V}}{}'_{\mathrm{u},r} & \overset{o}{\mathcal{V}}{}'_{\phi,r} \\ 0 & 0 \\ \Omega'_{\mathrm{io}} & -\Omega'_{\mathrm{io}} K_{\mathrm{u}\phi} K_{\phi\phi}^{-1} \end{pmatrix}$
Ausgangsmtx.	L	$\begin{pmatrix} \overset{c}{\mathcal{V}}_{\mathrm{S},r} & 0 & \mathcal{P}_{\mathrm{S}} & 0 \\ \overset{c}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & 0 & \mathcal{P}_{\mathrm{io}} & 0 \\ \overset{c}{\mathcal{V}}_{\mathrm{Q},r} & 0 & K'_{\mathrm{u}\phi} \mathcal{P}_{\mathrm{io}} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \overset{o}{\mathcal{V}}_{\mathrm{S},r} & 0 & \Omega_{\mathrm{S}} & 0 \\ \overset{o}{\mathcal{V}}_{\mathrm{u},r} & 0 & \Omega_{\mathrm{io}} & 0 \\ \overset{o}{\mathcal{V}}_{\phi,r} & 0 & -K_{\phi\phi}^{-1} K_{\mathrm{u}\phi} \Omega_{\mathrm{io}} & 0 \end{pmatrix}$
Durchgangsmtx.	U	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & K_{\phi_{\mathrm{a}}\phi_{\mathrm{a}}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & J_{\phi_{\mathrm{a}}\phi_{\mathrm{a}}} \end{pmatrix}$

Anhang E

Generierung der Modelldaten mit dem FEM–System ANSYS

Für das FEM–System ANSYS® werden in diesem Anhang die Kommandos der internen Modellierungssprache (APDL, ›Ansys Parametric Design Language‹) angegeben, mit denen die entsprechenden Modelldaten aus der Finite–Elemente–Diskretisierung extrahiert werden können. Die angegebene Abfolge der Kommandos enthält nicht alle Details, sondern beschränkt sich auf die wesentlichen Schritte. Details der Kommandos können der entsprechenden Dokumentation [ANSYS] entnommen werden.[20] Variable Bezeichnungen bzw. Parameter werden durch *`Schrägstellung`* verdeutlicht, Ergebnisgrößen durch ***`schrägen Fettdruck`***.

Extraktion der Systemmatrizen

Verwendung entsprechend der Abschnitte 5.2/5.3

`/solu`	
`antype,modal`	Modalanalyse
`modopt,qrdamp,...`	mit Berücksichtigung der Dämpfung
`wrfull,1`	nur Systemmatrizen zusammenstellen, keine Lösung ausführen
`solve`	
`/aux2`	
`hbmat,...`	Export der Matrizen im Harwell–Boeing–Format, mit DOF–Zuordnung

Die Aufteilung der Systemmatrizen $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{M}$ in die jeweils erforderlichen Teilmatrizen $\boldsymbol{K}_{uu}$, $\boldsymbol{K}_{u\phi}$, $\boldsymbol{K}_{\phi\phi}$, $\boldsymbol{K}_{\phi_a\phi_a}$, ... erfolgt anhand der beim Matrixexport zusätzlich extrahierten Liste der DOF.

[20] Je nach eingesetztem Elementtyp werden im FEM–System ANSYS® verschiedene Bezeichnungen für die elektrische Ladung verwendet (`amps`/`chrg`). Hier wird die Bezeichnung `chrg` angegeben.

Spektral- und Modalmatrizen

Verwendung entsprechend Abschnitt 5.4.1

Das Vorgehen für ein elektrisch offenes und ein elektrisch kurzgeschlossenes System unterscheidet sich lediglich bei der Bestimmung der Ergebnisgrößen. Deshalb wird diese Unterscheidung hier nur durch separate Einschübe im Programmablauf dargestellt.

/solu	
antype,modal	Modalanalyse
modopt,lanb,...	ohne Berücksichtigung der Dämpfung
solve	
/post1	
*get,*anz_n*,node,,num,maxd	höchste definierte Knotennummer
*do,*ii*,1,*nstp*	Schleife über alle relevanten Eigenmoden
set,1,*ii*	Eigenmode laden
*get,*ff*,active,,set,freq	Eigenfrequenz auslesen
eigV(*ii*)=*ff*	und im Diagonalvektor der Spektralmatrix abspeichern
*vget,***mdlM**(1 ,*ii*),node,,u,x	Verschiebung u_x in der Modalmatrix abspeichern
*vget,***mdlM**(1+anz_n,*ii*),node,,u,y	Verschiebung u_y in der Modalmatrix abspeichern
etable,*epsx*,epto,x	elementbezogenes Ergebnis (Dehnung ε_x) abrufen
*vget,***epsM**(*1,ii*),elem,,etab,*epsx*	Dehnung in der Modalmatrix der abgeleiteten Größen abspeichern
! Gültig für: elektrisch offenes System	
*vget,***voltM**(*1,ii*),node,,volt	elektrisches Potential auslesen und in Modalmatrix des Potentials abspeichern
! Gültig für: elektrisch kurzgeschlossenes System	
cmsel,s,*iocmpE*	Komponente aller Knoten der aktiven Elektroden auswählen
nakt=ndnext(0)	
*do,*jj*,1,*anzioE*	Schleife über alle Knoten der aktiven Elektroden
*get,*qq*,node,*nakt*,rf,chrg	elektrische Ladung auslesen
chrgM(*jj,ii*)=*qq*	und in Modalmatrix der Ladungen abspeichern
nakt=ndnext(*nakt*)	
*enddo	Ende der Schleife über alle Knoten der aktiven Elektroden
*enddo	Ende der Schleife über alle relevanten Eigenmoden

Statische Ergänzungsmoden bei Potential- oder Ladungsanregung

Verwendung entsprechend Abschnitt 5.4.2

Die Unterscheidung von Potential- und Ladungsanregung erfolgt durch separate Einschübe im Programmablauf.

/solu	
antype,static	statische Analyse
cmsel,s,*elec_n*	Komponente aller Masterknoten der Elektroden
*get,*anz_elec*,node,,count	Anzahl der Masterknoten
nakt=ndnext(0)	erster Masterknoten
nsel,all	
*do,*ii*,1,*anz_elec*	Schleife über alle Masterknoten der Elektroden
! Gültig für: Potentialanregung	
d,*elec_n*,volt,0	Nullpotential für alle Masterknoten
d,*nakt*,volt,1	Einheitspotential am aktuellen Masterknoten
! Gültig für: Ladungsanregung	
f,*nakt*,chrg,1	Einheitsladung am aktuellen Masterknoten
solve	
cmsel,s,*elec_n*	nächsten Masterknoten bestimmen
nakt=ndnext(*nakt*)	
nsel,all	
*enddo	Ende der Schleife über alle Elektroden
/post1	
*get,*anz_n*,node,,num,maxd	höchste definierte Knotennummer
*dim,***rzN**,array,3**anz_n*,1+*anz_elec*	Matrix der DOF-spezifischen Moden
*vget,***rzN**(1,1),node,,nlist	Zeilen: alle DOF untereinander
*vget,***rzN**(1+1**anz_n*,1),node,,nlist	1. Spalte: Knotennummern
*vget,***rzN**(1+2**anz_n*,1),node,,nlist	weitere Spalten: Lastfall je aktiver Elektrode
*get,*anz_e*,elem,,num,maxd	höchste definierte Elementnummer
*dim,***rzE**,array,2**anz_e*,1+*anz_elec*	Matrix der elementspezifischen Moden
*do,ii,1,*anz_elec*	Schleife über alle Masterknoten der Elektroden
set,*ii*	Lastfall laden
etab,*ex*,epel,x	Elementergebnis abrufen
*vget,***rzN**(1,1+ii),node,,u,x	DOF abspeichern
*vget,***rzN**(1+1**anz_n*,1+*ii*),node,,u,y	
*vget,***rzN**(1+2**anz_n*,1+*ii*),node,,volt	
*vget,***rzE**(1,1+*ii*),elem,,etab,*ex*	Elementergebnis abspeichern
*enddo	

Elektrische Steifigkeitsmatrix und Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix für die tatsächlichen Ein- und Ausgangsgrößen

Verwendung entsprechend Abschnitt 5.5

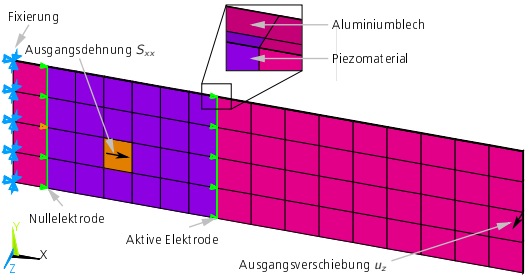
Die Unterscheidung beider Fälle (elektrische Steifigkeitsmatrix und Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix) erfolgt durch separate Einschübe im Programmablauf.

/solu	
antype,static	statische Analyse
d,all,ux,0,,,,uy,uz	Eliminierung aller mechanischen DOF
cmsel,s,*elec_n*	Komponente aller Masterknoten der Elektroden
*get,*anz_elec*,node,,count	Anzahl der Masterknoten
nakt=ndnext(0)	erster Masterknoten
*do,*ii*,1,*anz_elec*	Schleife über alle Masterknoten der Elektroden
nsel,all	
! Gültig für: elektrische Steifigkeitsmatrix	
d,*elec_n*,volt,0	Nullpotential für alle Masterknoten
d,*nakt*,volt,1	Einheitspotential am aktuellen Masterknoten
! Gültig für: Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix	
f,*nakt*,amps,1	Einheitsladung am aktuellen Masterknoten
solve	
cmsel,s,*elec_n*	nächsten Masterknoten bestimmen
nakt=ndnext(*nakt*)	
*enddo	Ende der Schleife über alle Elektroden
/post1	
*dim,***kpp**,array,*anz_elec*,*anz_elec*	elektrische Steifigkeitsmatrix dimensionieren
*dim,***kppi**,array,*anz_elec*,*anz_elec*	Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix dimensionieren
*do,*ii*,1,*anz_elec*	Lastfallschleife über alle Masterknoten
set,*ii*	Lastfall laden
*do,*jj*,1,*anz_elec*	Auswerteschleife über alle Masterknoten
! Gültig für: elektrische Steifigkeitsmatrix	
*get,*qq*,node,*arrN_elec(jj)*,rf,chrg	Reaktionsladung als Komponente der
kpp(*jj*,*ii*)=*qq*	elektrischen Steifigkeitsmatrix abspeichern
! Gültig für: Inverse der elektrischen Steifigkeitsmatrix	
*get,*pp*,node,*arrN_elec(jj)*,volt	Potential als Komponente der Inversen
kppi(*jj*,*ii*)=*pp*	der elektrischen Steifigkeitsmatrix abspeichern
*enddo	Ende der Auswerteschleife
*enddo	Ende der Lastfallschleife

Anhang F

Eigenmoden und Amplitudenfrequenzgänge des Demonstrationsmodells Plattenstreifen

In diesem Anhang werden die Eigenmoden und Amplitudenfrequenzgänge für das Demonstrationsbeispiel Plattenstreifen des Kapitels 5 zum einen für die Potentialerregung als auch für die Ladungserregung zusammengefasst. Modelldarstellung und Modellbezeichnungen werden hier aus Abschnitt 5.6 übernommen.



Finite–Elemente–Netz des Plattenstreifens mit piezoelektrischer Schicht (entspricht Bild 5.1).

	Modell	Erregung	Gleichung
FEP	vollständige FE–Simulation	Potential	(2.26)
FEQ	vollständige FE–Simulation	Ladung	(2.26)
ZXP	ZR mit vollständigen Systemmatrizen	Potential	(5.34)(5.35)
ZXQ	ZR mit vollständigen Systemmatrizen	Ladung	(5.39)(5.40)
ZDP*x*	ZR mit *x* modalen Koordinaten	Potential	(5.52)(5.53)
ZDQ*x*	ZR mit *x* modalen Koordinaten	Ladung	(5.65)(5.66)
ZSP*x+y*	ZR mit *x* modalen und *y* statischen Moden	Potential	(5.82)(5.83)
ZSQ*x+y*	ZR mit *x* modalen und *y* statischen Moden	Ladung	(5.97)(5.98)

Eigenmoden 1 bis 4

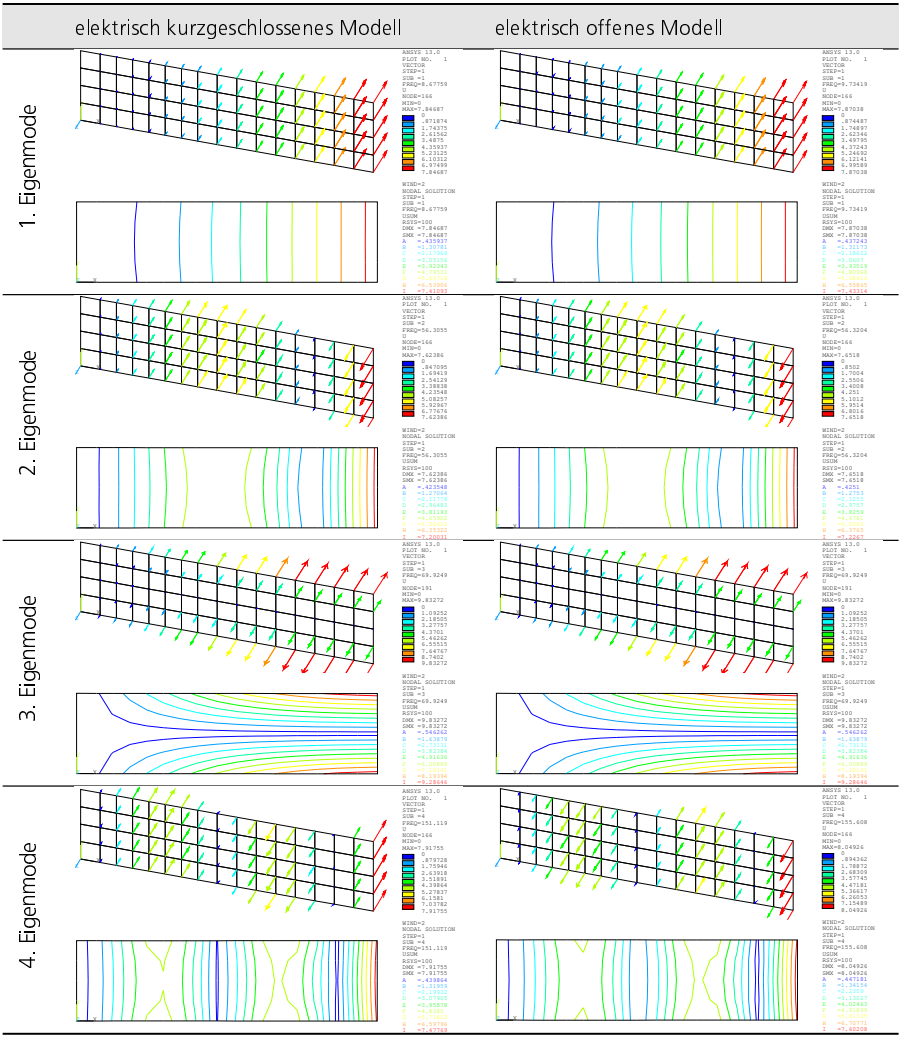


Bild F.1: *Eigenmoden 1 bis 4 (Gesamtverschiebung) des Demonstrationsmodells Plattenstreifen.*

Eigenmoden 5 bis 8

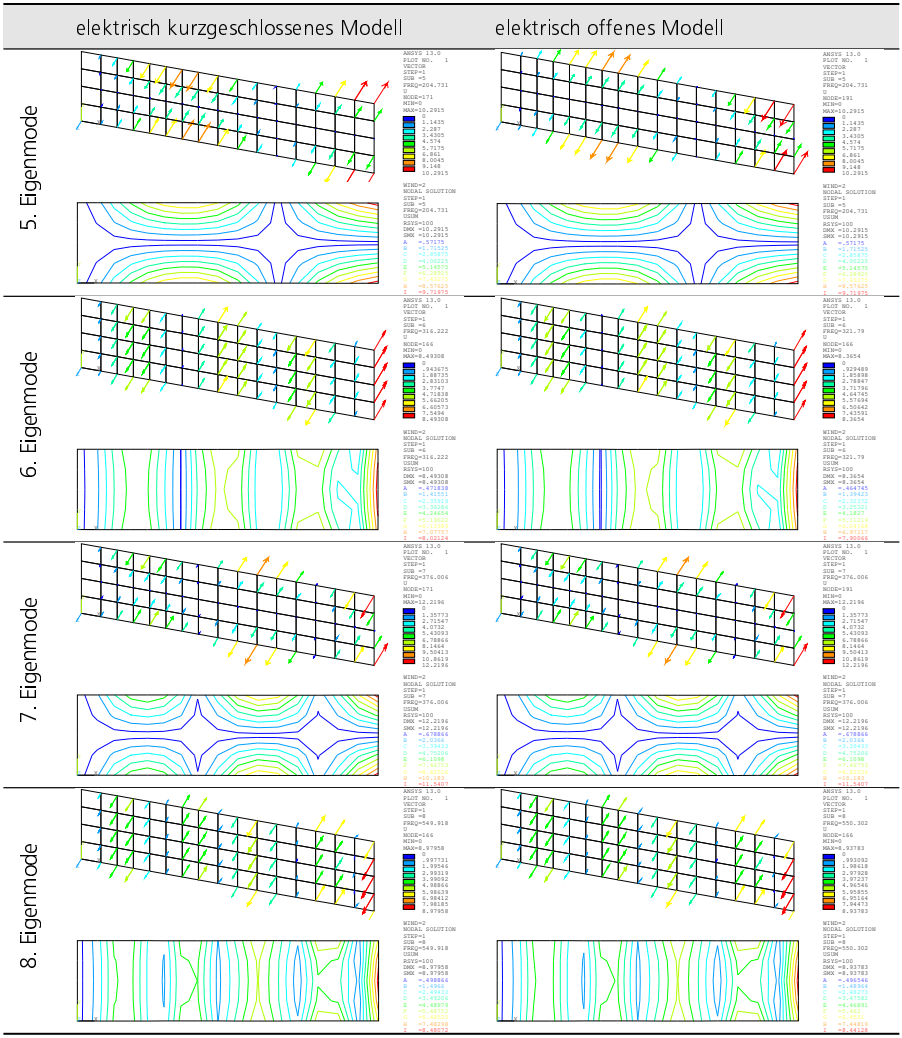


Bild F.2: *Eigenmoden 5 bis 8 (Gesamtverschiebung) des Demonstrationsmodells Plattenstreifen.*

Potentialerregung

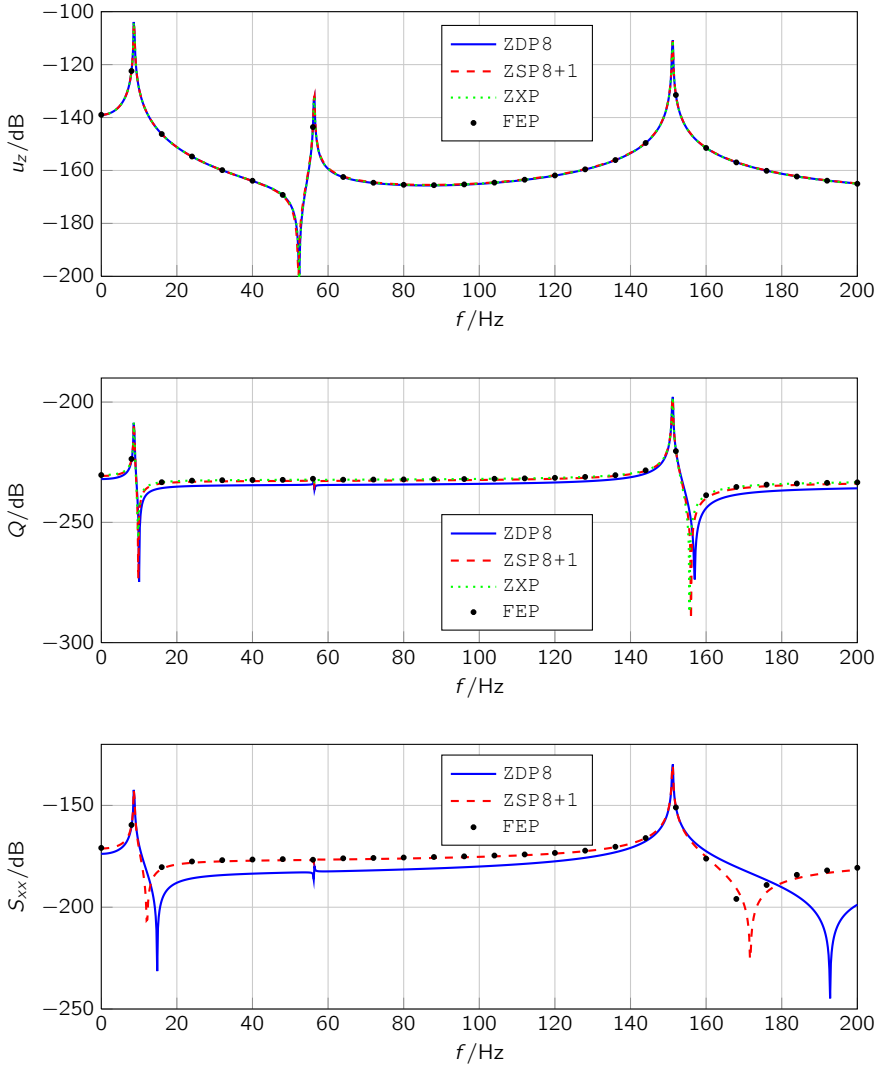


Bild F.3: *Amplitudenfrequenzgänge bei Potentialerregung des Demonstrationsmodells Plattenstreifen;*
oben: für die Verschiebung u_z,
mitte: für die Ladung Q,
unten: für die Dehnung S_{xx}.

Ladungserregung

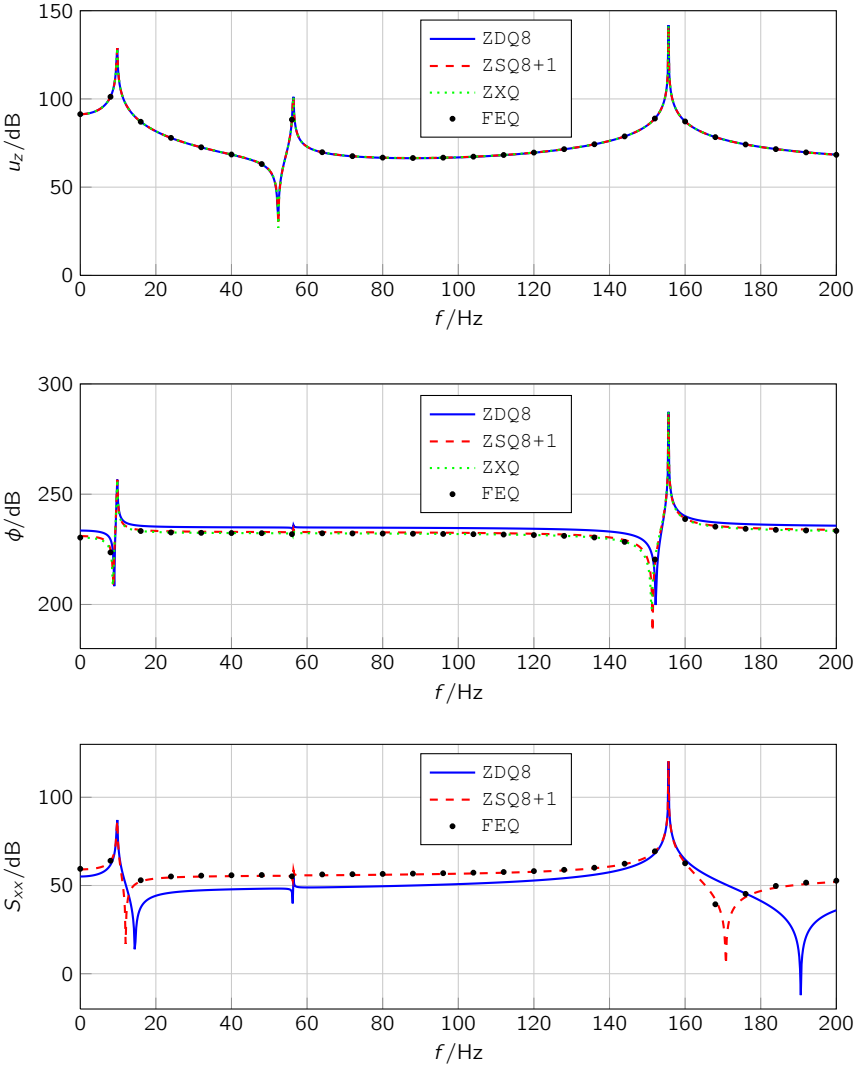


Bild F.4: *Amplitudenfrequenzgänge bei Ladungserregung des Demonstrationsmodells Plattenstreifen;*
oben: für die Verschiebung u_z,
mitte: für das Potential ϕ,
unten: für die Dehnung S_{xx}.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Burkhard Kranz
Geburtsdatum:	29. April 1968
Geburtsort:	Radeberg
Familienstand:	verheiratet, 3 Kinder

Ausbildung und beruflicher Werdegang:

1974 – 1982	Polytechnische Oberschule Pirna
1982 – 1986	Spezialschule mathematisch-physikalischer Richtung Dresden
1986	Abitur
1986 – 1988	Wehrdienst
1988 – 1993	Studium der Fachrichtung *Angewandte Mechanik des Maschinenbaus*, Technische Universität Dresden
1993	Diplom
1994 – 1997	Graduiertenkolleg, Technische Universität Dresden
1998 – 2001	Berechnungsingenieur bei der Siempelkamp Prüf- und Gutachtergesellschaft mbH Pirna/Dresden
2001 –	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fraunhofer–Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik Chemnitz/Dresden

Burkhard Kranz Dresden, den 15. Oktober 2012