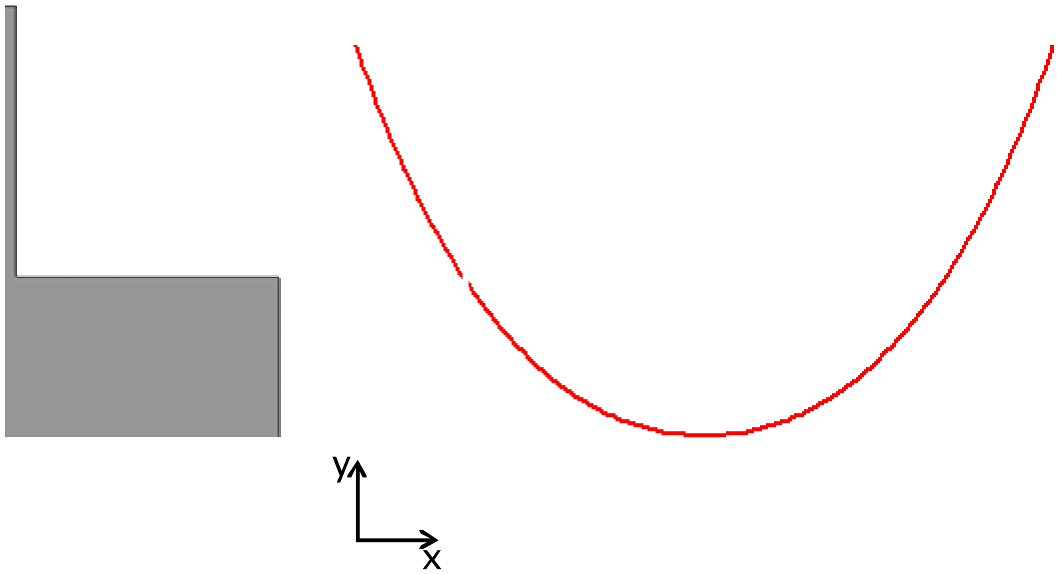
Eine Parametrisierung der Kettenlinie

Die Kettenlinie als Kerbgeometrie

Autor: Dr. Wigand Rathmann, FAU, Department Mathematik, AM2, 2015, wigand.rathmann@fau.de

In der Strukturmechanik ist die Ausgestaltung von Kerben zur Spannungsreduktion immer wieder ein Gegenstand von Untersuchungen. Als Beispiel sei hier nur auf [Jakel14] verwiesen. Dabei ist auch die Frage aufgetreten, ob die so genannte Kettenlinie als Kerbgeometrie genutzt werden kann. Die Frage lautet:

Wie kommt die rote Kurve klein und tangentenstetig an die graue Ecke?

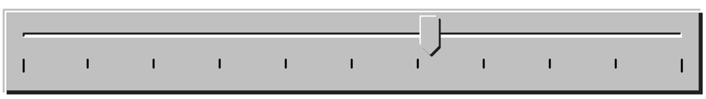


Hierbei ergeben sich weitere einige Fragen: Wie kann die Kettenlinie gedreht und verschoben werden, so dass sie sich passgenau einfügt? Kann auch eine Höhe oder eine Breite angegeben werden, damit alles in einen vorgegebenen Bauraum passt?
Im Beitrag [Jakel15] wird dabei eine Darstellung der Kettenlinie als Kurve in der Ebene verwendet. Der vorliegende Beitrag diskutiert eine Möglichkeit, die Kettenlinie als Kurve zu beschreiben, um sie in eine Kerbe einzupassen. Dazu wird in mehreren Schritten vorgegangen:

1. Darstellung der Kettenlinie als Kurve im Raum
2. Konstruktion von zueinander orthogonalen Tangenten
3. Einfügen der Kettenlinie in den 1. Quadranten durch Drehung und Verschiebung
4. Berechnen einer Parametrisierung zur Nutzung in CAD-Systemen

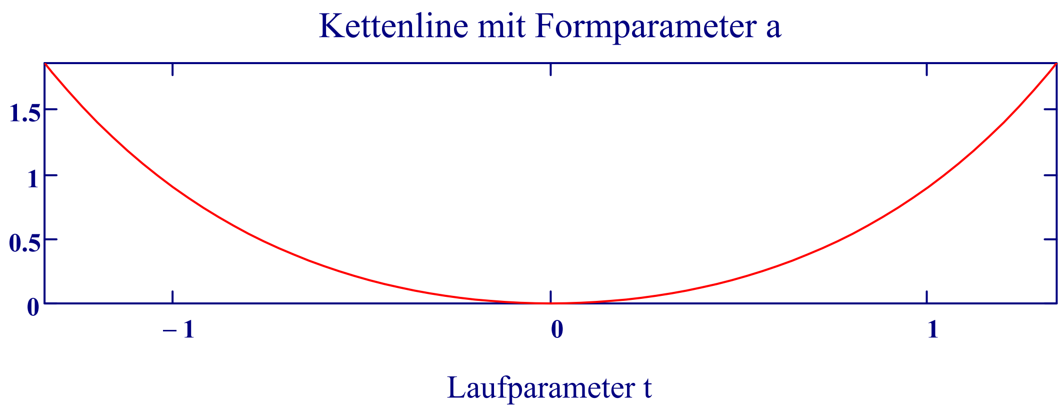
1. Von der Funktion zur Kurve

Die Kettenline ist über den cosinus hyperbolicus mit dem Formparameter a definiert und besitzt die Darstellung $a \cdot \cosh\left(\frac{t}{a}\right)$ für reelle Werte t. Der Parameter a ist nur ein Streckungsparameter, der sich entsprechend nur auf die Skalierung auswirkt. Der Minimalpunkt soll immer im Nullpunkt auf der x-Achse liegen.

$a :=$  $a = 0.67$

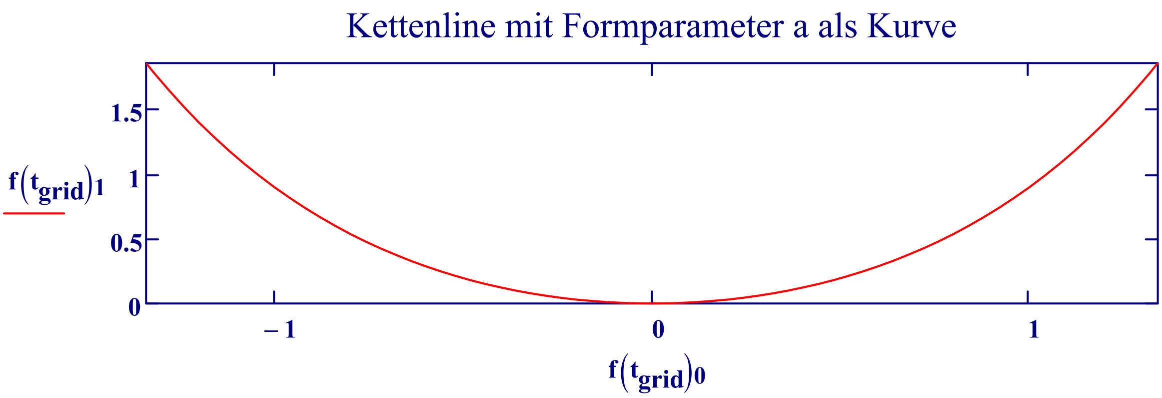
Funktion: $k(t) := a \cdot \cosh\left(\frac{t}{a}\right) - a$

▶ Aufbereitung der Graphik



Um diese Kurve in eine Geometrie einfügen zu können, wird nun auf die Kurvendarstellung der Kettenline zurück gegriffen. Dies ist eine vektorwertige Funktion, die in der ersten Komponente wieder t besitzt.

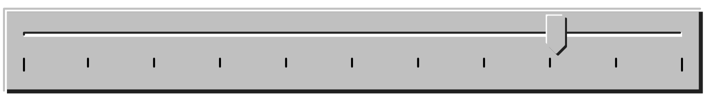
$$f(t) := \begin{pmatrix} t \\ a \cdot \cosh\left(\frac{t}{a}\right) - a \end{pmatrix}$$



Der Parameter a entspricht einer Skalierung des Koordinatensystems. Dieser Parameter wird am Ende des Beitrages wieder eingeführt und zunächst wird $a = 1$ gesetzt.

2. Die Kurve und der rechte Winkel

Die Kurve soll tangentenstetig in die Kerbe eingepasst werden. Hier ist die Frage zu beantworten, wo die Tangenten angelegt werden sollen. Es wird der Parameter $t_1 < 0$ eingeführt und an den Punkt $\left(t_1, \cosh(t_1)\right)$ wird die Tangente angelegt.

$t_1 :=$  $t_1 = -0.76$

Diese Tangente besitzt die Geradengleichung

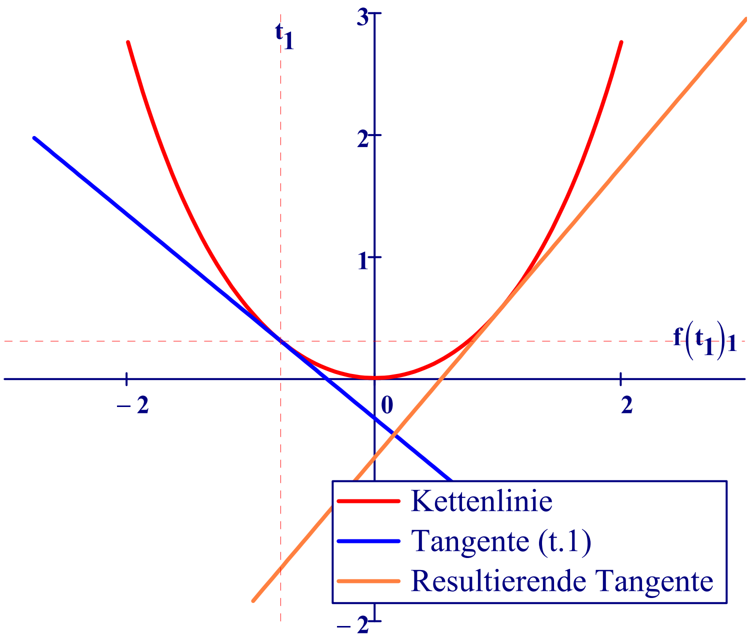
$$t_{Vert}(t) := f(t_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t_1) \end{pmatrix} \cdot (t)$$

Diese Tangente soll später mit der y-Achse in Deckung gebracht werden. Nun fehlt noch eine zweite Tangente, deren Gleichung schon angegeben werden kann.

$$t_{Horiz}(t) := f(t_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t_2) \end{pmatrix} \cdot (t)$$

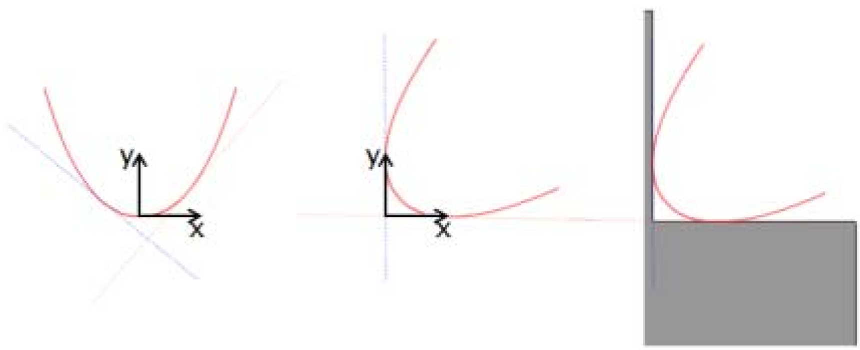
Es fehlt noch der Punkt t_2 auf der Kettenline, der so gewählt werden soll, dass die Richtungen beider Tangenten zueinander orthogonal sind. Dies lässt sich leicht über das Skalarprodukt bestimmen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t_1) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(t_2) \end{pmatrix} = 0 \qquad t_2 := \operatorname{arsinh}\left(-\frac{1}{\sinh(t_1)}\right) = 1.014$$



3. Transformation der Kurve

Wie kommt nun die Kettenlinien in die Kerbe? Anschaulich ist dies ja "ganz" einfach:



Durch eine Koordinatentransformation soll nun die Kettenline so gedreht und verschoben werden, dass die Tangenten mit den Koordinatenachsen in Deckung gebracht werden. Der Winkel zwischen der Tangente (blau) und der x-Achse ist leicht zu bestimmen durch:

$$\varphi_0 := \operatorname{atan}\left(\sinh\left(t_1\right)\right) = -39.872 \cdot {}^\circ$$

Bei der Berechnung des Drehwinkels gilt es zu beachten, dass die blaue Tangente in die y-Achse überführt werden soll. Deshalb wird $\frac{\pi}{2}$ hinzuaddiert und da mathematisch negativ gedreht wird, ergibt sich für den Drehwinkel die Darstellung

$$\varphi := -\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(\sinh\left(t_1\right)\right)\right) = -50.128 \cdot {}^\circ$$

Somit ergibt sich für die Drehmatrix

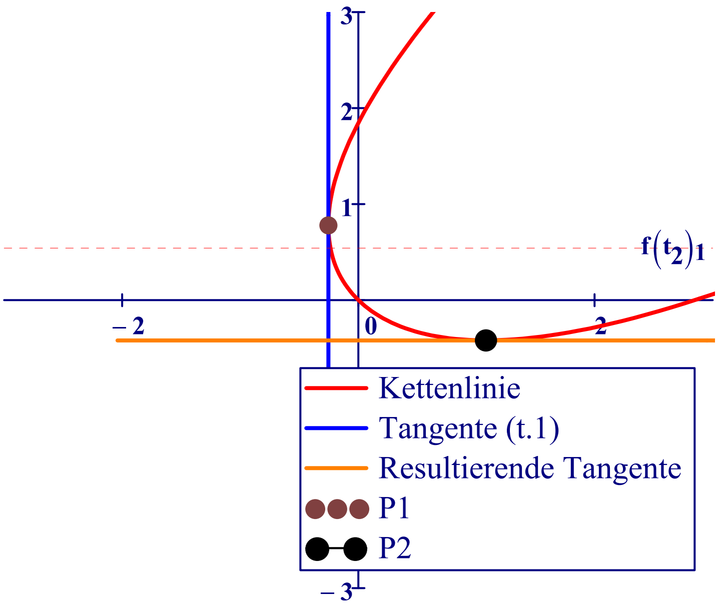
$$D := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

die Darstellung:

$$D \text{ ersetzen}, \varphi = -\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{atan}\left(\sinh\left(t_1\right)\right)\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sinh\left(t_1\right)}{\sqrt{\cosh\left(2\cdot t_1\right)+1}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh\left(2\cdot t_1\right)+1}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh\left(2\cdot t_1\right)+1}} & -\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sinh\left(t_1\right)}{\sqrt{\cosh\left(2\cdot t_1\right)+1}} \end{pmatrix}$$

Bleibt noch die Berechnung des Verschiebungsvektors. Hier ist es günstig, einen Blick auf die gedrehte Welt zu werfen. Die resultierenden Berührpunkte der Kettenlinie mit der Kerbe/Koordinatensystem werden mit P1 und P2 bezeichnet.

Die gedrehte Kettenlinie

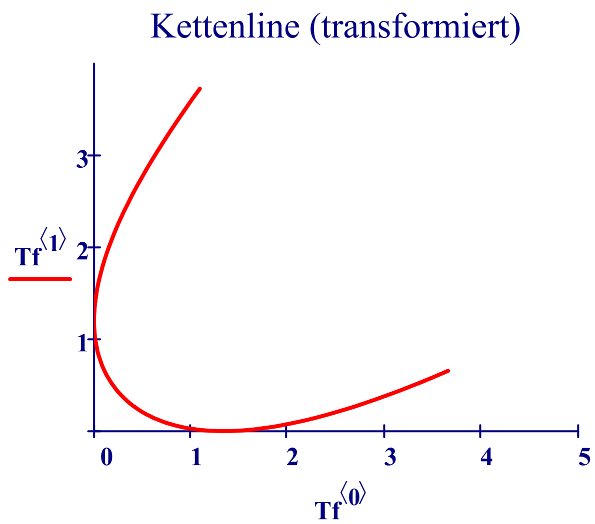


Die Berührpunkte sind die Punkte auf den Kurve $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ zu den Parameterwerten $\mathbf{t_1}$ und $\mathbf{t_2}$ der beiden Tangenten. Die Koordinaten lassen sich mittels der Drehung leicht bestimmen. Es gilt $\mathbf{P_i = f(t_i)}$. Nach der Drehung besitzen die Punkte die Koordinaten $\mathbf{P_i = D\,f(t_i)}$

$$\mathbf{P_1} := \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{t_1}) = \begin{pmatrix} -0.255 \\ 0.778 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P_2} := \mathbf{D} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{t_2}) = \begin{pmatrix} 1.08 \\ -0.419 \end{pmatrix}$$

Das obige Diagramm zeigt die gedrehte Kettenlinie. Die Tangenten sind jetzt parallel zu den Koordinaten-achsen. Der Verschiebungsvektor lautet:

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} -{\mathbf{P_1}}_0 \\ -{\mathbf{P_2}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.255 \\ 0.419 \end{pmatrix}$$



Damit wurde das erste Ziel erreicht, die Kettenlinie als Kurve darzustellen, die in eine Kerbe eingefügt werden kann. Es fehlt aber noch eine Darstellung, die auch in CAD-Systemen genutzt werden könnte.

4. Reparametrisierung der Kettenlinie

Durch eine linear-affine Abbildung wurde die Kettenlinie so gedreht und verschoben, dass die Tangenten in den gewünschten Punkten mit den Koordinantenachsen zusammenfallen. Für eine Benutzung in einem CAD-System fehlen nun noch einige Punkte:

1. eine programmierbare Darstellung der Kurve,
2. Einschränkung auf die benutzbaren Funktionen
3. eine feste Parametrisierung,
4. h und b als Parameter

4.1 Darstellung der Kurve

Bisher wurden alle Größen nur mit Ziel ausgerechnet, dass die Transformation dargestellt werden kann. Diese Zwischenergebnisse werden nun mittels CAS ineinander eingesetzt und ausgewertet. Für die Koordinaten der Punkte P1, P2 und die Darstellung der Kurve $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ ergeben sich die algebraischen Ausdrücke:

$$P_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\cosh(t_1)+\sqrt{2}\cdot t_1\cdot\sinh(t_1)}{\sqrt{\cosh(2\cdot t_1)+1}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}\cdot(2\cdot t_1 - 2\cdot\sinh(t_1)+\sinh(2\cdot t_1))}{2\cdot\sqrt{\cosh(2\cdot t_1)+1}} \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\cosh(t_2)+\sqrt{2}\cdot t_2\cdot\sinh(t_1)}{\sqrt{\cosh(2\cdot t_1)+1}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}\cdot(2\cdot t_2 + \sinh(t_1+t_2) - 2\cdot\sinh(t_1)+\sinh(t_1-t_2))}{2\cdot\sqrt{\cosh(2\cdot t_1)+1}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Kurve} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\cosh(t)+\sqrt{2}\cdot t\cdot\sinh(t_1)}{\sqrt{\cosh(2\cdot t_1)+1}} \\ -\dfrac{\sqrt{2}\cdot(2\cdot t + \sinh(t_1+t) - 2\cdot\sinh(t_1)+\sinh(t_1-t))}{2\cdot\sqrt{\cosh(2\cdot t_1)+1}} \end{bmatrix}$$

Die Darstellungen beinhalten nur die Drehung. Mit der Verschiebung gilt dann:

$$k(t) = Df(t) + \begin{pmatrix} -P1_0 \\ -P2_1 \end{pmatrix}$$

Dies führt nach einer nochmaligen algebraische Vereinfachung auf die Kurvendarstellung (in t_1 und t_2) :

$$k(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cosh(t_1)-\cosh(t)-t_1\cdot\sinh(t_1)+t\cdot\sinh(t_1)}{\sqrt{\cosh(t_1)^2}} \\ \dfrac{t_2 - t + \cosh(t_2)\cdot\sinh(t_1)-\cosh(t)\cdot\sinh(t_1)}{\sqrt{\cosh(t_1)^2}} \end{pmatrix}$$

4.2 Verwendete Funktionen

Der Parameter t_2 hängt von t_1 ab und wird über den **arsinh** berechnet. Der **arsinh** ist nicht immer verfügbar und kann durch den **ln** ausgedrückt werden:

$$t2 := \ln\left(-\frac{1}{\sinh(t_1)} + \sqrt{\frac{1}{\sinh(t_1)^2}+1}\right)$$

4.2 Feste Parametrisierung

Für die Kerbgeometrie ist nun nur der Abschnitt zwischen den Punkten P1 und P2 mit den dazugehörigen Parametern t_1 und t_2 von Interesse. Dieser Abschnitt der Kurve soll unabhängig von der Wahl von t_1 in dem Parameterbereich [0,1] durchlaufen werden. Die Transformation des Laufparameters t in die "alte" Welt

$$t_{glob} = t\cdot(t_2 - t_1) + t_1$$

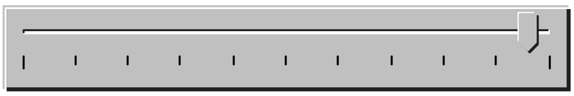
leistet das Gewünschte. Somit kann für die Kerbgeometrie folgende Funktion vorgeschlagen werden.

$$\mathrm{fillet}(t, t_1, \mathrm{scale}) := \left| \begin{aligned} & t_2 \leftarrow \ln\left(\frac{-1}{\sinh(t_1)} + \sqrt{\frac{1}{\sinh(t_1)^2} + 1}\right) \\ & t_{glob} \leftarrow t \cdot (t_2 - t_1) + t_1 \\ & \mathrm{fillet}_x \leftarrow \frac{1}{\cosh(t_1)} \cdot \left[\cosh(t_{glob}) - \cosh(t_1) + (t_1 - t_{glob}) \cdot \sinh(t_1)\right] \\ & \mathrm{fillet}_y \leftarrow \frac{1}{\cosh(t_1)} \cdot \left[t_2 - t_{glob} + \sinh(t_1) \cdot (\cosh(t_2) - \cosh(t_{glob}))\right] \\ & \mathrm{scale}\begin{pmatrix} \mathrm{fillet}_x \\ \mathrm{fillet}_y \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Visualisierung dieser Darstellung

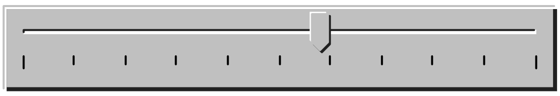
Mit dem Parameter scale_k wird nun die Größe der Kerbgeometrie und mit t_1 das Seitenverhältnis eingestellt.

$\mathrm{scale}_k :=$



$\mathrm{scale}_k = 1.01$

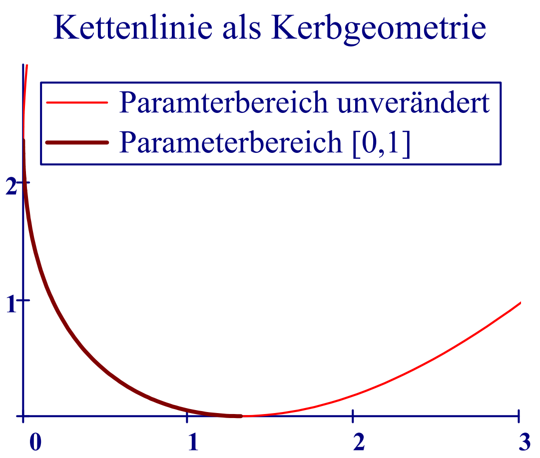
$t_1 :=$



$t_1 = -1.68$

Mit diesen Größen wird nun die Kurve definiert:

$$f_{fillet}(t) := \overrightarrow{\mathrm{fillet}(t, t_1, \mathrm{scale}_k)}$$



4.4 Die Höhe als Parameter

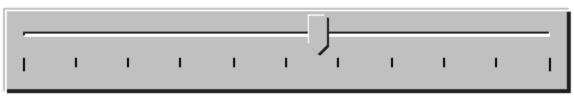
Diese Darstellung besitzt aber den Nachteil, dass keine der interessierenden Parameter Höhe bzw. Breite direkt in die Darstellung eingehen. Nun ist es möglich, die Skalierung durch die Höhe der Kerbgeometrie zu ersetzen. Dazu muss nur die (reparametrisierte) Kurve für $\mathbf{t = 0}$ ausgewertet werden. Mit den obigen Bezeichungen gilt dann für die Skalierung $\mathbf{scale} = \dfrac{\mathbf{h}}{\mathbf{P1_y}}$

Daraus ergibt sich die Darstellung:

$$
\text{fillet}(t, t_1, h) := \left|
\begin{array}{l}
t_2 \leftarrow \ln\left(\dfrac{-1}{\sinh(t_1)} + \sqrt{\dfrac{1}{\sinh(t_1)^2} + 1}\right) \\[2ex]
\text{scale} \leftarrow h\left[\dfrac{1}{\cosh(t_1)}\cdot\left[t_2 - t_1 + \sinh(t_1)\cdot\left(\cosh(t_2) - \cosh(t_1)\right)\right]\right]^{-1} \\[2ex]
t_{glob} \leftarrow t\cdot(t_2 - t_1) + t_1 \\[2ex]
\text{fillet}_x \leftarrow \dfrac{1}{\cosh(t_1)}\cdot\left[\cosh(t_{glob}) - \cosh(t_1) + (t_1 - t_{glob})\cdot\sinh(t_1)\right] \\[2ex]
\text{fillet}_y \leftarrow \dfrac{1}{\cosh(t_1)}\cdot\left[t_2 - t_{glob} + \sinh(t_1)\cdot\left(\cosh(t_2) - \cosh(t_{glob})\right)\right] \\[2ex]
\text{scale}\begin{pmatrix}\text{fillet}_x \\ \text{fillet}_y\end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

Nun ergibt sich eine Darstellung, bei der die Höhe direkt und das Seitenverhältnis indirekt (über t_1) eingestellt werden kann.

$h :=$



$h = 5.7$

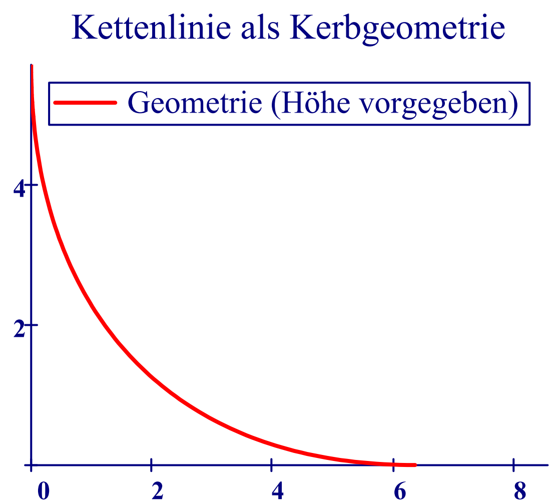
$t_1 :=$

$t_1 = -0.76$

Breite: $b := \text{fillet}(1, t_1, h)_0 = 6.355$

$\dfrac{h}{b} = 0.897$

$f_{fillet}(t) := \overrightarrow{\text{fillet}(t, t_1, h)}$

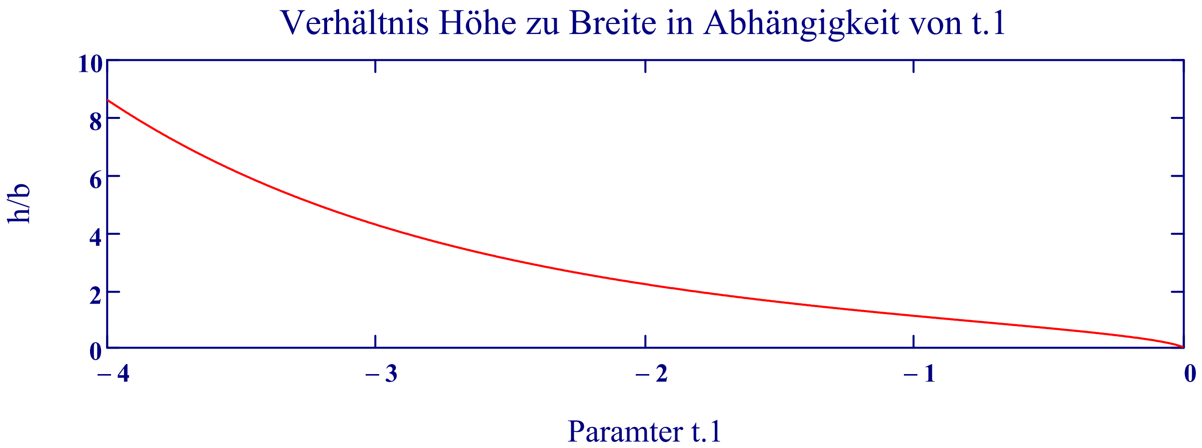


Diese Darstellung kann in CAD-Systemen genutzt werden, siehe [Jakel15].

4.5 Das Seitenverhältnis h/b

Das Verhältnis zwischen Höhe und Breite kann sogar durch eine Funktion nur in Abhängigkeit von t_1 ausgedrückt werden. Damit könnte durch Angabe von Höhe und Breite direkt der wichtige Bereich der Kettenlinie ausgewählt werden. Der Ausdruck ist leider nicht übersichtlich.

$$-\frac{t_1 - \dfrac{\sinh\left(t_1 - \operatorname{arsinh}\left(\dfrac{1}{\sinh(t_1)}\right)\right)}{2} + \operatorname{arsinh}\left(\dfrac{1}{\sinh(t_1)}\right) - \dfrac{\sinh\left(t_1 + \operatorname{arsinh}\left(\dfrac{1}{\sinh(t_1)}\right)\right)}{2} + \dfrac{\sinh(2\cdot t_1)}{2}}{t_1\cdot\sinh(t_1) - \cosh(t_1) + \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{\cosh(2\cdot t_1)+1}{\sinh(t_1)^2}}}{2} + \operatorname{arsinh}\left(\dfrac{1}{\sinh(t_1)}\right)\cdot\sinh(t_1)}$$



Zu einem vorgegebenen Verhältnis aus Höhe zu Breite kann t_1 durch Lösen der nichtlinearen Gleichung bestimmt werden. (**vhb** bezeichnet die Funktion "Verhältnis Höhe/Breite")

$$t1(ver) := \operatorname{wurzel}\left(vhb(t_1) - ver, t_1, -5, -0.01\right)$$

Beispiel

Verhältnis angeben:

$$b_w := 0.6 \qquad h_w := 6$$

Startwert Kettenline

$$t_{start} := t1\left(\frac{h_w}{b_w}\right) = -4.205$$

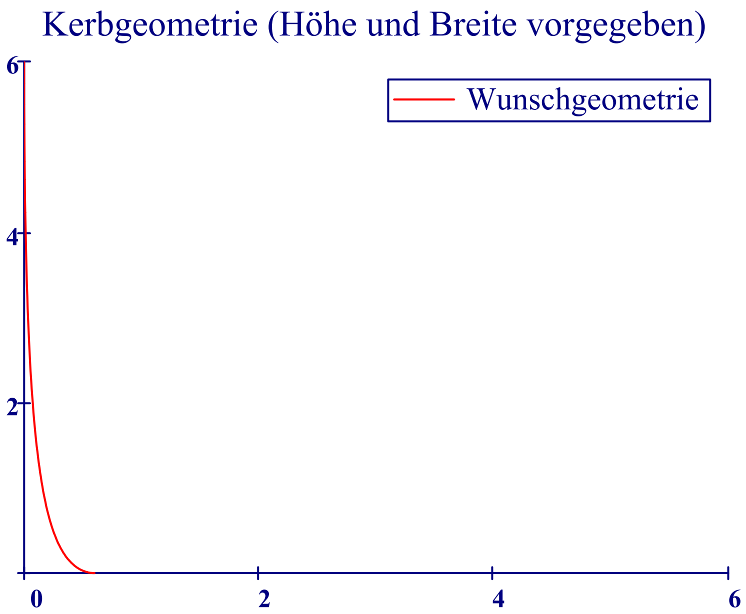
Zur Kontrolle werden die Punkte am Anfang und am Ende der Kerbgeometrie ausgerechnet.

$$P_1 := \operatorname{fillet}(0, t_{start}, h_w) \qquad P_2 := \operatorname{fillet}(1, t_{start}, h_w)$$

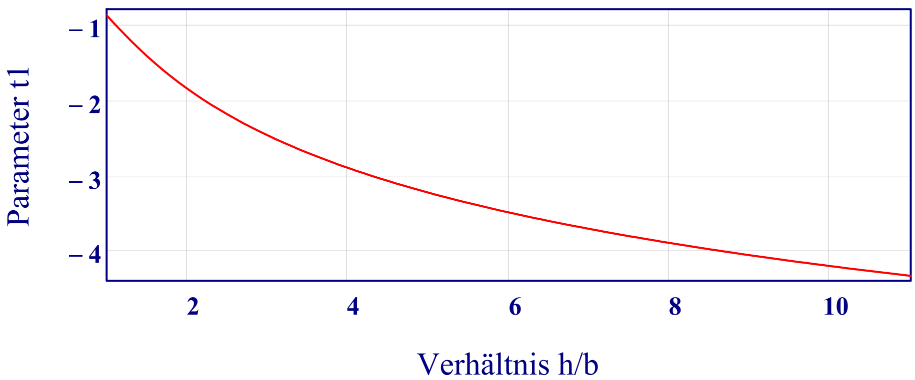
$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition der Raumkurve

$$f_{fillet}(t) := \overrightarrow{\operatorname{fillet}(t, t_{start}, h_w)}$$



Einem h-b-Verhältnis von 1:1 entspricht der Wert für t_1=-0.881 und einem Verhältnis von 1:12 dem Wert t_1=-4.451. Leider wurde auf Anhieb keine schöne Darstellung mit direkter Angabe der Breite gefunden. Der Zusammenhang zwischen dem h-b-Verhältnis und dem Parameter für die Kettenlinie wird in der folgenden Graphik dargestellt.



Darstellung der parametrisierten Kettenline zur Verwendung in Creo Parametric:

Mit den globalen Parametern **abst1** und **h** kann folgende Formulierung verwendet werden.

```
t1=-abst1
t2=ln(-1/sinh(t1)+sqrt(1/sinh(t1)^2+1))
scale=h*(1/cosh(t1)*(t2-t1+sinh(t1)*(cosh(t2)-cosh(t1))))^(-1)
tglob=t*(t2-t1)+t1
x=scale*1/cosh(t1)*(cosh(tglob)-cosh(t1)+(t1-tglob)*sinh(t1))
y=scale*1/cosh(t1)*(t2-tglob+sinh(t1)*(cosh(t2)-cosh(tglob)))
z=0
```

Für abst1 könnte bietet sich der Bereich von -5 bis -0.8 an. Dies entspricht dann einem Verhältnis von Höhe zu Breite im Bereich von 18 bis 0.9.

Der Autor dankt Herrn Dr. Roland Jakel für das schöne Beispiel.

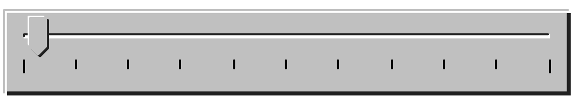
5. Nachtrag

Nachdem nun eine geeignete Parametrisierung gefunden wurde, wird der Blickwinkel geändert. Die Höhe und die Breite können auch vorgegeben werden und der Parameter t_1 fungiert als Formparameter. Dazu wird die Definition der Kurve nur leicht geändert, indem eine Größe $scale_x$ eingeführt wird.

$$
\mathrm{fillet}(t, t_1, h, b) := \left|
\begin{array}{l}
t_2 \leftarrow \ln\left(\dfrac{-1}{\sinh(t_1)} + \sqrt{\dfrac{1}{\sinh(t_1)^2} + 1}\right) \\[2ex]
scale_x \leftarrow b\left[\dfrac{1}{\cosh(t_1)}\cdot\left[\cosh(t_2) - \cosh(t_1) + (t_1 - t_2)\cdot\sinh(t_1)\right]\right]^{-1} \\[2ex]
scale_y \leftarrow h\left[\dfrac{1}{\cosh(t_1)}\cdot\left[t_2 - t_1 + \sinh(t_1)\cdot(\cosh(t_2) - \cosh(t_1))\right]\right]^{-1} \\[2ex]
t_{glob} \leftarrow t\cdot(t_2 - t_1) + t_1 \\[2ex]
fillet_x \leftarrow \dfrac{1}{\cosh(t_1)}\cdot\left[\cosh(t_{glob}) - \cosh(t_1) + (t_1 - t_{glob})\cdot\sinh(t_1)\right] \\[2ex]
fillet_y \leftarrow \dfrac{1}{\cosh(t_1)}\cdot\left[t_2 - t_{glob} + \sinh(t_1)\cdot(\cosh(t_2) - \cosh(t_{glob}))\right] \\[2ex]
\begin{pmatrix} scale_x\cdot fillet_x \\ scale_y\cdot fillet_y \end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

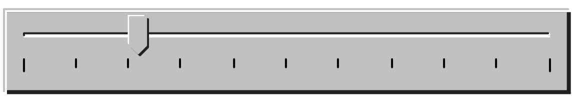
Im Diagramm lässt sich die Funktionsweise von t_1 gut erkennen. Die resultierende Kurve ist keine Kettenlinie mehr.

$b :=$



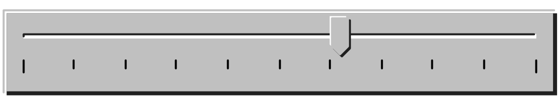
$b = 0.4$

$h :=$



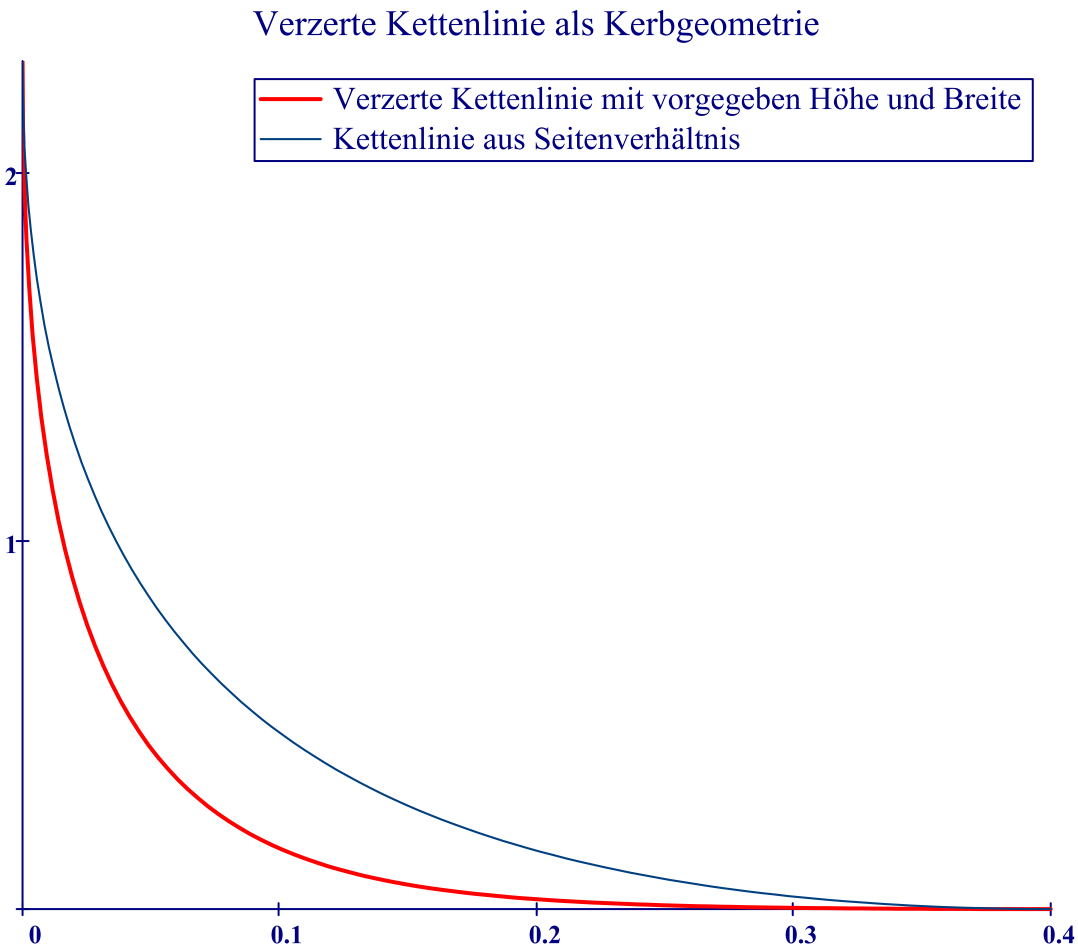
$h = 2.3$

$t_1 :=$



$t_1 = -7.8$

$$f_{fillet}(t) := \overrightarrow{\mathrm{fillet}(t, t_1, h, b)}$$



Beispielrechnungen haben aber gezeigt, dass die Abweichung von der Kettenlinie keine Vorteile bringt. [Jakel15]

Literatur

[Jakel14] Ciomber, I., Jakel, R: Systematic Analysis and Comparison of Stress Minimizing Notch Shapes - Designing Stress-Concentration free Notches without FEM-Code. 6th. SAXSIM 2014, TU Chemnitz

[Jakel15] Using a Catenary Equation in Parametric Representation for Minimizing Stress Concentrations at Notches. 7th SAXSIM 2015, TU Chemnitz