Lebensdauervorhersage mehrachsig belasteter Elastomerbauteile unter besonderer Berücksichtigung rotierender Beanspruchungsrichtungen

Von der Fakultät für Maschinenbau der
Technischen Universität Chemnitz

genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur
(Dr.-Ing.)

vorgelegt

von Dipl. Ing. Rainer Klauke
geboren am 14. Mai 1977 in Hannover
eingereicht am 07. September 2015

Gutachter:
Prof. Dr.-Ing. habil. Jörn Ihlemann
Prof. Dr.-Ing. Matthias Kröger

Tag der Verteidigung: 08. April 2016

Klauke, Rainer

Lebensdauervorhersage mehrachsig belasteter Elastomerbauteile unter besonderer Berücksichtigung rotierender Beanspruchungsrichtungen

Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Chemnitz, Institut für Mechanik und Thermodynamik, Chemnitz, 2015

159 Seiten
82 Abbildungen
7 Tabellen
167 Literaturzitate

Referat

Die für die Untersuchung des Ermüdungswiderstandes von Elastomerbauteilen verwendeten Formulierungen basieren häufig auf Modellen, die für Anwendungen in der Metalltechnik entwickelt wurden. Die damit verbundenen Eigenschaften wie Isotropie oder Elastizität stehen hingegen im Konflikt mit den Anforderungen, die zu der Wahl eines gefüllten Polymers als Werkstoff geführt haben. Gleichzeitig weisen technische Gummiwerkstoffe ein hochgradig nichtlineares Materialverhalten auf und zeigen vom Polymer und Füllstoffgrad abhängig eine unterschiedlich ausgeprägte belastungsinduzierte Anisotropie. Diese Umstände führen zu dem Bedarf, das Ermüdungsverhalten technischer Gummiwerkstoffe in Abhängigkeit der für Gummi typischen Eigenschaften intensiver zu untersuchen und neue Ansätze für die Auslegung der Lebensdauer von elastomeren Werkstoffen bereitzustellen. Im Rahmen der Arbeit wird eine Auswahl an unterschiedlichen Modellwerkstoffen auf polymerer Basis auf ihre Lebensdauereigenschaften hin analysiert. Den Schwerpunkt bilden hierbei modulierte Belastungsrichtungen, die über eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen versuchstechnisch abgebildet werden. Anhand der Versuchsergebnisse werden neue Ansätze zur Vorhersage der Lebensdauer technischer Gummiwerkstoffe formuliert und mit bisherigen Ansätzen verglichen. Neben der Formulierung neuer Berechnungsvorschriften zur Bestimmung des Ermüdungswiderstandes polymerer Werkstoffe werden zudem die einfache Scherung mit rotierenden Achsen sowie das Versuchsprinzip zu deren Umsetzung eingehend untersucht. Dies umfasst auch eine Analyse einer mechanischen Charakterisierung technischer Gummiwerkstoffe anhand einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen.

Schlagworte

Einfache Scherung, Schadenshypothese, Ermüdung, Lebensdauer, Rotierende Achsen, Rührversuch, Tensorbasiertes Schadensmaß

Danksagung

Eine wissenschaftliche Arbeit ist nie das Werk einer einzelnen Person, deshalb möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mir die Erstellung meiner Dissertation ermöglicht haben.

Mein Dank gilt zunächst Herrn Prof. Dr. Jörn Ihlemann, meinem Doktorvater, für die Betreuung dieser Arbeit, für die freundliche Hilfe und für die vielen kritischen und inspirierenden Gespräche, die mir immer als bereichernder und konstruktiver Austausch in Erinnerung bleiben.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Matthias Kröger für die hilfsbereite und wissenschaftliche Betreuung als Zweitgutachter.

Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Mitdoktoranden sowohl am DIK als auch an der TU-Chemnitz für die vielfältigen Diskussionen und Tipps, vor Allem aber für das freundschaftliche Umfeld, welches die Fertigstellung meiner Dissertation unendlich erleichterte. Besonders hervorheben möchte ich die fantastische Hilfsbereitschaft von Herrn Dr. Ralf Landgraf, mit dessen Hilfe das Erklimmen mancher organisatorischer Hürden vergleichsweise einfach wurde.

Tief verbunden und dankbar bin ich meinen Eltern Elisabeth und Rainer Klauke sowie meinem Bruder Martin Klauke, die mir meinen bisherigen Lebensweg ermöglichten.

Mein ganz besonderer Dank gilt aber meiner Frau Dr. Sophie Klauke und meinen beiden Söhnen Rasmus und Jannes Klauke für ihre Unterstützung und ihr Verständnis bei der Anfertigung dieser Doktorarbeit. Ihnen möchte ich diese Arbeit widmen.

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichenverzeichnis **vii**

1 Einleitung und technisch wirtschaftliche Motivation **1**
1.1 Einleitung 1

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen **4**
2.1 Deformationsmaße 4
2.2 Spannungsgrößen 5
2.3 Tensoren als Ellipsoide 6

3 Definitionen von Begriffen und Phänomenen **8**
3.1 Haltbarkeit und Ermüdung 8
3.2 Lebensdauer 9
3.3 Schadensmenge 9
3.4 Belastung und Belastungsprozess 10

4 Methoden zur Lebensdauerprognose **12**
4.1 Beschreibung des Materialverhaltens 15
4.2 Isotrope Schadensakkumulation 19
4.2.1 Lineare Schadensakkumulation 20
4.2.2 Nichtlineare Schadensakkumulation 22
4.3 Verfahren zur räumlichen Beschreibung von Ermüdungszuständen 25
4.3.1 Prinzip der kritischen Schnittebenen 26
4.3.2 Schadensakkumulation in tensorieller Form 27

5 Einfache Scherung mit rotierenden Achsen **29**
5.1 Die Teilprozesse der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen 29
5.1.1 Teilprozess 1: Einfache Scherung 29
5.1.2 Eigenwerte und Eigenrichtungen der einfachen Scherung 31
5.1.3 Teilprozess 2: Rotation der Scherbelastung 33
5.2 Der Phasenwinkel 36
5.3 Einfache Scherung mit rotierenden Achsen - Sonderfälle 40

6 Der Versuchsstand **44**
6.1 Versuchsanordnung 44
6.1.1 Abgrenzung zu Versuchen nach DIN 53533 Teil 2 und ISO 4666 Teil 2 46
6.2 Probekörper für einfache Scherbelastungen 47
6.2.1 Optimierung der Probekörpergeometrie 48

6.2.2 Tatsächliche und berechnete Querschnittsfläche des optimierten Probekörpers . . . 54
6.3 Abschätzung der auftretenden Kräfte und Temperaturen . . . 57
6.3.1 Freikörperbilder der Baugruppen des Versuchsstands . . . 58
6.3.2 Kräftegleichgewicht beim Mittelteil . . . 59
6.3.3 Kräftegleichgewicht für Lagerbock 1 und 2 . . . 60
6.3.4 Einfluss der Lagerreibung . . . 61
6.3.5 Abschätzung der Temperatur der Prüfkörper . . . 63
6.4 Probensynthese . . . 66
6.5 Baugruppen des Versuchsstandes . . . 67
6.6 Antriebstechnik . . . 73
6.7 Sensoren und Messtechnik . . . 74
6.7.1 Kraftaufnehmer . . . 74
6.7.2 Wegsensor . . . 75
6.7.3 Die Messstrecke . . . 76
6.8 Erste Messungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen . . . 78

7 Überblick - Werkstoffe 83
7.1 Basispolymer: Naturkautschuk (NR) . . . 83
7.2 Basispolymer: Ethylen-Propylen-Dien-Methylen (EPDM) . . . 85
7.3 Verstärkung der Polymere durch Füllstoffe . . . 85
7.4 Quasistatisches Materialverhalten . . . 86
7.4.1 Mechanische Charakterisierung der Modellmischungen mit Hilfe von Muhr-Scherversuchen . . . 87
7.4.2 Mechanische Charakterisierung unter einfacher Scherbelastung mit rotierenden Achsen . . . 89
7.5 Untersuchungen des thermischen Verhaltens . . . 98

8 Untersuchung des Lebensdauerverhaltens 102
8.1 Lebensdauerverhalten unter uniaxialem Zug . . . 102
8.1.1 Verwendete Probekörper . . . 102
8.1.2 Versuchsbeschreibung und Ausfallkriterium bei Untersuchungen des Lebensdauerverhaltens unter uniaxialem Zug . . . 104
8.1.3 Ergebnisse der Untersuchungen der Lebensdauer unter uniaxialem Zug . . . 108
8.2 Lebensdauerverhalten unter einfacher Scherung . . . 110
8.2.1 Versuchsbeschreibung: Einseitige und beidseitige einfache Scherung 110
8.2.2 Ausfallkriterium - Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherbelastung . . . 112

8.2.3 Ergebnisse der Lebensdauerversuche: einfache Scherung - einseitig 112
8.2.4 Ergebnisse der Lebensdauerversuche: einfache Scherung - beidseitig 114
8.3 Lebensdauerverhalten unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen . 116
8.4 Diskussion der Ergebnisse der verschiedenen Lebensdaueruntersuchungen 118

9 Konzept zur Lebensdauervorhersage auf Basis einer tensoriellen Schädigungsgröße 121
9.1 Simulationsrandbedingungen 123
9.2 Tensorielles Schadensmaß 127
9.2.1 Ellipsoidrepräsentation von Schädigungstensoren 128
9.2.2 Hüllellipsoide bei Last- und Richtungsmodulation 132
9.2.3 Berechnung von Hülltensoren für positiv semidefinite Tensoren . . 134
9.2.4 Der Schadenstensor 135
9.2.5 Amplitudenkorrektur und Rotationskorrektur 139
9.2.6 Der Schadenstensor und das R-Verhältnis 144
9.3 Die 2. Phase - ein Ausblick 147

10 Zusammenfassung 150

11 Ausblick 151

Literatur 153

Formelzeichenverzeichnis

Symbole

Symbol	Beschreibung
x, X	Skalare
$\underline{x}$	Vektor bzw. Tensor 1. Stufe
$\underline{\underline{X}}$	Tensor 2. Stufe
$[X_{ab}]$	Koeffizientenmatrix des Tensors $\underline{\underline{X}}$
X_I, X_{II}, X_{III}	Eigenwerte des Tensors $\underline{\underline{X}}$
$\underline{\underline{X}}^{-1}$	zu $\underline{\underline{X}}$ inverser Tensor
$\underline{\underline{X}}^{T}$	zu $\underline{\underline{X}}$ transponierter Tensor
$I_1\left(\underline{\underline{X}}\right)$	1. Invariante des Tensors $\underline{\underline{X}}$
$I_2\left(\underline{\underline{X}}\right)$	2. Invariante des Tensors $\underline{\underline{X}}$

Skalare

Symbol	Beschreibung
a	aktuelle Risslänge
a_0	Ausgangsrisslänge
a_f	finale Risslänge
A	Fläche
A_i	Ogden Materialparameter für den i-ten Anteil
A_y	Fläche mit Normalenvektor in y-Richtung
α	Neo-Hooke-Materialparameter
α_s	Winkel beim Prinzip der kritischen Schnittebenen
B	1. Parameter der empirischen Funktion q
B_i	Ogden Materialparameter für den i-ten Anteil
β	2. Parameter der empirischen Funktion q
β_s	Startwinkel beim iterativen Verfahren zur Ermittlung einer kritischen Schnittebene
D	Summe aller Schadenanteile s_i
δ	Phasenwinkel
$\varepsilon(t)$	Dehnung in Abhängigkeit der Zeit (harmonisch)
ε_0	Vordehnung
$\Delta\varepsilon$	Dehnungsamplitude
f	Frequenz
F_0	Kraftamplitude
F_R	Radialkraft, Scherkraft
F_{Max}	maximale Kraft
F_{mess}	gemessene Kraft
F_{Min}	minimale Kraft

F_T	Tangentialkraft, aus der Energiedissipation resultierende Kraft
F_x	Kraft in x-Richtung, Scherkraft
G	Schubmodul
G^*	komplexer Schubmodul
G'	Speichermodul
G''	Verlustmodul
γ	Scherdehnung
$\hat{\gamma}$	Scheramplitude bei harmonisch schwingenden Belastungen
K^*	komplexe Gesamtsteifigkeit
K^*_R	Referenzsteifigkeit zur Definition eines Ausfallzeitpunktes
K^*_V	Steifigkeit, bei der eine Probe als versagt angesehen wird
$\tilde{l}$	Länge in der Ausgangskonfiguration
λ	Streckung
λ_1, λ_2, λ_3	Streckungen in 1-, 2- und 3-Richtung
Λ_1, Λ_2, Λ_3	Lösungen der charakteristischen Gleichung von $\underline{\underline{C}}$
n_{ref}	Referenzzyklenzahl
n^P	Zyklenzahl bis zum Erreichen des im Schritt zuvor berechneten Schadens
n_1, n_2, ..., n_i	Anzahl verschiedener Schadenssummen mit jeweils gleicher Mittellast
$N(\sigma_1)$	Anzahl der erduldbaren Schwingspiele bei einer Mittelspannung von σ_1
Δn	Schwingspiele, die einen bestimmten Spannungswert erreichen
ω	Kreisfrequenz
P_F	Formänderungsleistung
P_x	x-Koordinate eines Punktes P
P_y	y-Koordinate eines Punktes P
$\dot{\phi}_{el}$	elastischer Anteil der Leistungsdichte
$\dot{\phi}_{inel}$	inelastischer Anteil der Leistungsdichte
φ	1. beim Prinzip der kritischen Schnittebenen Winkel zur Beschreibung der Ausrichtung von Ebenen zueinander
ψ	2. beim Prinzip der kritischen Schnittebenen Winkel zur Beschreibung der Ausrichtung von Ebenen zueinander
q	empirische Funktion zur Skalierung der Risslänge beim Damage Curve Approach
Q_{12}	von Zustand 1 zu Zustand 2 transportierte Wärmemenge
$Q_{12,+}$	Wärmemenge, die über einen Zeitraum von 1 nach 2 in ein System eingebracht wird
$Q_{12,-}$	Wärmemenge, die über einen Zeitraum von 1 nach 2 aus einem System abgeführt wird
R	R-Verhältnis
s	Schermaß

s_i	i-ter Schadensanteil
σ_{Max}	maximale (Zug-) Spannung in Form von Cauchy-Spannungen
$\sigma_{MAX,EW}$	maximaler Eigenwert von $\underline{\underline{\sigma}}$
σ_{Min}	minimale (Zug-) Spannung in Form von Cauchy-Spannungen
$\sigma_{V,Mises}$	Vergleichsspannung nach v. Mises
$\sigma_{V,Tresca}$	Vergleichsspannung nach Tresca
t	Zeit
t_V	theoretischer Versagenszeitpunkt bei Lebensdauerexperimenten
$\tilde{t}$	Zeit in der Referenzkonfiguration
Δt	Zeitintervall
τ	Scherspannung
$\hat{\tau}$	Amplitude der Scherspannung
τ_e	elastische Scherspannung
τ_R	Relaxationszeit
$\tau_{R,i}$	verschiedene Relaxationszeiten für zum Beispiel i parallel geschaltete Maxwell-Elemente
u_0	Vorlast bei einer oszillierenden Verschiebung
u_1, u_2	innere Energie zum Zeitpunkt 1 bzw. 2
$u(F)$	Verschiebung in Abhängigkeit einer Zugkraft F
$u(t)$	Verschiebung in Abhängigkeit der Zeit t
U_{Ref}	elektrische Referenzspannung
U_{Sig}	Signal- bzw. Messspannung
Υ	Schaden
Υ_{max}	maximal erduldbare Schadensmenge
Δu	Amplitude einer harmonisch oszillierenden Verschiebung
V	Volumen
V_i	Variable zur quantitativen Beurteilung von Deformationen für inkompressible Materialien
W	Energiedichte
W_{12}	vom Zeitpunkt 1 bis zum Zeitpunkt 2 geleistete Wellenarbeit
W_F	Formänderungsarbeit
W_{NH}	Energiedichte nach Neo-Hooke
W_O	Energiedichte nach Ogden
W_Y	Energiedichte nach Yeoh
ξ	Haltbarkeit

Vektoren

Symbol	Beschreibung
$\underline{e}_A$, $\underline{e}_a$	Orthonormierte Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystem
$\underline{F}_R$	Radialkraft, Kraftvektor beim Rührversuch in Richtung der Auslenkung
$\underline{F}_T$	Tangentialkraft, Kraftvektor beim Rührversuch senkrecht zur Richtung der Auslenkung
$\underline{n}$	Normalenvektor einer Ebene
$\underline{M}$	Antriebsmoment für den Versuchsaufbau einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen nach Gent [Gen60]
$\underline{v}_i$	Eigenvektoren
$\underline{e}_{vi}$	normierte Eigenvektoren
$\underline{F}$	Kraftvektor
$\underline{r}$	Ortsvektor
$\underline{s}$	Spannungsvektor

Tensoren

Symbol	Beschreibung
$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$	symmetrische Beispieltensoren 2. Stufe
$\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$	symmetrische Beispieltensoren 2. Stufe
$\underline{\underline{b}}$	linker Cauchy-Green-Tensor
$\underline{\underline{B}}_{verz}$	mit $\underline{\underline{A}}^{-1}$ verzerrter Tensor
$\underline{\underline{C}}$	rechter Cauchy-Green-Tensor
$\underline{\underline{D}}$	tensorielle Schadenssumme in einem Materialpunkt
$\underline{\underline{D}}^{local}_{neu}$	aktualisierter Schadenstensor im System der Eigenvektoren des zu dessen Bestimmung erforderlichen Cauchy-Spannungstensors
$\underline{\underline{E}}$	Einheits- oder Kugeltensor
$\underline{\underline{F}}$	Deformationsgradient
$\underline{\underline{H}}$	der von einem Hüllellipsoid repräsentierte Tensor
$\underline{\underline{H}}_{verz}$	mit $\underline{\underline{A}}^{-1}$ verzerrter Hülltensor
$\underline{\underline{\lambda}}$	Tensor der Verformungsgeschwindigkeiten
$\underline{\underline{\sigma}}$	Cauchy-Spannungstensor
$\underline{\underline{R}}$	Rotationstensor
$\underline{\underline{R}}_{\sigma}$	Rotationstensor zur Drehung von $\underline{\underline{\sigma}}$ ins System der Eigenvektoren
$\underline{\underline{S}}$	Tensor der Schadenssumme
$\underline{\underline{s}}$	tensorieller Teilschaden
$\underline{\underline{T}}$	1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\underline{\underline{\tilde{T}}}$	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\underline{\underline{U}}$	rechter Strecktensor
$\underline{\underline{\xi}}$	Haltbarkeitstensor

1 Einleitung und technisch wirtschaftliche Motivation

1.1 Einleitung

Für industrielle Anwendungen ist die Vorhersagbarkeit der Lebensdauer von Produkten, Teilen und Baugruppen von großem Interesse. Bei Produkten, die teilweise oder ganz aus inelastischen Werkstoffen bestehen, ist die Lebensdauervorhersage jedoch besonders schwierig, da viele unterschiedliche Faktoren berücksichtigt werden müssen. Insbesondere hat der im Produkt auftretende Belastungsfall einen maßgeblichen Einfluss auf die resultierende Lebensdauer. Zudem werden für die Lebensdauervorhersage in Ermangelung besserer Alternativen in der Regel noch immer speziell für Metalle entwickelte Ansätze verwendet, die eine Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften von Gummimaterialien schlichtweg nicht vorsehen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen neuen Aspekt bei der Lebensdauervorhersage technischer Gummiwerkstoffe aufzuzeigen und dessen Berücksichtigung in zukünftigen Lebensdaueruntersuchungen mit Hilfe eines Modells zu ermöglichen.

Hierzu wird die Konstruktion und Fertigung einer Prüfmaschine in Anlehnung an den von Gent [Gen60] vorgeschlagenen Versuchsstand für Untersuchungen von einfachen Scherdeformationen mit rotierenden Achsen (Rührversuch) beschrieben. Ausgehend von dem von Gent vorgeschlagenen Versuchsprinzip wird zunächst die Entwicklung und die Herstellung einer geeigneten Probekörpergeometrie dargestellt. In Kombination mit umfassenden Lebensdaueruntersuchungen unter Verwendung des Rührversuchs und mit ergänzenden Informationen aus Messergebnissen sowohl unter Zugbelastungen als auch unter einfacher Scherung werden neue, die Lebensdauer maßgeblich beeinflussende Kennwerte vorgestellt.

Die vorliegende Arbeit beschreibt die ersten Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherdeformationen mit rotierenden Achsen, sowie die dazugehörigen Optimierungen und die Synthese einer geeigneten Probekörpergeometrie. Gleichzeitig werden die Ergebnisse klassischer Lebensdauerexperimente von vier Modellmischungen sowie eine Methode zur mechanischen Charakterisierung von Werkstoffen mit Hilfe des Rührversuchs vorgestellt. Anhand der neu gewonnen Erkenntnisse wird ein Lebensdauermodell in tensorieller Form abgeleitet, das zusätzlich zu einer Amplitudenmodulation auch eine Schädigung durch eine Rotation der Belastungsrichtungen berücksichtigt.

Die Lebensdauervorhersage von Metallen erfolgt über zyklische Dauerlastversuche bis zum Bruch. Das Lebensdauerverhalten wird hierbei als Materialeigenschaft angesehen, so dass die wesentlichen Informationen mit Hilfe einfacher Versuche erlangt und auf das Bauteil übertragen werden können. Diese Vorgehensweise erscheint insbesondere unter wirtschaftlichen Aspekten von Vorteil, da die Versuche verhältnismäßig günstig und im Vergleich zu realen Einsatzbedingungen der Bauteile von kurzer Dauer sind. Das Lebensdauerverhalten kann im Vorfeld zum Beispiel mit Hilfe von Wöhler-, Coffin-Manson-, Smith- oder

Haighdiagrammen charakterisiert werden. Viele Methoden zur Abschätzung der Lebensdauereigenschaften haben jedoch eines gemeinsam: Zur Ermittlung der die Lebensdauer bestimmenden Schädigungskennwerte werden fast ausschließlich Versuche herangezogen, deren Belastung im Versuchsverlauf äquidirektional bleibt.

Bei herkömmlichen Methoden zur Lebensdauerprognose wird zudem einzig eine skalare Größe aus der Belastung abgeleitet und zur Beschreibung der Schädigung herangezogen. Somit kann nicht eindeutig berücksichtigt werden, aus welcher Deformation diese Belastung resultiert oder ob sich diese Deformation im Verlauf der Untersuchungen verändert. Diese Vorgehensweise reicht in vielen Fällen für die Beschreibung des Ermüdungsverhaltens von Metallen aus. Eine Anwendung solcher Methoden zur Beschreibung des Ermüdungsverhaltens technischer Gummiwerkstoffe ist jedoch fehlerbehaftet.

Technische Gummiwerkstoffe unterscheiden sich in vielen Eigenschaften von Metallen bei kleinen Deformationen. Ein für die Untersuchung der Lebensdauer wichtiger Aspekt ist die Tatsache, dass die Änderung der Ausrichtung einer Deformation nur unter Aufwendung von Energie möglich ist. Dies steht im Gegensatz zu den Eigenschaften von Metallen, für die aufgrund von Elastizität und Isotropie bei Richtungsänderungen im Verlauf von Deformationsprozessen keine Energie aufgewendet werden muss.

Der von A. Gent [Gen60] im Jahr 1960 vorgestellte Versuch zur Umsetzung einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen, dient der Aufteilung einer Scherkraft in einen Anteil in Belastungsrichtung und einen Anteil senkrecht dazu, die jeweils gesondert messbar sind, wobei der Anteil senkrecht zur Belastungsrichtung bei elastischen Werkstoffen null ist. Hierzu werden nach Gent zwei zylindrische Proben in der so genannten Double-Sandwich-Anordnung durch eine Gewichtskraft ausgelenkt und anschließend in Rotation versetzt.

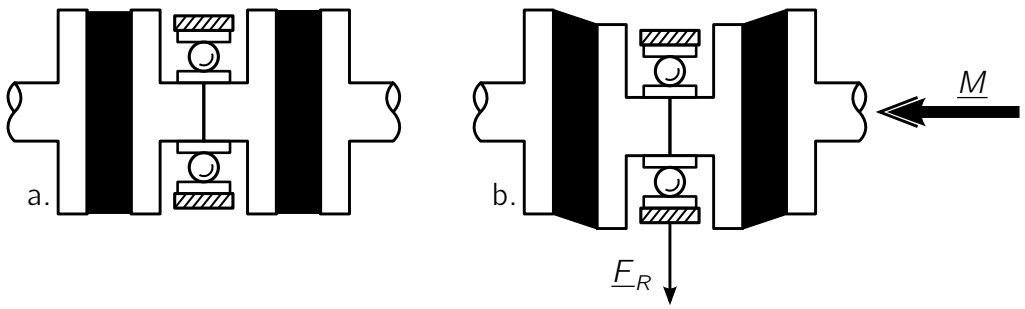


Abb. 1.1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus für einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen nach Gent [Gen60] im unbelasteten Zustand (a.) und im ausgelenkten Zustand mit Rotationsmoment (b.).

Ein erstes Ergebnis ist, dass laut Gent im Rahmen der Messungenauigkeit eine lineare Abhängigkeit zwischen der auslenkenden Kraftkomponente und der aufgrund von Energiedissipation entstehenden Kraftkomponente besteht. Mit der Realisierung des Versuchsstandes für einfache Scherungen mit rotierenden Achsen und mit Hilfe einer optimierten

Probekörpergeometrie nach Freund [Fre06] besteht nun die Möglichkeit, die Messungen zu wiederholen, die von Gent vorgestellte Theorie zu bestätigen und auf große Deformationen zu übertragen.

Neben der mechanischen Charakterisierung von Werkstoffparametern soll die Versuchsanlage vornehmlich zur Untersuchung der Lebensdauereigenschaften technischer Gummiwerkstoffe verwendet werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll überprüft werden, ob eine Rotation von Belastungsrichtungen einen Einfluss auf die Lebensdauer von Gummimaterialien hat. Zusätzlich zur messtechnischen Beschreibung der Lebensdauer technisch genutzter Gummiwerkstoffe ermöglicht ein tensorbasiertes Modell für das Ermüdungsverhalten in einem Materialpunkt eine Vorhersage der Lebensdauer komplexer, beliebig beanspruchter Bauteile mit Hilfe der Finite Elemente Methode. Eine frühzeitige Erkennung potentieller Rissursprünge oder lokaler hochgeschädigter Materialpunkte erlaubt eine Optimierung der Bauteile hinsichtlich der Lebensdauer, wie es bislang noch nicht möglich war. Auf diese Weise können sowohl Entwicklungsschleifen eingespart, als auch qualitativ hochwertigere Bauteile erstellt werden.

Für die Abschätzung der Lebensdauer eines Bauteils gibt es drei Möglichkeiten:

1. Experimentelle Untersuchungen am Bauteil selbst.
2. Experimentelle Untersuchungen an bauteilnahen Probekörpergeometrien.
3. Experimentelle Untersuchungen an einfache Probekörpern und eine rechnergestützte Abschätzung der Lebensdauer des komplexen Bauteils mit Hilfe einer geeigneten Schädigungshypothese.

Der erste Aspekt erfordert viele Testläufe. Untersuchungen der Geometrie und Einflüsse von leichten Geometrievariationen sind sehr kostspielig. Zudem benötigt die Durchführung von Optimierungsschleifen Zeit, um eine repräsentative Anzahl von Versuchen durchzuführen. Der zweite Ansatz ist kostengünstiger und schneller als der erste. Es besteht jedoch eine Unsicherheit bei der Adaption der Ermüdungseigenschaften vom Probekörper auf das Bauteil. Zudem sind die Einflüsse von Geometrievariationen schwer vorhersehbar. Eine Vorhersage der Lebensdauer mit Hilfe von Simulationswerkzeugen, wie zum Beispiel der Finite Elemente Methode, ermöglicht kürzere Entwicklungslaufzeiten und die Einsparung vieler Prototypen und Optimierungsschleifen. Zudem besteht die Möglichkeit, Optimierungen in Hinsicht auf die Verbesserung der Ermüdungseigenschaften von Bauteilen am Rechner umzusetzen. Auf diese Weise können kritische Bereiche noch in der Entwicklungsphase erkannt und bei der Konstruktion berücksichtigt werden. Hierzu ist jedoch ein sinnvoller Ansatz für die Vorhersage der Lebensdauer für beliebige Deformationen erforderlich. Wünschenswert ist eine Formulierung, die nicht nur ausschließlich auf unixaxialen Versuchen beruht, sondern die eine Möglichkeit bietet, beliebige Deformationen für die Charakterisierung heranzuziehen.

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Beschreibung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Phänomene erfordert ein Verständnis grundlegender kontinuumsmechanischer Zusammenhänge. Das nachfolgende Kapitel zeigt einige, für dieses Verständnis wichtige Zusammenhänge auf. Die beschriebenen Zusammenhänge stützen sich auf überwiegend auf Haupt [Hau02].

2.1 Deformationsmaße

Nach [Fre13] beschreibt der Begriff *Deformation* eine Veränderung eines Formzustandes in Bezug auf eine Referenzkonfiguration. In ähnlicher Weise wird eine Deformation kontinuumsmechanisch über den Deformationsgradienten beschrieben. Gegeben sei der materialfeste Vektor $d\underline{\tilde{r}}$ mit dem Ortsvektor $\underline{\tilde{r}}$ eines Materialpunktes des Körpers $\tilde{K}$ zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ (siehe Abbildung 2.1). Aufgrund einer Deformation von $\tilde{K}$ zu einer neuen Konfiguration K, der Momentankonfiguration, zum Zeitpunkt t verändern sich $\underline{\tilde{r}}$ und $d\underline{\tilde{r}}$ zu den Vektoren $\underline{r}$ und $d\underline{r}$.

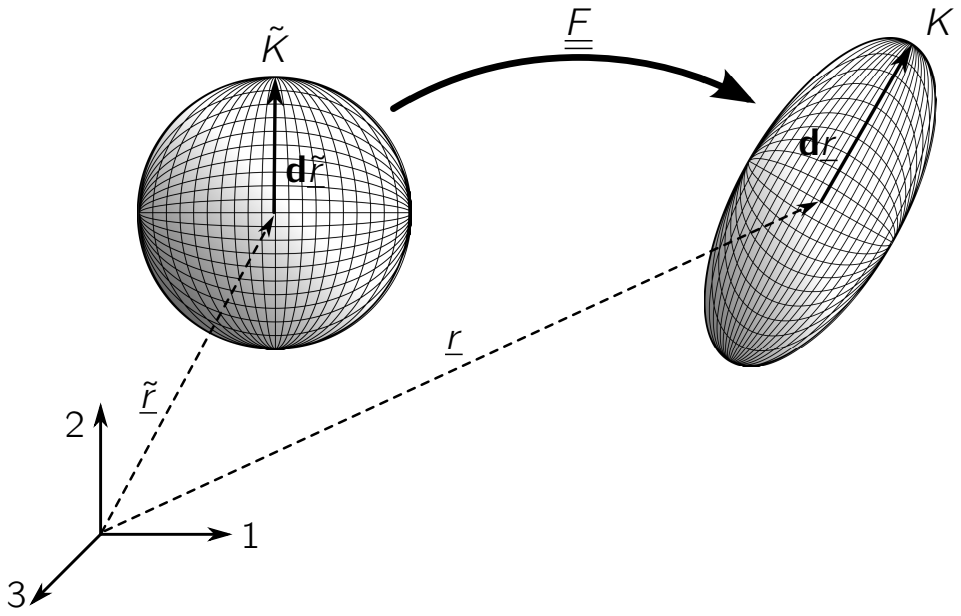


Abb. 2.1: Schematische Darstellung des Deformationsgradienten

Die Beschreibung der Zusammenhänge zwischen $d\underline{\tilde{r}}$ und $d\underline{r}$ erfolgt über den Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ nach Gleichung 2.1.

$$d\underline{r} = \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{\tilde{r}} \tag{2.1}$$

Der Deformationsgradient lässt sich über eine Polarzerlegung in einen Strecktensor und einen Rotationstensor aufteilen. Der Strecktensor in der lagrangeschen Betrachtungsweise

ergibt sich aus der positiv definiten Wurzel des Produkts des transponierten Deformationsgradienten mit dem Deformationsgradienten.

$$\underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}} \tag{2.2}$$

Der rechte Cauchy-Green-Tensor $\underline{\underline{C}}$ ist das Quadrat des rechten Strecktensors $\underline{\underline{U}}$.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 \tag{2.3}$$

Über die Gleichung

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \tag{2.4}$$

kann der Rotationstensor $\underline{\underline{R}}$ isoliert werden.

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} \tag{2.5}$$

In ähnlicher Weise lassen sich Deformationstensoren der eulerschen Betrachtungsweise bestimmen. Der linke Cauchy-Green-Tensor ist das Produkt des Deformationsgradienten mit seinem Transponierten.

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \tag{2.6}$$

Die Wurzel des linken Cauchy-Green-Tensors entspricht dem linken Strecktensor.

$$\underline{\underline{V}} = \sqrt{\underline{\underline{b}}} \tag{2.7}$$

Analog zu der Aufteilung in einen Streckanteil und einen rotatorischen Anteil in lagrangescher Betrachtungsweise ist auch mit Hilfe des linken Strecktensors eine Polarzerlegung möglich.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \tag{2.8}$$

2.2 Spannungsgrößen

Ein belasteter Körper weist in einem Punkt und entlang einer gedachten Schnittebene ΔA eine resultierende innere Schnittkraft $\Delta \underline{F}$ auf. $\Delta \underline{F}$, bezogen auf ΔA beschreibt die mittlere Flächenlast für diese Teilfläche. Der Grenzwert für $\Delta A \to 0$ wird als Spannungsvektor $\underline{s}$ bezeichnet.

$$\underline{s} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \tag{2.9}$$

Cauchy beschreibt den Spannungszustand in einem Punkt mit Hilfe des Cauchy-Spannungstensors (siehe Cauchy [Cau27]). Hierzu wird jeder möglichen Schnittebene in diesem Punkt, repräsentiert durch den zugehörigen Einheitsnormalenvektor $\underline{n}$, mit Hilfe des Cauchy-Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ ein Spannungsvektor $\underline{s}$ zugeordnet.

$$\underline{s} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \tag{2.10}$$

Der Cauchy-Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ ist eine eulersche Spannungsgröße. Mit Hilfe des Deformationsgradienten kann der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor als lagrangesche Größe wie folgt berechnet werden.

$$\underline{\underline{\widetilde{T}}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \frac{\widetilde{\rho}}{\rho} \tag{2.11}$$

2.3 Tensoren als Ellipsoide

Der Umgang mit Skalaren und Vektoren ist aufgrund der geometrischen Anschaulichkeit dieser Größen vergleichsweise einfach. Diese Anschaulichkeit geht bei Tensoren höherer Ordnung verloren. Besdo und Ihlemann beschreiben in [Bes04] jedoch eine anschauliche und leicht zugängliche Methode zur geometrischen Deutung symmetrischer, positiv definiter Tensoren zweiter Ordnung. Die Grundlage bildet Gleichung 2.10, wobei anstelle des Cauchy-Spannungstensors ein symmetrischer, positiv definiter Tensor $\underline{\underline{A}}$ verwendet werden soll. Analog zur Vorgehensweise von Cauchy soll $\underline{\underline{A}}$ zu jeder Schnittebene mit der Normalen $\underline{n}$ ein Vektor $\underline{a}$ zugeordnet werden.

$$\underline{a} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}} \tag{2.12}$$

Über eine Multiplikation mit dem Inversen von $\underline{\underline{A}}$ kann der Einheitsnormalenvektor in Gleichung 2.12 auf einer Seite isoliert werden.

$$\underline{n} = \underline{a} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \tag{2.13}$$

Die Multiplikation des Einheitsnormalenvektors mit sich selber ergibt dessen Längenquadrat.

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{n} &= 1 \\ 1 &= \underline{a} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{a} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Wird die Gleichung aufgelöst und im System der Eigenrichtungen von $\underline{\underline{A}}$ betrachtet, ergibt sich nachstehende Formulierung.

$$1 = \left(\frac{a_I}{A_I}\right)^2 + \left(\frac{a_{II}}{A_{II}}\right)^2 + \left(\frac{a_{III}}{A_{III}}\right)^2 \tag{2.15}$$

Aufgrund der Äquivalenzumformungen kann Gleichung 2.15 nur durch diejenigen Tripel a_1, a_2 und a_3 sinnvoll gelöst werden, die entsprechend Gleichung 2.12 alle Vektoren $\underline{a}$ beschreiben. Eine Anpassung von Gleichung 2.15 für Koordinatengrößen x, y und z führt zur Gleichung eines Ellipsoids dessen halbe Abmessungen den Eigenwerten von $\underline{\underline{A}}$ entsprechen und dessen räumliche Ausrichtung mit dessen Haupteigenrichtungen übereinstimmen. Dies wird zum Beispiel auch von Besdo und Ihlemann in [Bes04] gezeigt.

$$f(x,y,z) \;\rightarrow\; 1 = \left(\frac{x}{A_I}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_{II}}\right)^2 + \left(\frac{z}{A_{III}}\right)^2 \tag{2.16}$$

3 Definitionen von Begriffen und Phänomenen

Im Verlauf des nachfolgenden Abschnitts werden einige, für das Verständnis der vorliegenden Arbeit wichtige Begriffe definiert. Hierbei sollen die Begriffe zueinander abgegrenzt und gleichzeitig das Verständnis für deren Erweiterung motiviert werden.

3.1 Haltbarkeit und Ermüdung

Haltbarkeit ist eine Größe zur Quantifizierung des Ermüdungszustandes eines Materialpunktes im kontinuumsmechanischen Gefüge. In Anlehnung an die von Miner in [Min45] beschriebene lineare Schadensakkumulation für isotrope Materialien soll ein Materialpunkt, der am Zeitpunkt null seiner Belastungsgeschichte steht, eine Haltbarkeit von eins haben. Jeder Belastungsprozess führt zu einer Abnahme der Haltbarkeit des Materials. Erreicht ein Materialpunkt eine Haltbarkeit von null, ist die Lebensdauer zu Ende und das Gefüge des Materials gilt als zerstört. In der Realität tritt eine solche Zerstörung des Gefüges meist lokal auf und betrifft zu Beginn der ermüdungsbedingten Schädigung nur ein vernachlässigbar kleines Materialvolumen. Die Auswirkungen des defekten Gefüges auf das gesamte Bauteil fallen dementsprechend gering aus und verändern die Materialeigenschaften in Summe nur unwesentlich. Mit Voranschreiten der Lebensdauer des Bauteils steigt die Anzahl der lokalen Schadstellen und die Größe des geschädigten Volumens jedoch an und verändert immer weiter die globalen Bauteileigenschaften. Eine messbare Veränderung der Struktureigenschaften weist folglich auf mehrere lokal existierende Schadstellen hin. Gleichzeitig sind die erwähnten anfänglichen Veränderungen des Materialgefüges für den Einsatz des Bauteils zunächst unerheblich, so dass ein Bauteil oder auch eine zyklisch beanspruchte Probe zu einem frühen Zeitpunkt in der Lebensdauer insgesamt noch nicht als zerstört gilt, obgleich möglicherweise bereits mehrere Schadensorte existieren, an denen das Materialgefüge zerstört ist. Für die Abschätzung der Haltbarkeit technischer Bauteile, aber auch für die Erstellung von Wöhlerdiagrammen, ist es daher von äußerster Wichtigkeit festzulegen, unter welchen Bedingungen ein Bauteil oder eine Probe als ausgefallen gilt. Eine ausführlichere Diskussion dieser Zusammenhänge, die experimentellen Untersuchungen der vorliegenden Arbeit betreffend, findet sich in Kapitel 8.

Für gummiähnliche, anisotrop ermüdende Materialien muss die Haltbarkeit eines Materialpunktes in tensorieller Form beschrieben werden, um eindeutige Aussagen über dessen Haltbarkeitszustand im Raum machen zu können. Entsprechend dieser Voraussetzung wird die Haltbarkeit eines Punktes in einem gummiähnlichen Material zum Zeitpunkt null seiner Belastungsgeschichte über den Einheitstensor $\underline{\underline{E}}$ wiedergegeben. Der Kehrwert der Haltbarkeit soll als Ermüdung bezeichnet werden, das Inverse des Haltbarkeitstensors als Ermüdungstensor. Aus experimenteller Sicht bezeichnet *Ermüdung* eine messtechnisch erfassbare Größe die graduell zwischen dem unbelasteten Zustand und der Zerstörung der

Struktur verläuft. Ein Beispiel hierfür ist die belastungsinduzierte Abnahme der Zugfestigkeit (siehe Gent [Gen03]). Bei zyklischer Belastung kann die Zugfestigkeitsgrenze in einem Materialpunkt so weit abnehmen, dass sie unterhalb der maximalen Belastung eines Belastungszyklus liegt. In diesem Fall tritt Materialversagen ein und die Ermüdung erreicht den Wert unendlich.

3.2 Lebensdauer

Die Lebensdauer eines Materialpunktes verläuft zwischen einer Haltbarkeit von eins und einer Haltbarkeit von null. Maßgeblich ist hierbei die durch die zyklische Aufbringung von Belastungen bedingte Abnahme der Haltbarkeit, wobei sowohl die Intensität der Belastung als auch die Anzahl der Belastungszyklen einen Einfluss haben. So können zwei identische Materialien, die jeweils den gleichen Haltbarkeitszustand aufweisen, durchaus eine unterschiedliche Lebensdauer haben. Die Abnahme der Haltbarkeit bei einem hochbelasteten Materialpunkt ist zum Beispiel größer, als bei einem niedrig belasteten. Dementsprechend ist die Lebensdauer des hoch belasteten Materialpunktes niedriger, als die des niedrig belasteten Materialpunktes, obwohl beide Materialpunkte aus dem gleichen Material bestehen und zu Beginn der Belastungen den gleichen Haltbarkeitszustand aufweisen. In Analogie zu isotropen Materialien entspricht die Lebensdauer von gummiähnlichen Materialien dem Zeitraum vom Beginn der Belastungsgeschichte des Materialpunktes bis zu dem Zeitpunkt, an dem ein Eigenwert des Haltbarkeitstensors an diesem Materialpunkt den Wert null erreicht hat.

3.3 Schadensmenge

Die Schadensmenge ist eine belastungsabhängige Größe, die eine Vergleichbarkeit des Ermüdungsverhaltens unterschiedlicher Materialien zueinander ermöglicht. Die maximal erduldbare Schadensmenge ist ein materialabhängiger Wert der angibt, wie viel Schaden ein Materialpunkt aushält, bevor dessen Haltbarkeit von eins auf null gesunken ist. Jede Belastung führt zu einem Schaden, der die Haltbarkeit eines Materialpunktes reduziert. Die Haltbarkeit für isotrop ermüdende Materialien gemäß Gleichung 3.1 entspricht der Differenz aus der maximalen Schadensmenge und der bis zum aktuellen Zeitpunkt erduldeten Schadensmenge, bezogen auf die maximale Schadensmenge. Hierbei steht ξ für die Haltbarkeit, Υ_{max} für die maximal erduldbare Schadensmenge und Υ für den induzierten Schaden.

$$\xi = \frac{\Upsilon_{max} - \Upsilon}{\Upsilon_{max}} \tag{3.1}$$

Die Verwendung skalarer Werte für Schaden und Haltbarkeit ist nur bei isotropem Ermüdungsverhalten zulässig und stellt eine Vereinfachung der tatsächlichen Zusammenhänge dar.

Tatsächlich ist auch die Ermüdung in einem isotropen Material räumlich und bedürfte theoretisch einer tensoriellen Formulierung. Aufgrund der richtungsunabhängigen Ermüdung elastomerer Materialien führen skalare Beschreibungen von Haltbarkeit und Schaden in diesem speziellen Fall jedoch zu keinem Unterschied in der Lebensdauerprognose. Die tensorielle Definition für den Zusammenhang zwischen induziertem Schaden $\underline{\underline{\Upsilon}}$, der maximal erduldbaren Schadensmenge $\underline{\underline{\Upsilon}}_{max}$ und der Haltbarkeit $\underline{\underline{\xi}}$ lautet wie folgt.

$$\underline{\underline{\xi}} = \sqrt{\underline{\underline{\Upsilon}}_{max}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{\Upsilon}}_{max} - \underline{\underline{\Upsilon}}\right) \cdot \left(\underline{\underline{\Upsilon}}_{max} - \underline{\underline{\Upsilon}}\right) \cdot \underline{\underline{\Upsilon}}_{max}^{-1}} \tag{3.2}$$

Der Tensor der maximal erduldbaren Schadensmenge ist im Normalfall ein Kugeltensor, der mit Hilfe einer skalaren maximalen Schadensmenge und dem Einheitstensor dargestellt werden kann.

$$\underline{\underline{\Upsilon}}_{max} = \Upsilon_{max} \cdot \underline{\underline{E}} \tag{3.3}$$

3.4 Belastung und Belastungsprozess

Neben den Beobachtungen des aktuellen Zustands eines Materialpunktes sind zeitlich veränderliche mechanische Vorgänge, also Be- und Entlastungsprozesse, für die Analyse und die Prognose des Lebensdauerverhaltens eines Bauteils von Bedeutung. Hierzu sind zunächst genaue Definitionen der Begriffe *Belastung* und *Belastungsprozess* erforderlich. Der Begriff *Belastung* wird für die Verwendung im Rahmen der vorliegenden Arbeit wie folgt definiert:

> *Eine Belastung in einem Punkt A liegt dann vor, wenn der in diesem Punkt wirkende Spannungstensor ungleich dem Nulltensor ist.*

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(A)} \neq \underline{\underline{0}} \tag{3.4}$$

Für den Übergang von einer Belastung zu einem Belastungsprozess ist die Betrachtung eines einzelnen Zeitpunktes nicht mehr ausreichend. Vielmehr ist es erforderlich, einen Zeitraum oder zumindest mehrere Zeitpunkte zu betrachten: als Reaktion auf die induzierte Spannung in einem Materialpunkt findet eine Verformung statt. Durch die Kombination aus Spannung und der zugehörigen Verformung wird ein Teil des resultierenden Potentials in diesem Punkt gespeichert: die Formänderungsenergie. Mit Hilfe des Cauchy-Spannungstensors und dem Tensor der Verformungsgeschwindigkeiten lässt sich nach Ihlemann [Ihl03] zunächst die Formänderungsleistung bestimmen.

$$P_F = \overset{\mathbf{G}}{\int} \underline{\underline{\sigma}} \cdot\cdot \underline{\underline{\lambda}} \; dV \tag{3.5}$$

Die Formänderungsarbeit kann über eine Integration der Formänderungsleistung über die Zeit bestimmt werden.

$$W_F = \int P_F \; dt \tag{3.6}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 3.5 und 3.6 kann nun im Rahmen der vorliegenden Arbeit definiert werden, unter welchen Voraussetzungen ein Belastungsprozess stattfindet.

> *Es liegt ein Belastungsprozess vor, wenn der Betrag des Potentials in einem Materialvolumen zum aktuellen Zeitpunkt t größer ist, als zu einem früheren Zeitpunkt, zum Beispiel in der Referenzkonfiguration zu einem Zeitpunkt $\tilde{t}$.*

Dies entspricht einem positiven Wert der zugehörigen Formänderungsleistung.

$$W_F\left(t\right) > W_F\left(\tilde{t}\right) \rightarrow P_F > 0 \tag{3.7}$$

Ist die Differenz des gespeicherten Potentials von zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten kleiner als null, so handelt es sich um einen Entlastungsprozess. In diesem Falle ist die Formänderungsleistung negativ.

$$W_F\left(t\right) < W_F\left(\tilde{t}\right) \rightarrow P_F < 0 \tag{3.8}$$

Liegt bei ideal inkompressiblen Materialien in einem Materialpunkt ein hydrostatischer Spannungszustand an, so ist der Materialpunkt zwar belastet, das Aufbringen der hydrostatischen Spannungen wird aber definitionsgemäß nicht als Belastungsprozess gewertet, da das Material volumenkonstant bleibt und somit keine Verformungsleistung aufgewendet werden muss. Dies erscheint zunächst widersprüchlich. Es muss jedoch beachtet werden, dass vollständige Inkompressibilität nur eine Idealvorstellung ist und technische Gummiwerkstoffe in der Realität bei einem hydrostatischen Spannungszustand ihr Volumen ändern, wobei eine kleine Volumenänderung große hydrostatische Spannungen voraussetzt. Unter diesem Aspekt kann das Aufbringen einer hydrostatischen Spannung bei technischen Elastomeren durchaus als Belastungsprozess angesehen werden.

4 Methoden zur Lebensdauerprognose

Es existieren unterschiedlichste Ansätze zur Vorhersage des Ermüdungsverhaltens elastomerer Bauteile. Diese Ansätze haben jedoch häufig eines gemein: sie stützen sich auf Grundlagen die aus Erkenntnissen der Metalltechnik abgeleitet wurden. Dadurch werden viele, für technische Gummiwerkstoffe wichtige Aspekte vernachlässigt. Nachfolgend soll ein Überblick über das Vorgehen bei Lebensdauerprognosen im Allgemeinen und über einige ausgewählte Ansätze im Speziellen gegeben werden.

Herkömmliche Lebensdauerexperimente beinhalten uniaxiale zyklische Belastungstests, die bis zum Versagen der Probe durchgeführt werden. Die ausschlaggebende Messgröße ist hierbei die Anzahl der von der Probe erduldeten Belastungszyklen bis zum Ausfall des Materials. Untersuchungen zur Charakterisierung des Lebensdauerverhaltens eines Werkstoffes werden in Abhängigkeit von der Belastungsintensität durchgeführt. Hierbei können uniaxiale Lebensdauerversuche in zwei Kategorien eingeteilt werden, die von der Art der Lastaufbringung abhängig sind. Es wird zwischen einer weggesteuerten und einer kraftgesteuerten Lastaufbringung unterschieden. Bei der Wegsteuerung wird die Belastung über eine mittels einer zyklischen Verschiebung aufgebrachte Streckung definiert. Die sich in diesem Zusammenhang im Material einstellende maximale Spannung verändert sich bei technischen Gummiwerkstoffen mit einer wachsenden Anzahl von Belastungszyklen stetig, was auf das Auftreten von Entfestigungseffekten und die Materialermüdung zurückführbar ist. Diese Effekte sind in der Literatur bereits von Mullins [Mul69] oder Fletcher & Gent [Fle53] sowie Payne [Pay62] beobachtet und beschrieben worden bzw. im Falle der Entfestigung durch Ermüdung von Mars et. al. [Mar06b]. Dies trifft sowohl für die Cauchy-Spannungen $\underline{\underline{\sigma}}$, als auch für die 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen $\underline{\underline{T}}$ zu. Bei weggesteuerten uniaxialen Lebensdauerexperimenten bleibt das Verformungsbild der Proben im Verlauf einer zyklischen Dauerbelastung im homogen belasteten Bereich gleich. Änderungen treten erst auf, wenn das Materialgefüge durch Bildung von Rissen gestört wird.

Bei der Kraftsteuerung wird zur Lastaufbringung im Verlauf eines Zyklus jeweils ein maximaler und ein minimaler Kraftwert angesteuert. Abhängig vom Entfestigungszustand des Materials verändert sich die maximale und die minimale Auslenkung der Probe. Der Vorteil bei einer Kraftsteuerung ist, dass auch das wiederholte Anfahren eines spannungsfreien Zustands problemlos möglich ist. Das R-Verhältnis, der Quotient aus Unterspannung und Oberspannung,

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \tag{4.1}$$

kann somit konstant gehalten werden: Wird die Querschnittsfläche einer unbelasteten Probe als Referenz betrachtet und liegt diese Fläche im belasteten Zustand im als homogen

deformiert zu betrachtenden Bereich, so ist der Wert für die Maximalspannung des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors für jeden Belastungszyklus stets gleich. Wird jedoch stets die Querschnittsfläche im spannungsfreien Zustand betrachtet, die sich mit einer wachsender Anzahl an Belastungszyklen aufgrund inelastischer Effekte verändert, so kann auch der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor mit wachsender Anzahl an Belastungszyklen neue Werte annehmen. Die Cauchy-Spannungen wachsen im Verlauf der zyklischen Belastungen mit der Ermüdung des Materials an. Dies ist durch eine größere Verschiebung begründet, die zur Aufbringung des kraftgesteuerten Lastniveaus bei einem bereits entfestigten Material erforderlich ist. Dies ist gleichzeitig mit einer ausgeprägteren Querkontraktion der Probe im homogenen Bereich gekoppelt.

Im Verlauf einer Lebensdaueruntersuchung besteht die Möglichkeit, sowohl die Amplitude der zyklischen Last, als auch den zugehörigen Kraftmittelwert zu variieren. Cadwell [Cad40], Abraham & Alshuth [Abr01] und [Abr02] konnten in diesem Zusammenhang eine ausgeprägte Unterlastabhängigkeit der Lebensdauer bei zyklischen Dauerlastversuchen aufzeigen. Dieser Zusammenhang wird in Kapitel 9.2 näher erläutert.

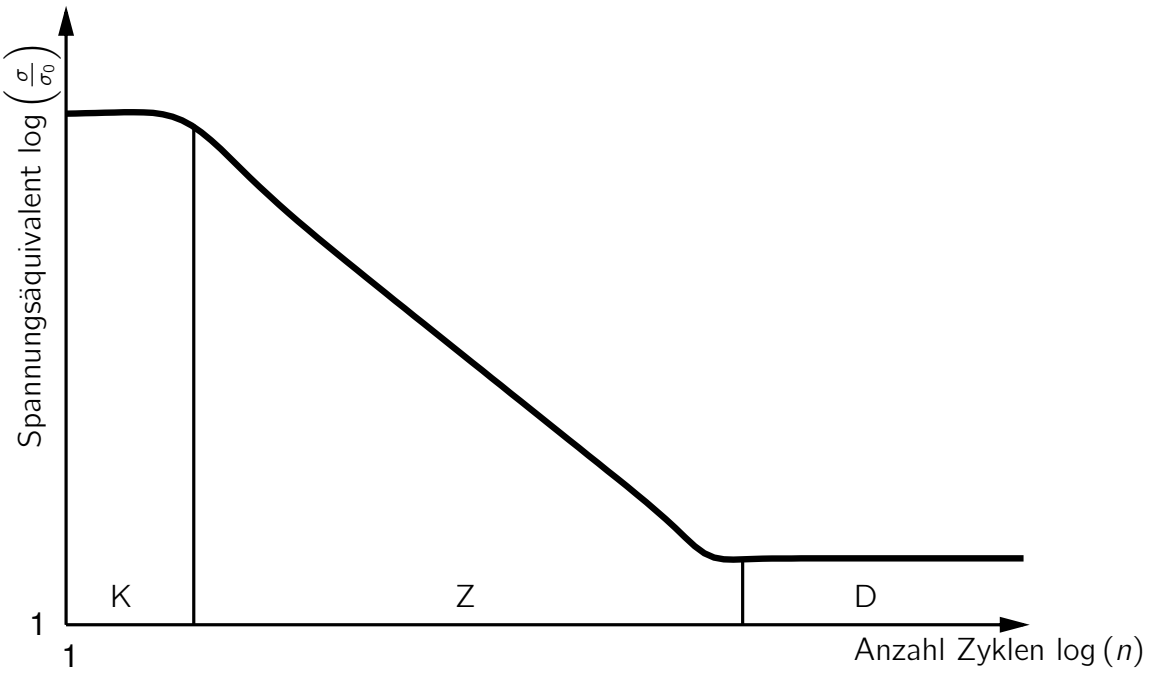


Abb. 4.1: Beispiel für ein Wöhler-Diagramm mit einer Unterteilung in die Bereiche *Kurzzeitfestigkeit* (K), *Zeitfestigkeit* (Z) und *Dauerfestigkeit* (D).

Der Wöhlerversuch ist ein Begriff aus der Werkstofftechnik und ist nach August Wöhler benannt [Wöh70], der zwischen 1858 und 1879 die ersten methodischen so genannten Schwingfestigkeitsversuche durchführte, die zur Ermittlung der Dauer- und Zeitfestigkeit

von Bauteilen und Werkstoffen unter zyklischer Beanspruchung dienen und häufig auch mit dem Begriff *Dauerlastversuch* bezeichnet werden. Mit einem Wöhlerdiagramm können mit Hilfe der Versuchsergebnisse von zyklischen Dauerlastversuchen Abschätzungen der Lebensdauer von Bauteilen gemacht werden. Zu diesem Zweck werden für ein Material je nach Anforderungen bei verschiedenen Beanspruchungsamplituden und -unterlasten Dauerschwingversuche bis zum Ausfall der Probe durchgeführt. Die maximal aufgebrachte Last wird in Abhängigkeit der Anzahl der von der Probe erduldeten Lastspiele in einem Diagramm dargestellt. Werden die Werte für die Lasten und die Anzahl der Belastungszyklen üblicherweise in einem logarithmischen Koordinatensystem dargestellt, ergibt sich im Zeitfestigkeitsbereich auf diese Weise die so genannte Wöhlerkurve, die bereichsweise durch eine Exponentialfunktion approximiert wird. Für Belastungen, die in der Nähe der Reißdehnung oder -spannung liegen, strebt die Wöhlerkurve jedoch einen konstanten Wert an und schneidet die y-Achse bei der vom Material maximal ertragbaren statischen Last. Auch mit sinkender maximaler Last strebt die Kurve einem konstanten Wert zu. Ein exemplarischer Verlauf einer Wöhlerkurve für den Logarithmus des Spannungsäquivalents $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ mit $\sigma_0 = 1MPa$ ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

In Anlehnung an Stahl wird der quasi konstant verlaufende Bereich bei hohen Lasten als *Kurzzeitfestigkeit* bezeichnet (in Abbildung 4.1 mit K gekennzeichnet) und liegt üblicherweise in einer Größenordnung von 10^4 bis 10^5 Schwingspielen. Der mittlere Bereich, der sich im doppelt logarithmischen Koordinatensystem durch eine Gerade darstellen lässt, wird als *Zeitfestigkeitsbereich* bezeichnet. Dieser Bereich ist in Abbildung 4.1 mit Z gekennzeichnet. Bei Belastungen unterhalb der Zeitfestigkeit kann ein Bauteil prinzipiell beliebig viele Schwingspiele ertragen. In diesem Falle wird von Dauerfestigkeit gesprochen. Dieser Bereich ist in Abbildung 4.1 mit D gekennzeichnet. Die Unterteilung der Wöhlerkurve in die Bereiche Kurzzeitfestigkeit, Zeitfestigkeit und Dauerfestigkeit ist auch im Taschenbuch für den Maschinenbau [Bei01] zu finden.

Mit Hilfe einer Wöhlerkurve kann lediglich eine Abschätzung über die zu erwartende Lebensdauer für eine vorgegebene Belastung gemacht werden. Eine statistische Aussage welcher Prozentsatz an Bauteilen entsprechend der Vorhersage tatsächlich versagen werden, ist jedoch nicht möglich. Hierzu sind zusätzliche Messungen erforderlich, die weitere Informationen über die Verteilung der Ausfallwahrscheinlichkeit zulassen. Eine Möglichkeit ist die Anwendung der so genannten Weibull-Verteilung [Wil10]. Alle Ausfallpunkte innerhalb einer Kurve im 1Weibull-Diagramm unterliegen den gleichen Belastungen. Hierdurch kann eine Aussage über die Ausfallwahrscheinlichkeit einer einzelnen Probe in Abhängigkeit der erduldeten Schwingspiele getroffen werden. Die kombinierte Verwendung von Wöhlerkurven und Weibull-Verteilung ermöglicht eine Aussage über die prozentuale Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls nach einem bestimmten Belastungsvorgang. Für jeden Belastungsfall und für eine bestimmte Ausfallhäufigkeit, z.B. 50 %, wird der Punkt im Weibull-Diagramm in das

Wöhler-Diagramm projiziert. Dabei lässt sich durch Verbinden dieser Punkte die Wöhler-Linie erstellen. Für einen bestimmten Bereich, z.B. 5 % und 95 % Ausfallwahrscheinlichkeit, kann auf die gleiche Weise ein Vertrauensbereich im Wöhler-Diagramm erzeugt werden. Weitere Informationen über die Weibull-Verteilung finden sich zum Beispiel Bei Hartung [Har02] und Lindgren [Lin93].

Zur computergestützten Vorhersage der Lebensdauer technischer Gummibauteile ist, neben der bereits beschriebenen messtechnischen Beschreibung des Ermüdungsverhaltens mit Hilfe von Wöhlerkurven, die Berücksichtigung der nachfolgenden drei Aspekte zwingend erforderlich:

1. ein geeignetes Stoffgesetz zur Wiedergabe des Spannungs-Verformungs-Verhaltens,
2. ein Ansatz zur Schadensakkumulation und
3. ein geeignetes, zum theoretischen Ansatz passendes Schadensmaß.

Alle weiteren Aspekte, wie zum Beispiel der Einfluss thermo-mechanischer Kopplung oder die von Abraham et. al. in [Abr01] und [Abr02] beschriebene Abhängigkeit der Lebensdauer von der Unterlast, führen zwar zu einer Verbesserung der Qualität der Lebensdauerprognose, sie sind jedoch nicht entscheidend, um überhaupt eine Prognose erstellen zu können.

4.1 Beschreibung des Materialverhaltens

Die Wiedergabe des Materialverhaltens erfolgt über ein Stoffgesetz, mit dessen Hilfe Aussagen über den Spannungs- oder Verformungszustand und in manchen Fällen auch den Einfluss der Belastungsvorgeschichte auf die Eigenschaften des Materials in einem Materialpunkt gemacht werden können. Ein geeignetes Stoffgesetz ist die Grundlage einer FEM-gestützten Lebensdauerprognose und ist maßgeblich für deren Genauigkeit, da es die Eingangsgrößen der Prognose, wie zum Beispiel den Verformungs- oder Spannungszustand oder auch die in einem Materialpunkt gespeicherte oder dissipierte Energie bestimmt. Je genauer die Eingangsgrößen für eine Lebensdauerprognose erfasst werden können, desto genauer wird auch die Prognose selbst, wobei die Genauigkeit der Ergebnisse auch durch die Güte der messtechnischen Erfassung der Lebensdauer begrenzt ist. Im optimalen Fall kann eine exakte Lebensdauerprognose sowohl für den zur Messung des Ermüdungsverhaltens verwendeten Probekörper als auch für ein komplexes Bauteil gemacht werden.

Hyperelastische Stoffgesetze

Für technische Gummiwerkstoffe existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Stoffgesetze. Die einfachste Klasse bilden die hyperelastischen Stoffgesetze, deren Formulierungen auf der Beschreibung einer Energiedichtefunktion in Abhängigkeit von den Invarianten oder

den Eigenwerten von Deformationsmaßen basiert. Der einfachste hyperelastische Ansatz zur Beschreibung gummiartiger Materialien ist das so genannte Neo-Hooke-Stoffgesetz (zu finden z. B. bei Ihlemann [Ihl03], Muhr [Muh92] oder Marckmann [Mar06a]), das im Falle von vollständiger Inkompressibilität auf der ersten Invariante des rechten oder linken Cauchy-Green-Tensors und dem Materialparameter α basiert.

$$W_{NH} = \alpha \left(I_1 - 3\right) \tag{4.2}$$

Für kleine Deformationen gibt das Neo-Hooke-Stoffgesetz das Materialverhalten verhältnismäßig gut wieder, wobei inelastische Effekte nicht berücksichtigt werden können. Die Qualität des Modells nimmt bei großen Deformationen, insbesondere bei einfacher Scherung, jedoch stetig ab, da die errechneten Spannungen in Abhängigkeit des induzierten Schermaßes einen linearen Verlauf aufweisen.

Eine bessere Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens ist zum Beispiel mit dem Stoffgesetz von Yeoh [Yeo93] möglich. Das Stoffgesetz basiert auf dem Neo-Hooke-Ansatz und den Arbeiten von Mooney [Moo40] und Rivlin [Riv48] und ist für den vollständig inkompressiblen Fall von der ersten Invarianten des linken oder rechten Cauchy-Green-Tensors sowie drei voneinander unabhängigen Materialparametern (C_1, C_2 und C_3) abhängig.

$$W_Y = \sum_{i=1}^{3} C_i \left(I_1 - 3\right)^i \tag{4.3}$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist das Stoffgesetz nach Ogden [Ogd72] verwendet worden. Gleichung 4.4 zeigt das Stoffgesetz als Energiedichtefunktion für inkompressibles Materialverhalten, formuliert in Abhängigkeit der Streckungen.

$$W_{Og} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{B_i} \cdot \left(\lambda_1^{A_i} + \lambda_2^{A_i} + \lambda_3^{A_i} - 3\right) \tag{4.4}$$

Modellierung viskoelastischen Materialverhaltens

Neben der Beschreibung des elastischen Materialverhaltens ist insbesondere bei Untersuchungen rotierender Belastungen die Nachbildung viskoelastischer Effekte von Interesse. Zunächst soll jedoch der Begriff *Viskoelastizität* und die Modellierung viskoelastischen Materialverhaltens näher erläutert werden. Die nachstehenden Formulierungen erfolgen unter der Annahme linearen Materialverhaltens, das bei technischen Gummiwerkstoffen nur bei hinreichend kleinen Deformationen um die Nulllage oder um einen Arbeitspunkt herum auftritt. Ausgangspunkt zur Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens ist eine elastische Feder, die gemäß Gleichung 4.5 sinusförmig angeregt wird. Hierbei entspricht γ einer Scherung, $\hat{\gamma}$ der Scheramplitude und ω der Kreisfrequenz.

$$\gamma(t) = \widehat{\gamma} \sin(\omega t) \tag{4.5}$$

Die elastische Scherspannung τ_e kann bei linearer Elastizität über das Produkt aus Schermodul G und Scherdehnung γ berechnet werden.

$$\tau_e = G \cdot \gamma \tag{4.6}$$

Mit Gleichung 4.6 lässt sich nun zeigen, dass für Elastizität Phasengleichheit von Spannung und Dehnung gilt. Die elastische Spannungsantwort kann entsprechend der Formulierung für die Deformation ebenfalls mit Hilfe einer Sinusfunktion dargestellt werden.

$$\tau_e(t) = \widehat{\tau} \sin(\omega t) \tag{4.7}$$

Das Dämpfungsverhalten wird durch einen linearen Dämpfer beschrieben, wobei die resultierende Scherspannung das Produkt aus der Viskosität η und der Dehngeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ ist.

$$\tau_i = \eta \dot{\gamma} \tag{4.8}$$

Für die zyklische Dehnung aus 4.5 entspricht die Dehngeschwindigkeit der zeitlichen Ableitung von γ.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{d}{dt}\gamma \\ &= \hat{\gamma}\omega \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Werden die Gleichungen 4.7 und 4.9 miteinander verglichen, so zeigt sich, dass die Reaktion auf eine Verformung der elastischen Feder und die Reaktion auf die Verformung des Dämpfers nicht mehr phasengleich sind. In diesem Fall tritt eine Phasendifferenz von 90° zwischen den beiden Spannungen sowie der Reaktion des Dämpfers zu dessen Anregung auf. Dies wird in ähnlicher Weise auch von Pahl [Pah95] beschrieben.

Eine Kombination aus einer Feder und einer parallel dazu geschalteten Dämpfereinheit wird Kelvin-Voigt-Modell genannt (siehe hierzu Nasdala [Nas10], Pahl [Pah95] und Rust [Rus09]) und ist der einfachste Ansatz zur Beschreibung linear viskoelastischen Materialverhaltens. Die gängigste Methode zur Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens sind jedoch die so genannten Maxwell-Elemente (siehe Nasdala [Nas10]). Hierbei handelt es sich um eine Reihenschaltung von einer Feder und einem Dämpfer. Unter konstanter

Dehnung würde ein solches Element in unendlicher Zeit vollständig relaxieren und somit unbelastet sein (siehe Abbildungen 4.2 und 4.3). Der Quotient aus η und G entspricht der Relaxationszeit τ_R des Maxwell-Elements. Bei $t = \infty$ ist das Maxwell-Element vollständig relaxiert.

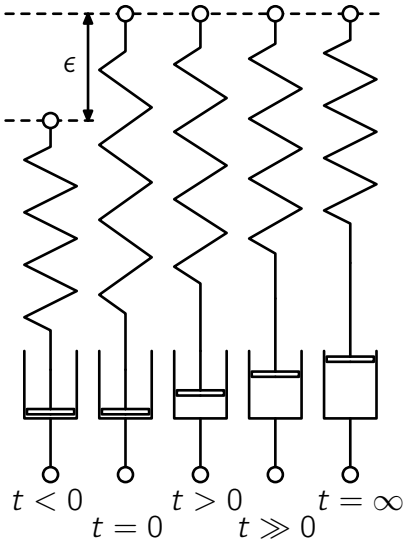
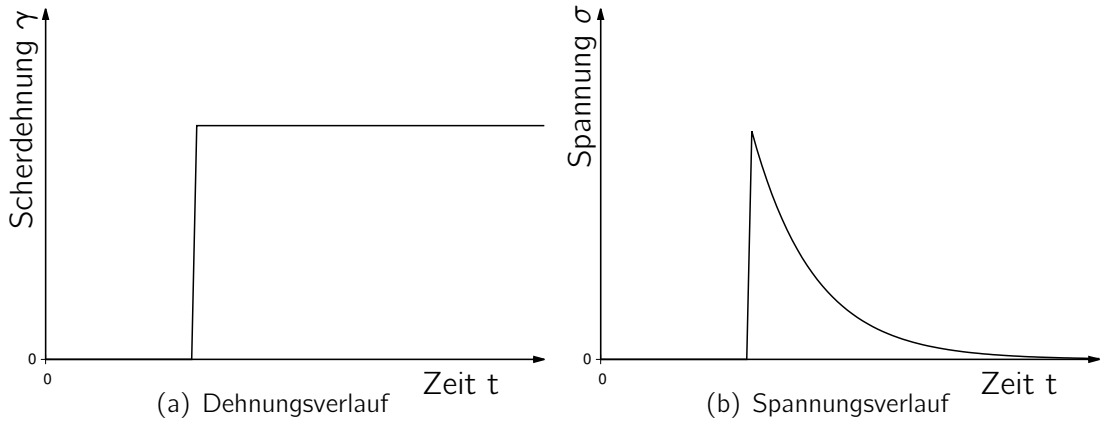


Abb. 4.2: Maxwell-Element bei konstanter Dehnung.

Eine vollständige Relaxation bei konstanter Dehnung widerspricht dem tatsächlichen Verhalten technischer Gummiwerkstoffe. Für die Untersuchung der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen wird daher ein generalisiertes Maxwell-Modell verwendet, wie es zum Beispiel von Nasdala [Nas10] beschrieben wird. Im generalisierten Maxwell-Modell werden mehrere Maxwell-Elemente parallel zu einer elastischen Feder geschaltet. Die elastische Feder repräsentiert den rein elastischen Anteil des Materialverhaltens und kann durch elastische Stoffgesetze wie zum Beispiel das Yeoh-Modell oder das Stoffgesetz nach Ogden wiedergegeben werden. Eine Kombination aus einem elastischen Anteil und mehreren dazu parallel geschalteten Maxwell-Elementen wird von Rust [Rus09] auch als *Erweitertes Viskoelastizitätsmodell* beschrieben.



(a) Dehnungsverlauf (b) Spannungsverlauf

Abb. 4.3: Relaxationsverhalten eines Maxwell-Elements

Mit diesem Ansatz lassen sich unterschiedliche Moduln in Form von Prony-Reihen beschreiben, wie zum Beispiel von Nasdala [Nas10] oder MSC [MSC11] vorgestellt. Für den Schubmodul lässt sich dementsprechend nachfolgende Gleichung aufstellen.

$$G(t) = G^{\infty} + \sum G_i \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{R,i}}} \tag{4.10}$$

Dementsprechend ergibt sich die Spannung wie folgt.

$$\sigma(t) = G^{\infty} \cdot \gamma_0 + \sum G_i \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{R,i}}} \cdot \gamma \tag{4.11}$$

Hierbei entspricht $G(t)$ dem Schubmodul in Abhängigkeit der Zeit, G^{∞} der Steifigkeit der zu den Maxwell-Elementen parallel geschalteten Feder, G_i den Federsteifigkeiten der Maxwell-Elemente und $\tau_{R,i}$ der zugehörigen Relaxationszeit.

4.2 Isotrope Schadensakkumulation

Ein wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung und Beschreibung der Zusammenhänge zwischen rotierenden Belastungsrichtungen und der Lebensdauer rußgefüllter Elastomere. Für eine Nutzung der gewonnenen Erkenntnisse in einem Finite Elemente Programm ist es erforderlich, einen geeigneten Akkumulationsansatz sowie ein passendes Schadensmaß zur Verfügung zu stellen. Vorab soll jedoch geklärt werden, welche Ermüdungshypothesen bereits bestehen und wo deren Grenzen und Möglichkeiten, insbesondere für eine Vorhersage des Ermüdungsverhaltens technischer Gummiwerkstoffe, liegen. Nachfolgend werden daher einige Akkumulationsansätze mit den zugehörigen Schadensmaßen aus der Literatur vorgestellt und bezüglich ihrer Eignung analysiert, die Lebensdauer eines dynamisch beanspruchten Elastomerbauteils vorherzusagen.

Seit der Veröffentlichung der Schadenshypothese nach Palgrem [Pal24] und Miner [Min45] im Jahre 1924 bzw. 1945 sind insbesondere im Bereich der Metalltechnik eine Vielzahl an Ansätzen zur Bestimmung der Lebensdauer technischer Bauteile entwickelt worden. Fatemi [Fat98] unterteilt diese Ansätze in sechs Klassen:

1. lineare Schadensevolution und lineare Akkumulation,
2. nichtlineare Schadenskurven und Zwei-Stufen-Ansätze,
3. Wöhlerkurvenmodifikationen,
4. Ansätze basierend auf Risswachstumstheoremen,
5. kontinuumsmechanische Schadensmodelle und
6. energiebasierte Methoden.

Viele der von Fatemi vorgestellten Methoden basieren auf Untersuchungen an metallischen Werkstoffen und sind speziell an das Ermüdungverhalten von Metallen angepasst, so zum Beispiel die Coffin-Manson-Beziehung für hohe Lasten, die den Ermüdungszustand zu plastischen Deformationen in Relation setzt (siehe hierzu [Cof54] und [Cof56]). Einige dieser Methoden lassen sich auch zur Beschreibung von gefüllten Polymeren verwenden, allerdings sind für die Anwendung der Ansätze Modifikationen notwendig, um speziellen, den technischen Gummiwerkstoffen eigenen Phänomenen gerecht zu werden. So ist es zum Beispiel sinnvoll, bei der Verwendung von Ansätzen, die auf Risswachstumstheoremen basieren, Formulierungen für das Risswachstum von Gummi zu verwenden und nicht die beim ursprünglichen Ansatz verwendeten Theoreme zur Beschreibung des Weiterreißverhaltens von Metallen. Die von Fatemi verwendete Einteilung der unterschiedlichen Modelle zur rechnerischen Bestimmung der Lebensdauer ist nicht eindeutig, da viele neuere Ansätze aus einer Kombination der einzelnen Klassen hervorgehen. So wird zum Beispiel von Flamm [Fla03] eine lineare Schadensakkumulation unter Ausnutzung der Formänderungsenergiedichte eingesetzt, eine Kombination aus linearer Schadensevolution und energiebasierten Methoden. Aus diesem Grund soll für die vorliegende Arbeit eine alternative Klassifizierung der unterschiedlichen Methoden zur Schadensakkumulation vorgenommen werden.

1. Lineare Schadensakkumulation und nichtlineare Schadensakkumulation.

2. Eindimensionale (isotrope) Schädigung und Schädigung unter Berücksichtigung der Belastungsrichtung (3-dimensional anisotrop).

Im Folgenden wird aus der Vielzahl der existierenden Modelle zur Beschreibung von Ermüdung eine Auswahl getroffen und hinsichtlich der Möglichkeiten zur Vorhersage der Lebensdauer gefüllter Elastomere beurteilt.

4.2.1 Lineare Schadensakkumulation

Beim Prinzip der linearen Schadensakkumulation bzw. Schadensevolution geht es darum, mit Hilfe einer Wöhlerkurve (in der Literatur auch häufig als *stress-cycle diagramm* oder kurz S-N-Diagramm bezeichnet) den Schadensbeitrag eines Belastungszyklus am Gesamtschaden im Material zu quantifizieren und die Schadensbeiträge aller Belastungszyklen über den gesamten Belastungszeitraum aufzusummieren. Über den theoretisch maximal erduldbaren Schaden kann dann auf die restliche Lebensdauer des Materialpunktes geschlossen werden. Die Beschreibung des Ermüdungsverhaltens mittels linearer Schadensakkumulation wurde erstmals von Palgrem im Jahr 1924 veröffentlicht ([Pal24]). Bis heute ist die darauf basierende Regel von Miner ([Min45]) das am häufigsten verwendete Akkumulationstheorem.

Die lineare Schadensakkumulation nach Palgrem und Miner ist der erste in der Literatur auftauchende Ansatz zur Akkumulation von Schaden. Der Ansatz dient der Abschätzung der Lebensdauer eines Bauteils, das mit unterschiedlichen, aufeinander folgenden zyklischen Lasten beaufschlagt wird. Miner validiert das Akkumulationstheorem für metallische Werkstoffe. Eine erfolgreiche Validierung des Ansatzes für technische Gummiwerkstoffe ist nicht bekannt. Diesem Umstand zum Trotz wird der Ansatz von Palgrem und Miner jedoch häufig und ohne Modifikationen zur Beurteilung der Lebensdauer von Elastomerbauteilen herangezogen. Die Schadensakkumulation nach Palgrem und Miner basiert auf der Annahme, dass jeder Belastungszyklus, den ein Materialpunkt erdulden muss, eine der Amplitude des Belastungszyklus proportionale Schädigung induziert. Die Summe aller Teilschädigungen entspricht der Gesamtschädigung. Die Gesamtschädigung erreicht ihr Maximum beim Versagen des Materials im Materialpunkt. Der Anteil der Schädigung eines Belastungszyklus ist nach Miner ausschließlich von der Amplitude der Last abhängig. Aktuellere Untersuchungen, wie zum Beispiel von Abraham [Abr01] und [Abr02] zeigen jedoch, dass diese Annahme für technische Gummiwerkstoffe nicht gilt, sondern dass der pro Zyklus induzierte Schaden von mehreren Parametern, unter anderem vom Betrag der minimalen Belastung des gesamten Zyklus, abhängt. Für eine Beurteilung der Schadensakkumulation nach Palgrem und Miner soll dieser Aspekt jedoch zunächst vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung lässt sich der Schadenseintrag pro Schwingspiel mit Hilfe einer einzigen, das Material beschreibenden Wöhlerkurve berechnen. Für eine gegebene Mittelspannung entspricht der prozentuale Anteil eines Schwingspiels am Gesamtschaden nach Miner dem Kehrwert der Anzahl der erduldbaren Schwingspiele bis zum Versagen des Materials. Einem Material, das bei einer gegebenen Mittelspannung σ_1, $N(\sigma_1)$ Schwingspiele bis zum Versagen erdulden kann, wird unter Annahme einer linearen Schadensakkumulation bei einem Schwingspiel der N-te Teil dieses Schadens induziert.

$$s_1 = \frac{1}{N(\sigma_1)} \tag{4.12}$$

Bei einem Spektrum vieler unterschiedlicher Lasten wird für jedes Schwingspiel einzeln dessen Anteil an der gesamten Schädigung berechnet. Aufgrund der Kommutativität der Schadensakkumulation nach Palgrem und Miner können Belastungszyklen mit gleicher Mittellast zusammengefasst werden. Die zusammengefassten Schadenssummen können wiederum zu einem gesamtheitlichen Schaden D aufaddiert werden.

$$D = \frac{n_1}{N(\sigma_1)} + \frac{n_2}{N(\sigma_2)} + \frac{n_3}{N(\sigma_3)} + \ldots \tag{4.13}$$

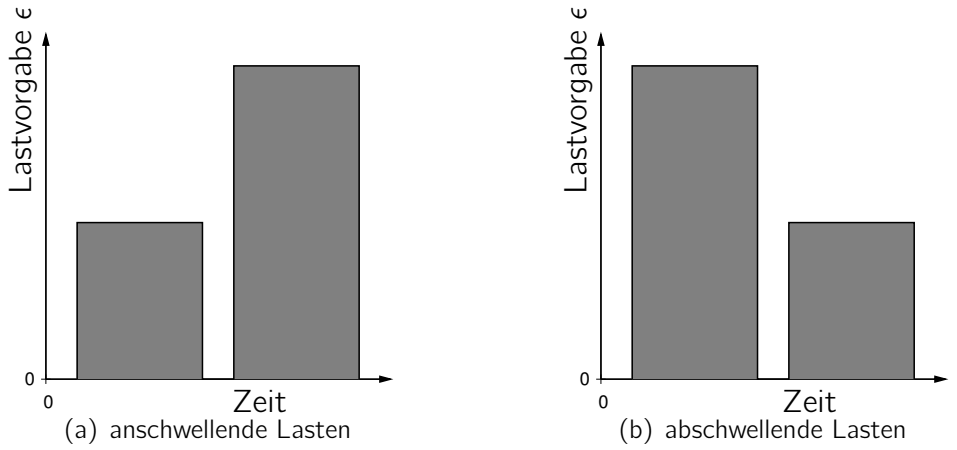
Für ein Lastspektrum mit i unterschiedlichen Mittelspannungen, die im Lastkollektiv n_i-mal vorkommen, ergibt sich für den gesamten Schadenseintrag die nachfolgende Formulierung für eine Schadensakkumulation nach Palgrem und Miner.

$$\boxed{D = \sum_i \frac{n_i}{N(\sigma_i)} = \sum_i n_i s_i} \tag{4.14}$$

Unter der Voraussetzung, dass der Schaden in der Realität in einem Materialpunkt linear akkumuliert wird und die einzelnen, aus den unterschiedlichen Belastungszyklen resultierenden Teilschäden tatsächlich kommutativ sind, ist das Ende der Lebensdauer des Materialpunktes erreicht, sobald die Schadenssumme einen Wert von eins überschreitet. Flamm [Fla02] konnte jedoch die Untersuchungen von Sun [Sun00] bestätigen, dass eine Schadensakkumulation nach Palgrem und Miner für technische Gummiwerkstoffe Werte größer als eins aufweisen kann. Dies deutet darauf hin, dass eine reale Schadensakkumulation für technische Gummiwerkstoffe nichtlinear sein muss, da eine Aufsummierung des Schadens bei nur einer einzigen Mittellast aufgrund der Definition des Ansatzes von Palgrem und Miner stets eins ergeben muss. Der Umstand, dass die maximale Schadenssumme bei zwei oder mehreren Lasthorizonten ungleich eins ist, zeigt, dass die einzelnen Teilschäden unterschiedlich gewichtet sind. Dies gilt sogar für das Ermüdungsverhalten von Metallen, wie von Yang [Yan03] gezeigt werden konnte. Die mögliche Umsetzung einer Wichtung der Teilschäden zur Erlangung einer nichtlinearen Schadensakkumulation wird im nachfolgenden Abschnitt im Zusammenhang mit nichtlinearen Schadenskurven sowie im Abschnitt zur Entwicklung einer für dreidimensionale Lastfälle gültige Akkumulationshypothese gesondert behandelt. Es sei noch angemerkt, dass es sich bei dem akkumulierten Schaden nach Palgrem und Miner um einen relativen Wert handelt, der stets in Relation zum Versagensfall betrachtet werden muss. Zwei Punkte unterschiedlicher Materialien, denen im Verlauf ihrer Lebensdauer jeweils ein Schaden von $0,5$ induziert wurde, können bei gleicher Amplitude und Mittelspannung durchaus unterschiedliche Anzahlen von Belastungszyklen erdulden. Hieraus folgt, dass die absolute Lebensdauer eines Materials eine Materialeigenschaft sein muss.

4.2.2 Nichtlineare Schadensakkumulation

An einer allgemeinen Anwendbarkeit der Kommutativität der Schadensakkumulation nach Miner bestehen für technische Gummiwerkstoffe berechtigte Zweifel. So zeigt Sun [Sun00] für eine Naturkautschukmischung und Styrol-Butadien-Kautschukmischung eine ausgeprägte Abhängigkeit der Ermüdung von der Belastungsreihenfolge. Hierzu wurden Proben aus den entsprechenden Materialien mit unterschiedlichen Lastkollektiven beaufschlagt, wobei zwischen anschwellenden und abschwellenden Lastkollektiven unterschieden wurde. In beiden Fällen wurden die gleichen Belastungsamplituden in Form von Dehnungen angesteuert. Die Materialien wurden mit einer vorgegebenen Anzahl an Schwingspielen belastet, so dass die Schadenssumme nach der Formulierung von Palgrem und Miner in beiden Fälle gleich ist. Abbildung 4.4 zeigt die beiden unterschiedlichen Lastkollektive symbolisch.



(a) anschwellende Lasten (b) abschwellende Lasten

Abb. 4.4: Lastkollektive nach Sun [Sun00] zur Untersuchung der Kommutativität des Schadenseintrages

Im Anschluss an die zyklische Belastung der Proben mit unterschiedlichen Lastkollektiven wurde eine Zugfestigkeitsprüfung durchgeführt. Nach Bartenev [Bar56] korreliert die verbleibende Zugfestigkeit mit dem Ermüdungszustand des Materials, was mit der Definition des Begriffs *Ermüdung* in Kapitel 3.1 übereinstimmt. Sun zeigt, dass ein Lastkollektiv mit einer anschwellenden Belastung im Vergleich zu dem gleichen Lastkollektiv in umgekehrter Reihenfolge zu einem deutlich höheren Ermüdungszustand führt. Das bedeutet, dass der Schädigungseintrag bei gleicher Belastung vom aktuellen Schädigungszustand zum Zeitpunkt der Schädigung abhängt. Bei geringerer verbleibender Lebensdauer verursacht die gleiche Belastung einen größeren Schaden in einem Materialpunkt, als in einem weniger geschädigten Zustand. Dementsprechend darf eine Formulierung für eine Schadensakkumulation nicht kommutativ sein, sondern muss in Abhängigkeit des Schädigungszustandes gewichtet werden. Der Schadenseintrag für technische Gummiwerkstoffe ist somit nichtlinear.

Zur Beschreibung des nichtlinearen Schädigungseintrages wurde 1966 von Manson [Man66] ein Verfahren vorgestellt, das bei der Ermüdung zwischen zwei Stufen unterscheidet. Dieses Verfahren, ursprünglich als *Method of universal slopes - Methode der universellen Steigungen* bezeichnet, ist häufiger unter dem Namen *Double Linear Damage Rule - Doppelt lineare Schadensregel, kurz: DLDR* bekannt (siehe hierzu auch Yang [Yan03]). Die grundlegende Idee bei der doppelt linearen Schadensregel ist, die Materialermüdung ähnlich wie beim Risswachstum in zwei Phasen zu unterteilen. Die Phase zu Beginn der Materialermüdung wichtet den Schadenseintrag pro Belastungszyklus gering und entspricht beim Risswachstum der Risskernbildung. Die zweite Phase ist deutlich stärker gewichtet und ist in Anlehnung an das eigentliche Risswachstum entwickelt worden. In der schematischen Skizze ist die verbleibende Lebensdauer in Abhängigkeit von der verbrauchten Lebensdauer für die doppelt lineare Schadensregel und für die lineare Schadensakkumulation nach Miner prinzipiell dargestellt.

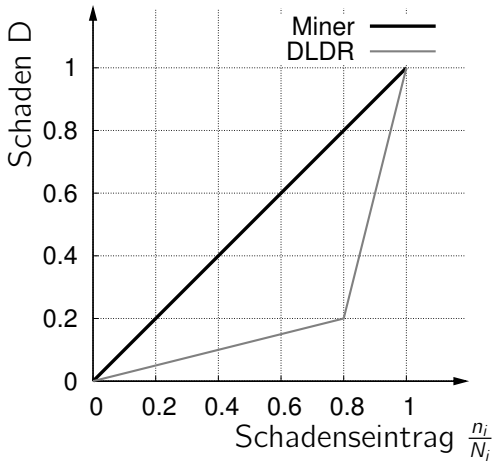


Abb. 4.5: Verlauf der Schadensakkumulation bei zyklischer Last mit konstanter Amplitude für die Miner-Regel und die Doppelt Lineare Schadensregel (DLDR)

Weitere Informationen zur doppelt linearen Schadensregel finden sich bei Fatemi [Fat98] und Benton [Ben11].

Neben der doppelt linearen Schadensregel findet häufig auch der so genannte Schadenskurvenansatz (Damage Curve Approach → DCA, Yang [Yan03] und Fatemi [Fat98]) zur Bestimmung der Lebensdauer technischer Bauteile Anwendung. Der Schadenskurvenansatz folgt aus einer empirischen Beschreibung des Ermüdungsverhaltens unter zyklischer Belastung und wurde von Manson 1981 [Man81] anhand der phänomenologischen Betrachtung des Risswachstums technischer Gummiwerkstoffe hergeleitet. Mit a_0 als Ausgangsrisslänge, a als aktueller Risslänge und a_f als finaler Risslänge kann das Risswachstum wie folgt beschrieben werden:

$$a = a_0 + (a_f - a_0)\, r^q \tag{4.15}$$

r ist die relative Schadenssumme und beschreibt den aktuellen Schädigungszustand eines Materialpunktes über die Summe aller Teilschädigungen $\frac{1}{N_i}$, multipliziert mit deren Häufigkeit n_i.

$$r = \sum_i \frac{n_i}{N(\sigma_i)} = \sum_i n_i s_i \tag{4.16}$$

Zu Beginn der Schädigung gilt $r = 0$, beim Versagen hat r den Wert eins. Für die Schadensakkumulation nach Palgrem und Miner gilt $D = r$ (vgl. Gleichung 4.14). q in Gleichung 4.15 ist eine empirische Funktion zur Skalierung der Risslänge in Abhängigkeit der vom Materialpunkt oder Bauteil erduldeten Schwingspiele n.

$$q = B \cdot n^{\beta} \tag{4.17}$$

Die beiden Parameter B und β haben keine physikalische Bedeutung und dienen nur zur Anpassung von Gleichung 4.15 an reale Messungen. Für die Annahme, dass die Ausgangs-

risslänge null ist und der Schädigungszustand r des Materials als Quotient aus aktueller Risslänge a und der Risslänge beim Versagen des Materials betrachtet werden kann,

$$r^q = \frac{a}{a_f} \tag{4.18}$$

ergibt sich für den Schadenskurvenansatz nachfolgender Zusammenhang.

$$\boxed{D = r^q} \tag{4.19}$$

Eine Betrachtung der Gleichungen 4.16 und 4.17 zeigt eine Abhängigkeit des Schadenskurvenansatzes (Gleichung 4.19) vom aktuellen Schädigungszustand r. Folglich wichtet der Schadenskurvenansatz den aktuellen Schädigungseintrag und ist daher nicht kommutativ. Der Ansatz erlaubt somit eine Unterscheidung des Einflusses der Belastungsreihenfolge bei der Beschreibung der Ermüdung.

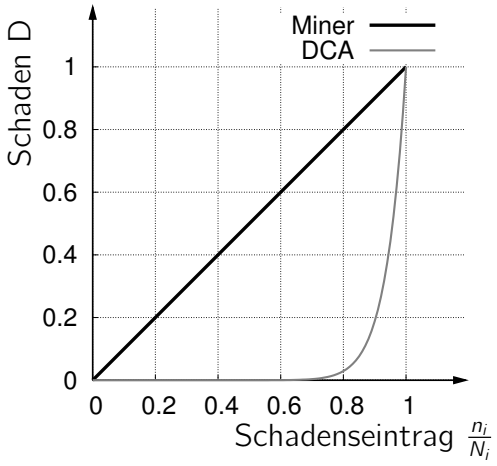


Abb. 4.6: Verlauf der Schadensakkumulation bei zyklischer Last mit konstanter Amplitude für die Miner-Regel und den Schadenskurvenansatz (DCA)

4.3 Verfahren zur räumlichen Beschreibung von Ermüdungszuständen

Die experimentelle Charakterisierung des Ermüdungsverhaltens technisch genutzter Gummiwerkstoffe wird in den meisten Fällen anhand einfacher Prüfkörper und mit fest vorgeschriebenen Randbedingungen sowie unter Verwendung von wenigen, als repräsentativ erachteten Belastungen realisiert. Die Ursache hierfür ist die lange Versuchsdauer von Lebensdauerexperimenten, wobei die gemessenen Größen wie Weg und Kraft für komplexe Belastungsvorgaben ohne numerische Methoden schwierig mit einem Deformations- oder Spannungstensor zu verknüpfen sind. Aus diesem Grund basieren die meisten Lebensdauerexperimente auf uniaxialen Zugversuchen und die daraus abgeleiteten Schadenshypothesen sind skalarer Natur und gehen von einer isotropen Schädigung aus. Es gibt jedoch auch viele Gründe, die für eine räumliche Beschreibung der Ermüdung sprechen. So bilden sich ermüdungsbedingte Risse nach Schaper [Sch04] stets senkrecht zur maximalen Belastung aus. Zusammen mit der Definition des Begriffs *Ermüdung* in Kapitel 3, derzufolge

Ermüdung ein Herabsetzen der maximalen Zugfestigkeit herbeiführt, muss die von Schaper gemachte Aussage im dreidimensionalen Kontext betrachtet werden. Somit ist nicht mehr die Richtung der maximalen Belastung für die Ausrichtung der Risse verantwortlich, sondern die Belastungsrichtung, in der zum ersten Mal die Festigkeitsgrenze des Materials überschritten wird, wobei die Festigkeit in Abhängigkeit der Zunahme des Schadens in einem Materialpunkt abnimmt. Hierbei muss es sich nicht zwangsläufig um die maximal auftretende Last im Verlauf des gesamten Belastungsspektrums handeln. Dies gilt sowohl für isotrope als auch für anisotrope Ermüdung.

4.3.1 Prinzip der kritischen Schnittebenen

Die Beschreibung von Ermüdung im Raum kann mit Hilfe des Prinzips der kritischen Schnittebenen durchgeführt werden, ein Verfahren, das 1935 von Stanfield [Sta03] vorgeschlagen wurde. In der Literatur finden sich hierfür viele Anwendungsbeispiele (z. B. Fatemi [Fat85], Socie [Soc99] und karolczuk [Kar05]), wobei wenige Untersuchungen speziell für technische Gummiwerkstoffe durchgeführt wurden (z. B. Andriyana [And08] und [And10]). Das Prinzip der kritischen Schnittebenen ist bislang noch nicht für die Lebensdauervorhersage bei rotierenden Belastungsrichtungen validiert worden, es wird dennoch häufig zur Abschätzung der Lebensdauer nicht harmonisch belasteter Bauteile herangezogen.

Beim Prinzip der kritischen Schnittebenen wird ein Materialpunkt entlang gedachter Schnittebenen aufgeteilt. Die Belastungen parallel zur Normalenrichtung der jeweiligen Ebene werden mit einer geeigneten Schadenshypothese zusammengefasst. Die Ebene, in deren Normalenrichtung die Schadenssumme maximal wird, gilt als schädigungsrelevant und wird als *kritische* Schnittebene bezeichnet. Für rechnerische Lebensdauerabschätzungen, zum Beispiel mit Hilfe der Finite Elemente Methode, können nur endliche viele Ebenen überprüft werden. Daher hat sich eine Diskretisierung der Schnittebenen in 10°-Schritten durchgesetzt. Die Gesamtschädigung, die für eine Lebensdauerabschätzung in einem Materialpunkt zugrunde liegt, ergibt sich somit wie folgt.

$$D = \max\left(D\left(\varphi, \psi\right)\right) \tag{4.20}$$

mit

$$\{\varphi \mid \varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, ..., 170^\circ\} \tag{4.21}$$

$$\{\psi \mid \psi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, ..., 170^\circ\} \tag{4.22}$$

Eine Erweiterung des Prinzips der kritischen Schnittebenen stellt das von Gaier [Gai02] vorgestellte und patentierte Verfahren dar. Anstelle der Untersuchung der Normalspannungen

oder -dehnungen werden in jeder Ebene erneut Richtungsvektoren vorgegeben. Die Projektionen des Spannungsvektors in den jeweiligen Richtungen wird nun für die Schadensakkumulation herangezogen. Gaier berücksichtigt nicht nur den in der Ebene wirksamen Normalenvektor, sondern auch die zum Spannungstensor zugehörigen Schubkomponenten bei der Suche nach der kritischen Schnittebene.

Ein alternative Herangehensweise wird von Duisen [Dui09] aufgezeigt. Bei der beschriebenen Vorgehensweise wird die kritische Schnittebene nicht durch eine Überprüfung vorgegebener Raumrichtungen abgeschätzt. Stattdessen wird, ausgehend von einer durch zwei Winkel α_s und β_s vorgegebene Startebene, eine Variation der Ausrichtung der Ebenen durchgeführt und mit Hilfe eines Simplex-Optimierers (z. B. [Grö94]) die Ebene gesucht, bei der der aufsummierte Schaden über den gesamten Belastungsprozess maximal ist.

4.3.2 Schadensakkumulation in tensorieller Form

Die Verwendung von Tensoren für eine Schadensakkumulation im Raum findet nur äußerst selten Anwendung. Im Bereich der Biomedizintechnik wird ein Ansatz zur Schadensakkumulation von Stolk [Sto04] präsentiert, der auf einer tensoriellen Schadensformulierung mit einem Schadenstensor $\underline{\underline{D}}$ beruht. Für die Berechnung von $\underline{\underline{D}}$ wird der im Materialpunkt wirksame Cauchy-Spannungstensor herangezogen. $\underline{\underline{D}}$ wird ins System der Eigenrichtungen von $\underline{\underline{\sigma}}$ gedreht, so dass die Matrix der Tensorkoeffizienten der Cauchy-Spannungen Diagonalgestalt hat. Diese Konfiguration wird von Stolk [Sto04] als *local* bezeichnet.

$$\underline{\underline{D}}^{local} = \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{\sigma}}}^{T} \tag{4.23}$$

In dieser Konfiguration wird für jeden Spannungseigenwert ein Teilschaden in Anlehnung an die Schadensakkumulation von Miner und dem Damage Curve Approach (DCA) (siehe Miner [Min45], Yang [Yan03] und Fatemi [Fat98]) berechnet und zum Gesamtschaden hinzu addiert.

$$\underline{\underline{D}}_{neu}^{local} = \underline{\underline{D}}^{local} + \Delta\underline{\underline{D}}^{local} \tag{4.24}$$

mit

$$\Delta\left[D_{ab}\right] = \begin{bmatrix} \Delta D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta D_{33} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Die Berechnung des Teilschadens wird anhand der folgenden Gleichung durchgeführt.

$$\Delta D_{ii} = \left(\left(n_D + \Delta n\right) \cdot s\left(\sigma_{ii}\right)\right) - \left(n_D \cdot s\left(\sigma_{ii}\right)\right) \tag{4.26}$$

Hierbei entsprechen n^D der Anzahl der vorangegangenen Zyklen bis zum Erreichen des aktuellen Spannungszustandes, Δn der Anzahl der Belastungszyklen, die zyklisch den aktuellen Spannungszustand erreichen und s einem Teilschaden nach Gleichung 4.12. Der im Eigensystem der Cauchy-Spannungen berechnete neue lokale Schadenstensor wird abschließend in das ursprüngliche System zurückgedreht. Über das beschriebene Verfahren steht nach Stolk ein Schadenstensor zur Verfügung, der mittels Finite Elemente Methode jedem im Materialpunkt wirksamen Spannungszustand einen räumlichen Schaden zuordnet.

Das von Stolk [Sto04] beschriebene Verfahren bietet eine Möglichkeit, Schaden mit Hilfe eines Schadenstensors $\underline{\underline{D}}$ im Raum tensoriell aufzusummieren. Eine Berücksichtigung rotierender Belastungsrichtungen ist jedoch nicht möglich, da die verwendeten Cauchy-Spannungstensoren jeweils einen Endzustand eines vollständigen Belastungszyklus darstellen. Das Verfahren vernachlässigt zudem den Belastungspfad und kann somit zum Beispiel nicht zwischen einfacher beidseitiger Scherung und einfacher Scherung mit rotierenden Achsen unterscheiden.

5 Einfache Scherung mit rotierenden Achsen

Als Grundlage für die Untersuchungen der Einflüsse rotierender Beanspruchungsrichtungen auf die Lebensdauer technischer Gummiwerkstoffe dient eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen. Dieser spezielle Deformationsprozess wird nachfolgend genauer beschrieben. Darüber hinaus werden verschiedene Arten von Scherung und Sonderfälle der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen diskutiert.

Eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen ist ein Deformationsprozess, der sich im einfachsten Fall aus zwei Teilprozessen zusammensetzt. Der Prozess beginnt mit einer einfachen Scherung, mit deren Hilfe eine Verformungsamplitude für den weiteren Deformationsprozess eingestellt wird. Diese Amplitude verbleibt im Allgemeinen konstant, wobei auch Spezialfälle denkbar sind, bei denen sich die Amplitude ändert. Sobald die einfache Scherung das gewünschte Schermaß erreicht hat, beginnt die Rotation der Achsen, was zu einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen führt. Nachfolgend werden diese beiden Teilprozesse, die einfache Scherung und die Rotationsphase, eingehend beschrieben. Die grafische Darstellung dieser Beschreibungen erfolgt über ein repräsentatives Materialvolumen, welches im undeformierten Zustand dem Einheitswürfel entspricht.

5.1 Die Teilprozesse der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen

5.1.1 Teilprozess 1: Einfache Scherung

Der Deformationsprozess beginnt mit einer einfachen Scherung, die schematisch in Abbildung 5.1 dargestellt ist und mit Hilfe des Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ beschrieben werden kann.

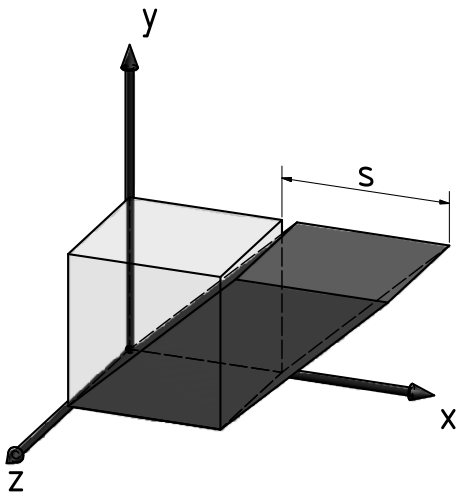


Abb. 5.1: Einfache Scherung eines Einheitswürfels um das Schermaß s.

Gleichung 5.1 zeigt die Koeffizienten des Deformationsgradienten einer einfachen Scherung mit dem Schermaß s in x-Richtung.

$$[F_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Die Koeffizientenmatrix des sich einstellenden Spannungszustandes hat folgende Gestalt:

$$[\sigma_{ab}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Neben der einfachen Scherung gibt es eine zweite Scherungsart, die reine Scherung. Sie wird im Gegensatz zur einfachen Scherung über den Spannungstensor definiert. Die Koeffizienten des Cauchy-Spannungstensors für eine reine Scherung lauten zum Beispiel wie folgt.

$$[\sigma_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Die sich bei diesem Spannungszustand einstellende Deformation ist vom jeweiligen Stoffgesetz abhängig, die Koeffizienten des zugehörigen Deformationsgradienten haben jedoch die folgende Gestalt.

$$[F_{ab}] = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & 0 \\ 0 & F_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & F_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Aufgrund der Tatsache, dass die Deformation einer reinen Scherung schwer abzuschätzen und die reine Scherung an sich versuchstechnisch noch schwieriger umzusetzen ist als die einfache Scherung, ist sie für die Realisierung einer Belastung mit rotierenden Beanspruchungsrichtungen nicht geeignet.

Neben der in Gleichung 5.3 angeführten Definition von reiner Scherung finden sich in der Literatur weitere Definitionen für eine reine Scherung. Die in diesen Definitionen beschriebenen Deformationen haben jedoch in keiner Weise etwas mit einer Scherung im herkömmlichen Sinne zu tun. Die Definition der reinen Scherung von Brown [Bro06] zum Beispiel, beschreibt reine Scherung als eine ebene Dehnung einer langen dünnen Platte, schematisch dargestellt in Abbildung 5.2.

Diese Deformation hat mit einer Scherung jedoch fast nichts gemein. Einzig die Eigenwerte der Cauchy-Green-Tensoren ähneln denen einer einfachen Scherung. Die durch λ initiierte

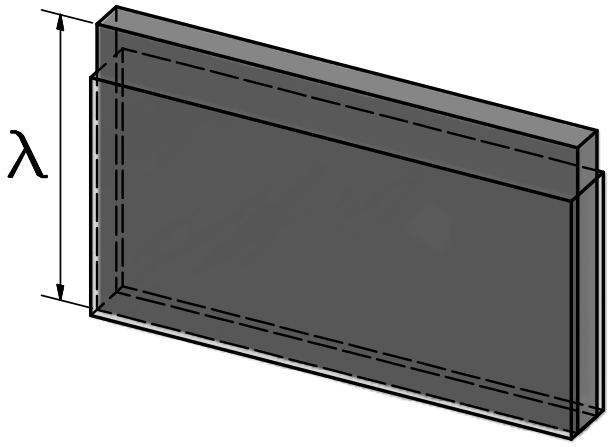


Abb. 5.2: Ebene Dehnung, ungünstigerweise häufig auch als *reine Scherung* bezeichnet.

Verformung bewirkt, dass die Probe verhältnismäßig gering eingeschnürt wird. Wird diese Einschnürung vernachlässigt, die zugehörige Streckung also zu eins gesetzt, entspricht die verbleibende Streckung dem Kehrwert von λ. In diesem Fall ergibt sich folgende Eigenwertkonstellation: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$ und $\lambda_3 = 1$. Diese Konstellation von Eigenwerten ist mit den Eigenwerten einer einfachen Scherung identisch, wodurch sich der Ursprung für die Bezeichnung *reine Scherung* in diesem Zusammenhang erklären lässt. Der Umstand einer ähnlichen Eigenwertkonfiguration rechtfertigt jedoch nicht den Begriff *Scherung*, wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, da bei der beschriebenen ebenen Dehnung in keiner Weise eine Veränderung der Beanspruchungsrichtung im Verlauf des Belastungsprozesses stattfindet. Ein direkter Zusammenhang zu dem Begriff *reine Scherung* lässt sich nicht herstellen.

5.1.2 Eigenwerte und Eigenrichtungen der einfachen Scherung

Anhand von Gleichung 5.5 lässt sich der rechte Cauchy-Green-Tensor der einfachen Scherung als Produkt des transponierten Deformationsgradienten mit dem Deformationsgradienten bestimmen.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \tag{5.5}$$

Die Koeffizientenmatrix von $\underline{\underline{C}}$ für eine einfache Scherung sieht wie folgt aus.

$$[C_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ s & s^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Die zugehörigen Eigenwerte können mit Hilfe der charakteristischen Gleichung in Abhängigkeit des Schermaßes s bestimmt werden.

$$det\left[\underline{\underline{C}} - \Lambda \cdot \underline{\underline{E}}\right] = (1-\Lambda)^2 \cdot \left(s^2 + 1 - \Lambda\right) - s^2\,(1-\Lambda) \stackrel{!}{=} 0 \tag{5.7}$$

Die drei Lösungen der charakteristischen Gleichung für Λ entsprechen den Eigenwerten des rechten Cauchy-Green-Tensors.

$$\Lambda_1 = 1 \tag{5.8}$$

$$\Lambda_2 = \frac{s^2+2}{2} + \sqrt{\frac{\left(s^2+2\right)^2}{4} - 1} \tag{5.9}$$

$$\Lambda_3 = \frac{s^2+2}{2} - \sqrt{\frac{\left(s^2+2\right)^2}{4} - 1} \tag{5.10}$$

Zur Bestimmung der entsprechenden Streckungen muss die Wurzel aus Λ gezogen werden.

$$\lambda_i = \sqrt{\Lambda_i} \tag{5.11}$$

Die zugehörigen Eigenrichtungen können mit Hilfe der Gleichung für das allgemeine Eigenwertproblem bestimmt werden.

$$\left(\underline{\underline{C}} - \Lambda_i \cdot \underline{\underline{E}}\right) \cdot \underline{v}_i = \underline{0} \tag{5.12}$$

Die Eigenvektoren $\underline{v}_i$, sind diejenigen Vektoren, die Gleichung 5.12 für die Eigenwerte Λ_i erfüllen. Die Koeffizienten der normierten Eigenvektoren $\underline{e}_{vi}$ für eine einfache Scherung lauten in Abhängigkeit des Schermaßes s wie folgt.

$$[e_{v1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [e_{v2}] = \frac{1}{|\underline{v}_2|} \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} = 1 \\ v_{2z} = 0 \end{bmatrix} \quad [e_{v3}] = \frac{1}{|\underline{v}_3|} \begin{bmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} = 1 \\ v_{3z} = 0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

mit

$$v_{2x} = \frac{s}{\frac{s^2+2}{2} + \sqrt{\frac{\left(s^2+2\right)^2}{4} - 1} - 1} \tag{5.14}$$

und

$$v_{3x} = \frac{-s}{-\frac{s^2+2}{2} + \sqrt{\frac{(s^2+2)^2}{4} - 1} + 1} \tag{5.15}$$

Abbildung 5.3 zeigt den Verlauf der Eigenvektoren einer einfachen Scherung in yx-Richtung in Form von Pfeilen sowie die zugehörige Ellipsenrepräsentation.

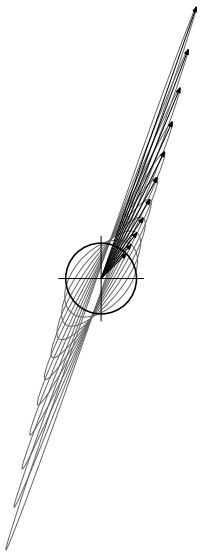


Abb. 5.3: Endpunkte der Eigenvektoren des rechten Cauchy-Green-Tensors bei einer einfachen Scherung

Abbildung 5.3 zeigt deutlich, dass sich nicht nur die Eigenwerte im Verlauf der einfachen Scherung ändern, sondern auch die Eigenrichtungen. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu anderen Deformationen, wie uniaxiale Zug- oder Druckverformungen. Aufgrund der Änderung der Eigenrichtungen einfacher Scherdeformationen, darf eine einfache Scherung auch nicht als Deformationszustand angesehen werden, sondern muss als Deformationsprozess betrachtet werden, um die Rotation der Belastungsrichtungen berücksichtigen zu können. Eine Unterscheidung zu der in Abbildung 5.2 dargestellten ebenen Dehnung wäre sonst schwierig.

5.1.3 Teilprozess 2: Rotation der Scherbelastung

Nach Erreichen der vorgegebenen Scheramplitude beginnt der eigentliche Prozess der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen. Zu diesem Zweck wird der Mittelpunkt der zur Grundfläche parallelen Ebene des einfach gescherten Einheitswürfels translatorisch auf einer Kreisbahn um den Flächenschwerpunkt derselben Fläche im undeformierten Zustand bewegt, so dass sich die Höhe des Einheitswürfels sowie die Parallelität aller sich gegenüberliegenden Flächen nicht verändern. Abbildung 5.4 zeigt schematisch den undeformierten Einheitswürfel sowie verschiedene Zustände einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen während der Rotationsphase.

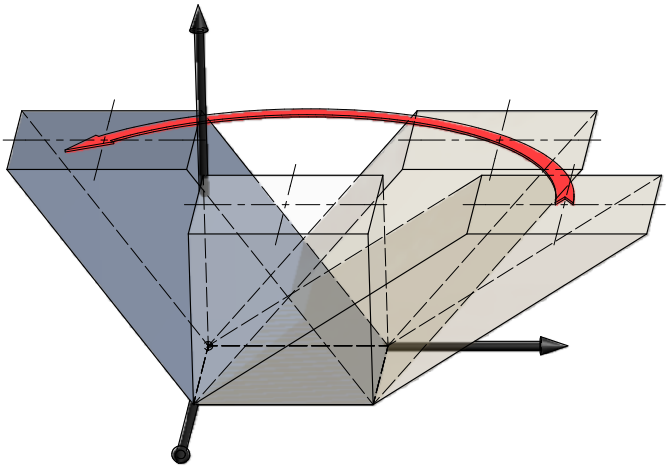


Abb. 5.4: Prinzip des Rührversuchs

Für eine weitere Beschreibung des Deformationsprozesses wird die Energiebilanz aufgestellt. Die Summe der zu einem Zeitpunkt t nach der Aufbringung der Scheramplitude am System geleisteten Arbeit setzt sich aus dem Anteil der Arbeit zur Aufbringung der Scheramplitude und dem Anteil aus der zur Rotatation der Scherachsen notwendigen Arbeit zusammen. Entsprechend kann die ins System eingebrachte Energie als Summe des Scheranteils ϕ_{Scher} und des Rotationsanteils ϕ_{rot} betrachtet werden.

$$\phi_{in}(t) = \phi_{Scher} + \phi_{rot}(t) \tag{5.16}$$

Der Anteil der Scherenergie wird einmalig zu Beginn des Deformationsprozesses aufgebracht und bleibt bei konstanter Scheramplitude unverändert. Die durch die Rotation eingebrachte Energie hingegen kann in Abhängigkeit von den Materialeigenschaften mit der Zeit und mit zunehmender Anzahl an Rotationen ansteigen.

Für isotrope, ideal elastische Materialien haben die Scherdeformation und die aus der aus der einfachen Scherung resultierende zugehörige Spannungstensor im Verlauf des gesamten Deformationsprozesses die gleiche Ausrichtung. Bei der Rotation der Beanspruchungsrichtungen muss für solche Materialien keine Leistung aufgewendet werden, da Kraft und Geschwindigkeit in diesem Fall vektoriell betrachtet stets einen rechten Winkel bilden und das Vektorprodukt somit null ist. Für die genannten Materialien gilt im Verlauf einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen folgende Leistungsbilanz.

$$\dot{\phi}_{el} = \underline{F} \cdot \underline{\dot{x}} = 0 \tag{5.17}$$

mit

$$\underline{F} \perp \underline{\dot{x}}$$

Die aus der Gleichung 5.17 resultierende Energiebilanz ideal elastischer und isotroper Materialien bleibt im Verlauf der Rotation der Scherachsen unverändert. Energetisch betrachtet

unterscheidet sich eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen bei gleicher Scheramplitude nicht von einer herkömmlichen einfachen Scherung. Für die Charakterisierung dieser Materialien können aus einer einfachen Scherung mit rotierenden Beanspruchungsrichtungen keine zusätzlichen Informationen gewonnen werden.

Im Vergleich dazu hat eine Modulation der Beanspruchungsrichtung bei inelastischen Materialien durchaus einen Einfluss auf die Bilanz. Für diesen Fall ist das Vektorprodukt der Kraft- und Geschwindigkeitsvektoren ungleich null. Aufgrund der Energiedissipation stimmt die Richtung des Verschiebungsvektors $\underline{x}$ im Kraftangriffspunkt auf der der Stirnfläche des Einheitswürfels nicht mehr mit der Richtung des Kraftvektors $\underline{F}$ überein. Der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel δ wird als Phasenwinkel bezeichnet und steht in Relation zu den Dissipationseigenschaften des Materials. In Abbildung 5.5 sind der resultierende Kraftvektor $\underline{F}$ und der Verschiebungsvektor $\underline{x}$ schematisch dargestellt. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\underline{\dot{x}}$ verläuft senkrecht zur Richtung der Auslenkung.

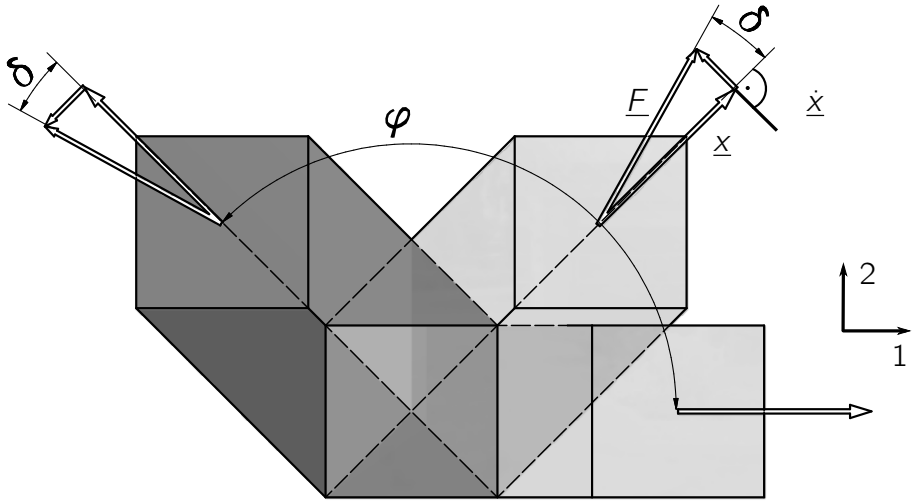


Abb. 5.5: Prinzip des Rührversuchs - Ansicht von oben - und Darstellung des Phasenwinkels δ

Die Kraftkomponente zur Aufrechterhaltung der Scheramplitude im Verlauf der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen soll als Radialkraft bezeichnet und mit einem R im Index gekennzeichnet werden: $\underline{F}_R$. Die aus der Energiedissipation der Rotation resultierende Kraft wird als Tangentialkraft oder als Rotationskraft bezeichnet und ist über den Index T erkennbar. Die Kraftkomponente $\underline{F}_R$ in Scherrichtung und die Komponente $\underline{F}_T$ senkrecht dazu lassen sich über eine Vektoraddition zur Gesamtkraft zusammenfassen.

$$\underline{F} = \underline{F}_R + \underline{F}_T \tag{5.18}$$

Der Umstand, dass die Kraftkomponente $\underline{F}_R$ existiert, bedeutet, dass im Verlauf der zweiten Phase des Rührversuchs in Abhängigkeit der Rotation mechanische Arbeit aufgewendet werden muss. Obgleich

$$\underline{F}_R \cdot \dot{\underline{s}} = 0 \tag{5.19}$$

gilt

$$\dot{\phi}_{inel,A} = \underline{F} \cdot \dot{\underline{s}} \neq 0. \tag{5.20}$$

Die Leistungsbilanz ergibt in diesem Fall einen Wert ungleich null, der aus der Kraftkomponente F_T resultiert, die senkrecht zur Belastungsrichtung steht.

$$\underline{F}_T \cdot \dot{\underline{s}} \neq 0 \tag{5.21}$$

Hier zeigt sich eine spezielle Materialeigenschaft inelastischer Materialien, die bei ideal elastischen Materialien nicht beobachtet werden kann: Eine reine Änderung der Belastungsrichtung bewirkt eine Dissipation von Energie. Dieses Phänomen stützt die Hypothese, dass eine Richtungsmodulation zu einer Schwächung des Materials führt und somit dessen Lebensdauer maßgeblich beeinflusst. Für inelastische Materialien reicht demzufolge eine Charakterisierung der Lebensdauer einzig auf der Grundlage von amplitudenmodulierten Belastungen nicht aus. Bei elastischen Materialien bedarf es weiterer Untersuchungen, ob eine Richtungsmodulation die Lebensdauer beeinträchtigt.

5.2 Der Phasenwinkel

Der Phasenwinkel eines Materials ist ein Maß für dessen Dissipationseigenschaften und gibt die Phasenverschiebung zwischen Kraft- und Verformungsgrößen an. Das Maximum der Kraftgröße befindet sich zeitlich stets vor den Maximum der Verformungsgröße. Auch bei einfachen Scherdeformationen mit rotierenden Achsen gibt es für technische Gummiwerkstoffe einen Phasenwinkel, der von der Kraft in Scherrichtung und der Gesamtkraft eingeschlossen wird. Es ist zu zeigen, dass dieser Winkel dem so genannten Verlustwinkel technischer genutzter Gummiwerkstoffe entspricht (vorgestellt z. B. bei Pahl [Pah95]). Hierzu muss zunächst geklärt werden, wie der Verlustwinkel üblicherweise beschrieben wird. Lion [Lio06] leitet den Phasenwinkel wie folgt her.

Betrachtet werden soll ein homogener uniaxialer Zugverformungsprozess mit harmonischer Anregung. Die aufgebrachte Verschiebung $u(t)$ lässt sich über die in Gleichung 5.22 dargestellte Sinusfunktion beschreiben. Lion geht hierbei von kleinen Verschiebungen aus.

$$u(t) = u_0 + \triangle u \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \tag{5.22}$$

u_0 entspricht der Vorlast in Form einer Verschiebung und $\triangle u$ der Amplitude der Schwingung um die Vorlast. Die Ausgangslänge l_0 für die Bestimmung einer Dehnung entspricht

der Ausgangslänge $\tilde{l}$ plus der Vorlast: $l_0 = \tilde{l} + u_0$. Die Oszillation der Dehnung lässt sich mit der Vordehnung $\epsilon_0 = \frac{u_0}{l_0}$ und der Dehnungsamplitude $\triangle\epsilon = \frac{\triangle u}{l_0}$ analog zu Gleichung 5.22 wie folgt beschreiben.

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 + \triangle\epsilon \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \tag{5.23}$$

Unter der Annahme kleiner Verzerrungen ist bei einer harmonischen Verformung auch die resultierende Kraft harmonisch. Lion beschreibt die Funktion der Reaktionskraft in gleicher Weise wie die Verschiebung: mit Hilfe einer Sinusfunktion. Die Kraft ist jedoch zu $u(t)$ aus Gleichung 5.22 (bzw. zu $\epsilon(t)$ aus Gleichung 5.23) um einen Winkel φ phasenverschoben.

$$F(t) = F_0 + \triangle F \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi) \tag{5.24}$$

F_0 entspricht der aus der Verschiebung u_0 resultierenden statischen Vorkraft. Die statische Vorkraft und die Kraftamplitude $\triangle F$ können in eine statische Vorspannung und eine Spannungsamplitude umgerechnet werden. Lion nutzt hierbei die gemischte Darstellungsweise und berechnet Vorspannung und Spannungsamplitude in Form von 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen aus.

$$T_0 = \frac{F_0}{A_0} \tag{5.25}$$

$$\triangle T = \frac{\triangle F}{A_0} \tag{5.26}$$

Unter Ausnutzung des Additionstheorems

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x) \tag{5.27}$$

sowie unter Verwendung der Gleichungen 5.25 und 5.26 beschreibt Lion die Spannungen ebenfalls mit Hilfe von Sinus- und Cosinusfunktionen.

$$T(t) = T_0 + \triangle T(\cos(\varphi) \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \sin(\varphi) \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)) \tag{5.28}$$

Gleichung 5.28 kann umgeformt werden, so dass die Spannungsamplitude mit Hilfe von $\triangle\epsilon$ ausgedrückt wird.

$$T(t) = T_0 + \triangle\epsilon(E' \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + E'' \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t)) \tag{5.29}$$

Aus den Gleichungen 5.28 und 5.29 leiten sich die Zusammenhänge zwischen Spannungsamplitude, Phasenwinkel und Speicher- bzw. Verlustmodul wie folgt ab.

$$\triangle T \cdot \cos(\varphi) = \triangle \epsilon \cdot E\prime \tag{5.30}$$

$$\triangle T \cdot \sin(\varphi) = \triangle \epsilon \cdot E\prime\prime \tag{5.31}$$

Daraus resultieren die von Lion [Lio06] vorgestellten Gleichungen zur Beschreibung von E' und E''.

$$E' = \frac{\triangle T}{\triangle \epsilon} \cdot \cos(\varphi) \tag{5.32}$$

$$E'' = \frac{\triangle T}{\triangle \epsilon} \cdot \sin(\varphi) \tag{5.33}$$

Die von Lion gewonnenen Erkenntnisse werden nun auf die Ergebnisse der Untersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen angewendet. Hierbei ist zu beachten, dass bei der Herleitung von Lion kleine Verschiebungen vorausgesetzt wurden, davon abweichend die durchgeführten Untersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen diese Voraussetzung jedoch nicht erfüllen. Aus Abschnitt 7.4.1 geht jedoch hervor, dass die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Werkstoffe nur geringgradig nichtlinear sind und bei großen Verformungen eine gleichbleibend ausgeprägte Hysterese aufweisen.

Für die Umsetzung einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen wird zu Beginn des Deformationsprozesses, wie in Abschnitt 5 beschrieben, zunächst eine einfache Scherung initiiert. Im Verlauf der Rotation bleibt das Schermaß konstant. Bezüglich eines körperfesten Koordinatensystems kann s in Abhängigkeit von der Zeit mittels einer Sinusfunktion beschrieben werden: $s \rightarrow s(t)$.

$$s(t) = s_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \tag{5.34}$$

Die resultierende Kraft im Verlauf des Deformationsprozesses einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen setzt sich nach Gleichung 5.18 aus einem Anteil in Scherrichtung und einen Anteil in dazu senkrechter Richtung zusammen. Dies bedeutet, dass die Richtung der Gesamtkraft nicht der Scherrichtung entspricht, sondern phasenverschoben sein muss. Wird der Wert der Gesamtkraft, ähnlich wie beim Schermaß s, in einem körperfesten Koordinatensystem betrachtet, so kann dieser ebenfalls über eine harmonische Schwingung beschrieben werden: $F \rightarrow F(t)$.

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \delta) \tag{5.35}$$

Hierbei entspricht F_0 dem Betrag der Gesamtkraft und δ dem Phasenwinkel zwischen der Scherrichtung und der Richtung der Gesamtkraft. Mit der zur einfachen Scherung gehörigen Ausgangsfläche kann analog zum Vorgehen von Lion [Lio06] die zum Deformationsprozess der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen zugehörige Spannung in Form von 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen bestimmt werden (siehe auch Freund [Fre06]).

$$T(t) = \frac{F(t)}{A_0} \tag{5.36}$$

Für Gleichung 5.35 ergibt sich dementsprechend eine zeitabhängige Beschreibung für die Spannungen.

$$T(t) = \frac{F_0}{A_0} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \delta) \tag{5.37}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems aus Gleichung 5.27 kann Gleichung 5.37 umgeformt werden.

$$T(t) = \frac{1}{A_0} \cdot F_0 \cdot \cos(\delta) \sin(2\pi \cdot f \cdot t) + \frac{1}{A_0} \cdot F_0 \cdot \sin(\delta) \cos(2\pi \cdot f \cdot t) \tag{5.38}$$

Der Zusammenhang zur Unterteilung in F_R und F_T wird über die Gleichungen

$$F_R = F_0 \cdot \cos(\delta) \tag{5.39}$$

und

$$F_T = F_0 \cdot \sin(\delta) \tag{5.40}$$

hergestellt. Mit der zu Beginn gemachten Annahme gelten außerdem nachfolgende Zusammenhänge.

$$\frac{F_R}{A_0} = T_R \approx s_0 \cdot G' \tag{5.41}$$

$$\frac{F_T}{A_0} = T_T \approx s_0 \cdot G'' \tag{5.42}$$

Näherungsweise lässt sich somit die Aussage treffen, dass

$$G' \approx \frac{F_R}{A_0 \cdot s} \tag{5.43}$$

und

$$G'' \approx \frac{F_T}{A_0 \cdot s} \tag{5.44}$$

gilt. Daraus lässt sich für die untersuchten Werkstoffe eine Abschätzung für den Verlustwinkel des Materials machen.

$$\boxed{\tan(\delta) = \frac{G''}{G'} \approx \frac{F_T}{F_R}} \tag{5.45}$$

5.3 Einfache Scherung mit rotierenden Achsen - Sonderfälle

Wie in Abbildung 5.5 dargestellt, verläuft der Flächenschwerpunkt der oberen Würfelfläche des Einheitswürfels während der Rotationsphase entlang einer Kreisbahn innerhalb einer Ebene parallel zur xy-Ebene des Koordinatensystems. Die xy-Koordinaten des Mittelpunktes p auf der Kreisbahn können mit Hilfe von Sinus- und Cosinusfunktionen wiedergegeben werden.

$$p_x = r \cdot \cos(\varphi) \tag{5.46}$$

$$p_y = r \cdot \sin(\varphi) \tag{5.47}$$

r entspricht dabei dem Radius des Kreises und somit der Scheramplitude s der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen. φ entspricht der Winkelposition des Punktes p im Bogenmaß. Die Cosinusfunktion zur Beschreibung der x-Koordinaten ist mit einer um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobenen Sinusfunktion identisch.

$$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.48}$$

Die Veränderung der x-Koordinate von p kann alternativ also auch wie folgt beschrieben werden.

$$p_x = r \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.49}$$

Werden, ausgehend von den Gleichungen 5.49 und 5.47, die Amplituden der Koordinaten von p sowie die Phasendifferenz zwischen den beiden Koordinaten in einer allgemeinen Form dargestellt, so ergibt sich die Position des Punktes p wie folgt.

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cdot \sin(\varphi + \delta_1) \\ A_2 \cdot \sin(\varphi + \delta_2) \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

Die Gleichungen 5.50 enthalten somit vier Parameter zur Beeinflussung der einfachen Scherdeformationen mit rotierenden Achsen: die beiden Amplituden A_1 und A_2 sowie die Phasenwinkel δ_1 und δ_2. Für qualitative Überlegungen sind hierbei vor Allem die Differenz der beiden Phasenwinkel sowie das Verhältnis der Amplituden zueinander von Interesse. Im weiteren Verlauf wird die Differenz der beiden Phasenwinkel mit δ und das Verhältnis der beiden Amplituden mit A bezeichnet.

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 \tag{5.51}$$

$$A = \frac{A_1}{A_2} \tag{5.52}$$

Die Reihenfolge bei der Differenz der Phasenwinkel (Gleichung 5.51) sowie die Verteilung der beiden Amplituden auf Zähler und Nenner des Quotienten (siehe Gleichung 5.52) sind für die weiteren qualitativen Überlegungen nicht von Belang und sind daher frei gewählt worden. Für eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen nach der Definition von Gent [Gen60] ergeben sich folgende Parameter:

$$A = 1 \tag{5.53}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} \tag{5.54}$$

Die Amplitude der Schwingungen von p in x- und y-Richtung sind identisch und der Phasenunterschied beträgt 90°. Die Differenz der Phasenwinkel soll im folgenden Gedankenbeispiel abnehmen, bis ein Wert von null erreicht ist.

Bei einer Reduzierung des Phasenwinkels beschreibt der Flächenschwerpunkt der oberen Würfelfläche keine Kreisbahn mehr, sondern verläuft entlang einer Ellipse. Fällt die Phasendifferenz auf null, so geht die einfache Scherung mit rotierenden Achsen in eine einfache beidseitige Scherung über. Die Scheramplitude beträgt das $\sqrt{2}$-fache der Auslenkung der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen. Die Ausrichtung der Verschiebungsachse der beidseitigen Scherung steht in einem 45°-Winkel zu der ursprünglichen Ausrichtung der beiden Hauptachsen. Über eine Veränderung des Phasenwinkels ist es also möglich, einer einfachen Scherung mit auf Kreisbahnen rotierenden Achsen eine einfache beidseitige Scherung zuzuordnen. Eine schrittweise Veränderung des Phasenwinkels von 90° auf 180° führt ebenfalls von einer einfachen Scherung mit auf Kreisbahnen rotierenden Achsen zu einer einfachen beidseitigen Scherung mit der $\sqrt{2}$-fachen Scheramplitude. In diesem Fall ist die Scherrichtung um 90° zu der Scherrichtung bei einem Phasenwinkel von 0° gedreht.

Etwas Vergleichbares ist zu beobachten, wenn anstelle der Differenz der Phasenwinkel das Verhältnis der Amplituden zu null wird. Dies ist gleichbedeutend mit der Herabsetzung

einer der beiden Amplituden zu null. Eine schrittweise Reduzierung von A führt zunächst dazu, dass die Punkte der oberen Würfelfläche im Verlauf der Rotationsphase entlang einer ellipsenförmigen Bahn verlaufen. Bei einem Wert von $A = 0$ geht die einfache Scherung mit rotierenden Achsen, wie zuvor schon bei der Veränderung des Phasenwinkels, ebenfalls in eine beidseitige einfache Scherung über. Im Gegensatz zu der aus einer Reduzierung der Phasendifferenz resultierenden einfachen beidseitigen Scherung, führt eine Reduzierung des Amplitudenverhältnisses jedoch nicht zu einer Veränderung der maximalen Amplitude. Außerdem bleibt die Ausrichtung der Deformation bei einer Veränderung von A stets gleich.

Unter Berücksichtigung der vorangegangenen Überlegungen besteht die Möglichkeit, einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen anhand des Bahnverlaufs der ausgescherten Seite während der Rotationsphase zu klassifizieren. Der allgemeine Fall entspricht hierbei einer Rotation der ausgelenkten Fläche entlang einer ellipsenförmigen Bahn. Dies trifft auf die meisten Kombinationen des Amplitudenverhältnisses A und der Phasenwinkeldifferenz δ zu. Ausgehend von diesem allgemeinen Fall können nun die beiden Sonderfälle, eine einfache Scherung mit entlang einer Kreisbahn rotierenden Achsen sowie eine einfache beidseitige Scherung, abgeleitet werden. Obwohl eine einfache beidseitige Scherung keine Rotation der Achsen im Sinne der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen nach Gent [Gen60] aufweist, handelt es sich dennoch um einen Grenzfall eines solchen Deformationsprozesses, der auf zwei unterschiedlichen Wegen erreicht werden kann. Die einfache beidseitige Scherung wird daher im Rahmen der vorliegenden Arbeit als Sonderfall in die Klasse der einfachen Scherdeformationen mit rotierenden Achsen miteinbezogen.

Für die Ermüdungsuntersuchungen bei verschiedenen Deformationsmoden ist es wünschenswert, eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen mit einer einfachen beidseitigen Scherung quantitativ vergleichen zu können. Hierzu bietet es sich an, eine der beiden zuvor vorgestellten Sonderfälle zur Beschreibung des Übergangs einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen zu einer beidseitigen einfachen Scherung heranzuziehen. Die Methode, die auf der Veränderung des Amplitudenverhältnisses basiert, erscheint zunächst als besser geeignet, da hier keine Veränderung der maximal auftretenden Scheramplitude stattfindet und beim Erreichen der maximalen Scheramplitude eine geometrische Übereinstimmung zwischen einfacher beidseitiger und einfacher Scherung mit rotierenden Achsen vorherrscht. Dieser Umstand täuscht jedoch darüber hinweg, dass eine Reduktion einer der beiden Schwingungsamplituden zu null gleichbedeutend mit einem Ausschalten der Hälfte der Schwingungen ist. In der Form basiert die einfache beidseitige Scherung nur auf einer Schwingung, wohingegen die einfache Scherung mit rotierenden Achsen durch zwei phasenverschobene Schwingungen aufgespannt wird. Die Methode, die auf einer Veränderung der Phasenwinkeldifferenz basiert, berücksichtigt hingegen im Verlauf des gesamten Übergangs stets beide Schwingungen und soll daher im weiteren Verlauf als Maß für Vergleiche der Schadenspotentiale herangezogen werden. Es gilt folgende Aussage: Die vergleichende

Abschätzung des Schadenspotentials einer einfachen Scherung mit entlang von Kreisbahnen rotierenden Achsen und einer einfachen beidseitigen Scherung ist möglich, wenn die maximale Scheramplitude der beidseitigen Scherung dem $\sqrt{2}$-fachen der maximalen Auslenkung der einfachen Scherung mit entlang von Kreisbahnen rotierenden Achsen entspricht. Eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen ist bei gleicher Amplitude im Vergleich zu einer einfachen beidseitigen Scherung somit deutlich stärker zu bewerten, wodurch noch einmal die Notwendigkeit hervorgehoben werden soll, das rotierende Belastungsrichtungen bei Lebensdauerberechnungen einen großen Einfluss auf die Schadenssumme haben können.

6 Der Versuchsstand

In diesem Kapitel wird das Konstruktionsprinzip des Versuchsstandes aufgezeigt. Außerdem werden Konstruktionsdetails, wie die Auslegung des Versuchsstandes, der Antrieb für die Rotation der Achsen sowie die Befestigung der Probekörper behandelt.

Der Versuchsstand ist die Grundlage für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen. Bei der Prüfmaschine handelt es sich um einen Prototypen, zum Zeitpunkt der Konstruktion des Versuchsstandes sind die im Rahmen der vorgestellten Ergebnisse beobachteten Phänomene nur theoretischer Natur gewesen. Eine Quantifizierung der auftretenden Effekte zur Abschätzung der Dimensionierung der einzelnen Baugruppen war dementsprechend ungenau. Neben der Vorrichtung zur Initiierung der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen sind auch die verwendeten Probekörper maßgeblich für die Qualität der Messungen. Daher soll der Optimierung der Probekörpergeometrie besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Hierfür ist vor allem der Beitrag von Freund [Fre06] hervorzuheben, auf dessen Grundlage die Probekörpergeometrie für den Versuchsstand entstanden ist.

6.1 Versuchsanordnung

Die Untersuchung neuer Aspekte der Lebensdauer mehrachsig belasteter Elastomerbauteile soll mit Hilfe des *Rührversuchs* durchgeführt werden. Hierbei handelt es sich um eine Versuchsanordnung für einen Deformationsprozess, bei dem zwei Proben in der so genannten *Double-Sandwich-Anordnung* über einen gewissen Zeitraum eine konstante Belastungsintensität und gleichzeitig eine fortwährende Änderung der Belastungsrichtung erfahren. Der Rührversuch wurde 1960 das erste Mal von A. N. Gent [Gen60] vorgeschlagen. Er kann in unterschiedliche und zeitlich aufeinander folgende Phasen unterteilt werden (siehe Abbildung 6.1). In der ersten Phase wird eine einfache Scherung in den Probekörpern initiiert. Unter Beibehaltung dieser Belastung werden die Probekörper im Anschluss an die erste Phase durch eine Rotation in axialer Richtung einer Deformation ausgesetzt, die zu einer reinen Rotation der Belastungsrichtungen führt. Die Umsetzung des Rührversuchs ist über eine dreiteilige Versuchsanordnung möglich.

Der Versuchsstand in Anlehnung an die von Gent [Gen60] vorgestellte Versuchsanordnung besteht aus drei verschiedenen Baugruppen, die auf einer gemeinsamen Plattform montiert werden können. In Abbildung 6.2 sind diese Baugruppen schematisch dargestellt. Die erste Baugruppe ist ein Lagerbock, der fest mit der Umgebung verbunden ist und keinerlei Freiheitsgrade aufweist. Dieser Lagerbock überträgt mit Hilfe eines geeigneten Antriebs ein Moment zur Realisierung der Rotationsbewegung der einfachen Scherung während der

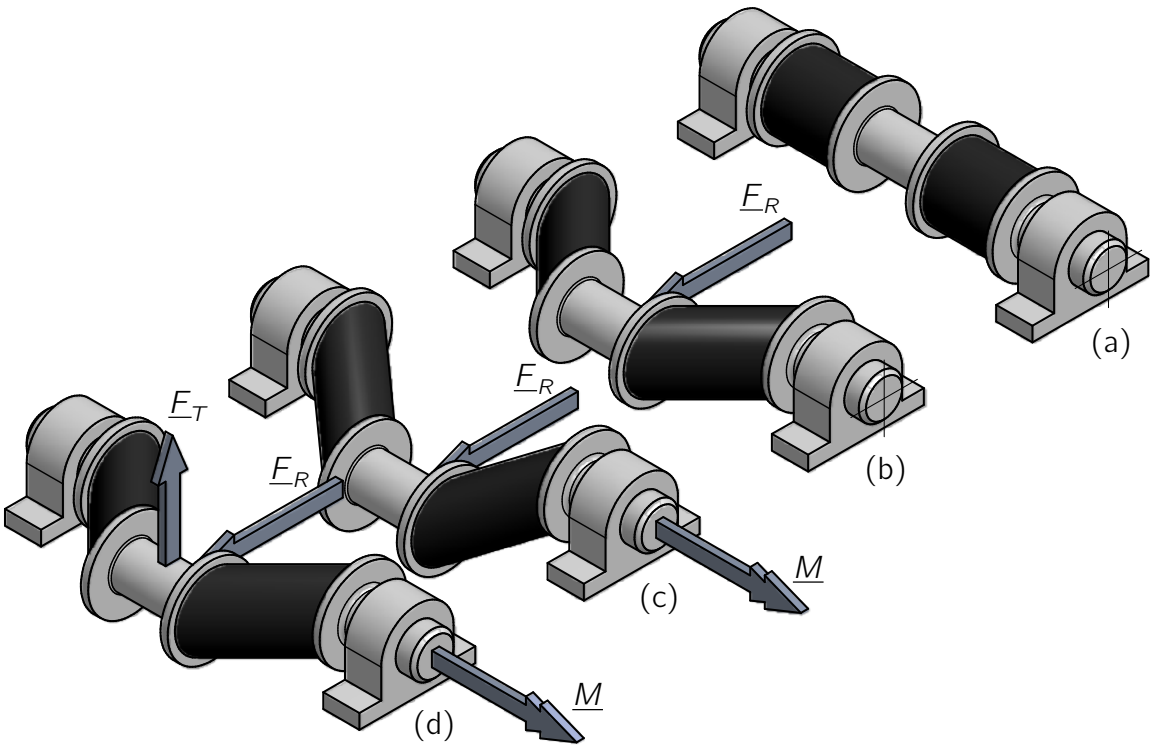


Abb. 6.1: Schematischer Versuchsablauf: (a): unbelastet, (b): ausgelenkt, (c): ausgelenkt und rotierend, (d): ausgelenkt, rotierend und mit Tangentialkraft $\underline{F}_R$.

zweiten Phase des Versuchs. Aufgrund der Verbindung zum Antrieb wird diese Seite des Versuchsstandes als Antriebsseite bezeichnet. Darüber hinaus verfügt dieser Lagerbock über eine Probenaufnahme zur Montage einer Probe. Die zweite Baugruppe, das Mittelteil des Versuchsstandes, dient dazu, die einfache Scherdeformation an den beiden im Versuchsstand montierten Proben aufzubringen. Hierzu sind zwei Klemmvorrichtungen zur Montage der Proben vorgesehen. Die Lagerung des Mittelteils erlaubt im Einbauzustand drei Freiheitsgrade, die eine Rotation der Proben, eine Verschiebung parallel zur Plattform und senkrecht zur Rotationsachse zur Richtung der einfachen Scherdeformation sowie eine axiale Verschiebung als Montagehilfe ermöglichen. Die charakteristischen Größen der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen, das Schermaß s, die auslenkende Kraft F_R und die aus der Energiedissipation im Verlauf der Rotation resultierende Kraft F_T (siehe Kapitel 5), sollen messtechnisch am Mittelteil erfasst werden. Die dritte Baugruppe hat einen rotatorischen Freiheitsgrad in Richtung der Wellenachse sowie einen axialen Freiheitsgrad zur Verschiebung der Baugruppe bei der Montage der Proben. Die dritte Baugruppe dient der Aufnahme und Lagerung der zweiten Probe.

Im Versuchsbetrieb sind zwei geeignete Probekörper jeweils zwischen einer der äußeren Baugruppen und dem Mittelteil eingespannt. Durch das Auslenken des Mittelteils werden die Proben je nach Qualität der verwendeten Probekörper nahezu einfach geschert. Die Verwendung zweier parallel zueinander angeordneter Probekörper gleicht die Auswirkungen von Axialkräften aus, die bei der einfachen Scherung der Probekörper auftreten. Über eine

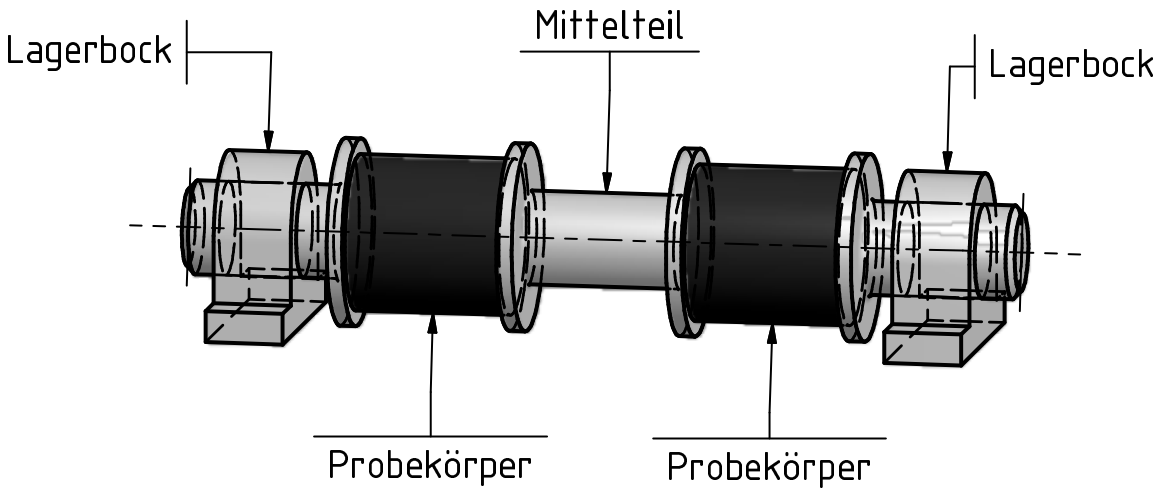


Abb. 6.2: Skizze der Baugruppen des Versuchsstands.

Rotation der Wellen werden die Probekörper mit einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen belastet. Die Scheramplitude wird über die Verschiebung des Mittelteils vorgegeben, die Radialkraft F_R und die aufgrund der Hysterese resultierende Querkraft F_T sind die Messgrößen des Versuchs.

6.1.1 Abgrenzung zu Versuchen nach DIN 53533 Teil 2 und ISO 4666 Teil 2

DIN 53533-2 beschreibt einen Versuch, dessen Durchführung dem von Gent [Gen60] vorgestellten Prinzip von einfacher Scherung mit rotierenden Achsen sehr ähnlich ist: das so genannte Rotationsflexometer. Die zur DIN identische ISO-Norm für diesen Versuch lautet ISO 4666-2. Anders als bei dem in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Versuchsstand dient das Rotationsflexometer jedoch zur Bestimmung der *Wärmeentwicklung* und des *Zermürbungswiderstandes* (siehe Röthemeyer [Röt06]). Der Begriff *Zermürbung* wird hierbei nach Röhtemeyer aus der Norm wie folgt definiert:

> „Bei Wechselverformung viskoelastischer Körper wird ein Teil der eingebrachten Energie in Wärme umgewandelt. Je nach Wärmebildung und Wärmeableitung führt dies zur Temperaturerhöhung und, falls die Wärmebildung größer als die Abfuhr ist, zur Zerstörung des Prüfkörpers (Zermürbung).“

Dem Rotationsflexometer liegt ein Deformationsprozess vor, der in vielen Punkten einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen ähnelt. Durch die jedoch meist starke Verformung der zylindrischen Prüfkörper wird ein inhomogener Verformungszustand im Material ausgebildet. Diese Inhomogenität im Material führt dazu, dass innerhalb der Probe alle möglichen Verzerrungszustände ausgebildet werden und die Aussagefähigkeit potentieller Messgrößen für Lebensdaueruntersuchungen nicht gegeben ist. Außerdem kann im Versuchsverlauf gemäß DIN 53533 ebenfalls die Anzahl der Umdrehungen bis zur Versagen

bestimmt werden. Als Versagensursache wird jedoch, anders als bei dem in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Versuch, keine mechanische Ermüdung, sondern eine thermische Alterung angegeben. Zudem ist der Versuch nach DIN 53533-2 bzw. ISO 4666-2 nicht dazu gedacht, das Versagen in Abhängigkeit eines vorgegebenen Schermaßes oder einer bestimmten Scherkraft, sowie des Phasenwinkels zu bestimmen, da Rotationsflexometer üblicherweise keine Kraftaufnehmer zur Bestimmung der Radial- oder Tangentialkraft aufweisen. Die experimentelle Ausrichtung der in dieser Arbeit vorgestellten Versuchsanlage ist also eine andere, als die eines Rotationsflexometer nach DIN- oder ISO-Norm.

6.2 Probekörper für einfache Scherbelastungen

Eine sinnvolle Auswertung der gemessenen Kräfte ist beim Rührversuch nur dann möglich, wenn die Kräfte eindeutig einem bekannten Deformationszustand zugeordnet werden können. Hierzu ist eine Probekörpergeometrie anzustreben, die garantiert, dass der Probekörper über den größtmöglichen Anteil des Volumens einfach geschert wird. Nach ersten Abschätzungen scheint eine zylindrische Probekörpergeometrie für Untersuchungen von Scherbelastungen mit rotierenden Achsen geeignet zu sein, da sich ein großer Teil des Volumens homogen scheren lässt. Abbildung 6.3 zeigt eine mit einem Schermaß von $s = 1$ beaufschlagte, zylindrische Probekörpergeometrie im Schnitt. Bei den Untersuchungen zur Eignung dieser Probekörpergeometrie für den Versuchsstand wurde zunächst die Verteilung der v. Mises-Vergleichsspannungen als Kriterium für die Homogenität der Belastung herangezogen. Hierzu wurde das mechanische Verhalten eines Halbmodells der Geometrie mit Hilfe der Finite Elemente Methode und unter Verwendung des Stoffgesetzes nach Mooney-Rivlin (vorgestellt in Abschnitt 4.1) für ein Schermaß von $s = 1$ berechnet. Ausschlaggebend für die Güte der Probekörpergeometrie in diesem Zusammenhang ist, bei einer einfachen Scherung ein größtmögliches Volumen mit gleicher v. Mises Spannung zu generieren. Darüber hinaus muss gewährleistet werden, dass sich das Volumen mit gleicher v. Mises Spannung für verschiedene Scheramplituden nicht maßgeblich ändert.

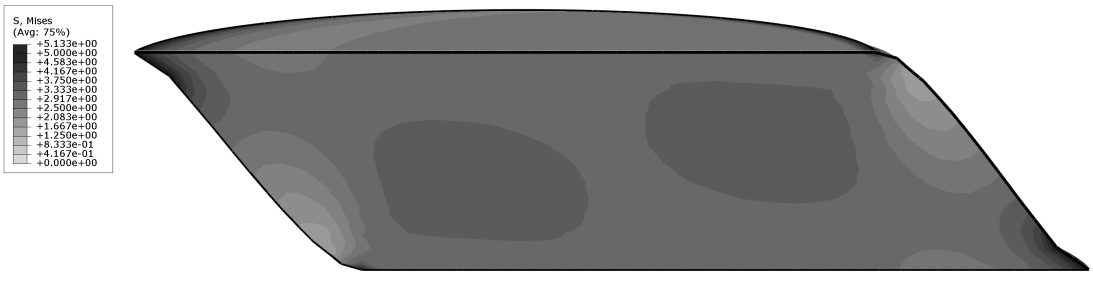


Abb. 6.3: Simulationsergebnisse eines einfach gescherten Zylinders

In Abbildung 6.3 ist zu erkennen, dass in einem großen Teil des Volumens des Probekörpers die gleiche v. Mises Spannung vorherrscht. Dies weist auf eine sehr großvolumige homogene Verformung hin. Gleichzeitig bilden sich jedoch im Verlauf des Deformationsprozesses

in Scherrichtung an den Zylinderkanten Spannungsmaxima aus. Die Wahrscheinlichkeit für ein Versagen in einem Materialpunkt wächst bei gleichbleibender Lastamplitude und konstanter Belastungsfrequenz mit dem Betrag der vorherrschenden Spannung. Die Zylinderkanten sind bei Ermüdungsuntersuchungen folglich die Bereiche mit der höchsten Ausfallwahrscheinlichkeit. Gleichzeitig sollen die Grundflächen des Zylinders als Kontaktflächen zur Anbindung der Probe an der Versuchsstand dienen. Bei einem Versagen in diesem Bereich kann demzufolge nicht mit Gewissheit ausgesagt werden, ob dessen Ursache eine reine Materialermüdung oder eine Ermüdung des zur Anbindung verwendeten Haftvermittlers ist. Selbst für den Fall, dass die Kontaktfläche den Belastungen widersteht, besteht die Möglichkeit, dass sich Risse direkt unter der dünnen Klebe- oder Haftvermittlerschicht bilden und das Versagen der Probe herbeiführen und zwar zu einem Zeitpunkt, bei dem ein Großteil des Probenvolumen noch nicht wesentlich ermüdet ist. Für sinnvolle Ermüdungsuntersuchungen ist es jedoch wünschenswert, den Probekörper im Verlauf eines Versuches gleichmäßig über das gesamte Volumen zu zermürben, so dass zum Ende der Untersuchung jeder Materialpunkt die gleiche Wahrscheinlichkeit für ein Versagen aufweist. Aus diesem Grund müssen lokale Spannungsmaxima bei Ermüdungsuntersuchungen vermieden werden. Das angestrebte, vollständig homogen einfach gescherte Probenvolumen mit einer gleichmäßig verteilten Belastung ohne lokale Spannungsmaxima ist jedoch eine Idealvorstellung. Leichte Spannungsschwankungen innerhalb des Probekörpers sind unvermeidbar. Aus diesem Grund soll die Probekörpergeometrie dahingehend verändert werden, dass die Spannungsmaxima ins Probeninnere verlagert werden, um einem Versagen direkt auf der Kontakt- oder Mantelfläche vorzubeugen. Gleichzeitig sollen die Bereiche mit den maximalen Spannungen für verschiedene Scheramplituden das größtmögliche Volumen einnehmen.

6.2.1 Optimierung der Probekörpergeometrie

Bei der Optimierung der Probekörpergeometrie sollen zunächst grundlegende Einflüsse auf die Spannungsverteilung im Probekörper untersucht werden. Aufgrund der Versuchsanordnung ist eine rotationssymmetrische Probekörpergeometrie zwingend. Für die grundlegenden Untersuchungen wurde daher als Ausgangsgeometrie ein zylindrischer Probekörper genutzt und das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser variiert. Hierbei wird von Freund [Fre06] im Rahmen einer Masterarbeit gezeigt, dass ein flache Geometrie im Bestreben einen großen Bereich homogener Scherdeformation zu erlangen, besser geeignet ist, als eine Geometrie mit einem großen Höhe-Durchmesser-Verhältnis. Abbildung 6.4 zeigt die Verteilung der Vergleichsspannungen im Falschfarbenbild beim Auslenken zweier Zylinder mit unterschiedlichem Höhe-Durchmesser-Verhältnis. Der Betrag der Auslenkung ist für die beiden Probekörper so gewählt, dass jeweils eine Scherung mit einem Schermaß von $s = 1$ initiiert wird. Der Betrag der Verschiebung der beiden Stirnflächen zueinander entspricht

also jeweils der Höhe des Zylinders.

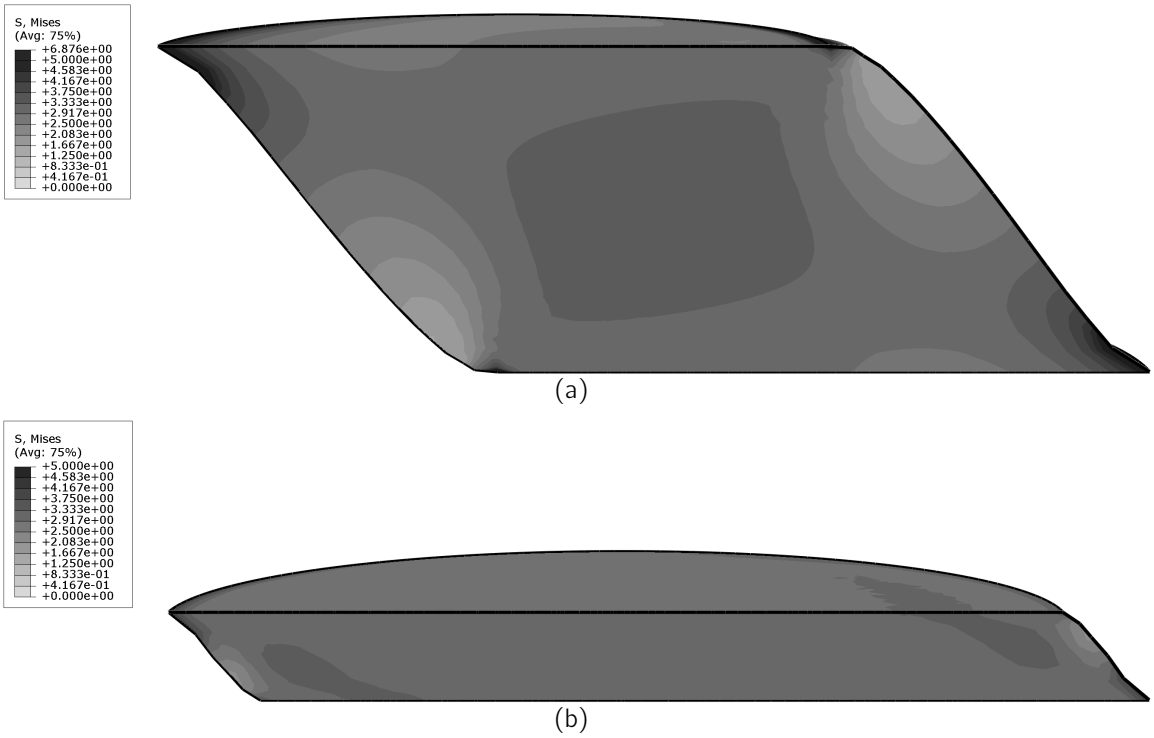


Abb. 6.4: Einfach gescherte Zylinder mit v. Mises Spannungen im Falschfarbenbild für ein Höhe-Durchmesser-Verhältnis von $0,5$ (a) und $0,1$ (b).

Aufgrund des Kräftegleichgewichts wird die im Modell in Abbildung 6.4 (a) und (b) jeweils benötigte Kraft vollständig von der oberen Kontaktfläche durch das Material auf die untere Kontaktfläche übertragen. Hieraus resultiert, dass in jeder Ebene parallel zu den Kontaktflächen die gleiche Scherkraft wirkt. Die Verlagerung der maximalen Belastungen von den Kontaktflächen weg ins Innere der Probe ist demzufolge über eine Verringerung der belasteten Querschnittsfläche möglich, was über eine Einschnürung der Mantelfläche erreicht werden kann.

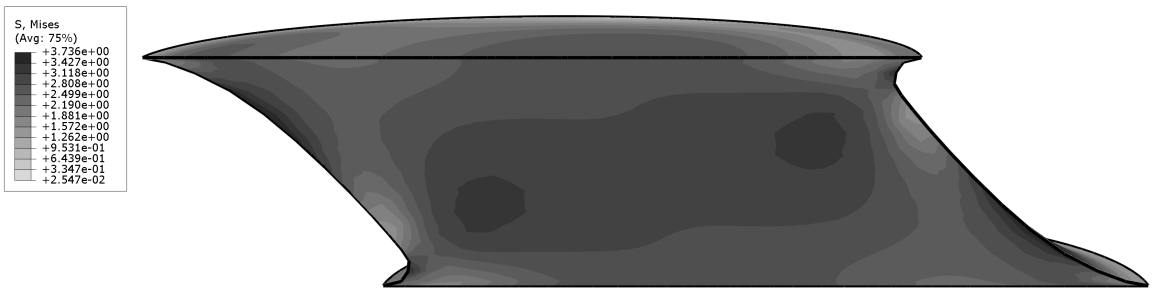


Abb. 6.5: Gescherter Zylinder mit eingeschnürter Mantelfläche.

Abbildung 6.5 zeigt exemplarisch die v. Mises-Vergleichsspannung eines zylindrischen Probekörpers mit einer eingeschnürten Mantelfläche. Es ist zu erkennen, dass die Spannungen

auf der Kontaktfläche abnehmen, dies geht jedoch zu Lasten der Homogenität der Deformation. Außerdem befinden sich die Bereiche mit den größten Vergleichsspannungswerten nun auf der Mantelfläche selbst. Von Freund durchgeführte vergleichbare Untersuchungen belegen dieses Phänomen. Das Auftreten maximaler Spannungen auf der Mantelfläche ist ungünstig, da die Wahrscheinlichkeit für ein Versagen der Probe nun auf der Mantelfläche sehr hoch ist und eine gleichmäßige Zermürbung des Materials über den gesamten Probekörper durch eine frühzeitige Rissinitiierung und -ausbreitung verhindert werden könnte.

Zur Verlagerung der Beanspruchung ins Probeninnere hat Freund außerdem den Einfluss einer Wölbung der Kontaktflächen untersucht. Hierbei soll ausgenutzt werden, dass die auftretenden Spannungen vom Schermaß abhängig sind. Durch eine Verjüngung des Abstands der Kontaktflächen, ausgehend vom äußeren Rand der Probekörpergeometrie zur Mittelachse hin verändert sich das Schermaß bei einer gleichmäßigen Verschiebung der Kontaktflächen zueinander. Hieraus resultieren größere Spannungen im Bereich der Mittelachse der Probe. Abbildung 6.6 zeigt exemplarisch die Einflüsse der Verjüngung der Kontaktfläche auf die Verteilung der v. Mises-Vergleichsspannungen.

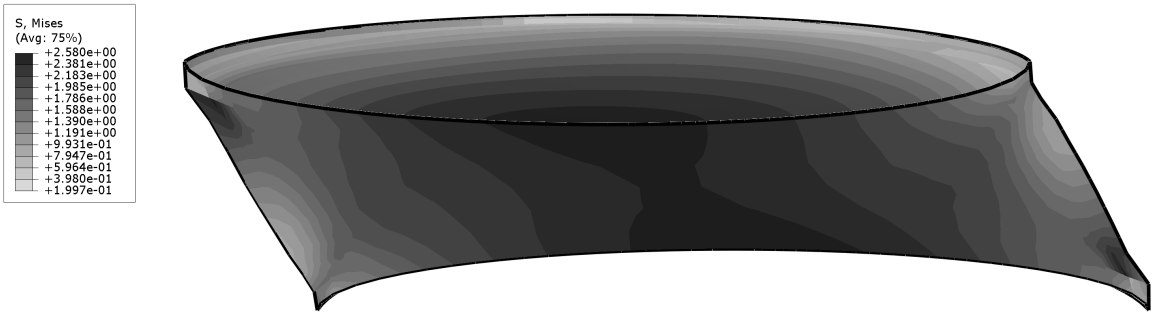


Abb. 6.6: Gescherter Zylinder mit eingewölbten Kontaktflächen.

Wie Abbildung 6.6 belegt, führt eine Verjüngung der Kontaktflächen in der Tat dazu, dass die maximale Vergleichsspannung von der Mantelfläche weg ins Innere der Probe verlagert wird. Eine Betrachtung der Verteilung des Schermaßes zeigt jedoch, dass dieser Vorteil maßgeblich die Homogenität der Deformation vermindert: Ausgehend von der Mittelachse der Probe nimmt das Schermaß aufgrund der Zunahme der Probenhöhe bis zu 60% ab. Theoretisch wäre es möglich, die Inhomogenitäten zu einem gewissen Anteil bei der Auswertung von Messungen zu berücksichtigen, ein derartiges Vorhaben wäre jedoch aufwendig und ungenau und dementsprechend nicht zielführend.

Im Rahmen der Optimierungen werden von Freund [Fre06] zwei Probekörpergeometrien vorgeschlagen, die für eine Verwendung im Rührversuch geeignet erscheinen. Weitere Verbesserungen hinsichtlich der Geometrie weisen nach Freund eine Abhängigkeit von der Scheramplitude auf. Zunächst wird eine Geometrie vorgeschlagen, die aus einer Kombination von eingeschnürter Mantelfläche sowie einer zur Probenmitte hin verjüngender

Kontaktfläche entstanden ist und für eine Scherung mit einem Schermaß von 1 optimiert ist. Bei dieser Probekörpergeometrie ist maßgeblich, dass die maximalen Lasten fern von den Kontaktflächen sind. Aufgrund der technischen Möglichkeiten zur Realisierung einer starken Anbindung des Probekörpers an die Probenbasen wird jedoch die von Freund als Alternative vorgeschlagene Probekörpergeometrie verwendet. Hierbei muss gewährleistet werden, dass die Anbindung des Probekörpers an die Metalloberfläche der Probenbasis stärker ist, als die Anbindung des Gummis an sich selbst und dieser Bereich somit keine Schwachstelle im Versuchsaufbau darstellt. Bei der Charakterisierung der Lebensdauer würde ansonsten nur die Belastbarkeit des Haftvermittlers untersucht werden. Bei Verwendung eines geeigneten Haftvermittlersystems eignet sich jedoch die in der nachstehenden Abbildung dargestellte Probekörpergeometrie für Ermüdungsuntersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen.



Abb. 6.7: Die optimierte Probekörpergeometrie nach Freund, geschert mit einem Schermaß von $s = 1$.

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass die Probe über ein großes Volumen im mittleren Bereich maximal belastet wird. Gleichzeitig ist nahezu das gesamte Volumen des Probekörpers einfach geschert. Nur an den Ecken im Übergang von Kontaktfläche zur Mantelfläche zeigen sich Veränderungen bei den Vergleichsspannungen. Dieser Umstand beeinflusst die Homogenität der in der Probekörpergeometrie initiierten Deformation jedoch nicht wesentlich, da das betreffende Volumen sehr klein und die auftretenden Spannungen sehr gering sind. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde diese Geometrie für weitere Untersuchungen ausgewählt.

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, dass parallel zur Optimierung des Probekörpers von Freund zusätzlich Untersuchungen der FEM-Software ABAQUS durchgeführt wurden, um die Netzabhängigkeit sowie den Einfluss von Elementtypen, die Größe der Zeitschrittweite oder das verwendete Stoffgesetzes auf die Simulationsergebnisse zu berücksichtigen.

Neben der Verteilung der v. Mises-Vergleichsspannungen ist es für die Optimierung zusätzlich von Bedeutung, die in einem Materialpunkt vorherrschenden einfachen Scherung quantitativ beurteilen zu können. Eine Betrachtung der Verteilung der Vergleichsspannungen

allein reicht hierfür nicht aus. Unter der Annahme, dass die zu untersuchenden Werkstoffe inkompressibel sind, besteht die Möglichkeit, die ersten beiden Invarianten des eulerschen oder lagrangeschen Cauchy-Green-Tensors in Abhängigkeit voneinander in einem Diagramm darzustellen. Die nachstehende Abbildung zeigt die ersten beiden Invarianten des rechten bzw. linken Cauchy-Green-Tensors für alle möglichen volumenkonstanten Deformationen.

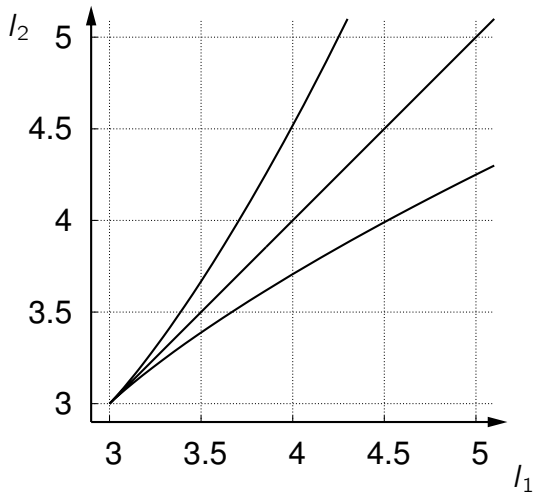


Abb. 6.8: $I_1 - I_2$-Diagramm für uniaxialen Zug, Druck und einfache Scherung bei $\nu = 0,5$

Ausgezeichnete Deformationsmoden wie äquibiaxialer oder uniaxialer Zug sowie die einfache Scherung weisen in diesem Diagramm charakteristische Positionen auf. So wird zum Beispiel die Grenze der Fläche mit möglichen Lösungen des Diagramms durch alle inkompressibel möglichen Zug- und Druckdeformationen festgelegt. Alle einfach gescherten Deformationen entsprechen der Winkelhalbierenden der beiden Koordinatenachsen, hier sind die beiden Invarianten gleich. Für eine Beurteilung einer Probekörpergeometrie mit Hilfe eines FEM-Programms besteht nun die Möglichkeit, über eine Nutzerschnittstelle in jedem Gaußpunkt die ersten beiden Invarianten der Cauchy-Green-Tensoren zu bestimmen. Je größer der Differenzbetrag der beiden Invarianten ist, desto weiter weicht die im Gaußpunkt vorherrschende Deformation von einer einfacher Scherung bzw. der zugehörige Punkt im Diagramm von der Winkelhalbierenden ab. Bei Verwendung dieses Kriteriums ist jedoch zu berücksichtigen, dass die in Kapitel 5.1.1 als reine Scherung vorgestellte ebene Dehnung ebenfalls zu einer Differenz der ersten beiden Invarianten der Cauchy-Green-Tensoren führen würde, die null entspricht. Aufgrund der Tatsache, dass die Deformation im Probekörper über eine Verschiebung von dessen Kontaktflächen zueinander initiiert wird, ist es zwar möglich, dass ein Materialpunkt zu einem bestimmten Zeitpunkt eine ebene Dehnung erfährt. Wird jedoch der gesamte Deformationsprozess betrachtet, ist das Auftreten einer ebenen Dehnung über den Verlauf des gesamten Prozesses eher unwahrscheinlich, da eine ebene Dehnung konstante Belastungsrichtungen voraussetzt und im Verlauf des Deformationsprozesses stets eine Veränderung der Belastungsrichtungen stattfindet. Die

quantitative Beurteilung der Probekörper hinsichtlich des Grades der einfachen Scherung erfolgt über die Zuordnung eines Zahlenwerts als Wertemenge zur Differenz der ersten beiden Invarianten der Cauchy-Green-Tensoren als Definitionsmenge. Für die Funktion zur Bestimmung des Grades der einfachen Scherung soll mit $\Delta I = |I_2 - I_1|$ als Definitionsmenge folgendes gelten.

$$\lim_{\Delta I \to 0} V_I(\Delta I) = 1 \tag{6.1}$$

und

$$\lim_{\Delta I \to \infty} V_I(\Delta I) = 0 \tag{6.2}$$

Gute Ergebnisse zur Darstellung von Unterschieden zwischen uniaxialer Zugverformung, äquibiaxialer Druckverformung und einfacher Scherung lassen sich mit der Formulierung in Gleichung 6.3 erzielen.

$$V_I(I_1, I_2) = (1 - |I_2 - I_1|)^{I_2 + I_1} \tag{6.3}$$

Mit den genannten Formeln ist es möglich, den Grad der Scherung abzubilden. Je näher der Zahlenwerte an 1 heranreicht, desto mehr entspricht die untersuchte Deformation einer einfachen Scherung. Abbildung 6.9 zeigt ein Falschfarbenbild des Probekörpers bei einem Schermaß von 1, was einer translatorischen Verschiebung der beiden Kontaktflächen zueinander um den Betrag der Probenhöhe im Mittelpunkt entspricht. Die Falschfarben entsprechen den Ergebnissen von Gleichung 6.3, angewendet auf die jeweiligen Deformationszustände in den einzelnen Gaußpunkten.

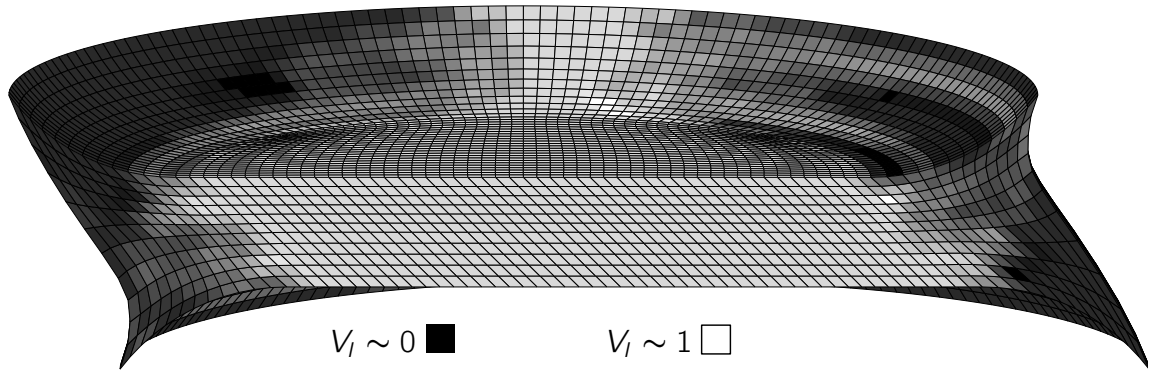


Abb. 6.9: Beurteilung der einfachen Scherung im Falschfarbenbild.

Im Rahmen der Untersuchungen wurden eine Vielzahl von Funktionen auf Ihre Eignung geprüft, 6.3 zeigte in diesem Zusammenhang jedoch die besten Ergebnisse bei Voruntersuchungen hinsichtlich der Unterscheidbarkeit von Zug, Druck und einfacher Scherung. Hierbei soll jedoch nicht der Anspruch erhoben werden, das es sich um die optimale Funktion zur Unterscheidung zwischen einfacher Scherung und anderen Deformationen handelt. Für eine Abschätzung der Eignung der Probekörpergeometrie ist die Aussagekraft jedoch hinreichend. Anhand ergänzender Untersuchungen wurde bestätigt, dass die Probekörpergeometrie gemäß Abbildung 6.7 im Bereich der größten Vergleichsspannungen über ein großes Volumen hinweg einfach geschert ist. Hierzu wurde wiederum die Differenz der ersten beiden Invarianten untersucht. In diesem Falle wurden jedoch nur die Zahlen 1 und 0 zugeordnet. Für den Fall, dass die Differenz aus erster und zweiter Invariante kleiner oder gleich einem Zahlenwert von $0,01$ ist, wird dem Deformationszustand ein Zahlenwert von 1 zugeordnet, ansonsten eine 0. Mit dieser Methode soll abgeschätzt werden, wie groß der einfach gescherte Bereich im Rahmen einer gewissen Toleranz ist.

6.2.2 Tatsächliche und berechnete Querschnittsfläche des optimierten Probekörpers

Zur Bestimmung der Scherspannung ist es erforderlich, neben der Scherkraft auch die zur Scherspannung zugehörige Querschnittsfläche des Probekörpers zu kennen, um beides zueinander in Bezug setzen zu können. Aufgrund der Einschnürung in der Mantelfläche ist die Querschnittsfläche der optimierten Probekörpergeometrie über die Höhe jedoch nicht konstant. Somit ist nicht eindeutig, welche Querschnittsfläche für die Bestimmung der Scherspannung herangezogen werden soll. Mit Hilfe einer Simulation soll eine äquivalente Querschnittsfläche für die Probekörpergeometrie bestimmt werden. Die Grundlage hierfür bildet die Gleichung für die mittlere Scherspannung, die sich für homogene Deformationen aus dem Quotienten aus Scherkraft und Querschnittsfläche berechnen lässt.

$$\sigma_{yx} = \frac{F_x}{A_y} \tag{6.4}$$

Der Index der Fläche A bezeichnet hierbei die Achse des Koordinatensystems, die als Normalenvektor die Bezugsfläche definiert. Gleichung 6.4 kann so umgeformt werden, dass sich die Querschnittsfläche als Quotient aus Scherkraft und mittlerer Scherspannung bestimmen lässt.

$$A_y = \frac{F_x}{\sigma_{xy}} \tag{6.5}$$

Die im Probekörper auftretenden Spannungsgrößen werden mit Hilfe der Finite Elemente Methode bestimmt. Hierzu wird ein Halbmodell der optimierten Probekörpergeometrie

verformt und die Reaktionskraft sowie diverse Spannungsgrößen im Schwerpunkt der Probekörpergeometrie ermittelt. Als Stoffgesetz wird das Modell nach Mooney-Rivlin [Moo40] verwendet. Mit Hilfe der Simulationsergebnisse des optimierten Probekörpers unter einfacher Scherung wird nun nach Gleichung 6.5 und unter Annahme einer homogenen Scherung eine äquivalente Querschnittsfläche berechnet. Hierbei stellt sich jedoch die Frage, welche Spannungsgröße am besten dazu geeignet ist, die effektive Fläche der Probekörpergeometrie zu bestimmen. Zu Vergleichszwecken werden die xy-Komponente des Cauchy-Spannungstensors σ_{xy}, die Vergleichsspannungen nach von-Mises mit

$$\sigma_{v.Mises} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_{II})^2\right]} \tag{6.6}$$

und nach Tresca mit

$$\sigma_{Tresca} = max\left(|\sigma_I - \sigma_{II}|\,;|\sigma_{II} - \sigma_{III}|\,;|\sigma_{III} - \sigma_I|\right) \tag{6.7}$$

und der maximale Eigenwert des Cauchy-Spannungstensors im Schwerpunkt der Probekörpergeometrie untersucht. Die Scherkraft wird in Abhängigkeit vom Schermaß bestimmt, so dass die äquivalente Querschnittsfläche zunächst auch in Abhängigkeit von der Deformation betrachtet werden kann. Für die weiteren Berechnungen und Analysen im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die effektive Fläche des Probekörpers unter einfacher Scherung als unabhängig vom initiierten Schermaß angesehen. Die Verläufe der äquivalenten Flächen in y-Richtung bei einer einfachen Scherung in xy-Richtung sind für die jeweiligen Spannungsgrößen in Abbildung 6.10 dargestellt.

In Abbildung 6.10 ist zu erkennen, dass alle Verläufe für die äquivalente Fläche, mit Ausnahme des auf σ_{xy} basierenden Graphen stetig abfallen. Die tatsächliche Querschnittsfläche bei einer homogenen einfachen Scherung bleibt mit anwachsender Verformung gleich, die errechneten Verläufe der Flächen, basierend auf der von-Mises-Vergleichsspannung $\sigma_{v,Mises}$, der Vergleichsspannung nach Tresca $\sigma_{v,Tresca}$ und dem maximalen Eigenwert des Cauchy-Spannungstensors $\sigma_{MAX,EW}$ verändern sich jedoch in Abhängigkeit von der Deformation. Somit kommt für die Bestimmung der effektiven Fläche nur der Quotient aus Scherkraft und σ_{xy} in Frage. Leichte Abweichungen von einem konstanten Wert können hierbei auf Berechnungsungenauigkeiten und Abweichungen der Verformung des Probekörpers von einer vollständig homogenen einfachen Scherung zurückgeführt werden. Anhand der Simulationsergebnisse und Gleichung 6.5 ergibt sich die effektive Fläche der Probekörpergeometrie zu $A = 422,55mm^2$. Den FEM-Untersuchungen liegt jedoch ein Halbmodell zugrunde, so dass sich effektive Fläche für die optimierte Probekörpergeometrie wie folgt ergibt.

$$\boxed{A_{eff} = 845,1mm^2}$$

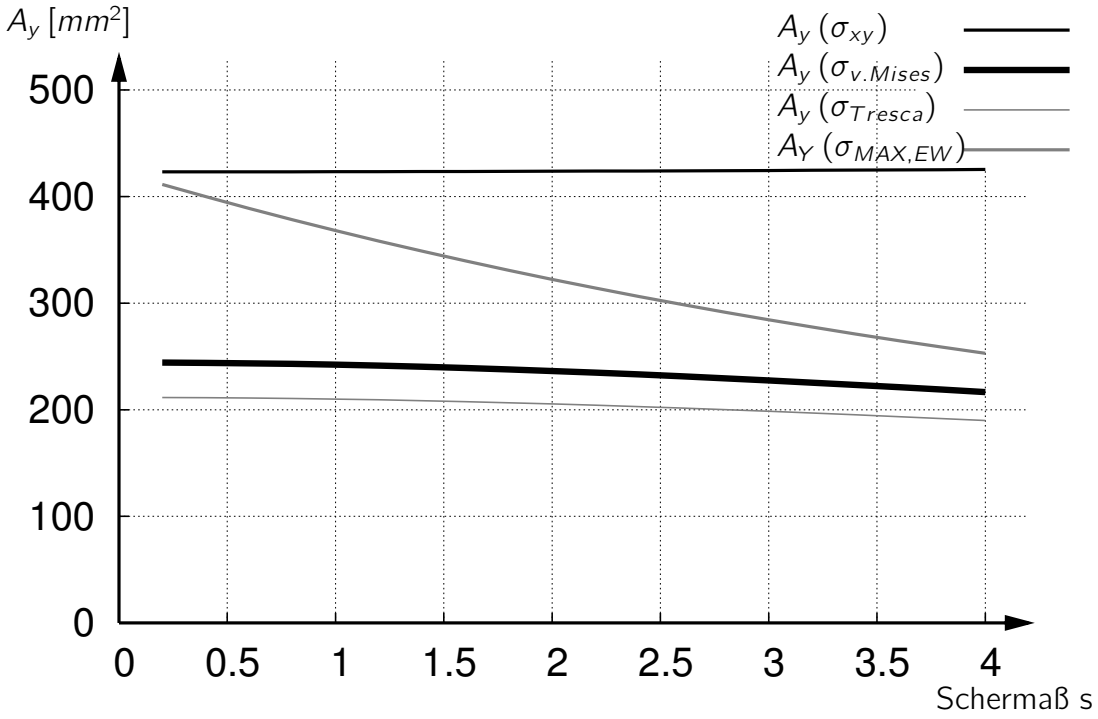


Abb. 6.10: Wirksame Fläche für verschiedene Spannungsgrößen.

Rein geometrisch betrachtet ergibt sich die Fläche des Probekörpers am engsten Querschnitt zu $A_{real} = 962,11mm^2$. Die reale Fläche ist somit größer, als die effektiv wirkenden Fläche unter Annahme einer homogenen einfachen Scherung. Dieser Umstand lässt sich dadurch erklären, dass die zur Bestimmung von A_{eff} verwendeten Spannungsgrößen über den Querschnitt nicht konstant sind. Abbildung 6.11 zeigt die Verteilung der xy-Komponente des Cauchy-Spannungstensors für die Probekörpergeometrie im Falschfarbenbild.



Abb. 6.11: Verteilung von σ_{xy} über das Probekörpervolumen bei einfacher Scherung mit einem Schermaß von $s = 1$.

Es ist erkennbar, dass die Spannungen zum Rand des Probekörpers hin abnehmen. Die zur Bestimmung der effektiven Fläche verwendete Reaktionskraft wird durch alle in der Querschnittsfläche auftretenden Spannungen repräsentiert und ist somit eine Art Mittelung über die gesamte Fläche. Die Spannungsgrößen im Probekörperschwerpunkt sind am

kritischsten, was nach Gleichung 6.5 zu einer im Vergleich zur tatsächlichen Fläche kleineren Querschnittsfläche führt. Die Zielsetzung, die mit der effektiven Fläche verfolgt wird, ist die Ermittlung von Spannungsgrößen im relevanten Bereich der Probekörpergeometrie, also mit einem gewissen Abstand von der Mantelfläche. Somit stellt A_{eff} für weitere Untersuchungen eine wichtige und sinnvolle Größe dar.

6.3 Abschätzung der auftretenden Kräfte und Temperaturen

Für die konstruktive Umsetzung des Versuchsstandes ist eine Abschätzung der zu erwartenden Belastungen notwendig. Im ersten Schritt wird eine Simulationsrechnung einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen für zwei Probekörper in Double-Sandwich-Anordnung und unter Verwendung der optimierten Probekörpergeometrie mit Hilfe der Finite Elemente Methode durchgeführt. Im Verlauf der Simulation werden die Probekörper virtuell, mit Vorgabe eines Schermaßes s, einfach geschert. Für die Rechnung werden die Materialeigenschaften der Probekörper mit dem Neo-Hooke-Materialmodell wiedergegeben (siehe z. B. Marckmann [Mar06a], Lodge [Lod82] oder Ihlemann [Ihl03]). C_{10} wird zu $0,5MPa$ und der Kompressionsmodul mit $K = 10000MPa$ festgelegt. Die aus der Simulation berechnete Reaktionskraft eines Probekörpers ergibt sich für ein Schermaß von $s = 1,75$ zu $756,4N$. Nach Herstellung der ersten realen Probekörper wurden die Simulationsergebnisse mit Messungen verglichen. Hierbei wurden für die Auslenkung bei einem Schermaß von $1,75$ Kräfte von etwa $2100N$ gemessen (Naturkautschuk N2M), wobei dies der Gesamtkraft für beide Proben entspricht. Für die Auslegung des Versuchsstandes wird eine Scherkraft von $2500N$ als Grundlage verwendet. Dies entspricht einem Sicherheitsfaktor von etwa 1,65 im Vergleich zur Simulation. Für die Berechnung der Lagerkräfte werden jedoch zunächst die aus der Simulation abgeleiteten Kräfte ohne Sicherheitsfaktor verwendet. Die Simulation des Prüfkörpers bis zu einem Schermaß von $s = 1,75$ führt zu den in Abbildung 6.12 dargestellten Reaktionskräften und -momenten. Der Prüfkörper ist hierbei im Schnitt dargestellt, die Reaktionskräfte basieren jedoch auf einer Simulation des vollständigen Prüfkörpers. Die Kräfte $F_{P1,3}$, $F_{P2,3}$ sowie die Momente $M_{Antrieb}$ und $M_{Antrieb2}$ wirken zusätzlich zu den aus der Simulation berechneten Reaktionskräften am Prüfkörper und basieren auf der Energiedissipation technischer Gummiwerkstoffe bei rotierenden Belastungsrichtungen. Die Kräfte $F_{P1,3}$ und $F_{P2,3}$ werden zu jeweils $250N$ festgelegt, wobei zum Zeitpunkt der Auslegung des Versuchsstandes noch nicht belegt ist, ob die Tangentialkraft überhaupt existiert. Aus diesem Grund wird der Wert für die Kräfte besonders hoch geschätzt. Die Momente $M_{P1,1}$, $M2_{P1,1}$, $M_{P2,1}$ und $M2_{P2,1}$ ergeben sich aus dem Versatz der Kräfte am Probekörper in 3-Richtung und wirken aufgrund der Symmetrieeigenschaften in gleicher Weise auf die jeweiligen angeschlossenen Wellen.

Über das Momentengleichgewicht in 2-Richtung an beiden Prüfkörpern kann das Antriebsmoment ermittelt werden, das zum Betrieb des Versuchsstands erforderlich ist. Das An-

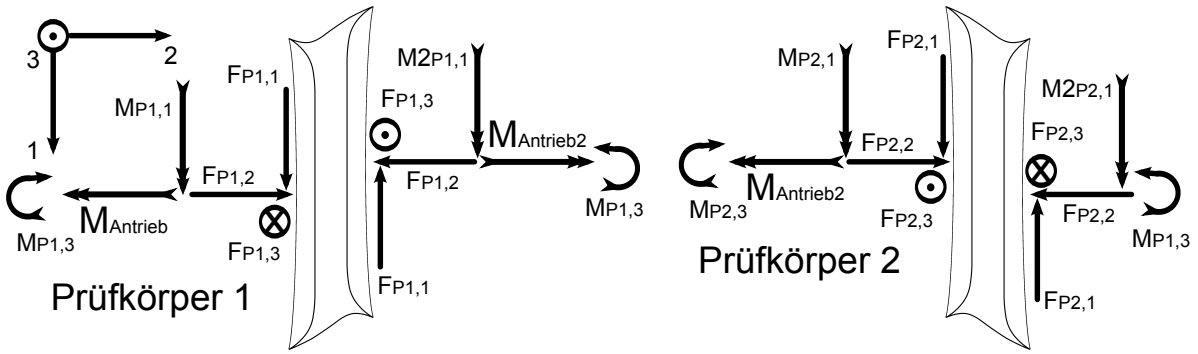


Abb. 6.12: Freikörperbilder der ausgelenkten Probekörper

triebsmoment ist sowohl von der Tangentialkraft F_T als auch von der Verschiebung l_s des Mittelteils abhängig. Für ein Schermaß von $s = 1,75$ gilt: $l_s = 7mm$.

$$M_{Antrieb} = (F_{P1,3} + F_{P2,3}) \cdot l_s = 3,5Nm \tag{6.8}$$

Der Einfluss der Lagerreibung ist bei der Berechnung des Antriebsmomentes vernachlässigt worden.

6.3.1 Freikörperbilder der Baugruppen des Versuchsstands

Für die Konstruktion des Versuchsstandes, die Dimensionierung der Lager sowie für die Auswahl geeigneter Konstruktionswerkstoffe ist eine Bestimmung der an den Baugruppen wirkenden Kräfte erforderlich. Hierzu zeigt 6.13 eine Skizze des Versuchsstandes mit der zugehörigen Auslenkung und dem Antriebsmoment $M_{Antrieb}$.

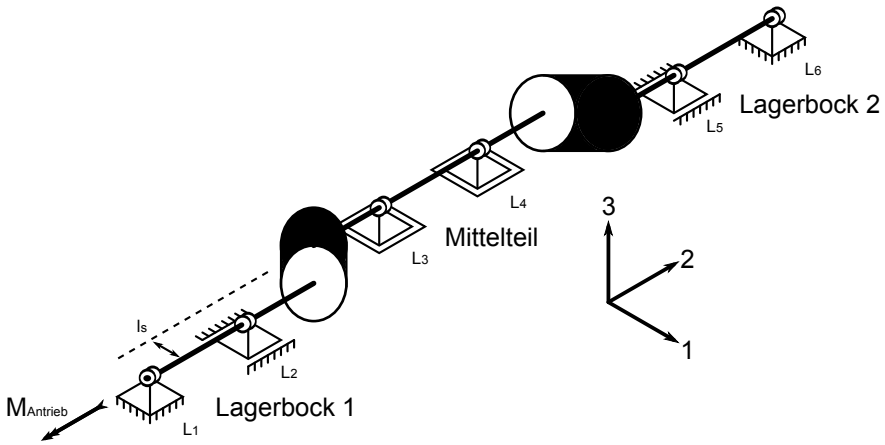


Abb. 6.13: Prinzipskizze des Versuchsstands

Aus der Prinzipskizze lassen sich Freikörperbilder für die beiden Lagerböcke und das Mittelteil erstellen, anhand derer die Lagerkräfte bestimmt werden können. Abbildung 6.14 zeigt

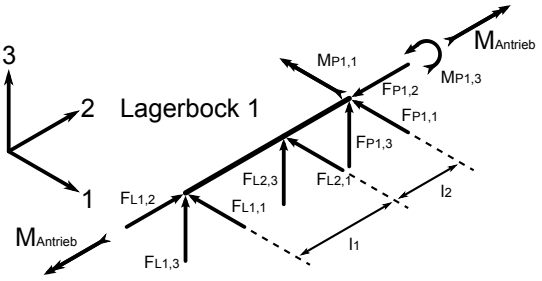


Abb. 6.14: Freikörperbild des antriebseitigen Lagerbocks

das Freikörperbild des antriebsseitigen Lagerbocks mit allen Lagerkräften, dem Antriebsmoment sowie den Koppelkräften zwischen der Welle des Lagerbocks und dem Prüfkörper.

Die an der Welle des Lagerbocks angreifenden Koppelkräfte entsprechen den in Abbildung 6.12 dargestellten Reaktionskräften und -momenten. Das Freikörperbild des abtriebsseitigen Lagerbocks entspricht weitestgehend dem Freikörperbild des antriebsseitigen Lagerbocks in gespiegelter Anordnung. Nur das Antriebsmoment verschwindet auf der Abtriebsseite vollständig, da die Abtriebswelle sich frei drehen kann und keine weiteren Torsionsmomente angreifen. Das Freibkörperbild des abtriebsseitigen Lagerbocks ist in Abbildung 6.15 dargestellt.

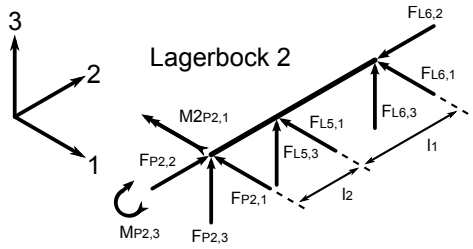


Abb. 6.15: Freikörperbild des abtriebseitigen Lagerbocks

Das Freikörperbild der Welle des Mittelteils ist in Abbildung 6.16 dargestellt. Die Scherkraft F_R zur Auslenkung der Probekörper wird über das Gehäuse des Mittelteils auf die Lager und die Welle übertragen. Die Tangentialkraft F_T der beiden Prüfkörper bei einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen wird über die beiden Lager zu einem am Gehäuse des Mittelteils montierten Sensor übertragen.

6.3.2 Kräftegleichgewicht beim Mittelteil

Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften können die Lagerkräfte in 1- und 3-Richtung sowie F_R und F_T in Abhängigkeit der Prüfkörperkräfte in 1- und 3-Richtung bestimmt werden. Radial- und Tangentialkraft am Versuchsstand hängen hierbei wie folgt von den Kräften an den Prüfkörpern ab.

$$F_R = F_{P1,1} + F_{P2,1} = 1512,8N \tag{6.9}$$

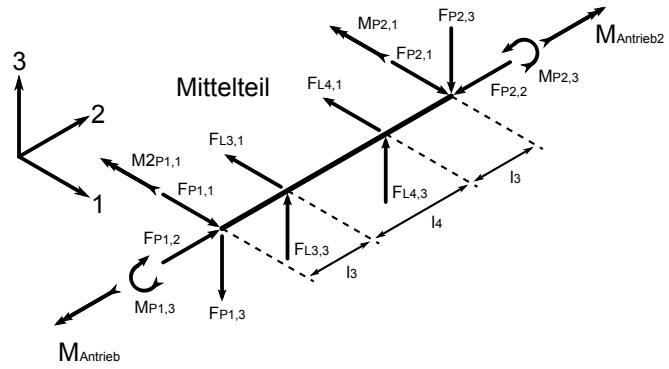


Abb. 6.16: Freikörperbild des Mittelteils

$$F_T = 2F_{P1,3} + F_{P2,3} = 500N \tag{6.10}$$

Die Momente $M2_{P1,1}$ und $M_{P2,1}$ heben sich auf. Durch das Kräftegleichgewicht in 3-Richtung und aufgrund der symmetrischen Anordnung der Lager auf der Welle des Mittelteils können die Lagerkräfte in 3-Richtung berechnet werden.

$$F_{L3,3} = F_{L4,3} = \frac{F_T}{2} = 250N \tag{6.11}$$

Die verbleibenden Lagerkräfte lassen sich über die Kräftesumme in 1-Richtung bestimmen.

$$F_{L3,1} = F_{L4,1} = \frac{F_R}{2} = 756,4N \tag{6.12}$$

6.3.3 Kräftegleichgewicht für Lagerbock 1 und 2

Die Axialkräfte an Lagerbock 1 und 2 können über Kräftesummen in 2-Richtung bestimmt werden.

$$F_{L1,2} = F_{P1,2} = 184,2N \tag{6.13}$$

$$F_{L6,2} = F_{P2,2} = 184,2N \tag{6.14}$$

Die Axialkräfte der Probekörper in 2-Richtung sind hierbei identisch: $F_{P1,2} = F_{P2,2}$. Über die Momentensumme um die 3-Achse an Lager 1 und mit der Kräftesumme in 1-Richtung kann die Kraft in 1-Richtung an Lager 2 bestimmt werden.

$$F_{L2,1} = -F_{P1,1} \cdot \frac{l_1 - l_2}{l_1} - \frac{M_{p1,3}}{l_1} = -1529,77N \tag{6.15}$$

Die Reaktionskraft in 1 Richtung an Lager 1 ergibt sich daraus wie folgt.

$$F_{L1,1} = F_{P1,1} \cdot \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} - 1\right) + \frac{M_{P1,3}}{l_1} = 773,37N \tag{6.16}$$

Mit Hilfe des Kräftegleichgewichts in 1-Richtung, der Momentensumme um die 1-Achse an Lager 1 und der Höhe des Probekörpers kann $F_{L2,3}$ bestimmt werden.

$$F_{L2,3} = F_{P1,3} \cdot \left(\frac{h}{2l_1} - \frac{l_1 + l_2}{l_1} \right) = -576,75N \tag{6.17}$$

Mit $F_{L2,3}$ und der Kräftesumme in 3-Richtung kann die verbleibende Kraft $F_{L1,3}$ an Lagerbock 1 berechnet werden.

$$F_{L1,3} = F_{P1,3} \cdot \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} - \frac{h}{2l_1} - 1 \right) = 326,75N \tag{6.18}$$

Die Kräfte $F_{L5,1}$, $F_{L6,1}$, $F_{L5,3}$ und $F_{L6,3}$ des zweiten Lagerbocks lassen sich in ähnlicher Weise, wie die entsprechenden Lagerkräfte am ersten Lagerbock bestimmen.

$$F_{L5,1} = -F_{P2,1} \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1} - \frac{M_{P2,3}}{l_1} = -1529,77N \tag{6.19}$$

$$F_{L6,1} = F_{P2,1} \cdot \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} - 1 \right) + \frac{M_{P2,3}}{l_1} = 773,37N \tag{6.20}$$

$$F_{5,3} = F_{P2,3} \cdot \left(\frac{h}{2l_1} - \frac{l_1 + l_2}{l_1} \right) = -576,75N \tag{6.21}$$

$$F_{L6,3} = F_{P2,3} \cdot \left(\frac{l_1 + l_2}{l_1} - \frac{h}{2l_1} - 1 \right) = 326,75N \tag{6.22}$$

6.3.4 Einfluss der Lagerreibung

Bei einer idealen Probekörpergeometrie unter vollständig homogener einfacher Scherbelastung mit rotierenden Achsen greifen ausschließlich die auslenkende Kraft in Radialrichtung und für inelastische Werkstoffe die aus der Energiedissipation resultierende Kraft in tangentialer Richtung an. Aufgrund der versuchstechnischen Randbedingungen verformt sich die optimierte Probekörpergeometrie jedoch nicht vollständig homogen. Der Einfluss dieser Inhomogenitäten sowie die Auswirkung der Lagerreibung der Maschine sollen im Folgenden abgeschätzt werden. Der Versuchsstand hat insgesamt sechs Wälzlager, wobei jeweils zwei Lager zur Lagerung der Wellen im Antriebssegment, im Mittelteil und im Abtriebssegment dienen. Das Umwälzen der Wälzkörper in den Lagern während des Betriebs des Versuchsstandes ist nicht reibungsfrei, wobei nur die Reibung der vier Wälzlager im Mittelteil und im Abtriebssegment einen Einfluss auf die Proben haben können. Die Lagerreibung im Antriebssegment wirkt gegen das Antriebsmoment und wird noch vor dem ersten Probekörper eingeleitet. Somit sind für Überlegungen in Bezug auf die Probekörper nur die Wälzlager der mittleren und der äußeren Baugruppe auf der Abtriebsseite von Interesse.

Die Lagerkräfte im Mittelteil betragen jeweils die Hälfte der Gesamtkraft der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen.

Für die Auslegung der Lagerreibung wird der effektive Durchmesser d_{eff} verwendet, der sich aus der Hälfte der Summe des Innendurchmessers d_i und des Außendurchmessers d_a eines Wälzlagers ergibt.

$$d_{eff} = \frac{d_a + d_i}{2} \tag{6.23}$$

Bei der Herstellung des Versuchsstandes werden für das Mittelteil sowohl für das Festlager als auch für das Loslager Zylinderrollenlager mit einem effektiven Durchmesser von jeweils $d_{eff} = 37mm$ verwendet. Für die Festlagerung wird ein teilbares Zylinderrollenlager vom Typ NUP verwendet. Beim Lagerbock auf der Abtriebsseite kommen Rillenkugellager zum Einsatz. Das Festlager befindet sich auf der dem Mittelteil zugewandten Seite und hat einen effektiven Durchmesser von $25mm$, das Loslager hat einen effektiven Durchmesser von $22mm$. Der Reibbeiwert zur überschlägigen Berechnung von Lagerreibung beträgt für ein Zylinderrollenlager $0,005$, bei einem Rillenkugellager liegt er bei $0,0013$ (siehe hierzu SKF [SKF11]). Das Reibmoment des i-ten Lagers $M_{L,i}$ ergibt sich aus dem Produkt der radialen Lagerkraft und dem Reibwert, multipliziert mit dem halben effektiven Lagerdurchmesser.

$$M_{L,i} = F_{L,i} \cdot \mu_i \cdot \frac{d_{eff,i}}{2} \tag{6.24}$$

In der nachstehenden Tabelle sind die abgeschätzten Momente der Lagerreibung sowie die zugehörigen Radialkräfte aufgelistet.

Lagerreibung und Radialkräfte

Lagernummer i und Lagertyp	Betrag der Radialkraft $F_{L,i}$ $[N]$	Reibmoment $M_{L,i}$ $[Nm]$
Zylinderrollenlager L3	769,64	0,072
Zylinderrollenlager L4	769,64	0,072
Rillenkugellager L1 und L6	839,56	0,014
Rillenkugellager L2 und L5	1634,88	0,023

Die antriebsseitig eingespannte Probe erfährt die größte reibungsbedingte Torsion, da sie das aus der Lagerreibung entstehende Torsionsmoment der Lager L_3, L_4, L_5 und L_6 übertragen muss. Das Torsionsmoment für die erste Probe beträgt somit $M_{T1} = 0,181Nm$. Die Torsion der zweiten Probe wird ausschließlich durch das Reibmoment der Lagerung vom Abtriebssegment hervorgerufen und beträgt $M_{T2} = 0,036Nm$. Obwohl beide Proben durch unterschiedliche Torsionsmomente belastet werden, können die Einflüsse auf den Deformationszustand der Probe aufgrund der Größe der Momente vernachlässigt werden. Darüber hinaus handelt es sich bei der Torsionsbelastung im Verlauf der einfachen

Scherung mit rotierenden Achsen um eine Belastung mit konstanter Amplitude und ohne Änderung der Belastungsrichtungen, so dass hierdurch keine Verringerung der Lebensdauer zu erwarten ist.

6.3.5 Abschätzung der Temperatur der Prüfkörper

Zusätzlich zu den im Versuchsbetrieb auftretenden Kräften ist auch die thermische Entwicklung innerhalb eines Probekörpers für den Versuchsablauf von Bedeutung. So ist zum Beispiel aufgrund der im Material dissipierten Energie die im stationären Versuchsbetrieb im Probekörper vorherrschende Temperatur an die Drehzahl des Versuchsstandes gekoppelt. Zur Vermeidung eines zu großen Einflusses von thermisch bedingter Alterung auf die Lebensdauer der Proben soll somit in Abhängigkeit der Werkstoffeigenschaften der Modellwerkstoffe eine maximale Drehzahl für die Untersuchung der Lebensdauer unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen festgelegt werden.

Für die Abschätzung der Wärmeentwicklung innerhalb eines Probekörpers wird der erste Hauptsatz der Thermodynamik herangezogen (z. B. in Baehr [Bae88]).

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} \tag{6.25}$$

Hierbei entsprechen U_1 und U_2 der inneren Energie zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten, Q_{12} der Wärmemenge und W_{12} der von Zeitpunkt 1 zu Zeitpunkt 2 geleisteten Wellenarbeit.

Zu Beginn des Versuches und im unbelasteten Zustand entspricht die Temperatur der Probekörper der Umgebungstemperatur. Mit Initiierung der einfachen Scherung zu Beginn eines Versuchs wird bereits ein Teil der zur Verformung aufgewendeten Energie dissipiert, wodurch die Temperatur im Probekörper leicht ansteigt. In der Rotationsphase wird mit jeder Umdrehung weiter Energie dissipiert, was zu einem weiteren Anstieg der Temperatur in den Probekörpern führt. Gleichzeitig wird die in Form von Wärme in den Probekörpern gespeicherte Energie über einen Wärmefluss wieder an die Umgebung abgegeben. Die Wärmemenge, die pro Zeit an die Umgebung abgegeben wird, ist unter anderem von der Temperaturdifferenz zwischen Probekörper und Umgebung abhängig. Mit steigender Temperatur des Probekörpers und bei konstanter Umgebungstemperatur wird mehr Wärme pro Zeit an die Umgebung abgegeben. Wird der thermisch stationäre Zustand erreicht ($U_1 = U_2$), so entspricht die in einem bestimmten Zeitintervall $1 - 2$ an die Umgebung abgegebene Wärmemenge Q_{12} genau der in diesem Zeitintervall im Materialpunkt dissipierten Energie. Für die Abschätzung der im Probekörper auftretenden Temperaturen soll ausschließlich der stationäre Zustand betrachtet werden. Hierzu wird Gleichung 6.25 auf die Probekörper im stationären Zustand angewendet. Die Differenz von U_1 und U_2 ist in diesem Fall null. Es ergibt sich nachstehender Zusammenhang.

$$W_{12} = -Q_{12} \tag{6.26}$$

Hierbei entspricht W_{12} der Arbeit des Motors im Zeitintervall $1-2$ und ist die Summe aus inneren Reibung des Versuchsstandes und der dissipierten Energie der beiden Probekörper. Für die Abschätzung der im Probekörper auftretenden Temperatur wird jedoch ausschließlich die in den Probekörpern dissipierte Energie berücksichtigt. Q_{12} ist die Wärmemenge, die in einem bestimmten Zeitintervall an die Umgebung abgegeben wird. Für eine Abschätzung der Temperatur des Probekörpers während des Rührversuchs soll nun zunächst die in den Probekörper eingebrachte Energie ϕ_{ein} für eine Umdrehung bestimmt werden. Dies ist in Anlehnung an Gleichung 5.21 mit Hilfe des Kraft-Weg-Integrals aus der Kraft F_T und dem Ortsvektor $\underline{r}$ zum Kraftangriffspunkt an der Kontaktfläche der Probe möglich.

$$\phi_{ein} = \int_{}^{Umdrehung} \underline{F_T} \cdot d\underline{r} \tag{6.27}$$

F_T kann mittels der im Vorfeld abgeschätzten Kraft F_R bestimmt werden. Mit Hilfe des Phasenwinkels, der von Ihlemann [Ihl03] in Abhängigkeit des Schermaßes dargestellt ist, ergibt sich F_T wie folgt.

$$F_T = F_R \cdot \tan \Psi_{stat} \tag{6.28}$$

Zur Vereinfachung der Abschätzung wird angenommen, dass die Drehzahl keinen nennenswerten Einfluss auf den Phasenwinkel hat. Hierbei werden, anders als bei der Auslegung des Versuchsstandes, für die auslenkende Kraft und den Phasenwinkel folgende Werte verwendet.

$$F_R = 2000N \tag{6.29}$$

$$\Psi_{stat} = 3^\circ \tag{6.30}$$

Unter Berücksichtigung des Phasenwinkels Ψ_{stat} ergibt sich die resultierende Kraft für beide Prüfkörper zusammen zu $F_T = 104,82N$. Mit dieser Last und der sich im Verlauf der Deformation einstellenden Auslenkung von $7mm$ lässt sich die pro Umdrehung in einen Probekörper eingebrachte Energie zu $\phi = 2,31Nm$ bestimmen. Dieser Betrag an mechanischer Energie wird vollständig in Wärmeenergie umgesetzt und lässt sich in einen theoretischen Temperaturanstieg pro Umdrehung umrechnen. Das Zeitintervall von t_1 zu t_2 entspricht hierbei genau der Zeit, die für eine vollständige Umdrehung der Achsen bei der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen benötigt wird.

$$Q_{12} = \phi_{ein} \Rightarrow \Delta T = \frac{Q_{12}}{V \cdot c_{NR}} \approx 0,29K \tag{6.31}$$

Das Volumen eines Probekörpers ist $V = 5077,7mm^3$, ein Wert für die Wärmekapazität von Naturkautschuk ($c_{NR} \approx 0,00156\frac{J}{mm^3K}$) findet sich bei Brandup [Bra99]. Zur Bestimmung der abgeführten Wärmemenge wird nachstehende Formel verwendet.

$$Q = h \cdot A \cdot \Delta T \cdot \Delta t \tag{6.32}$$

Für die Untersuchungen wird angenommen, dass die über die verhältnismäßig kleine Mantelfläche an die Umgebung abgegebene Wärmemenge im Vergleich zum Wärmeübergang an den metallischen Kontaktflächen vernachlässigbar ist. Die in Gleichung 6.32 angegebene Fläche wird somit ausschließlich über die metallischen Kontaktflächen definiert. Die Bestimmung der Wärmeübergangszahl von Gummi zu Stahl (h) erfolgt experimentell. Hierzu werden die Abkühlkurven zweier gleich gearteter Gummiplatten mit Hilfe einer Wärmebildkamera aufgenommen, wobei eine Probe an der Luft abgekühlt wird und die zweite Probe zwischen zwei Stahlplatten abkühlt. Aufgrund der vergleichsweise großen Kontaktfläche der Gummiplatte zu den Stahlplatten kann der Wärmefluss des Elastomers an die Luft vernachlässigt werden. Zu jedem Zeitpunkt, an dem die Proben die gleiche Temperatur aufweisen, ist auch die enthaltene Wärmemenge gleich, da die Proben in Material, Masse und Geometrie übereinstimmen. Einzig das Zeitintervall, nach welchem die Temperatur in den jeweiligen Abkühlkurven erreicht wurde, unterscheidet sich und ermöglicht die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten von Gummi zu Metall für Naturkautschuk entsprechend Gleichung 6.33.

$$h_{GM} = \frac{h_{GL} \cdot \Delta t_{GL}}{\Delta t_{GM}} \approx 24,42\frac{J}{s \cdot m^2 \cdot K} \tag{6.33}$$

h_{GM} entspricht hierbei der Wärmeübergangszahl zwischen Gummi und Metall, h_{GL} der Wärmeübergangszahl zwischen Gummi und Luft und Δt_{GL} sowie Δt_{GM} den Temperaturdifferenzen von Gummi und der umgebenden Luft und Gummi und den Metallplatten.

Nach Gleichung 6.32 ist die an die Umgebung abgeführte Wärmemenge Q von der Temperaturdifferenz an der Systemgrenze ΔT, also dem Temperaturunterschied zwischen Metall und Gummi abhängig. Mit steigender Temperaturdifferenz wird also mehr Wärmeenergie an die Umgebung abgeführt. Ein thermisch stationärer Zustand wird hierbei genau dann erreicht, wenn die Energiebilanz des Probekörpers null ist und die aufgrund von Dissipation in den Probekörper eingebrachte Wärmeenergie ($Q_{12,+}$) genau der Wärmemenge entspricht, die über die Systemgrenzen abgeführt wird ($Q_{12,-}$).

$$Q_{12,+} - Q_{12,-} \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow Q_{12,+} = Q_{12,-} \tag{6.34}$$

Dieser Zustand wird als thermisch stationär bezeichnet, die Temperatur des Probekörpers bleibt hierbei konstant. Aufgrund dieser Zusammenhänge kann nun abhängig von einer maximal zulässigen Temperatur, eine maximale Drehzahl für den Versuchsbetrieb abgeschätzt werden. Hierzu wird die im Probekörper vorherrschende, annähernd homogene Deformation als vollständig homogen betrachtet. Die Drehzahl für den Versuchsbetrieb soll so hoch wie möglich gewählt werden, um bei Ermüdungsuntersuchungen die Versuchslaufzeiten so kurz wie möglich zu halten. Gleichzeitig darf die maximale Temperatur im Probekörper keinen wesentlichen Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften haben (z. B. durch thermische Alterung oder eine Änderung des Vulkanisationsgrades). Für die Auslegung des Versuchsstandes wird ein Temperaturmaximum von 75°C auf der Außenhaut gewählt. Mit Hilfe der Formeln 6.34 und 6.32 und ausgehend von einer abzuführenden Wärmemenge von $2,63 Nm$ entspricht dies einer maximal zulässigen Drehzahl von 100 Umdrehungen pro Minute.

6.4 Probensynthese

Zusätzlich zur Optimierung der Probekörpergeometrie ist zu beachten, dass die Proben für eine einfacher Scherung mit rotierenden Achsen herstellbar sein müssen. Hierzu wurde eine Vulkanisationsform konstruiert und gefertigt, die eine Ausformung der Probekörper und deren Anbindung an die Probenbasen im Verlauf des Vulkanisationsvorgangs ermöglicht.

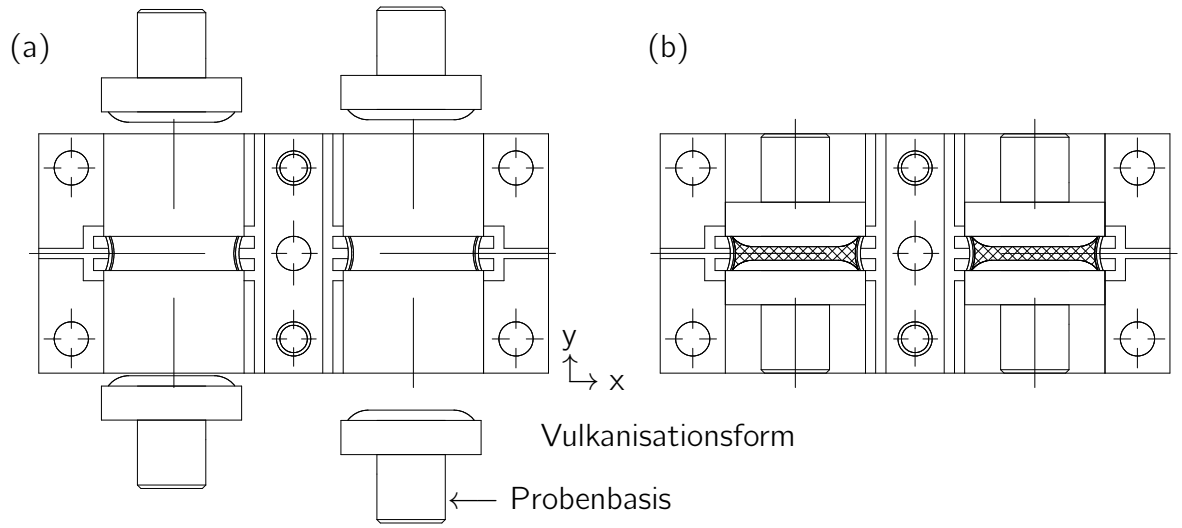


Abb. 6.17: Schematische Darstellung eines Schnittes der Vulkanisationsform offen (a) und geschlossen (b).

Die Vulkanisationsform (vgl. Abbildung 6.17) ist entlang der xy-Ebene zweigeteilt. Beide

Teile werden mit Hilfe von fünf Schrauben aneinander befestigt, um den Zusammenhalt der Form während des Formgebungsprozesses zu gewährleisten. Die Ausrichtung der Teile zueinander geschieht über zwei mittig angebrachte Führungsbolzen. Zusätzlich zu der eigentlichen Form werden auch die vier Probenbasen für die Formgebung verwendet, da eine Anbindung des Polymers an die Oberfläche der Probenbasis im Verlauf des Vulkanisationsvorgangs erfolgen muss. Die Formgebung erfolgt über eine Translation der Probenbasen innerhalb der Vulkanisationsform. Die erforderliche Kraft wird über Ringe auf die Schultern der Probenbasen übertragen. Eine Kraftübertragung über die die Schäfte ist nicht sinnvoll, da diese für eine derartige Belastung nicht ausgelegt sind und hierbei Schaden nehmen würden. Für den Vulkanisationsvorgang werden die Vulkanisationskammern mit mehr Material gefüllt, als für einen Probekörper erforderlich ist. Der überschüssige Werkstoff wird durch dafür vorgesehene Fugen abgeführt. Durch die Wandreibung und die Viskosität des überschüssigen Materials entsteht innerhalb der Vulkanisationskammer der für die Vulkanisation erforderliche Druck.

6.5 Baugruppen des Versuchsstandes

Die konstruktive Umsetzung des Versuchsstandes umfasst drei Baugruppen, die auf einer Grundplatte montiert werden. Hierbei dienen die beiden äußeren Baugruppen zur Lagerung der Wellen und zum Anschluss eines Motors für den Antrieb des Versuchsstandes. Der mittlere Abschnitt des Versuchsstands ermöglicht das Auslenken der Proben und mittels zweier Kraftaufnehmer und einem Wegsensor die messtechnische Erfassung von F_T und F_R sowie der Auslenkung der Proben. Die Bezeichnungen der Baugruppen sind in Anlehnung an die Prinzipskizze in Abbildung 6.2 aus Kapitel 6.1 in *Antriebslagerbock*, *Mittelteil* und *Abtriebslagerbock* unterteilt.

Die Lagerböcke bestehen jeweils aus einer offenen Schweißkonstruktion in Form eines U-Profils. Die Seitenplatten des U-Profils sind zur Unterbringung von Lagertöpfen aufgebohrt. Die Lagerung erfolgt über eine Fest-Loslager-Anordnung nach Hoischen [Hoi03], wobei das Festlager in Richtung des Mittelteils mit einer Topf-Deckel-Konstruktion montiert ist. Der Lagerbock auf der Antriebsseite (vgl. Abbildung 6.18) ist für den Anschluss des Antriebs mit einem Wellenende nach DIN 748 und mit einer Passfedernut gemäß DIN 6885 versehen. Der Umstand, dass die Seite mit dem Festlager nicht zum Antrieb hin ausgerichtet ist, spielt eine untergeordnete Rolle, da mögliche Verschiebungen des Wellenendes in axialer Richtung durch eine geeignete Kupplung zwischen Motor und Versuchsaufbau ausgeglichen werden können. Das Wellenende in Richtung des Mittelteils ist als Hohlwelle ausgeführt und ermöglicht die Montage von Proben. Die Hohlwelle ist hierzu an drei Stellen in axialer Richtung geschlitzt, wobei die Schlitze in einer Bohrung auslaufen, um den Einfluss von Spannungsspitzen im Kerbgrund zu vermeiden. Die auf diese Weise

entstehenden Zungen auf dem Wellenumfang dienen in Kombination mit einer über die Welle gestülpten Schrumpfscheibe als Klemmvorrichtung für die Proben. Zur Befestigung wird der Schaft einer Probenbasis in die vorgesehene Öffnung geführt. Durch das Spannen der Schrumpfscheibe wird der Probenbasenschaft mit Hilfe der drei auf dem Wellenumfang verteilten Metallzungen axialflüchtig und reibschlüssig mit der Welle verbunden und entlang der Wellenachse zentriert. Zur Lagerung der Hohlwelle kommen Rillenkugellager mit Abmessungen nach DIN 625-1 zum Einsatz. Die Lager werden mit Lithiumfett geschmiert und sind gekapselt, um anfallende Wartungsarbeiten so gering wie möglich zu halten. Aufgrund der beidseitigen Lippendichtung sind die Rillenkugellager unempfindlich gegen Spritzwasser und Verschmutzungen. An den Seiten der Lagerböcke werden H-förmige Versteifungen montiert, die eine Erhöhung der Steifigkeit und der Stabilität des Lagerbocks in axialer Richtung herbeiführen. Auf diese Weise sollen Untersuchungen der Lebensdauer mit rotierenden Achsen unter Druck ermöglicht werden, wobei derartige Versuche nicht Teil der vorliegenden Arbeit sind, sondern im Ausblick der Arbeit (Kapitel 11) behandelt werden. Nachstehend eine Abbildung des Lagerbocks der Antriebsseite des Versuchsstandes.

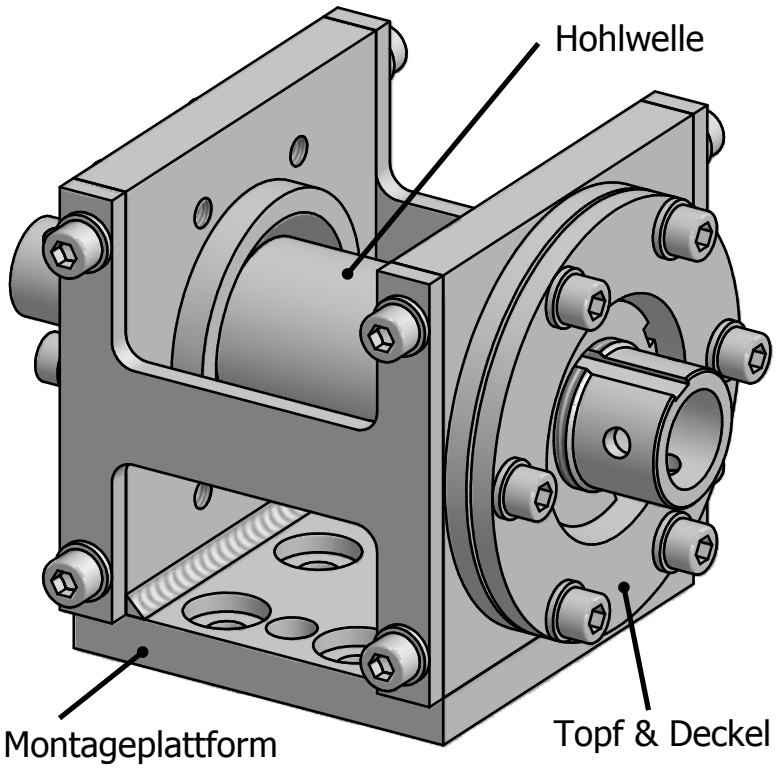


Abb. 6.18: Lagerbock auf der Antriebsseite des Rührversuchs

Der Lagerbock auf der Abtriebsseite unterscheidet sich vom Lagerbock auf der Antriebsseite durch die Gestaltung der Welle. Die Welle auf der Abtriebsseite dient ausschließlich der Montage der Proben und der Lagerung. Zur Gewichtsreduzierung ist daher eine durchgängige Bohrung in der Welle vorgesehen, die bei Bedarf das Einbringen von Sensoren zur Erfassung der Temperatur in der Nähe der Kontaktfläche zwischen Probekörper und Probenbasis ermöglichen soll. Der Rest der Konstruktion entspricht dem Lagerbock

auf der Antriebsseite.

Das Mittelteil ist die wichtigste Baugruppe der Versuchsanlage, da hier die Messgrößen des Rührversuchs, die beiden Kraftkomponenten F_T und F_R, erfasst werden. Zudem weist das Mittelteil einen Freiheitsgrad auf, der eine Verschiebung der Wellen zueinander ermöglicht. Auf diese Weise wird eine einfache Scherdeformation in den Probekörpern initiiert. Bei der Konstruktion des Mittelteils ist neben einer Trennung der beiden zu messenden Kräfte auch zu beachten, dass sich beim Versagen einer der beiden Proben gegebenenfalls schlagartig die Konstellation der auf die Baugruppen wirkenden Kräfte ändert. Die Konstruktion muss in der Lage sein, einen derartigen Wechsel der Belastung abzufangen, um sensiblere Baugruppen, wie zum Beispiel die Kraftaufnehmer, zu schützen. Im Falle der Sensoren soll hierbei nicht nur deren Zerstörung vorgebeugt, sondern auch eine Beeinflussung der Messung verhindert werden.

Aufgrund der vielfältigen Anforderungen sind bis zur endgültigen Konstruktion mehrere Entwürfe entstanden, die in vielen Aspekten den Anforderungen entsprachen, jedoch in einem wesentlichen Punkt ungeeignet erschienen. Zum besseren Verständnis der aktuellen Konstruktion soll kurz auf einen vorangegangenen Entwurf eingegangen werden.

Ausschlaggebend für das Konzept des Mittelteils war die Entscheidung, aus Kostengründen zwei Kraftaufnehmer mit jeweils nur einer Messrichtung zu verwenden und Abstand von den aufwendig zu betreibenden und kostenintensiven Mehrkomponentensensoren zu nehmen. Aus diesem Grund war es bei der Konstruktion des Mittelteils aus messtechnischer Sicht wichtig, eine saubere Unterscheidung der Kraftvektoren $\underline{F}_R$ und $\underline{F}_T$ zu erreichen. Hierzu sollen die Kraftaufnehmer auf Platten montiert werden und über so genannte Flachkäfigführungen, auf die im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit noch eingegangen wird, verschiebbar gemacht werden. Diese Konstruktion fügt den Kraftaufnehmern senkrecht zur Richtung der zu messenden Kraft einen weiteren Freiheitsgrad hinzu. Zur Vermeidung von Störeinflüssen reichen wenige Zehntel eines Millimeters aus.

Die Entkopplung der Kräfte voneinander erfolgt über zwei zueinander in radialer Richtung verschiebbare Gehäusekonstruktionen. Zwischen den Bodenflächen der Gehäuse ist der Kraftaufnehmer zur Erfassung der Kraft $\underline{F}_T$ angebracht. Der radiale Freiheitsgrad zwischen den beiden Gehäusen wird über Flachkäfigführungen realisiert, die an vier Kanten der Gehäuse montiert sind. Das äußere Gehäuse wiederum ist auf einer Plattform montiert und kann in Richtung der Kraft $\underline{F}_R$ verschoben werden. Auch in diesem Falle werden Flachkäfigführungen für die Umsetzung des Freiheitsgrades verwendet. Die Plattform ist mit der Grundplatte des Versuchsstandes verbunden und kann über Rollenumlaufeinheiten in axialer Richtung bewegt werden. Auf die Rollenumlaufeinheiten und die Grundplatte wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch detaillierter eingegangen. Die Initiierung der einfachen Scherung erfolgt über eine Schraube, die über eine Schweiß- und

Schraubenkonstruktion mit der Grundplatte des Versuchsstandes verbunden ist. Der zweite Kraftaufnehmer zur messtechnischen Erfassung von $\underline{F}_R$ wird auf das äußere Gehäuse montiert und wirkt bei einer Verschiebung des Mittelteils mit der Reaktionskraft der beiden Proben der Schraube entgegen. Zur Vermeidung von Reibung und daraus resultierenden Torsionsmomenten im Kontaktpunkt von Schraube und Kraftaufnehmer, wird die Kraft über einen Axialnadellagerkranz übertragen, der zwischen Schraube und Kraftaufnehmer montiert wird. Durch diese Konstruktion werden beide Kraftaufnehmer ausschließlich durch Kräfte in ihrer Messrichtung belastet. Auch im Schadensfall ändert sich daran nichts, da die schlagartig entstehenden Kräfte und Momente über die Gehäuse-in-Gehäuse-Konstruktion und die Flachkäfigführungen in die Grundplatte weitergeleitet werden.

Die Gehäuse selber wurden in Anlehnung an die beiden äußeren Baugruppen des Versuchsstandes in einem ersten Entwicklungsschritt zunächst als Schweißkonstruktion entworfen. Aufgrund der hohen Anforderungen an die Präzision, die eine Voraussetzung für die Verwendung von Flachkäfigführungen ist, wurde die Schweißkonstruktion jedoch gegen eine teurere, gleichzeitig aber mit wesentlich geringeren Toleranzen herstellbare Schraubkonstruktion ersetzt.

Die Welle des Mittelteils wird als Hohlwelle ausgeführt. Wie bei den beiden Lagerböcken wird die Hohlwelle an drei um den Umfang verteilen Stellen geschlitzt, um mit Hilfe von Schrumpfscheiben eine form- und reibschlüssige Befestigung der Proben am Versuchsstand zu ermöglichen. Die Lagerung der Welle erfolgt über eine Fest-Loslager-Konstruktion. Anders als bei den Lagerböcken werden beim Mittelteil jedoch aus Gründen der Symmetrie und zum Abfangen der spontan auftretenden Kräfte beim Schadensfall an einem der beiden Probekörper anstelle von Rillenkugellagern Zylinderrollenlager verwendet. Für die Konstruktion des Festlager wird hierbei auf ein teilbares Zylinderrollenlager zurückgegriffen. Abbildung 6.19 zeigt eine Prinzipskizze eines teilbaren Zylinderrollenlagers im Schnitt.

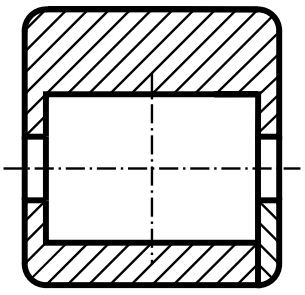


Abb. 6.19: Teilbares Zylinderrollenlager im Schnitt

Das Loslager wird über eine klassische Lagertopfkonstruktion, wie zum Beispiel von Hoischen [Hoi03] oder Decker [Dec06] vorgestellt, in die Konstruktion eingefügt. Beide Lager sind aufgrund ihrer Bauweise (teilbares Zylinderrollenlager oder Zylinderrollenlager als Loslager) nicht gekapselt. Zur Schmierung müssen die Lager daher in regelmäßigen Wartungsintervallen mit Maschinenöl versorgt werden. Auf eine konstruktive Lösung zur Reduzierung der Wartungsarbeiten wird aus Kostengründen verzichtet.

Die Führung der Gehäuse im Mittelteil zur Realisierung der zusätzlichen Freiheitsgrade für die Kraftaufnehmer wird mit Hilfe von Flachkäfigführungen umgesetzt. Flachkäfigführungen zeichnen sich durch einen sehr hohe Belastbarkeit und einen sehr geringen Bauraum aus. Gleichzeitig ist jedoch auch eine besondere Behandlung der Oberflächen für den Einbau und die Einhaltung geringer Toleranzen erforderlich. Für eine Verwendung dieser Führungseinheiten im Versuchsstand sind daher Vorkehrungen zu treffen, die eine nachträgliche Änderung der für die Lagerung wichtigen Abstände ermöglicht. In Anlehnung an die zur Vorspannung von Schrägkugellagern verwendeten Passscheiben werden für die Konstruktion des inneren Gehäuses Abstandsplatten verwendet, über die eine genaue Einstellung der Lagertoleranzen möglich ist. Entsprechend den Anforderungen werden die Abstandsplatten auf das erforderliche Maß gebracht und eingebaut. Gleichzeitig besteht die Möglichkeit, jedes Paar Flachkäfigführungen über drei Madenschrauben vorzuspannen. Über die Vorspannung kann eine längere Lebensdauer der Flachkäfigführungen gewährleistet werden. Darüber hinaus wird die Tragfähigkeit der Lager erhöht.

Die Montage des Mittelteils erfolgt, indem zunächst das äußere Gehäuse zusammengeschraubt wird und die Flachkäfigführungen angebracht werden. Anschließend wird das innere Gehäuse samt den Gegenstücken der Flachkäfigführungen montiert. Mithilfe der Abstandsplatten werden die Toleranzen zwischen den Flachkäfigführungen und den jeweiligen Gegenstücken eingestellt. Sobald das innere und das äußere Gehäuse montiert und ineinander geschoben wurden, werden die verbleibenden Flachkäfigführungen befestigt. Leichte Fehlstellungen der Flachkäfigführungen, sowie deren Vorspannung kann über Madenschrauben an den jeweiligen Baugruppen nachträglich eingestellt werden.

Für die Güte der Untersuchungen ist es wichtig, dass die Lagerböcke und das Mittelteil des Rührversuchs axialflüchtig zueinander angeordnet sind. Aufgrund der Komplexität der Konstruktion ist dies ohne besondere Vorkehrungen sehr aufwändig und somit sehr kostenintensiv. Aus diesem Grund sind bei der Konstruktion Möglichkeiten eingeplant worden, um eine nachträgliche Justierung der Baugruppen zueinander zu ermöglichen. Für Korrekturen reicht es aus, wenn ein Lagerbock entlang der Normalen der Grundplatte einstellbar ist und der zweite Lagerbock senkrecht und radial dazu. Der Lagerbock auf der Antriebsseite soll entlang der Normalen der Grundplatte einstellbar sein. Dies erfolgt über Passscheiben zwischen dem Lagerbock und dessen Unterbau auf der Grundplatte.

Der Lagerbock auf der Abtriebsseite kann parallel zur Grundplatte verschoben werden. Aus diesem Grund wird die Grundplatte des Lagerbocks zwischen zwei Schultern geführt und kann mittels zwei Schrauben bewegt werden. Sobald die Justierung durchgeführt wurde, kann der Lagerbock mittels Zylinderkopfschrauben am Unterbau der Grundplatte befestigt werden. Nachstehend eine Abbildung der Stellschrauben für die waagerechte Ausrichtung des Lagerbocks auf der Abtriebsseite des Versuchsstandes.

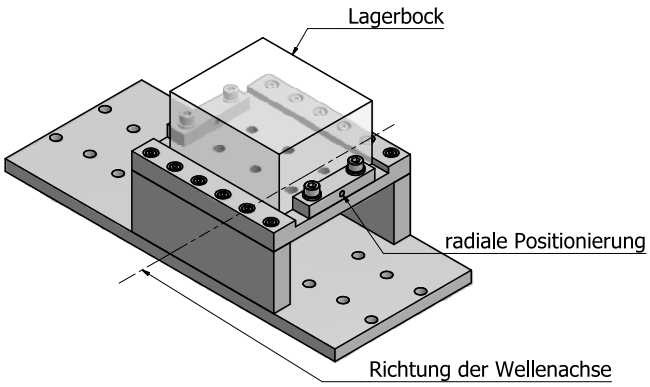


Abb. 6.20: Prinzipskizze: Nachträgliche Positionierbarkeit des Abtriebs.

Eine axiale Ausrichtung des Versuchsstandes ist nicht nötig, da das Mittelteil und der Lagerbock auf der Abtriebsseite auf Rollenumlaufeinheiten montiert sind und demzufolge eine Freiheit in axialer Richtung haben. Zur Vermeidung von Schwingungen und aus Gründen der Festigkeit sind vorgespannte Rollenumlaufeinheiten ausgewählt worden, die aufgrund der Lagerreibung geringfügig dämpfende Eigenschaften haben. Zur Initiierung einer einfachen Scherdeformation in den Probekörpern ist eine Unterdrückung des axialen Freiheitsgrades notwendig. Dies wird über ein Klemmsystem ermöglicht, dass eine reibschlüssige Verbindung der verschiebbaren Baugruppen zur Grundplatte ermöglicht.

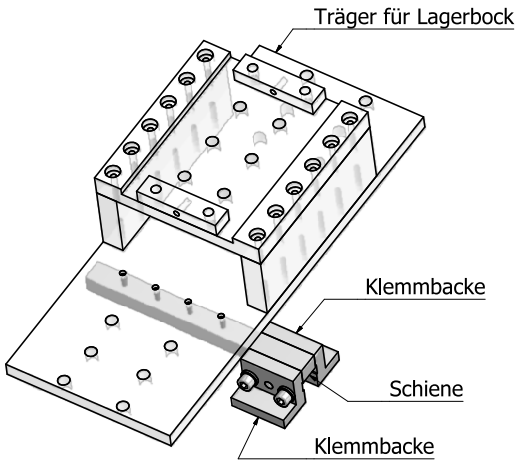


Abb. 6.21: Verspannbares Schienensystem am Unterbau des Lagerbocks auf der Abtriebsseite.

Der fertig montierte Versuchsstand ist in Abbildung 6.22 dargestellt. Alle Teile mit Ausnahme der Verstrebungen unter der Grundplatte bestehen aus Gründen der Korrosionsbeständigkeit aus Edelstahl. Dies soll in Zukunft die Realisierung von Ermüdungsuntersuchungen unter dem Einfluss korrosiver Medien ermöglichen. Die Verstrebungen, die zur Stabilisierung der Grundplatte dienen, sind aus St37 gefertigt und mit einer Schutzlackierung versehen. Auf der Antriebsseite ist außerdem ein Drehstrommotor mit einem Getriebe zur Drehzahlwandlung zur Realisierung der Rotation der Probekörper installiert, die im Kapitel 6.6 eingehender beschrieben werden.

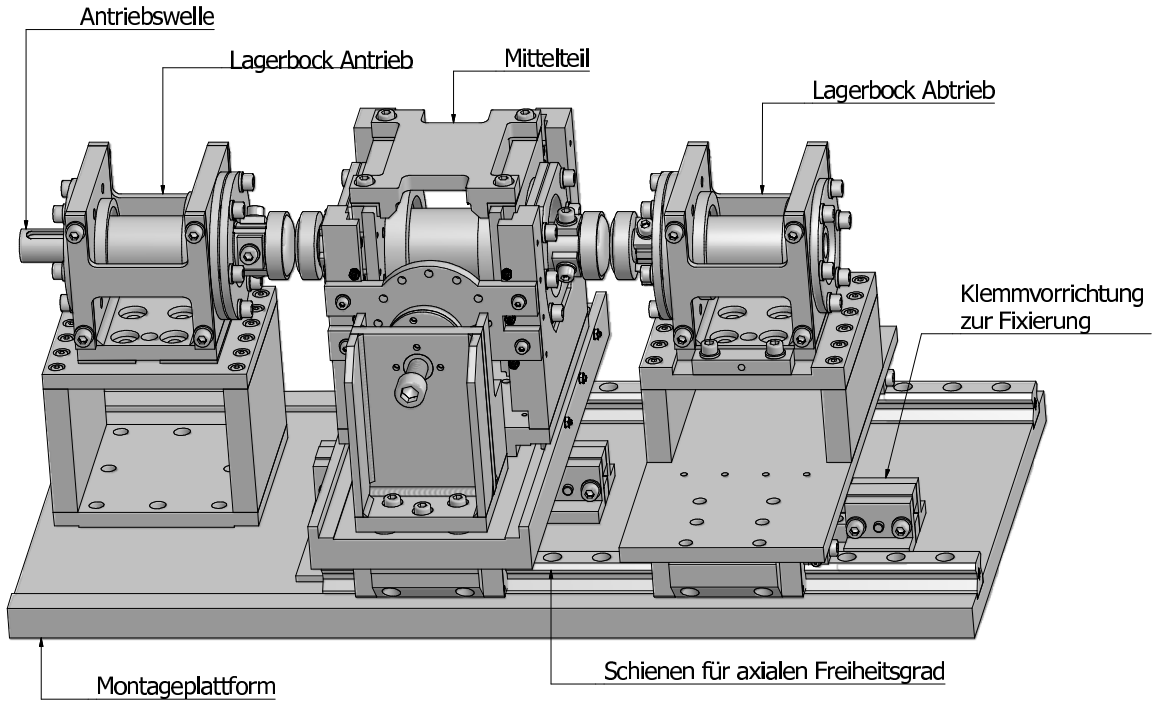


Abb. 6.22: Versuchsstand für einfache Scherung mit rotierenden Achsen.

6.6 Antriebstechnik

Zum Betrieb des Versuchsstandes für einfache Scherungen mit rotierenden Achsen ist ein geeigneter Antrieb erforderlich. Bei der Auswahl sind folgende Gesichtspunkte zu beachten.

- Ausreichend hohes Antriebsmoment
- Einstellbare Drehzahl
- Genormter Anschluss
- Montierbarkeit

In diesem Zusammenhang bietet sich eine Kombination aus einem Drehstrommotor mit einem passenden Frequenzumrichter an. Für die Umsetzung im Versuchsstand wird ein Stirnradgetriebemotor in Fußausführung der Firma SEW-Eurodrive [SEW06] verwendet. Die maximale Motorleistung beträgt $1,1kW$. Über ein vorgeschaltetes Stirnradgetriebe mit einem Übersetzungsverhältnis von $3,37$ kann mit dem Motor ein maximales Drehmoment von $25Nm$ erzeugt werden. Dies ist für den Betrieb des Versuchsstandes ausreichend. Die maximale Drehzahl beträgt $1400min^{-1}$. Die Ansteuerung des Motors erfolgt über einen Frequenzumrichter vom Typ MOVITRAC®B, Produktnummer MC07B0011-2B1-4-00, mit einer Ausgangsleistung von $1,1kW$. Das technische Datenblatt des Frequenzumrichters ist im Internet frei verfügbar (siehe SEW Eurodrive [SEW12]). Über ein Potentiometer am Frequenzumrichter lässt sich die Drehzahl des Versuchsstandes bei konstantem

Drehmoment im Rahmen der technisch gegebenen Randbedingungen frei einstellen. Der Frequenzumrichter lässt sich an eine handelsübliche Steckdose anschließen und generiert die für den Betrieb des Motors notwendigen Spannungen und Ströme in der passenden Frequenz. Zum Schutz gegen Überhitzung ist der Motor zusätzlich mit einer Luftkühlung versehen.

Zum Anschluss an den antriebsseitigen Lagerbock verfügt der Motor über ein Wellenende nach DIN 748-1 (siehe z. B. Hoischen [Hoi03]) und einen Fuß mit Schraubenbohrungen. Die Montage erfolgt über eine zweite Montageplattform, die mit der Montageplattform des eigentlichen Versuchsstandes verschraubt wird. Die Montageplattform wird dabei so ausgerichtet, dass eine Übertragung des Antriebsmoments vom Motor auf den Versuchsstand über eine einfache Klauenkupplung, wie zum Beispiel von der Firma Rotex [KTR12], erfolgen kann.

6.7 Sensoren und Messtechnik

Eine optimierte Probekörpergeometrie und die besondere Sorgfalt bei der Konstruktion des Versuchsstandes sind nur dann sinnvoll, wenn das verwendete Messsystem zur Erfassung der relevanten Messgrößen ebenfalls über eine entsprechende Genauigkeit verfügt. In diesem Kapitel werden die beiden Kraftaufnehmer zur Messung der Radial- und Umfangskraft sowie der Wegsensor zur Bestimmung der Auslenkung vorgestellt. Außerdem wird die vollständige Messkette beschrieben, die neben den Sensoren und einem A/D-Wandler zusätzlich noch über ein System zur Verstärkung der Messsignale und eine Schnittstelle zu einem PC verfügt.

6.7.1 Kraftaufnehmer

Wie im Kapitel 6.5 bereits erwähnt, erfolgt die Messung der für die einfache Scherung mit rotierenden Achsen repräsentativen Kräfte F_R und F_T über zwei einachsige Kraftaufnehmer. Hierzu werden Hochpräzisionskraftaufnehmer der Firma GTM Gassmann Testing and Metrology GmbH [GTM08] verwendet, die nach dem Biegeprinzip und unter Verwendung von Dehnungsmessstreifen funktionieren. Informationen zum Biegeprinzip finden sich bei Tränkler [Trä98].



Abb. 6.23: Kraftaufnehmer der K-Serie

Wird der Kraftaufnehmer belastet, wird er entsprechend verformt. Diese Verformung wird über DMS erfasst und in ein Spannungssignal umgewandelt, das sich proportional zur wirkenden Kraft verhält. Die Kraftaufnehmer der Firma GTM zeichnen sich vor allem durch eine hohe Biegesteifigkeit, eine hohe Präzision und eine gute Reproduzierbarkeit der Messungen aus. Aufgrund der Auslegung des Versuchsstandes wurden Kraftaufnehmer mit einem nominellen Messbereich von $\pm 2500N$ ausgewählt. Der tatsächliche Messbereich entspricht $\pm 4000N$. Für den Anschluss des Sensors wird eine Versorgungsspannung von $10V$ bereitgestellt. Diese Spannung dient gleichzeitig als Referenzspannung U_{ref} für die vom Sensor in Abhängigkeit der mechanischen Last ausgegebenen Signal- bzw. Messspannung U_{sig}. Die gemessene Kraft ist proportional zum Quotienten aus der Signalspannung U_{sig} und der Versorgungsspannung bzw. Referenzspannung U_{ref}.

$$F_{mess} \sim \frac{U_{sig}}{U_{ref}} \tag{6.35}$$

Aufgrund der Abhängigkeit der Messgröße sowohl von der Messspannung als auch von der Referenzspannung ist es für die Genauigkeit der Messung von Bedeutung, neben der Signalspannung auch die Referenzspannung genau zu kennen. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten: zum einen kann die Referenzspannung zusammen mit der Signalspannung gemessen werden. Zum anderen kann ein exakter und im Rahmen der zulässigen Toleranzen liegender Wert für die Referenzspannung von einer geeigneten Spannungsquelle zur Verfügung gestellt werden. Für den Versuchsstand wurde die Lösung mit der exakten Spannungsquelle umgesetzt.

6.7.2 Wegsensor

Für die messtechnische Erfassung der radialen Verschiebung des Mittelteils in Relation zu den beiden Lagerböcken wird ein Wegsensor verwendet. Hierzu stehen verschiedene Sensortypen zur Verfügung, von denen für den benötigten Messbereich von 0 bis $10mm$ vor allem induktive und optische Wegaufnehmer geeignet sind. Induktive Wegaufnehmer bestehen aus einer Spule und einem verschiebbaren Spulenkern, wobei nur ein Teil des Kerns in die Spule hineinragt. Dieser Teil beeinflusst die Induktivität der Spule, wie von Nyce [Nyc03] dargestellt. In Abhängigkeit von der Verschiebung des Spulenkerns verändert sich auch die Induktivität der Spule. Die Induktivität der Spule steht also indirekt in Abhängigkeit zu dem Teil des Spulenkerns, der sich noch außerhalb der Spule befindet. Dieser Teil des Kerns entspricht der zu messenden Wegstrecke. Optische Wegaufnehmer basieren auf einer Veränderung einer Lichtreflexion, die vom Abstand zur Lichtquelle abhängig ist. Die einfachste Methode ist die Messung der Intensität des reflektierten Lichts mit Hilfe lichtabhängiger Widerstände. Die Genauigkeit solcher Sensoren entspricht jedoch nicht den Anforderungen an den Versuchsstand, weshalb an dieser Stelle nicht näher darauf einge-

gangen werden soll. Eine wesentlich genauere Alternative bieten Laserabstandssensoren. Ein Laserstrahl wird in einem Winkel ungleich 90° auf die Oberfläche gestrahlt, deren Abstand zur Laserquelle gemessen werden soll. In Abhängigkeit vom Abstand zur Oberfläche werden verschiedene Bereiche eines im Sensor integrierten CCD-Chips mit den reflektierten Laserstrahlen angeregt. Über die Position der angeregten Bereiche ist eine Berechnung des Abstands zur reflektierenden Fläche sehr genau möglich. Dieses Verfahren ist für eine Verwendung im Versuchsstand sehr gut geeignet, so dass für die Abstandsmessungen das integrierte Messsystem 12U6430/S35A (siehe Baumer [Bau09]) zum Einsatz kommt. Dieses Messsystem hat den Vorteil, dass die Signalverarbeitung bereits integriert ist und die Messspannung direkt und unverstärkt für eine Abstandsbestimmung verwendet werden kann. Das Ausgangssignal liegt zwischen 0 und $10V$ und die Ansprechzeit beträgt $9ms$. Unter den beim Versuchsstand gegebenen Voraussetzung kann die Genauigkeit der Abstandsmessung bis zu $2\mu m$ erreichen, was den Anforderungen des Versuchsstandes genügt. Die Befestigung des Abstandssensors erfolgt an der Plattform mit den Flachkäfigführungen zur Ermöglichung einer radialen Verschiebung des Mittelteils. Die Reflektion des Laserstrahls zur Messung des Abstands findet am äußeren Gehäuse des Mittelteils statt.

6.7.3 Die Messstrecke

Sensoren haben die Aufgabe, ein Eingangssignal wie zum Beispiel eine Verschiebung oder eine Kraft in eine elektrische Größe wie Strom oder Spannung umzuwandeln und über einen A/D-Wandler eine Digitalisierung für elektronische Datenverarbeitungssysteme zu ermöglichen. Bei Sensorsystemen wie dem verwendeten Laserentfernungssensor 12U6430/S35A wird aufgrund der integrierten Verstärkung ein Signal zwischen 0 und $10V$ zur Verfügung gestellt. Im Falle der Kraftaufnehmer ist das Signal jedoch zu schwach, um direkt verarbeitet zu werden. Die Signale werden daher mit Hilfe eines geeigneten Messverstärkersystems gefiltert und auf einen sinnvollen Pegel angehoben. Die Signalverstärkung wird mit Hilfe von Hutschienen-DMS-Messverstärkern vom Typ GM40 der Firma Lorenz-Messtechnik realisiert. Die Messverstärker heben den Signalpegel der Kraftsignale auf ein Niveau zwischen 0 und $10V$ an. Aufgrund der Verstärkung wird die zeitliche Auflösung der Messsignale beeinflusst. Nach der Verstärkung ist eine maximale Messfrequenz von $1000Hz$ für die beiden Kraftaufnehmer möglich. Bei einer Drehzahl von $1,5min^{-1}$ der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen entspricht das einer Messauflösung von etwa 667 Messpunkten pro Umdrehung. Im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen ist diese Auflösung ausreichend.

Der im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Versuchsstand ist ein Prototyp. Es ist daher denkbar, dass der Aufbau aufgrund neu gewonnener Erkenntnisse in Zukunft erweitert werden muss. Demzufolge ist die Verwendung eines modular aufgebauten Messsystems sinnvoll, um nachträglichen Anforderungen aus messtechnischer Sicht gerecht werden

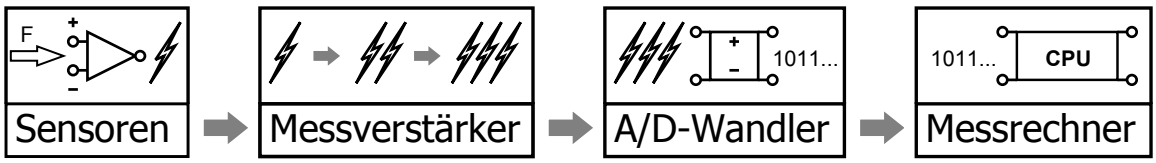


Abb. 6.24: Skizze des Aufbaus der Messstrecke

zu können. Das im Versuchsstand verwendete CompactDAQ-Chassis [Nat06], erfüllt diese Anforderungen und wird als Schnittstelle und erweiterbarer Träger für die Messkarten verwendet. Das Chassis bietet die Möglichkeit, verschiedene Komponenten eines Messsystems zu vereinen. Die Komponenten werden in Form von Modulen eingesetzt, das Chassis stellt dann für alle Module zusammen eine Verbindung mit einem Messrechner über dessen USB-Schnittstelle her. Das Chassis und die zugehörigen Module sind mit dem LabView-Programmpaket (siehe National Instruments [Nat98]) kompatibel, das für die Auswertung der Versuche unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen verwendet wird.

Für die Verarbeitung der Informationen der beiden Kraftaufnehmer sowie zur Auswertung der Informationen des Distanzsensors wird ein Analogeingangsmodul vom Typ NI 9229 [Nat12] im CompactDAQ-System integriert. Die Datenverarbeitung und die Steuerung der Messkarte erfolgt rechnerseitig mit Hilfe des Programms LabView [Nat98], das eine softwaretechnische Filterung des Signals sowie einfache Rechenoperationen ermöglicht. Nachfolgend ist das Flussdiagramm des Signalverlaufs schematisch dargestellt.

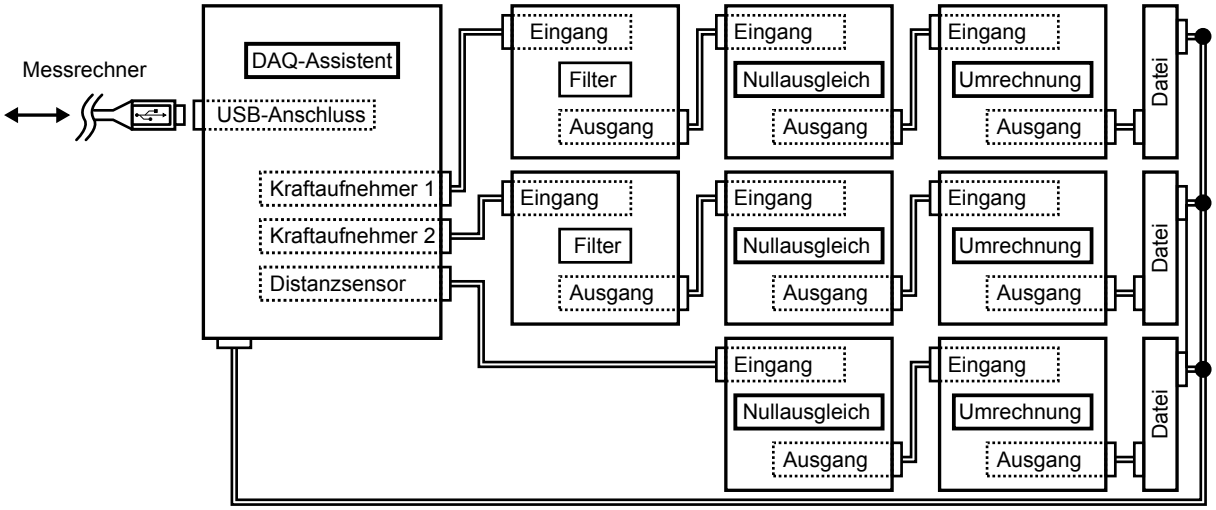


Abb. 6.25: Flussdiagramm des Signalverlaufs zur Datenaufbereitung mit Hilfe von LabView.

Signalverlauf bezeichnet das von der Messkarte digitalisierte Signal und dessen Verarbeitung im Messrechner. Es handelt sich nicht im eigentlichen Sinne um ein Signal sondern um Daten, die mit Hilfe des Messrechners weiterverarbeitet werden. In der LabView-Terminologie werden diese Daten jedoch als Signal bezeichnet, ein Begriff, der im Zu-

sammenhang mit LabView im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit in gleicher Weise verwendet werden soll. Gemäß Abbildung 6.25 ist der DAQ-Assistent die Schnittstelle zwischen den Sensoren und dem Messrechner. Er übernimmt die Unterteilung des Gesamtsignals in die Datensignale für die beiden Kraftaufnehmer und für den Distanzsensor und steuert weitere Aufbereitungsschritte für Messdaten. Der Distanzsensor hat einen eingebauten Filter, so dass die Informationen über die Verschiebung des Mittelteils in Relation zu den Lagerböcken unverrauscht an den PC übertragen werden. Aus diesem Grund wird das Messsignal vom DAQ-Assistenten direkt an einen Algorithmus zur Umrechnung des Spannungswertes in einen Verschiebungswert weitergeleitet. Die Signale für die beiden Kraftaufnehmer werden ungefiltert an den Assistenten übergeben. Entsprechend wird vor der Umrechnung der Messspannung in einen Kraftwert softwareseitig eine Filterung der Signale durchgeführt. Hierzu bietet LabView eine Vielzahl unterschiedlicher Softwarefilter an. Nach der Filterung werden die Signale der Kraftaufnehmer sowie das Signal des Distanzsensors von dem jeweiligen Spannungswert in eine Kraft bzw. eine Verschiebung umgerechnet. Entsprechende Rechenoperationen können direkt in der Programmumgebung einprogrammiert werden. Das gefilterte und umgerechnete Signal wird abschließend in eine Datei gespeichert, an den DAQ-Assistenten zurückgeleitet und dem Nutzer zur weiteren Verwendung auf dem Messrechner zur Verfügung gestellt.

6.8 Erste Messungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen

Bei dem Versuchsstand zur Umsetzung einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen handelt es sich, wie bereits erwähnt, um einen Prototypen, dessen Eigenschaften durch einfache Tests verifiziert werden müssen. Vor Allem bei den Untersuchungen des Lebensdauerverhaltens gilt es sicherzustellen, dass die in Kapitel 6.2.2 vorgestellte und für einfache Scherverformungen optimierte Probekörpergeometrie in Kombination mit rotierenden Achsen tatsächlich den Anforderungen entspricht. Es gilt zu überprüfen, ob

- sich zusätzlich zur auslenkenden Kraft eine Tangentialkraft ausbildet.
- eine Rotation der Belastungsrichtungen zu einer Zermürbung des Werkstoffes führt.
- die auslenkende Kraft und die Tangentialkraft einen Phasenwinkel einschließen, der proportional zur Energiedissipation ist.

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Verlauf der auslenkenden Kraft F_R und der aus der Energiedissipation resultierenden Kraft F_T in Abhängigkeit der Anzahl der Umdrehungen als Ergebnis von Ermüdungsversuchen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen. Die Kraftverläufe stellen die Lebensdauer der Probe bis zu deren vollständigen Ausfall dar. Der vollständige Ausfall entspricht in diesem speziellen Fall einer kompletten Separierung

der beiden Probenbasen einer Probe. Anhand der Kraftverläufe können mehrere Phänomene beobachtet werden, die sich den Eigenschaften technischer Gummiwerkstoffe sowie Ermüdungs- und bruchmechanischen Ursachen zuordnen lassen.

Zu Demonstrationszwecken werden mit jeder Gummimischung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Werkstoffe Messungen durchgeführt (für weitere Erläuterungen siehe Kapitel (7). Zunächst wird ein EPDM-E1M-Probensatz vermessen. Hierzu wird ein Schermaß von $s = 1,5$ in der Probekörpergeometrie initiiert und im Anschluss mit einer Frequenz von $f = 1,5Hz$ rotiert. Abbildung 6.26 (a) zeigt die zugehörigen Kraftverläufe mit der auslenkenden Kraft F_R in schwarz und der Tangentialkraft F_T in grau in Abhängigkeit der vom Gummimaterial erduldeten Umdrehungen. Abbildung 6.26 (b) zeigt den zugehörigen Phasenwinkel, der aus dem Arcustangens des Quotienten von F_T und F_R berechnet wird.

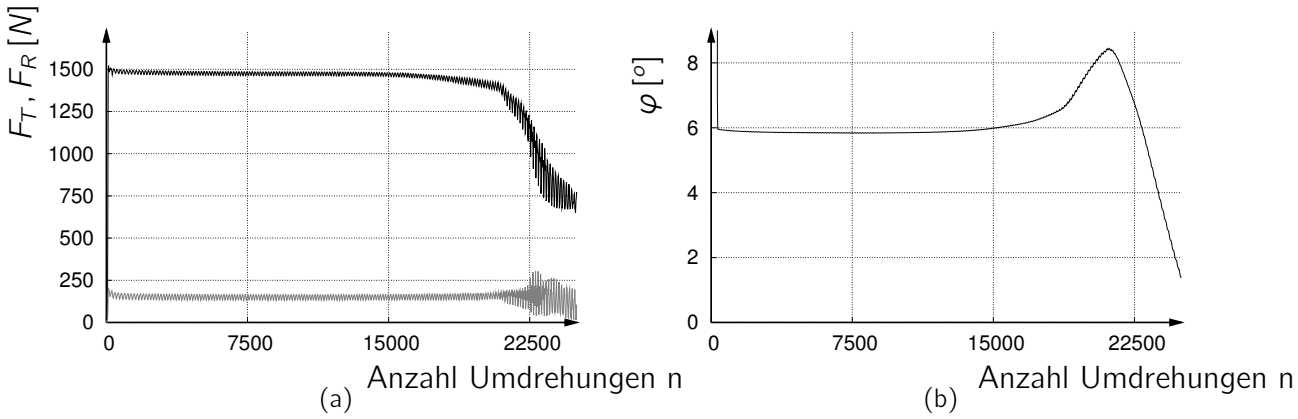


Abb. 6.26: Beispielmessung eines Ermüdungsversuchs unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für EPDM-E1M. Auslenk- und Tangentialkraft (a) und Phasenwinkel (b) in Abhängigkeit der erduldeten Umdrehungen.

Der Verlauf der Kräfte im zeitlichen Nahbereich erscheint stark verrauscht. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um ein Messrauschen, sondern um den Einfluss der Rundlaufgenauigkeit der Probekörper. Ganz allgemein hat der Herstellungsprozess bei technischen Gummibauteilen einen Einfluss auf das Materialverhalten. Dieser Einfluss ist auch bei den Probekörpern zu finden und führt dazu, dass die Gesamtsteifigkeit des Probekörpers im Verlauf einer Umdrehung variiert. Darüber hinaus sind Messfrequenz und die Frequenz der Rotation der Proben im Versuchsstand leicht phasenverschoben, so dass es beim Messen der Kräfte zu einem Schwebungseffekt zwischen der Messfrequenz und des zum Messzeitpunkt vorliegenden Rotationswinkels kommt. Dies führt dazu, dass der Verlauf der gemessenen Kräfte verrauscht erscheinen, darin jedoch eine Regelmäßigkeit in Abhängigkeit der Schwebungsfrequenz zu erkennen ist. Zu Beginn des Versuchs ist ein leichter Abfall sowohl der auslenkenden Kraft als auch der Tangentialkraft erkennbar. Für die anderen Materialien

ist dieses Phänomen deutlich ausgeprägter (siehe Abbildungen 6.27, 6.28 und 6.29, jeweils (a)). Ausschließlich anhand der Diagramme ist nicht zu erkennen, ob es sich hierbei um einen Setzvorgang oder um den Mullins-Effekt (siehe Mullins [Mul48] und [Mul69]) handelt, da die Belastung während des gesamten Versuchs nicht zyklisch ist und der Mullins-Effekt für rotierende Belastungsrichtungen bislang noch nicht untersucht wurde. Mit Hilfe einer Untersuchung des Setzverhaltens im Versuchsstand für einfache Scherung mit rotierenden Achsen kann jedoch belegt werden, dass das beobachtete Phänomen nicht ausschließlich auf ein Materialsetzen zurückgeführt werden kann, sondern auch der Mullins-Effekt bei einer reinen Richtungsmodulation einen erkennbaren Einfluss auf das Materialverhalten hat.

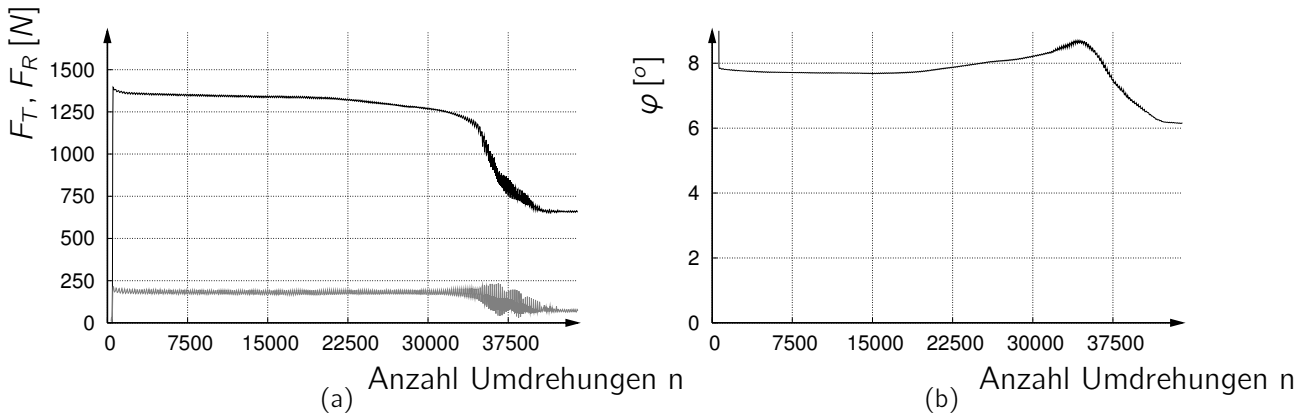


Abb. 6.27: Beispielmessung eines Ermüdungsversuchs unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für EPDM-E2M. Auslenk- und Tangentialkraft (a) und Phasenwinkel (b) in Abhängigkeit der erduldeten Umdrehungen.

Die resultierende Kraft bleibt den größten Teil der Messung konstant. Kurz vor dem Versagen der Probe wird die Amplitude des Messrauschens jedoch größer. Dies lässt sich auf ermüdungstechnische und bruchmechanische Ursachen zurückführen. Aufgrund der Materialermüdung bilden sich Risse im Material, wodurch die wirksame Querschnittsfläche des Probekörpers verringert wird. Dies führt zu einer Verringerung sowohl der auslenkenden als auch der resultierenden Kraft. Gleichzeitig reiben die entstandenen Rissflächen aufeinander und dissipieren somit Energie, was zu einem proportionalen Anstieg der Tangentialkraft führt. Beide Effekte wechseln sich im Verlauf einer Umdrehung mehrfach ab und führen zu einer Vergrößerung der Amplitude der Tangentialkraft. Dieses Phänomen ist jedoch nur bei den Mischungen auf EPDM-Basis zu beobachten. Bei den Naturkautschuk-Werkstoffen ist kein Aufweiten der Amplitude zu beobachten. Stattdessen resultiert ein Versagen der Probe in einem Anstieg der Tangentialkraft. Die Gründe für die Unterschiede zwischen den beiden Werkstoffen sind in diesem Zusammenhang nicht eindeutig geklärt, es wird jedoch vermutet, dass das für den jeweiligen Werkstoff verwendete Basispolymer ursächlich ist.

Bei Naturkautschuk handelt es sich um ein Polymer, das zu Dehnungskristallisation neigt, bei EPDM ist dies nicht der Fall. Die Dehnungskristallisation führt bei Naturkautschuk zu vergleichsweise guten Weiterreißeigenschaften, da potentielle Risse, zum Beispiel Fehlstellen und andere Risskeime, durch Dehnungskristallisation im Rissgrund am Weiterreißen gehindert werden können (siehe z. B. Santangelo [San03] oder Kingston [Kin07]). Dies führt dazu, dass bei Naturkautschuk im Vergleich zu EPDM weniger Fehlstellen zu großen, für das Lebensdauerverhalten relevanten, Rissen führen, da ein Teil der Fehlstellen durch Dehnungskristallisation am Weiterreißen gehindert wird. EPDM-basierte Proben haben somit im Verlauf des Versagens und im Vergleich zu den Modellmischungen auf Naturkautschukbasis potentiell mehrere große Fehlstellen, die in der beschriebenen Art und Weise zu einer Vergrößerung der Amplitude der Tangentialkraft führen.

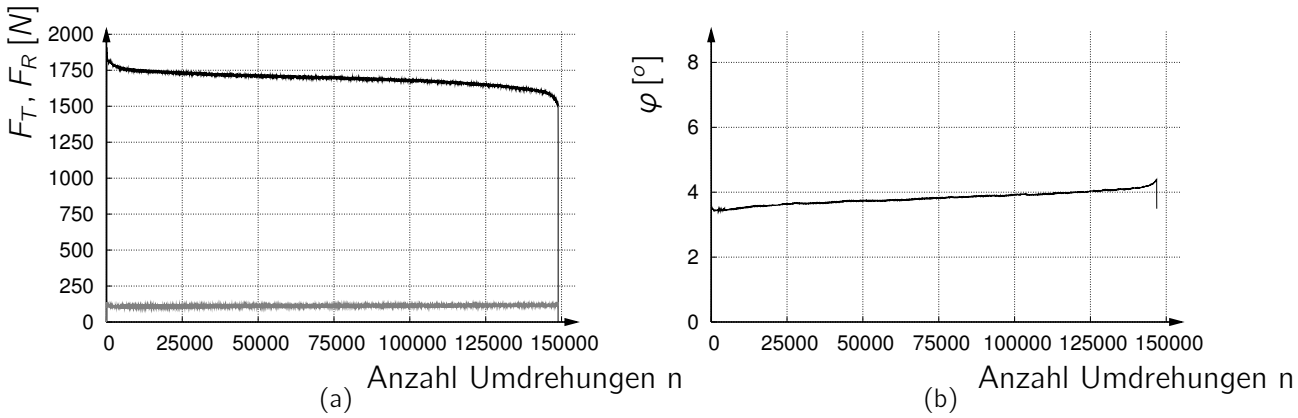


Abb. 6.28: Beispielmessung eines Ermüdungsversuchs unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für NR-N1M. Auslenk- und Tangentialkraft (a) und Phasenwinkel (b) in Abhängigkeit der erduldeten Umdrehungen.

Mit Hilfe des Quotienten von Scher- und Tangentialkraft lässt sich der Verlauf des Phasenwinkels in Abhängigkeit der Umdrehungen für einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen darstellen (siehe hierzu Abbildungen 6.26, 6.27, 6.28 und 6.29 (b)). Aufgrund des Rauschens in den beiden Kraftverläufen ist auch der Verlauf des Phasenwinkels verrauscht. Zur besseren Darstellung wurde der Phasenwinkel daher nachträglich mit einem Trainbox-Filter geglättet. Der Verlauf des Phasenwinkels ist für alle vier untersuchten Werkstoffe ähnlich. Zu Beginn der Messung, kurz vor dem Initiieren des Schermaßes, ist der Phasenwinkel aufgrund der kleinen Kräfte sehr ungenau und nimmt infolge der Eigenreibung des Versuchsstandes sehr hohe Werte an. Mit größer werdenden Kräften werden die dissipativen Effekte, die durch den Versuchsstand bedingt sind, im Vergleich zu den aus dem Material resultierenden Kräfte vernachlässigbar. Der Phasenwinkel fällt auf ein für gefüllte Elastomerwerkstoffe zu erwartendes Niveau.

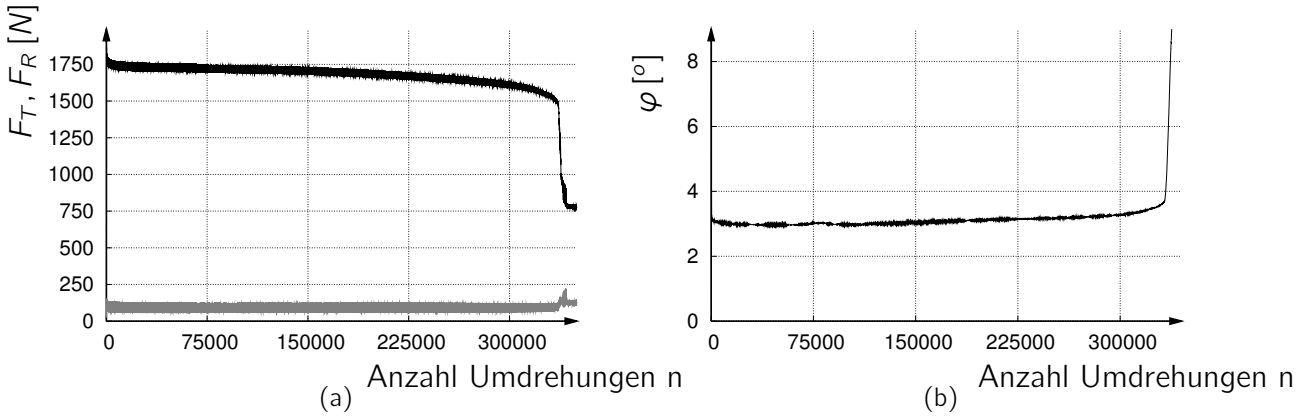


Abb. 6.29: Beispielmessung eines Ermüdungsversuchs unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für NR-N2M. Auslenk- und Tangentialkraft (a) und Phasenwinkel (b) in Abhängigkeit der erduldeten Umdrehungen.

Während der ersten 1000 bis 5000 Umdrehungen ist für die Naturkautschuke eine leichte Abnahme des Phasenwinkels erkennbar. Hier zeigt sich der zuvor beschriebene Mullins-Effekt für einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen. Danach erreicht der Phasenwinkel bis zum Versagen der Probe einen stationären Zustand und ist unter Vernachlässigung der Rundlaufeigenschaften der Probe und des überlagerten Messrauschens konstant. Mit zunehmender Schädigung des Materials wird aufgrund der im Abschnitt zuvor beschriebenen Reibungseffekte auf den Rissflächen mehr Energie dissipiert. Dies führt mit dem Versagen der Probe zu einem Anstieg des Phasenwinkels. Mit dem vollständigen Versagen der Probe nimmt der Phasenwinkel wieder ab.

Anhand der ersten Messungen lässt sich zeigen, dass sich mit Hilfe des Versuchsstands die von Gent [Gen60] vorhergesagten Effekte messtechnisch abbilden lassen. Mit Hilfe von einfachen Scherdeformationen mit rotierenden Achsen lassen sich Scherkräfte in eine rein elastische und eine rein dissipative Komponente aufteilen, mit denen sich ein Phasenwinkel bestimmen lässt. Außerdem ist nachgewiesen worden, dass rotierende Belastungsrichtungen eine schädigende Wirkung auf technische Gummiwerkstoffe haben.

Obgleich es sich um einen Prototypen handelt, ist der Versuchsstand inzwischen Teil des Maschinenparks am Deutschen Institut für Kautschuktechnologie e. V. geworden und wird für Lebensdaueruntersuchungen sowie für die mechanische Charakterisierung technischer Gummiwerkstoffe verwendet.

7 Überblick - Werkstoffe

Die für diese Arbeit verwendeten Modellwerkstoffe sind unter dem Aspekt ausgewählt worden, möglichst repräsentativ für eine Vielzahl technischer Gummiwerkstoffe zu sein. Im folgenden Abschnitt sollen die wesentlichen Eigenschaften und Besonderheiten der Werkstoffe aufgezeigt werden. Dies umfasst sowohl die Struktur und Zusammensetzung der Werkstoffe, als auch die mechanischen Eigenschaften unter quasistatischer Belastung.

Die für die messtechnische Basis dieser Arbeit verwendeten Werkstoffe sind schwefelvernetzte und mit Ruß verstärkte Polymerwerkstoffe. Es wurden zwei unterschiedlichen Basispolymere verwendet:

- Naturkautschuk (englisch: natural rubber, NR), ein R-Kautschuk mit ungesättigten Molekülketten.
- Ethylen-Propylen-Dienkautschuk (EPDM), ein M-Kautschuk mit gesättigten Ketten vom Polymethylentyp.

Die Klassifikation in R- und M-Kautschuk erfolgt auf Basis von Schwarz [Sch05] bzw. Jaunich [Jau12]. Sowohl Naturkautschuk, als auch Ethylen-Propylen-Dien-Methylen sind handelsübliche Polymere, die für die Herstellung vieler industrieller Produkte, wie zum Beispiel Reifen, Förderbänder oder Schläuche verwendet werden.

7.1 Basispolymer: Naturkautschuk (NR)

Die Grundlage von Naturkautschuk ist der als Latex bezeichnete Saft kautschukhaltiger Pflanzen. Die Pflanze Hevea Brasiliensis gilt hierfür als wichtigster Rohstofflieferant. Der aus der Koagulation und Trocknungsverfahren entstehende Festkautschuk wird in 3 - 4mm dicke Felle ausgewalzt, die über ein Räucherverfahren gegen Schimmelbildung und Oxidation geschützt werden. Hierbei entsteht der sogenannte *Smoked-Kautschuk*. Alternativ kann der Rohkautschuk auch gewaschen und gebleicht werden. Aufgrund des höheren Reinheitsgrades wird hierbei auf das Räucherverfahren verzichtet. Der auf diese Weise hergestellte Naturkautschuk wird als *Crepe-* oder *Pale-Crepe-Kautschuk* bezeichnet. Ein wesentliches Merkmal von Naturkautschuken ist der Umstand, dass Unterschiede in der Verarbeitbarkeit zu einem gewissen Grad auf die verschiedenen Anbaugebiete der Rohstoffpflanzen zurückgeführt werden können (siehe Schwarz [Sch05]). Zur Kennzeichnung wurde in Malaysia daher eine Klassifizierung ins Leben gerufen, der SMR (Standard Malaysian Rubber). Der SMR berücksichtigt den Verschmutzungsgrad sowie den Gehalt an flüchtigen Stoffen innerhalb des Materials (siehe hierzu Schwarz [Sch05]).

Naturkautschuk besteht aus polymerisierten Isoprenmolekülen. Abbildung 7.1 zeigt die zugehörige Strukturformel.

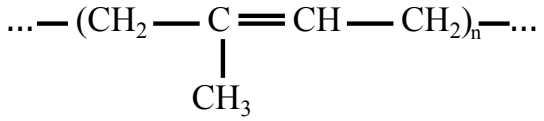


Abb. 7.1: Polyisopren, 1/n-Polymer

Der Vorteil von Naturkautschuk gegenüber anderen Polymeren ist die Vereinigung vieler, für technische Gummiwerkstoffe wichtiger, Eigenschaften. In einzelnen Aspekten können Naturkautschuke durch synthetische Elastomere übertroffen werden, insgesamt betrachtet gibt es jedoch keinen äquivalenten Ersatz für Naturkautschuk.

Eine wesentliche Eigenschaft von Naturkautschuk ist die Neigung zur lokalen Ausbildung von kristallinen Strukturen bei großen Verformungen (Dehnungen $\geq 500\% \rightarrow$ Batzer [Bat84]). Dieser Effekt wird als dehnungsinduzierte Kristallisation oder Dehnungskristallisation bezeichnet. Im unbelasteten Zustand weisen die fadenförmigen Polymermoleküle ein hohes Maß an Entropie auf: sie sind stark ungeordnet und ineinander verschlungen. Das Aufbringen einer Dehnung verringert den Grad der Entropie. Dies bewirkt gemäß der Clausius-Clapeyron-Gleichung (siehe Baehr [Bae88]) eine Verschiebung des Schmelzpunktes von kristallinen Polymeren zu höheren Temperaturen (siehe Batzer [Bat84]). Bei großen Verformungen kann diese Verschiebung lokal derart ausgeprägt sein, dass der Glasübergang auch bei normal üblichen Laborklimaten in kleinen Bereichen überschritten wird. Aufgrund der Verformung richten sich die Fadenmoleküle parallel zur Deformation aus (siehe Ihlemann [Ihl03]), was nach Mars [Mar01] unter den beschriebenen Umständen zu einer Bildung von kristallinen Strukturen führen kann.

Dehnungskristallisation ist maßgeblich für die guten Weiterreißeigenschaften von Naturkautschuk. Aufgrund von Spannungsspitzen im Rissgrund und den damit verbundenen hohen Dehnungen bilden sich lokal dehnungskristallierte Bereiche aus. Diese verhärteten Bereiche haben eine verfestigende Wirkung und behindern den Rissfortschritt.

Zur Vermeidung von Abhängigkeiten durch den Import von Rohkautschuk wurde bereits im 19. Jahrhundert versucht, einen zu Naturkautschuk gleichwertigen Synthesekautschuk herzustellen. Ein Beispiel hierfür zeigt Schwarz [Sch05]. Mit Isoprenmolekülen als monomere Einheit kann Polyisopren (PI) hergestellt werden. Synthetisches Polyisopren weist jedoch nicht die gleiche sterische Einheitlichkeit auf wie Naturkautschuk, wodurch die Eigenschaften von PI denen von Naturkautschuk ähnlich, jedoch nicht so ausgeprägt sind. Aufgrund der vielfältigen Eigenschaften von NR ist dieser Werkstoff in der industriellen Nutzung weit verbreitet. Dieser Umstand macht ihn zu einem idealen Werkstoff für die Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Dissertation.

Die Rezepturen der im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Werkstoffe sind auf Grundlage eines öffentlichen FVA-Projekt entstanden. Es handelt sich hierbei um ein ruß-

gefülltes und schwefelvernetztes Naturkautschuksystem mit einem Füllstoffanteil von 30phr Ruß vom Typ N-774. Zu Vergleichszwecken wurde eine zweite Naturkautschukmischung hergestellt, wobei ein feinerer Ruß vom Typ N-330 verwendet wird. Um eine möglichst hohe Vergleichbarkeit zwischen den beiden Werkstoffen zu erreichen, wurde der Rußgehalt des zweiten Werkstoffes derart angepasst, dass beide Naturkautschuksysteme den gleichen statischen Schermodul um die undeformierte Konfiguration aufweisen. Weitere Informationen finden sich im Abschnitt 7.3.

7.2 Basispolymer: Ethylen-Propylen-Dien-Methylen (EPDM)

Ethylen-Propylen-Kautschuke werden durch Copolymerisation von Ethylen und Propylen hergestellt. Hierzu wird die Kristallisationsneigung von Polyethylen durch den Einsatz geeigneter Katalysatoren gestört, sodass amorphe polymere Strukturen in Form von Ethylen-Propylen-Methylen (EPM) gebildet werden. Unter Hinzunahme von Dien-Monomeren entsteht das Terpolymer Ethylen-Propylen-Dien-Methylen, das nach Schuster [Sch07] im Gegensatz zu EPM nicht peroxidisch, sondern mit Schwefel vernetzt wird. Abbildung 7.2 zeigt die monomere Einheit von Ethylen-Propylen-Kautschuken, wobei im Falle von EPDM zusätzliche Dien-Moleküle enthalten sind, die in der Abbildung aufgrund der Komplexität jedoch nicht dargestellt werden.

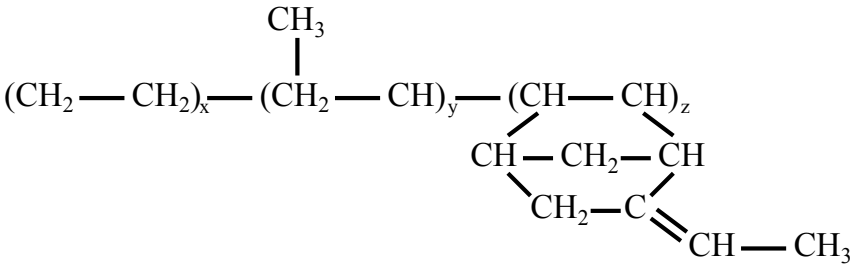


Abb. 7.2: Ethylen-Propylen-Methylen (EPM) nach Ciesielski [Cie99] und Jaunich [Jau12]

Aufgrund der hohen Alterungsbeständigkeit und des guten Widerstandes von rußgefüllten EPDM-Polymeren gegen viele chemische Substanzen wird EPDM häufig als Dichtungsmaterial und zur Herstellung von Schläuchen eingesetzt, wobei aromatische und chlorierte Wasserstoffe sowie Benzin und Öle aufgrund des unpolaren Charakters von EPDM nicht mit dem Werkstoff in Berührung kommen sollten. In diesen Medien quellen Ethylen-Propylen-Kautschuke stark.

7.3 Verstärkung der Polymere durch Füllstoffe

Zur Verstärkung vieler nützlicher Aspkete von Polymeren werden Füllstoffe wie Ruße oder Silikate in die Werkstoffstruktur eingebracht. Sie bewirken eine Verbesserung von Eigenschaften wie dem Abriebwiderstand und der Reißfestigkeit. Gleichzeitig findet aufgrund

der starren Struktur der Rußpartikel eine hydrodynamische Verstärkung der Polymermatrix unter Last statt, was zur einer Erhöhung der Härte des Materials führt. Zudem tragen Füllstoffe in erheblichem Maße zu den Dämpfungseigenschaften und zur Ausbildung einer belastungsinduzierten Anisotropie polymerer Werkstoffe bei.

Die für die Messungen im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit verwendeten Elastomere werden mit Ruß gefüllt. Der Anteil beim Naturkautschuk entspricht 30phr Ruß vom Typ N-774, der Anteil an Ruß beim EPDM liegt bei 50phr. Beim EPDM wurde ein Ruß vom Typ N-550 verwendet. Für beide Basispolymere wurde eine Füllstoffvariation mit einem gröberen Ruß vom Typ N-330 durchgeführt. Der Füllstoffanteil der beiden Modellmischungen mit dem gröberen Ruß wurde dabei derart angepasst, dass die Werkstoffe mit dem gleichen Basispolymer einen identischen Schermodul aufweisen. Hierzu wurden zunächst zwei Variationsmischungen hergestellt. Für die Variationsmischungen des Naturkautschuks wurden 24phr und 28phr des gröberen Rußes eingemischt, für die Variationsmischungen mit EPDM als Basispolymer waren es 36phr und 44phr. Das Vernetzungssystem ist hierbei für die jeweiligen Basispolymere gleich geblieben. Für alle vier Variationsmischungen wurde der Schermodul bestimmt. Auf diese Weise kann ein linearer Zusammenhang zwischen Füllstoffanteil und Schermodul hergestellt werden, mit dessen Hilfe eine Anpassung des Schermoduls der beiden Modellmischungen mit dem gröberen Ruß an die Schermoduln der beiden Modellmischungen mit dem feineren Ruß durchgeführt wurde. Hierbei sei anzumerken, dass der Füllstoffgehalt eines Polymers nicht unbedingt einen linearen Einfluss auf den Schermodul hat und das beschriebene Vorgehen nur als Abschätzung zu betrachten ist. Weitere Informationen finden sich bei Gent [Gen03]. Der Werkstoff auf Basis von Naturkautschuk bei Verwendung des gröberen Rußes hat einen Füllstoffanteil von 28phr, die Mischung auf Basis von EPDM mit dem gröberen Ruß hat einen Rußanteil von 44phr.

Ausgehend von den beiden Modellmischungen und den zugehörigen Mischungen mit dem gröberen Ruß bilden insgesamt vier Polymersysteme die werkstofftechnische Grundlage für die Untersuchungen. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird die Modellmischung auf Basis von Naturkautschuk mit dem feineren Ruß als NR-N1M und mit dem gröberen Ruß als NR-N2M bezeichnet. In gleicher Weise ergeben sich für die beiden Mischungen auf Basis von EPDM die Bezeichnungen EPDM-E1M für den Werkstoff mit dem feinen Ruß und EPDM-E2M für den Werkstoff mit dem groben Ruß. Die Rezepturen für die Mischungen können Abbildung 7.3 entnommen werden.

7.4 Quasistatisches Materialverhalten

Für die Beurteilung des Lebensdauerverhaltens der vier Modellmischungen ist eine Kenntnis des quasistatischen Materialverhaltens von Vorteil. Zu diesem Zweck werden für alle vier Mischungen so genannte Muhr-Scherversuche nach Besdo et al. [Bes03] und Untersuchungen des mechanischen Materialverhaltens unter einfacher Scherung mit rotierenden

EPDM-E1M	
Komponente	pphr
Grundmischung	
Buna EPG 5450	100
Sunpar 2280	40
Ruß N-550	50
ZnO RS	4
Stearinsäure	2
Vernetzungssystem	
Schwefel	0,7
TBBS	1
TBzTD	3,5

EPDM-E2M	
Komponente	pphr
Grundmischung	
Buna EPG 5450	100
Sunpar 2280	40
Ruß N-330	44
ZnO RS	4
Stearinsäure	2
Vernetzungssystem	
Schwefel	0,7
TBBS	1
TBzTD	3,5

NR-N1M	
Komponente	pphr
Grundmischung	
NR (TSR-CV 60)	100
Ruß N-774	30
IPPD	2
TMQ	1
Antilux 500	2
ZnO RS	5
Stearinsäure	2
Vernetzungssystem	
CBS	2
Schwefel	1,5
TMTD	0,2

NR-N2M	
Komponente	pphr
Grundmischung	
NR (TSR-CV 60)	100
Ruß N-330	28
IPPD	2
TMQ	1
Antilux 500	2
ZnO RS	5
Stearinsäure	2
Vernetzungssystem	
CBS	2
Schwefel	1,5
TMTD	0,2

Abb. 7.3: Rezepturen der vier Modellmischungen.

Achsen durchgeführt. Auf uniaxiale Zugversuche soll an dieser Stelle verzichtet werden. Sie stellen zwar die einfachste Methode zur Untersuchung des quasistatischen Materialverhaltens dar, sie liefern jedoch im Vergleich zu den Muhr-Scherversuchen keine wesentlichen zusätzlichen Informationen.

7.4.1 Mechanische Charakterisierung der Modellmischungen mit Hilfe von Muhr-Scherversuchen

Bei den Muhr-Scherversuchen handelt es sich um eine beidseitig durchgeführte einfache Scherdeformation mit zyklisch ansteigender Scheramplitude. Vorgestellt wurden diese Versuche erstmals in den Arbeiten von Besdo et al. [Bes03]. Abbildung 7.4 zeigt schematisch die Belastungsvorgabe eines Muhr-Scherversuchs, wobei für eine bessere Übersicht nur die Schermaße $s = 0,5$, $s = 1$ und $s = 1,5$ als Stützstellen verwendet werden. Die Stützstellen der im Rahmen der mechanischen Charakterisierung der vier Modellmischungen durchgeführten Muhr-Scherversuche sind in Tabelle 1 dargestellt.

Zu Beginn eines Muhr-Scherversuchs wird eine geeignete Probe zyklisch in eine Richtung geschert. Üblicherweise wird die Probe pro Belastungsschritt fünfmal bis zu einer vorgegebenen Deformation ausgelenkt. Der aus dem Versuch resultierende Kraft-Verschiebungs-Verlauf wird ab dem fünften Belastungsschritt als stationär betrachtet. Für Materialien, die auch nach fünf Schwingspielen eine deutliche Veränderung aufeinander folgender Zyklen aufzeigen, sollte die Anzahl der Belastungszyklen pro Lasthorizont vergrößert werden. Für die Messungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit können jedoch nach fünf Belastungen pro Lasthorizont nur noch vernachlässigbar kleine Veränderungen beobachtet werden. Die Belastungsgeschwindigkeit wird derart gewählt, dass die Versuche als quasistatisch angesehen werden können und dynamische Effekte somit nicht berücksichtigt werden müssen. Für die im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen wurde eine Schergeschwindigkeit von $\dot{s} = 0,5 min^{-1}$ gewählt. Im Vergleich zu zyklischen Zugversuchen, die vom Aufwand her etwas einfacher durchzuführen sind, bieten die Muhr-

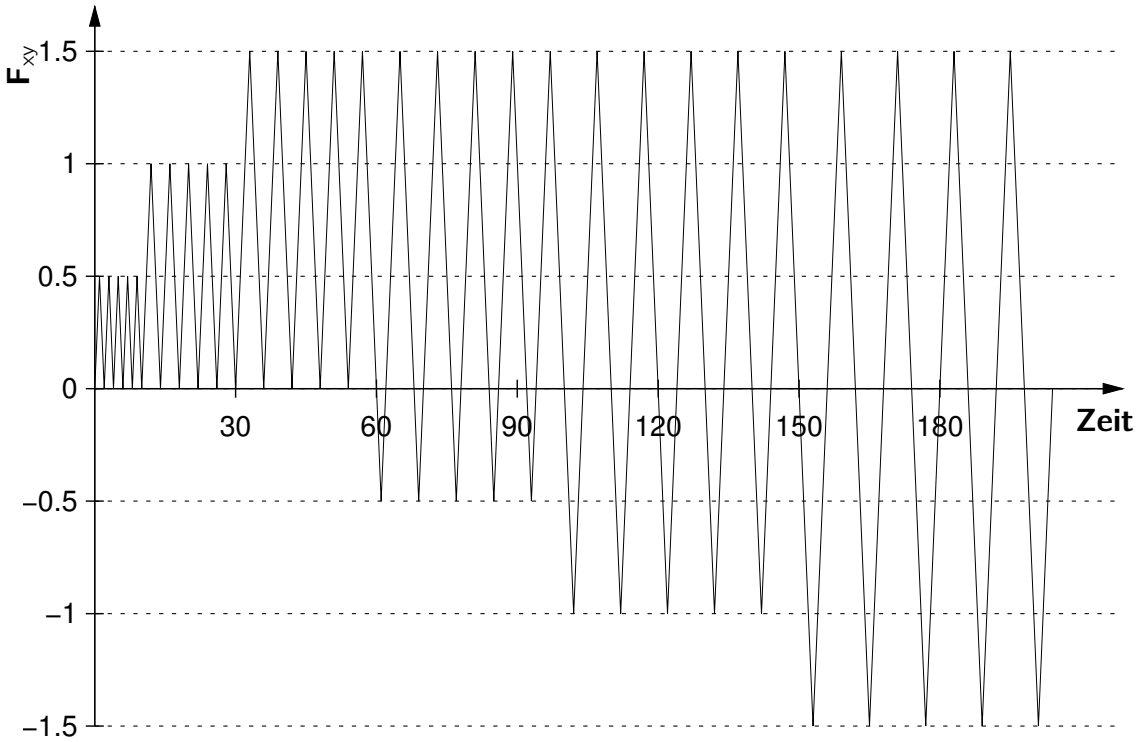


Abb. 7.4: Exemplarische Belastungsvorgabe für einen Muhr Scherversuch

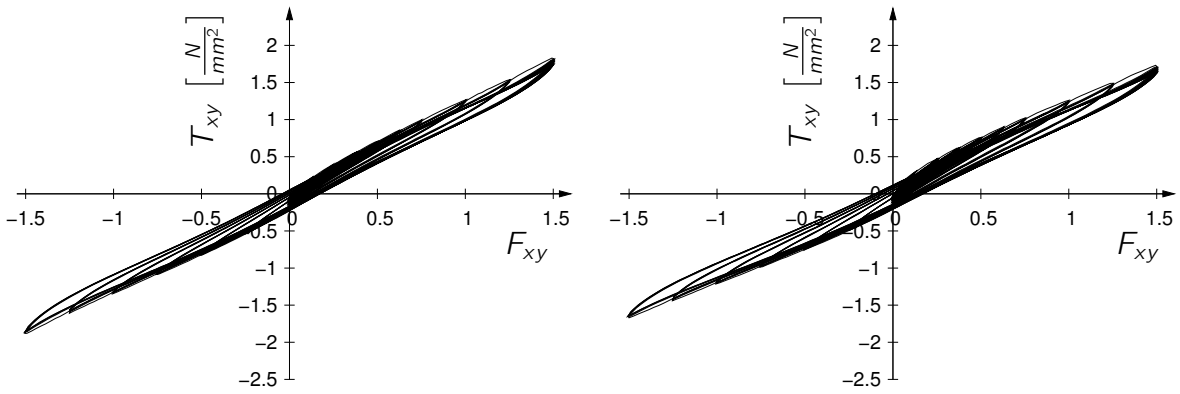
Scherversuche den Vorteil, richtungsabhängige Effekte, wie zum Beispiel den belastungsinduzierten anisotropen Steifigkeitsabfall, abzubilden. Die vorgegebenen Umkehrpunkte der Belastungszyklen sind in der nachstehenden Tabelle aufgezeigt, diese sind jedoch nur in eine Scherrichtung dargestellt, da sich die Umkehrpunkte in negativer Scherrichtung (Umkehrpunkte 10 - 18) vom Betrag her zu den ersten neun Umkehrpunkten nicht unterscheiden.

Umkehrpunkt Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Schermaß s	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	1,0	1,25	1,5

Tab. 1: Umkehrpunkte der Muhr-Scherversuche

Die Scherspannungen berechnen sich aus der gemessenen Kraft und der in Kapitel 6.2.2 bestimmten effektiven Querschnittsfläche der optimierten Probekörpergeometrie von $A_{eff} = 845,1 mm^2$. Zur Bestimmung des Schermaßes wird eine Höhe von $4mm$ veranschlagt. Der Verlauf der Komponente T_{xy} des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors in Abhängigkeit von der induzierten Verformung (Schermaß s) gemäß den Vorgaben der Muhr-Scherversuche ist für die beiden EPDM-Werkstoffe in Abbildung 7.5 dargestellt.

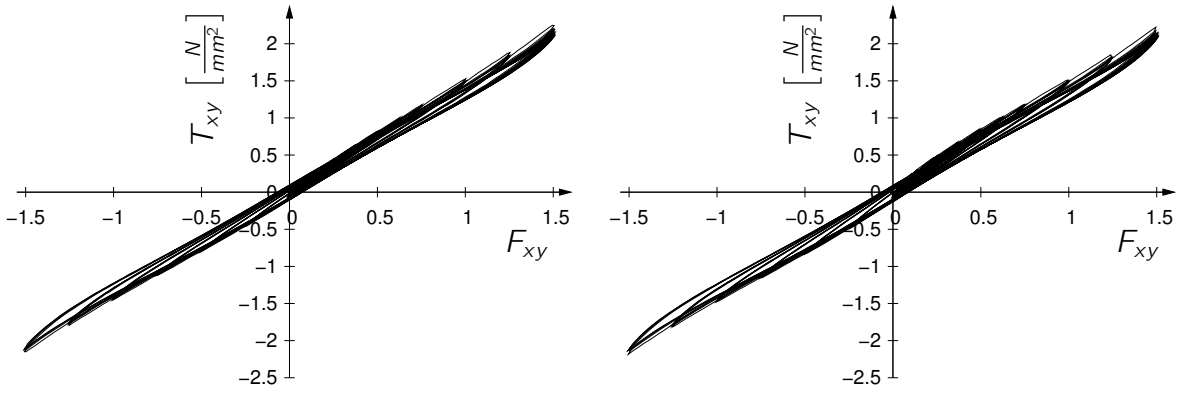
Die Spannungsverläufe weisen in den jeweiligen Zyklen eine für technische Gummiwerkstoffe verhältnismäßig geringe Nichtlinearität auf. Der Mullins-Effekt für EPDM-E2M ist etwas ausgeprägter. Mithilfe der mechanischen Charakterisierung nach Muhr zeigt sich außerdem, dass rußgefüllte Polymere ein belastungsinduziert anisotropes Materialverhalten



(a) EPDM-E1M (b) EPDM-E2M

Abb. 7.5: Muhr-Scherversuche an den Modellmischungen auf Basis von EPDM

aufweisen. Diese Eigenschaft kann anhand des Mullins-Effektes nachgewiesen werden, der sowohl in positiver als auch negativer Scherrichtung auftritt. Dieses Phänomen ist auch bei den beiden Naturkautschukmischungen erkennbar, deren Spannungsverläufe in Abbildung 7.6 dargestellt sind.



(a) NR-N1M (b) NR-N2M

Abb. 7.6: Muhr-Scherversuche an den Modellmischungen auf Basis von Naturkautschuk

7.4.2 Mechanische Charakterisierung unter einfacher Scherbelastung mit rotierenden Achsen

Der im Rahmen des Projektes entstandene Versuchsstand kann nicht nur für Untersuchungen der Lebensdauer unter einfacher Scherbelastung mit rotierenden Achsen verwendet werden, sondern eignet sich auch für die mechanische Charakterisierung technisch genutzter Elastomere. Nach vorgegebenen Zeitintervallen werden die Proben bis zum Erreichen einer vorgegebenen Last mit immer größer werdenden Scheramplituden beaufschlagt. Hierbei wird jedes Lastniveau für eine bestimmte Zeit gehalten, wobei die Zeit zum Erreichen eines neuen Belastungsniveaus im Vergleich dazu vernachlässigbar klein ist. Nach Errei-

chen des maximal vorgegebenen Belastungsniveaus werden die Probe wieder entlastet. Dabei werden erneut die gleichen Lasten angesteuert, die bei der Belastungsphase vorgegeben sind. Wie bei der schrittweisen Belastung werden auch bei der Entlastung die vorgegebenen Lasten an vorgegebenen Stützstellen für eine gewisse Zeit konstant gehalten. Während des gesamten Vorgangs werden die Verschiebung der Rotationsachse, die Scherkraft F_R sowie die aus der Energiedissipation resultierende Tangentialkraft F_T als Funktion der Zeit aufgezeichnet. Mit Hilfe der Scherkraft F_R und der Tangentialkraft F_T kann der Phasenwinkel nach Gleichung 5.45 in Abhängigkeit von der Scheramplitude bestimmt werden. Im Verlauf des Versuchs wird das Schermaß s pro Belastungsschritt um $0,25$ erhöht, bis zum Erreichen einer maximalen Auslenkung, die einem Schermaß von $1,75$ entspricht. Anschließend erfolgt die Entlastung mit einer Reduzierung des Schermaßes um $0,25$ pro Entlastungsschritt. Die vorgegebene Drehzahl des Versuchs beträgt $90\,min^{-1}$, was einer Frequenz von $1,5Hz$ entspricht. Mit Hilfe der Informationen über die Drehgeschwindigkeit können aus den zeitabhängigen Kraftsignalen Kraftsignale als Funktion der erduldeten Umdrehungen bestimmt werden. In den Abbildungen 7.7 und 7.8 werden für die Modellmischungen EPDM-E1M und EPDM-E2M die Verläufe der Kräfte F_R (schwarz) und F_T (grau) in Abhängigkeit von der Anzahl der Umdrehungen dargestellt.

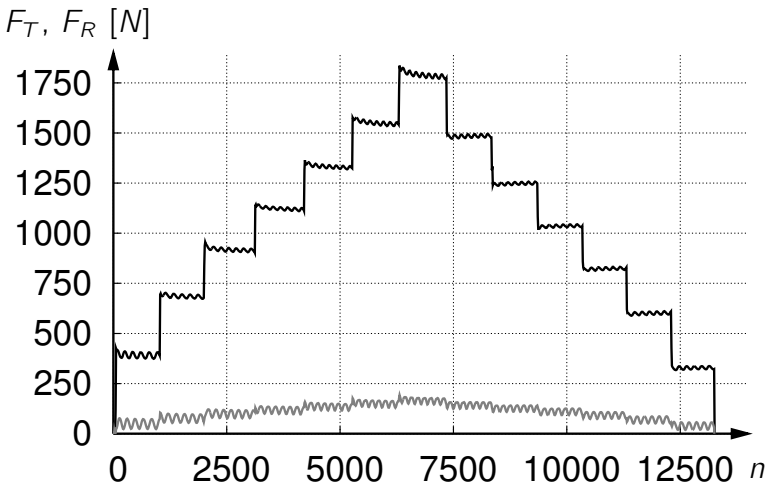


Abb. 7.7: Kraftverlauf von EPDM-E1M eines einfachen Scherversuchs mit rotierenden Achsen bei einer mechanischen Charakterisierung.

Bei den Kraftverläufen ist während der Phasen mit konstanter Belastung ein sinusförmiges Schwingungsverhalten erkennbar. Hierbei handelt es sich nicht um einen materialeigenen Effekt, sondern um eine Überlagerung der Frequenz der Datenerfassung mit der Rotationsfrequenz der Scherbelastung. Die Schwingung im Diagramm entspricht also einem Schwebungseffekt, aus dem auch die Rundlaufgenauigkeit der Proben erkennbar ist:

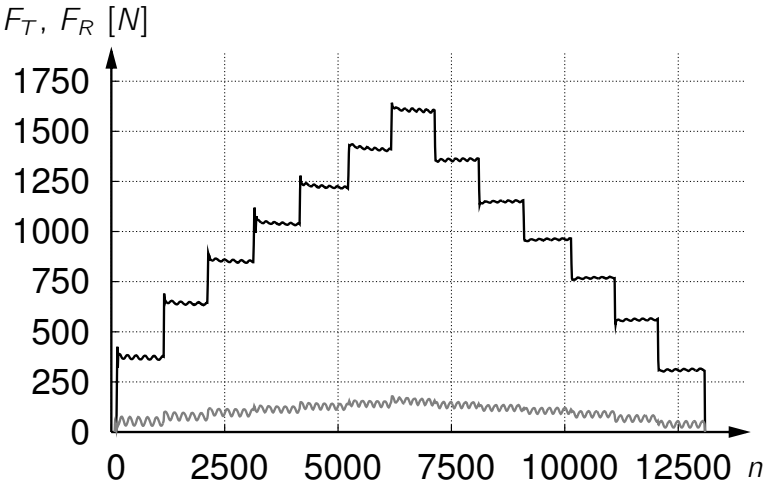


Abb. 7.8: Kraftverlauf von EPDM-E2M eines einfachen Scherversuchs mit rotierenden Achsen bei einer mechanischen Charakterisierung.

Die Amplitude der Schwingung entspricht dem betragsmäßigen Unterschied der Reaktionskräfte im Verlauf einer Umdrehung der Proben. Mit einer Veränderung der vorgegebenen Drehzahl des Versuchsstandes könnte die Ausprägung der Schwebungseffekte beeinflusst werden: je genauer Messfrequenz und Drehzahl übereinstimmen, desto größer wird die Periodendauer der Schwebung. Umgekehrt würde eine Differenz der beiden Frequenzen dazu führen, die Schwebungsperioden zu verkleinern. Außer optischen Aspekten gibt es jedoch keine nennenswerten Vorteile, die für eine Veränderung der Drehzahl bei der mechanischen Charakterisierung sprächen. Im Gegenteil, um eine Vergleichbarkeit von mechanischer Charakterisierung und der im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit abgehandelten Ermüdungsuntersuchungen bei gleichzeitig effizienten Versuchslaufzeiten zu gewährleisten, wird die Drehzahl von $90\,min^{-1}$ beibehalten. Darüber hinaus sind die Ursachen der Schwebung bekannt und können bei der Auswertung berücksichtigt werden. Zusätzlich ermöglichen die Schwebungseffekte eine einfache Glättung der Kurvenverläufe zum Beispiel bei dem aus den beiden Kräften berechneten Phasenwinkel. Hierzu können die Messwerte über genau eine Periodenlänge der Schwebungsperiode gemittelt werden. Aufgrund der Schwebung ist die zur Glättung erforderliche Periodenlänge einfach zu ermitteln und in einen Frequenzfilter nutzbar. Neben den durch das Messsystem hervorgerufenen Schwebungseffekten sind anhand der Kraftverläufe viele für technische Gummiwerkstoffe charakteristische Eigenschaften erkennbar.

Zu Beginn jeder Laststufe im Bereich ansteigender Lasten erreicht die Scherkraft F_R ein lokales Maximum, das im Verlauf weiterer Umdrehungen langsam abnimmt, bis die Scherkraft einen quasi-stationären Wert annimmt. Dieses Phänomen kann durch Relaxation des Materials bedingt sein, wobei dann im Verlauf der Entlastung ähnliche Effekte auf-

treten müssten. Neben einer Relaxation kann auch der so genannte Mullins-Effekt zu der Materialerweichung führen. Dieser Effekt ist bereits 1948 von Mullins [Mul48] aufgezeigt worden und repräsentiert die Entfestigung des Materials bei zyklischer Belastung. Auch die von der maximalen Vorreckung im Verlauf der Belastungsgeschichte des Materials abhängige Entfestigung ist zu erkennen. Hierzu werden die Kraftwerte F_R der ersten und der letzten Belastungsstufe miteinander verglichen. Die erste Belastungsstufe des Versuchs stellt die erste Belastung des Materials überhaupt dar. Die Reaktionskraft ist hier höher als die Reaktionskraft während der letzten Belastungsstufe, obwohl in beiden Fällen das gleiche Schermaß eingestellt wurde. Diese Abhängigkeit der Materialantwort von der Belastungsvorgeschichte wird als Mullins-Effekt bezeichnet und ist bereits bei den Muhr-Scherversuchen in Kapitel 7.4.1 aufgezeigt worden. Weitere Informationen zum Mullins-Effekt werden unter anderem von Heimes [Hei05] vorgestellt. Anhand des Verlaufes von F_T ist zu erkennen, dass mit einem Anstieg der Belastung auch der Betrag der dissipierten Energie ansteigt. Die daraus resultierenden Phasenwinkel werden im weiteren Verlauf der Arbeit diskutiert und sind in Abbildung 7.12 dargestellt.

Ebenso wie für die beiden EPDM-Werkstoffe wurden auch für die beiden Naturkautschukmischungen mechanische Charakterisierungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen durchgeführt. Die Verläufe der Reaktionskräfte sind in den Abbildungen 7.9 und 7.10 dargestellt.

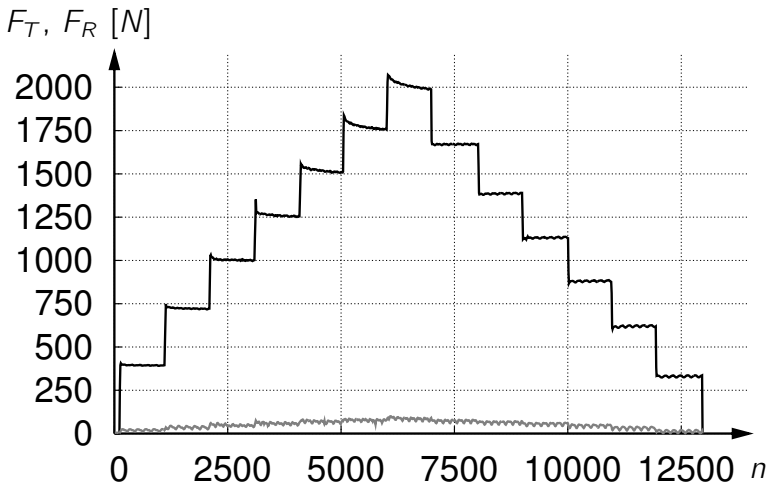


Abb. 7.9: Mechanische Charakterisierung von NR-N1M mit Hilfe eines einfachen Scherversuchs mit rotierenden Achsen.

Die Reaktionskräfte $F_{R,N1M}$ und $F_{R,N2M}$ in Scherrichtung sind bei beiden NR-Mischungen deutlich höher als die entsprechenden Kraftkomponenten bei den EPDM-Werkstoffen. Gleichzeitig sind die dissipativen Reaktionskräfte $F_{T,N1M}$ und $F_{T,N2M}$ betragsmäßig klei-

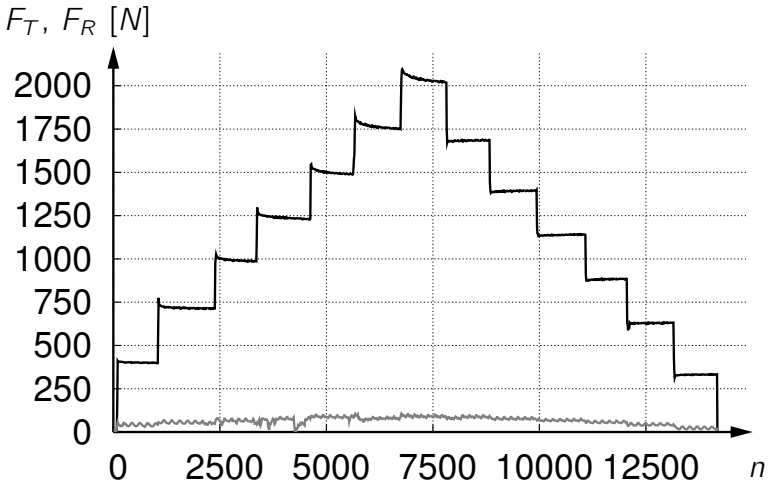


Abb. 7.10: Mechanische Charakterisierung von NR-N2M mit Hilfe eines einfachen Scherversuchs mit rotierenden Achsen.

ner, als $F_{T,E1M}$ und $F_{T,E2M}$. Daraus lässt sich schließen, dass die beiden EPDM-basierten Mischungen einen größeren Phasenwinkel aufweisen als die gefüllten Naturkautschuke. Diese Schlussfolgerung kann durch eine Abschätzung der Hystereseschleifen im Spannungs-Streckungs-Diagramm der Muhr-Scherversuche (vgl. Abbildungen 7.7 und 7.9) bestätigt werden. Für beide Naturkautschuke ist das Verhältnis zwischen Be- und Entlastung kleiner, als bei EPDM-E1M und EPDM-E2M.

Der Schubmodul beschreibt die Änderung der Spannung für kleine Verzerrungen um die Nulllage. Die erste Belastungsstufe bei der mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen ist zwar nicht sehr nah am unbelasteten Zustand, dennoch soll überprüft werden, wie gut sich der Schermodul der Werkstoffe in diesem Arbeitspunkt abbilden lässt. Anhand des Betrags der Schubkraft auf der ersten Belastungsstufe und der in Kapitel 6.2 bestimmten, repräsentativen Querschnittsfläche kann die Scherspannung berechnet werden. Die Quotienten aus der Schubspannung und dem zugehörigen Schermaß sollen für alle Belastungsschritte als Abschätzung für den jeweiligen, amplitudenabhängigen Schubmodul herangezogen werden. Es ist zu beachten, dass nicht die gesamte Reaktionskraft der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen verwendet wird, sondern nur der Anteil in Richtung der einfachen Scherung, um die resultierenden Moduln sinnvoll mit den Ergebnissen aus den Untersuchungen unter einfacher Scherbelastung vergleichen zu können.

$$G = \frac{T_{xy_{1.Stufe}}}{s} \tag{7.1}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die aus der mechanischen Charakterisierung gewonnenen

Schubmoduln den Schubmoduln gegenübergestellt, die anhand der Muhr-Scherversuche ermittelt wurden. Für die Ermittlung der Moduln sind unterschiedliche Scheramplituden herangezogen worden. Hierbei wird die jeweils kleinstmögliche Scheramplitude mit einem Referenzwert bei $s = 1,25$ verglichen. Bei den Muhr-Scherversuchen entspricht die kleinste Scheramplitude einem Schermaß von $s = 0,12$. Bei der mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen entspricht die kleinste Verformung einem Schermaß von $s = 0,25$.

Schubmodul	Schermaß	EPDM-E1M	EPDM-E2M	NR-N1M	NR-N2M
G_{Muhr}	0,12	1,602MPa	2,236MPa	1,925MPa	2,188MPa
G_{Ruehr}	0,25	1,853MPa	1,776MPa	1,872MPa	1,900MPa
G_{Muhr}	1,25	1,137MPa	1,088MPa	1,368MPa	1,346MPa
G_{Ruehr}	1,25	1,264MPa	1,156MPa	1,4328MPa	1,4128MPa

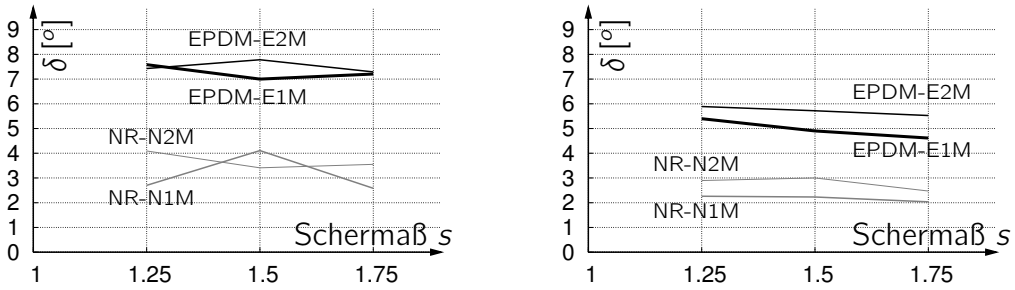
Tab. 2: Gegenüberstellung der aus den Muhr-Scherversuchen resultierenden Schermoduln und der Schermoduln, die aus der mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen gewonnen wurden.

Hier zeigt sich der Einfluss des Payne-Effektes (siehe Fletcher [Fle53] und Payne [Pay62]), denn die Schermoduln, die auf kleinen Scheramplituden basieren, sind mit Ausnahme der Werte für die Mischung EPDM-E1M stets größer, als die Moduln bei größeren Scheramplituden.

Die Untersuchung des Dämpfungsverhaltens erfolgt anhand des Phasenwinkels δ. Neben der mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen und einer klassischen RDA (Rheometric Dynamic Analysis) werden auch Messdaten der Lebensdauerversuche unter einseitiger und beidseitiger einfacher Scherung und Ermüdungsuntersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen berücksichtigt. Die Ergebnisse der Untersuchungen der Lebensdauer selbst werden in Kapitel 8 vorgestellt.

Für die Bestimmung des Phasenwinkels anhand von Lebensdauermessungen muss berücksichtigt werden, dass der Ermüdungszustand des Materials aufgrund der Ausbildung von kleinen, aufeinander reibenden Rissen einen Einfluss auf das Dämpfungsverhalten hat. Mit fortdauernder Ermüdung bilden sich Risse mikroskopischer Größenordnung, die aufgrund von Reibungseffekten einen Beitrag zur Dissipation liefern und somit die eigentliche Materialeigenschaft verfälschen. Es ist daher sinnvoll, den Phasenwinkel zu einem Zeitpunkt zu bestimmen, der möglichst zu Beginn der Ermüdungsuntersuchung liegt. Gleichzeitig soll jedoch vermieden werden, dass zum Beispiel der Mullins-Effekt oder ein thermisches Ungleichgewicht das Messergebnis verfälschen. Zusätzlich zu dem Bestreben, den Phasenwinkel zu einem möglichst frühen Zeitpunkt zu bestimmen muss daher außerdem gewährleistet

werden, dass das System einen quasistationären Zustand erreicht hat und sich die relevanten Größen nicht mehr stark ändern. Zur Erfüllung der beiden Bedingungen werden die Phasenwinkel für die nachfolgenden Untersuchungen nach 2000 erduldeten Schwingspielen bzw. Umdrehungen bestimmt.



(a) δ für einseitige Scherung

(b) δ für beidseitige Scherung

Abb. 7.11: Phasenwinkel δ in Abhängigkeit des Schermaßes für alle vier Modellwerkstoffe, basierend auf Untersuchungen unter einseitiger einfacher Scherung (a) und beidseitiger einfacher Scherung (b).

Abbildungen 7.11 (a) und (b) zeigen den Phasenwinkel für die vier Modellmischungen EPDM-E1M, EPDM-E2M, NR-N1M und NR-N2M in Abhängigkeit des Schermaßes s für Scheramplituden von $1,25$, $1,5$ und $1,75$. Die Ergebnisse auf Basis von Lebensdaueruntersuchungen unter einseitiger einfacher Scherung erlauben eine Abschätzung der Größenordnung des Phasenwinkels. Der Phasenwinkel der EPDM-Mischungen liegt mit 7^o bis 8^o deutlich über den Werten der NR-Werkstoffe ($\approx 3^o$ bis 4^o). Eine Abhängigkeit von δ zum Beispiel vom Schermaß ist jedoch nicht zu erkennen. Es wird vermutet, dass die Schwankungen im Verlauf der Graphen auf Ungenauigkeiten im Versuch zurückzuführen sind. Im Vergleich dazu erlauben die Werte der Phasenwinkel, basierend auf Daten der Ermüdungsexperimente unter beidseitiger einfacher Scherung (Abb. 7.11 (b)), eine genauere Unterteilung der vier Werkstoffe zueinander. Es zeigt sich, dass EPDM-E2M für alle Amplituden den größten Phasenwinkel aufweist und NR-N1M den kleinsten. Darüber hinaus zeigen die Verläufe der Kurven eine deutliche Abhängigkeit des Phasenwinkels vom Schermaß. Mit steigender Scheramplitude nimmt der Phasenwinkel für alle vier Modellmischungen ab. Dies steht in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Lion [Lio06].

Zusätzlich zu den Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherbelastungen kann der Phasenwinkel auch mit Hilfe von einfacher Scherung mit rotierenden Achsen bestimmt werden. Zu diesem Zweck werden einerseits die Ergebnisse der Lebensdauerexperimente und andererseits die Daten der mechanische Charakterisierung technischer Gummiwerkstoffe unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen (siehe Abbildungen 7.7 und 7.9) herangezogen. Abbildung 7.12 (a) zeigt den Phasenwinkel in Abhängigkeit der Scheramplitude,

basierend auf Lebensdaueruntersuchungen, 7.12 (b) für die mechanische Charakterisierung mit Hilfe des im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Versuchsstandes.

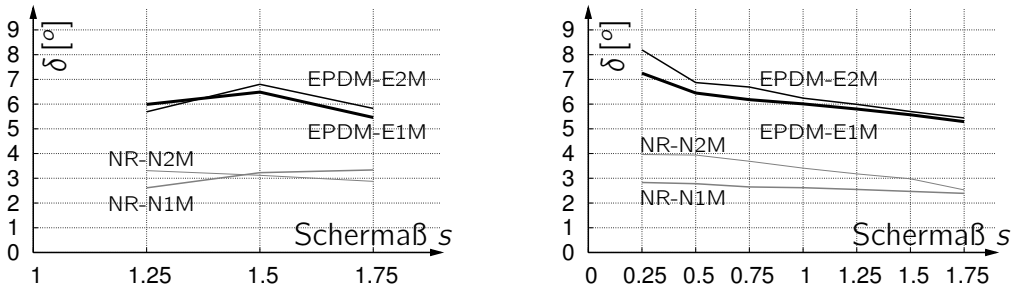


Abb. 7.12: Phasenwinkel δ in Abhängigkeit des Schermaßes für alle vier Modellwerkstoffe, basierend auf Versuchen zur Untersuchung des Lebensdauerverhaltens (a) und mechanische Charakterisierungen (b), jeweils unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen.

Die Ergebnisse, basierend auf den Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen, weisen einen ähnlich unplausiblen Verlauf auf, wie die Phasenwinkelverläufe in 7.11 (a). Die Ergebnisse auf Grundlage der mechanischen Charakterisierung zeigen eine ausgeprägte Amplitudenabhängigkeit. Generell beschreiben die Versuchsergebnisse der mechanischen Charakterisierung die Modellwerkstoffe so, wie es zum Beispiel Pahl [Pah95] vermuten lässt. Dieser Umstand liegt vor allem an der Tatsache, dass die mechanische Charakterisierung pro Werkstoff nur einen Probensatz verwendet. Im Gegensatz dazu wird bei Lebensdaueruntersuchungen ein Probensatz pro Amplitude benötigt. Aufgrund dessen fallen bei der mechanischen Charakterisierung Unterschiede, die auf den Fertigungsprozess zurückzuführen sind, weg. Die Phasenwinkel aller vier Modellwerkstoffe nehmen mit größer werdender Scheramplitude ab. Gleichzeitig nähern sich die Phasenwinkel sowohl der EPDM-Mischungen, als auch der Naturkautschuke jeweils einander an. Der Verlauf der Kurven lässt außerdem vermuten, dass δ für kleine Amplituden in ein Dämpfungsmaximum läuft.

Der Phasenwinkel der vier Modellwerkstoffe ist darüber hinaus mit Hilfe einer RDA-Anlage bestimmt worden. Bei RDA-Untersuchungen wird eine Streifenprobe in eine Probenaufnahme eingespannt. Im Verlauf des Versuchs wird die Probe mit konstanter Amplitude zyklisch tordiert. Die Frequenz, mit der die Probe tordiert wird, verändert sich während des Versuchs und verläuft von $f\,(t=0) = 1\frac{rad}{sek}$ bis $f\,(t=t_{MAX}) = 100\frac{rad}{sek}$. G', G'' sowie der resultierende Phasenwinkel δ werden anhand des Reaktionsmoments der Probe in Abhängigkeit der Frequenz bestimmt. Abbildung 7.13 zeigt der Verlauf des Phasenwinkels der vier Modellmischungen in Abhängigkeit der Frequenz.

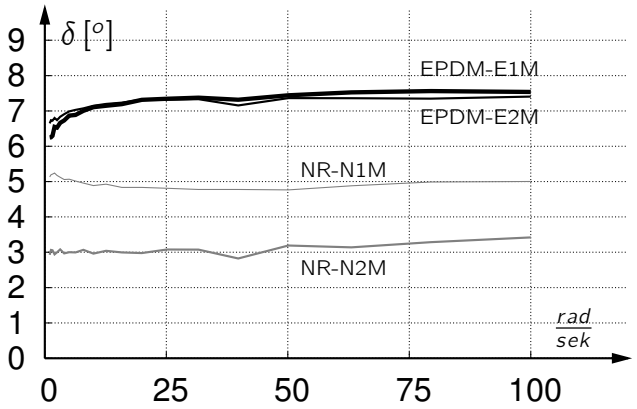


Abb. 7.13: Frequenzabhängiger Verlauf des Phasenwinkels für die vier Modellmischungen.

Die Ergebnisse der RDA-Untersuchungen werden mit den Verläufen der Phasenwinkel verglichen, die mit Hilfe der mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen gewonnen wurden. Die Versuchsrandbedingungen sind im Falle der mechanischen Charakterisierung sehr günstig, da die Ergebnisse nur gering von den Versuchsrandbedingungen beeinflusst werden und somit eine gute Beschreibung des Materialverhaltens vorliegt. Im direkten Vergleich der beiden Messmethoden zeigt sich, dass in beiden Fällen sowohl die Größenordnung der Phasenwinkel, als auch die Reihenfolge der Werkstoffe in Bezug auf die Größe des Phasenwinkels übereinstimmen, wobei im Falle der RDA-Messung eine Trennung der Verläufe der beiden EPDM-Mischungen im Rahmen der Messungenauigkeit nur bedingt möglich ist. Quantitativ unterscheiden sich die Ergebnisse, dies kann jedoch mit den jeweiligen Versuchsvorgaben erklärt werden. So werden zum Beispiel die RDA-Prüfkörper mit einer maximalen Dehnung von etwa 1% beaufschlagt, wohingegen die kleinste Scheramplitude bei der mechanischen Charakterisierung $0,25$ beträgt. Dies entspricht einer Dehnung von etwa $13,3\%$. Die quantitativen Unterschiede lassen sich folglich durch eine amplitudenabhängige Dämpfung erklären. Diese Aussage wird durch die Verläufe der Phasenwinkel in 7.12 (b) und die Vermutung eines Dämpfungsmaximums gestützt. Darüber hinaus sind Unterschiede durch die verschiedenen Deformationsprozesse gegeben. Die für die Untersuchungen des Phasenwinkels notwendigen Deformationen werden sowohl für Lebensdaueruntersuchungen unter einseitiger und beidseitiger einfacher Scherung als auch für RDA-Untersuchungen über eine Amplitudenmodulation initiiert. Der resultierende Phasenwinkel ist dementsprechend eine Mischung aus verschiedenen, amplitudenabhängigen Phasenwinkeln von null bis zur Maximalamplitude. Im Falle der RDA-Untersuchungen ist die maximale Amplitude mit 1% sehr klein. Bei den Lebensdauerexperimenten wird sie jedoch verhältnismäßig groß ($\approx 386\%$). Bei der mechanischen Charakterisierung und den Lebensdaueruntersuchungen, jeweils unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen, ist dieser Umstand nicht gegeben. In diesem Falle ist es

möglich, den tatsächlichen, rein für die initiierte Scheramplitude wirksamen Phasenwinkel zu bestimmen. Dies erklärt auch, warum die Phasenwinkel bei den Untersuchungen der Lebensdauer unter einseitiger und beidseitiger einfacher Scherung bei gleichem Schermaß größer sind, als die vergleichbaren Werte unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen.

Zusammenfassend ist eine einfache Scherung mit rotierenden Achsen sehr gut für eine mechanische Charakterisierung technischer Gummiwerkstoffe geeignet. Der im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Versuchsstand bildet viele typische und wichtige Eigenschaften rußgefüllter Elastomere ab und ist besonders für die Beschreibung des Dämpfungsverhaltens sehr gut geeignet; obwohl die eigentliche Funktion der Anlage die Beschreibung des Ermüdungsverhaltens von Elastomeren ist und die Konstruktion somit deutlich robuster ausfällt, als für eine mechanische Charakterisierung erforderlich ist.

7.5 Untersuchungen des thermischen Verhaltens

Im Verlauf einer Umdrehung einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen wird in Abhängigkeit der Scheramplitude Energie dissipiert. Dieser Anteil der Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt, die zu einer Erhöhung der Temperatur der Probekörper führt (siehe hierzu auch 6.3.5). Die Eigenschaften elastomerer Werkstoffe sind hochgradig temperaturabhängig. Um den Temperaturanstieg abschätzen zu können, wird im Verlauf der mechanischen Charakterisierung neben den auftretenden Kräften zusätzlich die Außentemperatur der Probekörper mit Hilfe einer Wärmebildkamera erfasst. Abbildung 7.14 zeigt die Temperaturverteilung einer Probe auf deren Mantelfläche. Die Aufnahmen wurden mit einer Wärmebildkamera vom Typ VarioTHERM der Firma InfraTec GmbH erstellt.

Mit Hilfe von thermographischen Untersuchungen lassen sich ohne größeren Aufwand Oberflächentemperaturen messen. Die Anbindung der Probekörper an die Probenbasen erfolgt über die verhältnismäßig große Stirnfläche der Probekörpergeometrie. Die metallischen Probenbasen sind ein sehr guter Wärmeleiter, so dass ein entsprechend großer Teil der im Verlauf der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen freigesetzten Wärmeenergie über die Probenbasen an den Versuchsstand abgeführt werden kann. Dementsprechend ist die im Probekörper vorherrschende Temperatur verhältnismäßig niedrig, so dass eventuell auftretende Alterungseffekte bei den Lebensdaueruntersuchungen möglichst gering gehalten werden. Die Temperaturen innerhalb des Probekörpers unterscheiden sich aufgrund der nahezu homogenen Deformation nicht stark voneinander, obgleich die Temperatur auf der Mantelfläche mit hoher Wahrscheinlichkeit niedriger ausfällt als die Temperatur im Inneren der Proben. Dennoch ermöglicht sie eine Aussage über das Temperaturverhalten von technischen Gummiwerkstoffen bei einfacher Scherung mit rotierenden Achsen, insbesondere im Vergleich der vier Modellmischungen zueinander. Die nachstehende Abbildung zeigt den Verlauf der maximal gemessenen Außentemperatur bei Versuchen zur

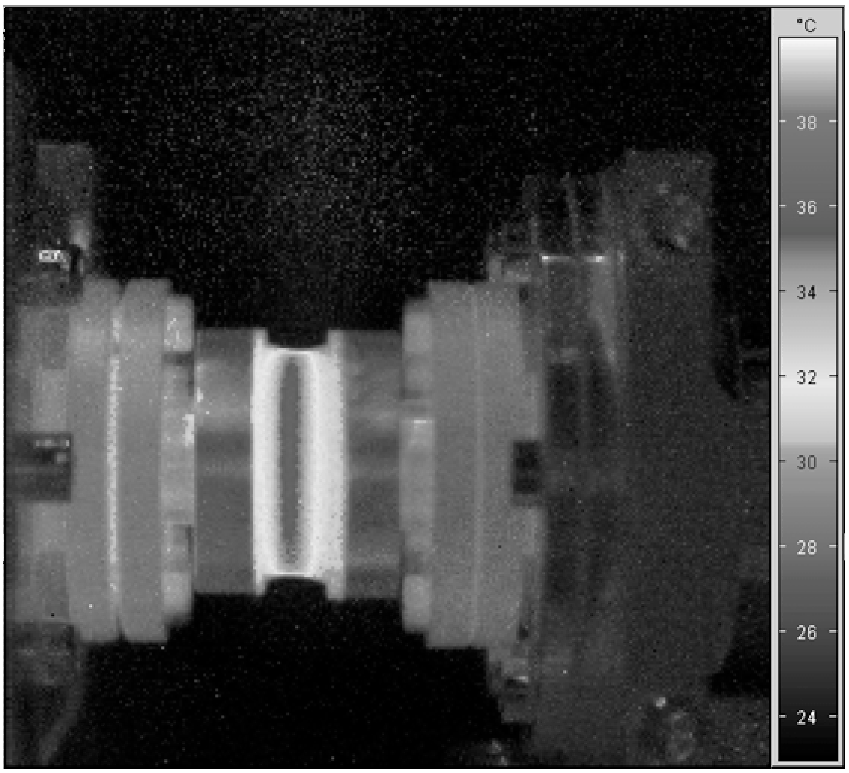
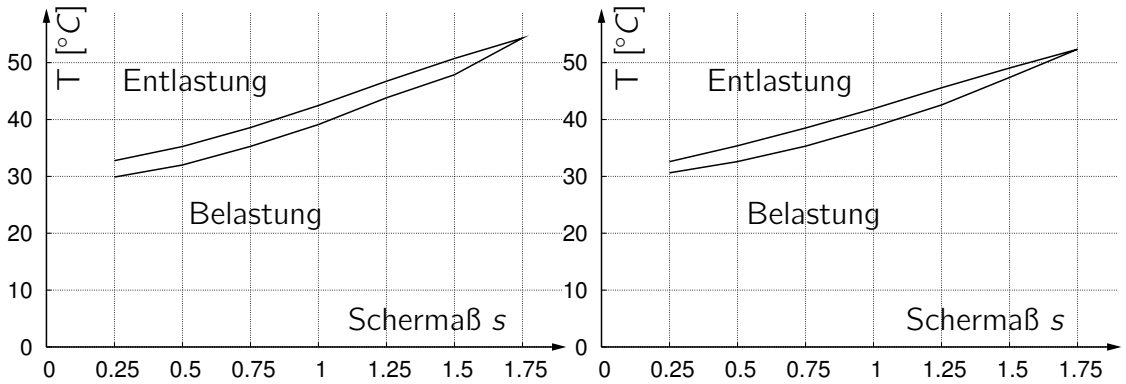


Abb. 7.14: Temperaturverteilung einer Probe unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen im Falschfarbenbild

mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für die beiden EPDM-Mischungen. Die Messung der Temperatur erfolgt sowohl für die EPDM-Werkstoffe als auch für die Naturkautschukmischungen jeweils kurz vor dem Erreichen der nächsthöheren Laststufe, um zu gewährleisten, dass die Probekörper einen thermisch möglichst stationären Zustand erreicht haben. Die Messung der Temperatur erfolgt auf der Mantelfläche in Höhe der Symmetrieebene. Hier stellen sich bei einfachen Scherversuchen mit rotierenden Achsen die höchsten Temperaturen ein.

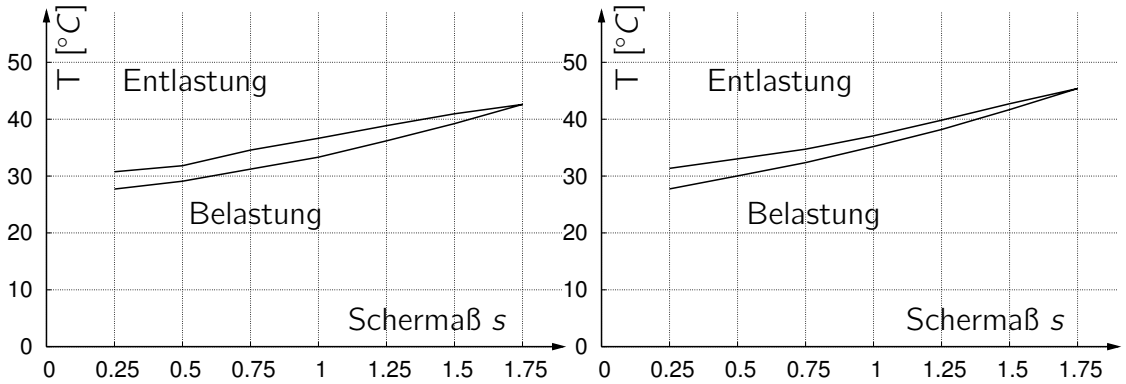
Die Temperaturverläufe in Abbildung 7.15 beschreiben die Temperatur in Abhängigkeit der im Probekörper initiierten einfachen Scherung während der gesamten mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen. Zur Verdeutlichung sind Be- und Entlastungszweig beim Verlauf der mechanischen Charakterisierung in der Abbildung gekennzeichnet. Während der Messung wird die Belastung jeweils bis zum stationären Zustand, sowohl hinsichtlich der Steifigkeit, als auch hinsichtlich der Temperatur, konstant gehalten. Dennoch ist die Temperatur im Verlauf des Entlastungspfades höher, als beim Belastungspfad. Dies gilt sowohl für die in Abbildung 7.15 dargestellten Kurven, als auch für die Temperaturverläufe für die Naturkautschukmischungen, dargestellt in Abbildung 7.16. Die Ursache für die unterschiedlichen Temperaturen währen Be- und Entlastungen liegt in der Abführung der Wärme im Verlauf des Experiments. Zu Beginn des Versuchs sind sowohl die Probekörper als auch der Versuchsstand kalt. Die während des Versuchs



(a) EPDM-E1M (b) EPDM-E2M

Abb. 7.15: Temperaturverlauf der Proben bei einer mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für EPDM-E1M (a) und EPDM-E2M (b).

dissipierte Energie wird zu Anfang also aufgrund des günstigeren Temperaturgradienten besser abgeführt.



(a) EPDM-E1M (b) EPDM-E2M

Abb. 7.16: Temperaturverlauf der Proben bei einer mechanischen Charakterisierung unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für NR-N1M (a) und NR-N2M (b).

Mit Beginn der Entlastungsphase ist die Temperatur der umgebenden Metallteile bereits angestiegen, die Wärmeabfuhr aus den Probekörpern funktioniert nicht mehr genauso gut wie zu Beginn des Versuchs. Die Folge ist, dass die Temperatur für jede Laststufe bei der Entlastung höher ist, als bei der äquivalenten Laststufe währen der Belastung. Aufgrund des verhältnismäßig großen Materialvolumens des Versuchsstandes im Vergleich zur Probekörpergeometrie ist das Erreichen eines thermisch stationären Zustands während einer mechanischen Charakterisierung nicht möglich. Es besteht zwar die Möglichkeit, die Dauer der Belastungsstufen zu erhöhen, gleichzeitig besteht hierbei jedoch die Gefahr, dass die Ergebnisse der mechanischen Charakterisierung bei zu langen Haltezeiten durch

Ermüdungseffekte beeinflusst werden. Gerade bei den EPDM-basierten Werkstoffen, die im Vergleich zu den Naturkautschuken schlechtere Lebensdauereigenschaften aufweisen (siehe Kapitel 8) ist diesbezüglich ein Einfluss zu befürchten.

Zusammenfassend lässt sich aussagen, dass bei der mechanischen Charakterisierung zwar ein Temperaturanstieg erkennbar ist, die Temperaturen während der Messungen jedoch für die beiden EPDM-Werkstoffe mit $55°C$ und für die beiden Naturkautschuke mit $42°C$ nicht kritisch sind.

8 Untersuchung des Lebensdauerverhaltens

Die Abschätzung der Lebensdauer eines Bauteils basiert oft auf experimentellen Untersuchungen an einfachen Probekörpern. Diese Untersuchungen werden in der Regel unter uniaxialer Zugbelastung sowie in seltenen Fällen unter einfacher Scherung durchgeführt. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse von Ermüdungsuntersuchungen an den Modellwerkstoffen unter Zug- und einfacher Scherbelastung vorgestellt und mit den Ergebnissen von Untersuchungen unter einfacher Scherbelastung mit rotierenden Achsen verglichen.

Für die Charakterisierung der Modellwerkstoffe sind hinsichtlich der lebensdauerrelevanten Eigenschaften servohydraulische Versuchsanlagen vom der Firma MTS (MTS 831.50) sowie der in Kapitel 6 vorgestellte und eigens für diesen Zweck entwickelte Versuchsstand zur Realisierung einer einfachen Scherdeformationen mit rotierenden Achsen verwendet worden. Für die Bestimmung der Lebensdauer ist das Vorgehen für alle drei Deformationsarten ähnlich: ein geeigneter Probekörper wird in die Versuchsanlage eingespannt und zyklisch bis zum Versagen belastet. Der Begriff *Versagen* bedeutet in diesem Zusammenhang nicht immer zwangsläufig, dass das Material sichtbar geschädigt ist. So verformt sich der für die Untersuchungen unter einfacher Scherung verwendete Probekörper nahezu homogen. Dementsprechend bilden sich Risse nicht immer auf der Mantelfläche aus und setzen sich nach innen fort. Mit der Optimierung der Probekörpergeometrie wurde erreicht, dass die Bildung von Risskeimen und den daraus resultierenden makroskopischen Rissen über einen großen Bereich des gesamten Probekörpervolumens stattfindet. Die Entstehung eines Risses genau auf der Mantelfläche ist demzufolge eher unwahrscheinlich. Somit ist es möglich, dass Probekörper von Rissen durchzogen sind, ohne dass diese auf der Oberfläche erkennbar sind. Für die Untersuchung des Lebensdauerverhaltens findet deshalb ein eigenes, an diese speziellen Anforderungen angepasstes Ausfallkriterium Anwendung.

8.1 Lebensdauerverhalten unter uniaxialem Zug

8.1.1 Verwendete Probekörper

Zur Erstellung von Spannungs-Streckungs-Verläufen unter uniaxialer zyklischer Zugbelastung stehen zwei unterschiedliche Probekörpergeometrien zur Verfügung:

- Hantelprüfkörper und
- S2-Zugstäbe.

S2-Zugstab: Der S2-Zugstab nach DIN 53504 ist ein flacher Probekörper, der aus einer $2mm$ dicken Gummiplatte ausgestanzt wird. Die äußeren Bereiche dienen der Einspannung

des S2-Zugstabes in eine Versuchsanlage. Diese Bereiche münden in einen verhältnismäßig dünnen Bereich im mittleren Teil des Probekörpers. Dieser Bereich verformt sich unter Last nahezu homogen und stellt den für die Zugprüfung relevanten Teil des Probekörpers dar. Abweichungen von einer homogenen Verformung aufgrund der Einflüsse der breiteren Klemmbereiche sind im Messbereich sehr klein und können daher vernachlässigt werden. Die im Prüfkörper auftretende Dehnung wird über zwei Markierungen auf dem für die Zugprüfung relevanten Teil, dem Messbereich, erfasst. Es ist darauf zu achten, dass die Markierungen ausreichend weit von den Klemmbereichen entfernt sind, um deren Einfluss auf die Messung so gering wie möglich zu halten. Abbildung 8.1 zeigt die Abmessungen eines S2-Zugstabes.

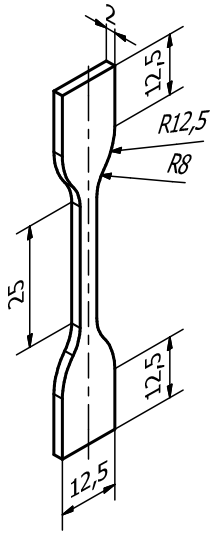


Abb. 8.1: S2-Zugstab nach DIN 53504

Der S2-Zugstab bildet das Materialverhalten gefüllter Elastomere unter Zugbelastung sehr gut ab und erscheint somit für die Charakterisierung des Lebensdauerverhaltens geeignet. Bei zyklischer Belastung gleitet der Prüfkörper jedoch nach einiger Zeit aus der Einspannungsvorrichtung des Versuchsstandes. Der S2-Zugstab ist somit nicht für dynamische Lebensdaueruntersuchungen geeignet. Darüber hinaus können auf den Zugstab keine Drucklasten aufgebracht werden. Von einer Verwendung von S2-Zugstäben für die Charakterisierung der Lebensdauer im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird daher abgesehen.

Hantelprüfkörper: Hantelprüfkörper sind rotationssymmetrisch und können geometrisch in drei Bereiche unterteilt werden. Die beiden äußeren Bereiche bestehen aus einem flachen Zylinder, der jeweils über einen Radius verjüngt wird und in den mittleren Teil übergeht. Der mittlere Teil besteht aus einem relativ langen Zylinder, der sich unter Zug nahezu homogen verformt und somit den für den Zugversuch relevanten Bereich darstellt. Die äußeren Bereiche dienen der Montage des Prüfkörpers in eine Versuchsanlage. Mit diesen Bereichen wird der Hantelprüfkörper formschlüssig in eine eigens dafür konstruierte Einspannvorrichtung eingebaut. Abbildung 8.2 zeigt die Abmessungen des Probekörpers.

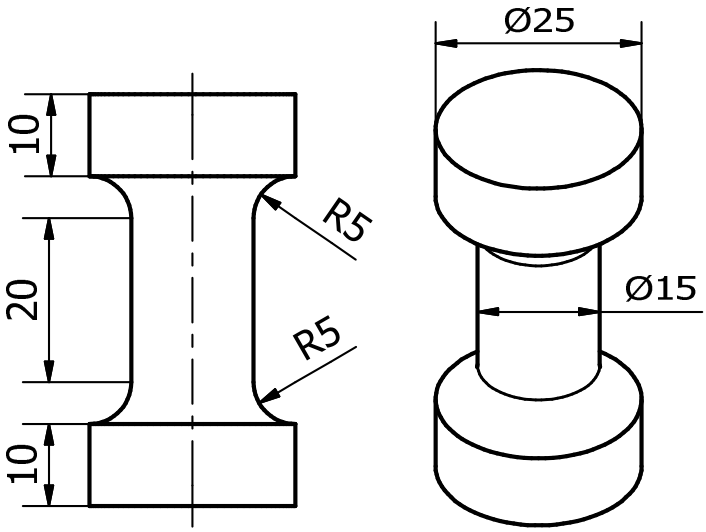


Abb. 8.2: Abmessungen des am Deutschen Institut für Kautschuktechnologie e. V. verwendeten Hantelprüfkörpers

Aufgrund der formschlüssigen Einspannung eignen sich Hanteln sehr gut für dynamische Versuche. Dies umfasst neben Ermüdungsuntersuchungen die mechanische Charakterisierung des Materials, mit deren Hilfe Speicher- und Verlustmodul und somit der Phasenwinkel in Abhängigkeit von der Amplitude und der Belastungsfrequenz bestimmt werden können. Außerdem eignen sich Hanteln zur Beschreibung des Ermüdungsverhaltens unter zyklischen Lasten. Aufgrund der Einspannung besteht bei diesen Prüfkörpern die Möglichkeit, nicht nur eine Zugbelastung aufzubringen, sondern auch den Druckbereich zu untersuchen. Hierbei ist jedoch darauf zu achten, dass das Material aufgrund der Aufweitung des mittleren Bereiches des Probekörpers nicht durch die Einspannvorrichtung behindert oder gar beschädigt wird. Aus diesem Grund lassen sich nur kleine Druckverformungen sinnvoll mit der Hantel bewerten. Für die Lebensdaueruntersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde der Druckbereich nicht berücksichtigt, da die Proben bei solchen Belastungen vermehrt in der Nähe der Einspannung versagten. Dieser Umstand weist auf die Einspannungsvorrichtung als Schadensursache hin. Eine Aussage über das Ermüdungsverhalten bei Druckbelastung ist somit nur eingeschränkt möglich.

8.1.2 Versuchsbeschreibung und Ausfallkriterium bei Untersuchungen des Lebensdauerverhaltens unter uniaxialem Zug

Für die eigentliche Untersuchung des Lebensdauerverhaltens werden Hantelprüfkörper zyklisch bis zu ihrem Versagen belastet. Die Zugdeformation wird durch eine Verschiebung der Einspannvorrichtungen an den beiden Enden des Probekörpers induziert. Hierbei sei anzumerken, dass der Hantelprobekörper keine vollständig homogene Zugverformung ausbildet. Eine direkte Bestimmung der Dehnung anhand des Verhältnisses der Längenänderung und der Ausgangslänge ist somit fehlerbehaftet. Für die Untersuchungen soll die Verformung des Probekörpers jedoch als homogen angenommen werden. Die Steuerung der Verschiebung erfolgt in Fall der uniaxialen Zugversuche kraftgeregelt. Hierzu schwingt die Kraft

mit einer vorgegebenen Amplitude um einen Kraftmittelwert. In der nachfolgenden Tabelle sind die untersuchten Kombinationen aus Mittelwert und Amplitude zusammengefasst.

Lastvorgaben zur Untersuchung der Lebensdauer unter uniaxialer Zugbelastung

Mittellast [N]	Amplitude [N]
80	80
100	100
150	150
250	250

Für alle Lastvorgaben ist die Kraftamplitude genauso groß wie die Mittellast. Aus diesem Grund wird das R-Verhältnis, der Quotient aus minimaler Spannung und maximaler Spannung im Verlauf eines Lastzyklus für alle untersuchten Fälle zu null. Nach Cadwell [Cad40] und Abraham [Abr01] und [Abr02] ist diese Art zyklischer Belastung der für die Lebensdauer ungünstigste Fall. Die Versuchslaufzeiten sind somit relativ kurz. Gleichzeitig bleiben jedoch die Ergebnisse vergleichbar, da für alle Untersuchungen unter uniaxialer Zugbelastung ein R-Verhältnis von null vorgegeben wurde.

Für eine sinnvolle Auswertung der Versuche ist es erforderlich, den Ausfall des Probekörpers zeitlich möglichst genau einzugrenzen. Das Versagen des Probekörpers vollzieht sich jedoch über einen gewissen Zeitraum, so dass die Ermittlung eines exakten Ausfallzeitpunktes nicht möglich ist. Zur Beurteilung des Lebensdauerverhaltens und für die Entwicklung einer Schädigungshypothese ist es dennoch einfacher, von einem theoretischen Ausfallzeitpunkt t_V des Probekörpers auszugehen. Zu diesem Zweck muss ein geeignetes Kriterium definiert und festgelegt werden, bei dessen Erfüllung ein Prüfkörper als zerstört gilt. Unabhängig davon, in welcher Art das Versagen des Probekörpers sich darstellt, gibt es drei Möglichkeiten, den Versagenszeitpunkt zu positionieren:

- Zu Beginn des Versagenszeitraumes,
- am Ende des Versagenszeitraumes und
- zu einem Zeitpunkt während des Versagensprozesses.

Den theoretischen Versagenszeitpunkt zu Beginn des Versagenszeitraumes zu legen ist nicht sinnvoll. Der im Material induzierte Schaden ist in diesem Zeitraum noch sehr gering und die Kriterien zur Festlegung von t_V sind schwer erfassbar. Es ist theoretisch möglich und wahrscheinlich, dass vom ersten Belastungszyklus an der Ermüdungszeitraum beginnt. Dementsprechend ginge der theoretische Versagenszeitpunkt stets mit dem ersten Belastungszyklus einher. Eine Vergleichbarkeit unterschiedlicher Belastungsarten ist in diesem

Fall nicht gegeben, eine Variation der Lastamplitude führt zu keinem Erkenntnisgewinn. t_V an den Beginn des Versagenszeitraumes zu legen ist daher nicht sinnvoll. Mit t_V am Ende des Versagenszeitraumes würde der Zeitpunkt beschrieben werden, bei dem die Probe vollständig versagt und ein Riss durch das Material den Kraftfluss unterbricht. Dieses Vorgehen erscheint für die Untersuchung uniaxialer Zugbelastungen sinnvoll, da t_V nach dieser Methode eindeutig mit Hilfe des Kraftsignals bestimmbar ist. Die Bestimmung des Ausfallzeitpunktes soll aber zu Vergleichszwecken nicht nur für uniaxiale Zugbelastungen gelten, sondern auch einen Vergleich zu einfachen Scherbelastungen ermöglichen. Beim Versagen einer Probe unter einfacher Scherung führt ein Riss durch die Probenquerschnittsfläche nicht zu einer vollständigen Unterbrechung des Kraftflusses, da durch das gegenseitige Reiben der beiden Rissflächen Kräfte übertragen werden können. Der Kraftfluss wäre erst dann vollständig unterbrochen, wenn durch Abriebeffekte ausreichend Material von den Kontaktflächen abgetragen wurde. Die Messung umfasst in diesem Fall Ermüdung, Risswachstum und Abrieb, wohingegen bei uniaxialen Zugversuchen nur Ermüdung und Risswachstum berücksichtigt werden. Eine Definition von t_V als Zeitpunkt des vollständigen Versagens der Probe ist daher ebenfalls nicht sinnvoll. Es verbleibt die Möglichkeit, den theoretischen Versagenszeitpunkt zwischen dem Beginn und dem Ende des Ermüdungsprozesses zu definieren. Hierzu wird der Verlauf der Steifigkeit der Probe pro Belastungszyklus für die Beurteilung des Schädigungszustandes der Probe herangezogen. Die Steifigkeit lässt sich nach Gleichung 8.1 als Sekantensteigung im Kraft-Verschiebungs-Diagramm zwischen oberem und unterem Umkehrpunkt eines Lastzyklus berechnen.

$$K^* = \frac{F_{max} - F_{min}}{u\left(F_{max}\right) - u\left(F_{min}\right)} \tag{8.1}$$

Die Steifigkeit nimmt im Versagenszeitraum mit steigender Anzahl der Belastungszyklen ab. Dies gilt für alle untersuchten Belastungsfälle. Somit bietet sich K^* zur Beurteilung des Schädigungszustandes an. Die Steifigkeit ist abhängig vom verwendeten Probekörper, absolute Werte für K^* sind zur Ermittlung des theoretischen Ausfallzeitpunktes daher nicht geeignet. Stattdessen ermöglicht der prozentuale Abfall der Steifigkeit die Beurteilung des Schädigungszustandes unabhängig von der Art der Proben. Zusätzlich zur Geometrie der Probekörper muss auch der Mullins-Effekt bei der Festlegung eines geeigneten Kriteriums berücksichtigt werden, um die Änderung der Steifigkeit eindeutig der Ermüdung des Materials zuordnen zu können. Ein einfach realisierbarer Ansatz zur Berücksichtigung des Mullins-Effektes ist die Aufteilung des Steifigkeitsabfalls in einen Anteil resultierend aus dem Mullins-Effekt und einen Anteil resultierend aus der Ermüdung. Die Ausprägung des Mullins-Effekts variiert jedoch für unterschiedliche Materialien, so dass dieser Wert für jedes Material gesondert bestimmt werden muss. Hierbei stellt sich erneut die Frage, nach welchem Kriterium der prozentuale Steifigkeitsabfall dem Mullins-Effekt zugeordnet werden soll. Eine Abschätzung dieser Werte ist zu ungenau, daher soll davon abgesehen werden.

Eine Alternative bietet das Herbeiführen eines stationären Zustands des Materials unter zyklischer Belastung. Mit Erreichen einer quasi zeitunabhängigen Sekantensteigung nach n_{ref} Lastzyklen wird eine Referenzsteifigkeit K_R^* definiert. Erreicht die Sekantensteigung K^* im weiteren Verlauf der Untersuchung einen Wert, der 10% unterhalb von K_R^* liegt, so gilt die Probe als ausgefallen. Für beide Werkstoffe wird nach $n_{ref} = 2000$ Lastzyklen ein quasistationärer Zustand angenommen. Somit gilt eine Probe als ausgefallen, wenn sie 10% der Steifigkeit verliert, die sie bei n_{ref} Schwingspielen hatte. Die Steifigkeit der Probe beim Ausfall K_V^* lässt sich somit wie folgt berechnen.

$$K_V^* = 0,9 \cdot K_R^* \tag{8.2}$$

Abbildung 8.3 zeigt exemplarisch den Referenzpunkt und den Ausfallzeitpunkt für den Steifigkeitsverlauf einer Naturkautschukprobe in Abhängigkeit von der Zyklenzahl n. Außerdem ist ein Ausschnitt des Steifigkeitsverlaufs zu Beginn des Versuchs dargestellt, bei dem der Einfluss des Mullins-Effekts deutlich erkennbar ist. Die unbelastete Probe wurde im Verlauf des Versuches zyklisch bis zum vollständigen Durchriss belastet.

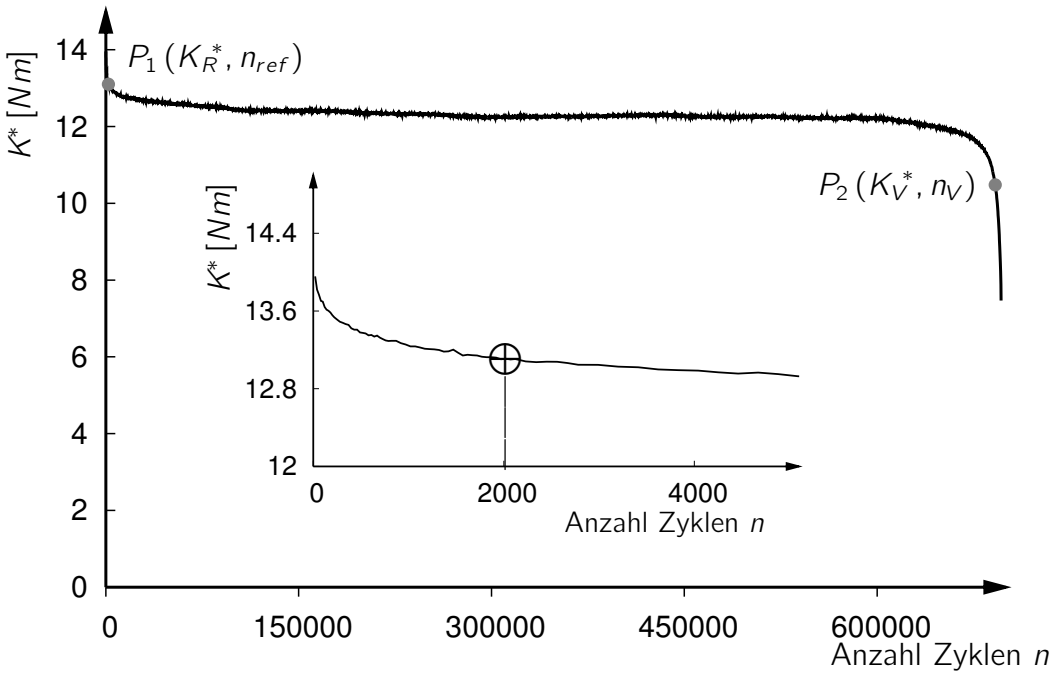


Abb. 8.3: Ausfallkriterium: 10% Steifigkeitsabfall der Referenzsteifigkeit K_R^* bei $n_{ref} = 2000$ Zyklen

8.1.3 Ergebnisse der Untersuchungen der Lebensdauer unter uniaxialem Zug

Mit Hilfe der im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Versuchsbeschreibung und unter Verwendung des in Gleichung 8.2 definierten Ausfallkriteriums kann das Lebensdauerverhalten der Modellwerkstoffe unter uniaxialer Zugbelastung charakterisiert werden. Zu diesem Zweck wird die erreichte Maximalspannung in Abhängigkeit der Anzahl der erduldbaren Schwingspiele in ein Wöhler-Diagramm eingetragen. Für jeden Punkt wurden drei Messungen durchgeführt, die Streubreite ist durch die Balken um die Punkte herum angedeutet. Die Erstellung des Wöhlerdiagramms erfolgt über den Logarithmus der jeweiligen Zahlenwerte für Schwingspiele und Spannungsäquivalente $\frac{T_{max}}{T_0}$, um eine einfache Approximation über eine Geradengleichung zu ermöglichen. T_0 entspricht hierbei $1MPa$. In der nachstehenden Abbildung sind die Ergebnisse der Lebensdauerversuche der beiden Werkstoffe auf Basis von EPDM dargestellt.

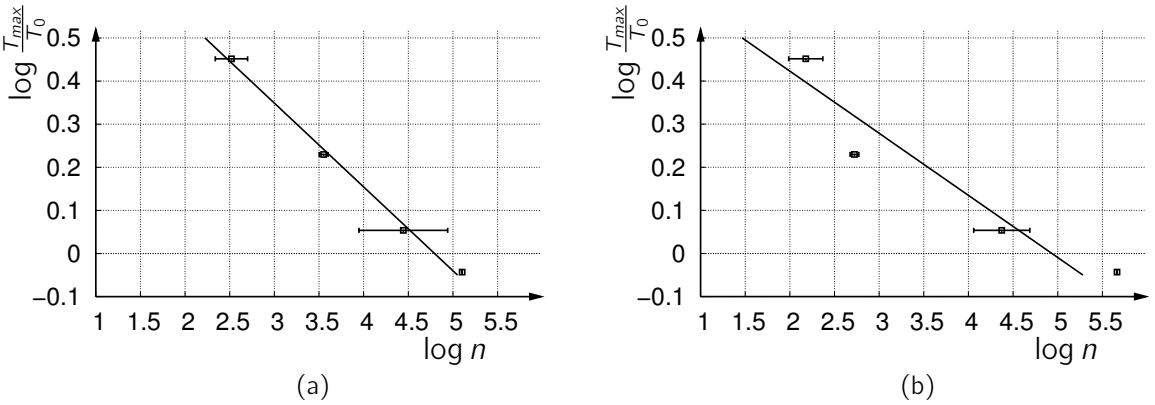


Abb. 8.4: Ermüdungsverhalten unter uniaxialer Zugbelastung für EPDM-E1M (a) und EPDM-E2M (b).

Jeder Messpunkt repräsentiert einen Mittelwert aus drei Versuchen mit Ausnahme des Versuchs bei einer Amplitude und einer Vorlast von $80N$, was einer Maximalspannung von $0,9054MPa$ entspricht. Dieser Punkt basiert wegen der langen Versuchsdauer bei kleinen Lasten auf nur einer Messung. Für die Trendlinien ergeben sich die nachfolgenden Gleichungen. Die Angabe der Werte für die 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen erfolgt in $[MPa]$

EPDM-E1M:

$$\log\left(\frac{T_{max}}{T_0}\right) = -0,1944 \cdot \log\left(n_{E1M}\right) + 0,9321 \tag{8.3}$$

EPDM-E2M:

$$\log\left(\frac{T_{max}}{T_0}\right) = -0,1441 \cdot \log\left(n_{E2M}\right) + 0,7112 \tag{8.4}$$

Die Beschreibung des Lebensdauerverhaltens durch eine Gerade für $\log(n)$ und $\log\left(\frac{T_{max}}{T_0}\right)$ ist der einfachste mögliche Ansatz. Ersatzweise erscheint die Nachbildung des Lebensdauerverhaltens in der aktuellen Darstellung für Abbildung 8.4 (b) auch durch eine Funktion mit einer Linkskrümmung plausibel. Aus Gründen der Vereinfachung und aufgrund der Tatsache, dass die Datenbasis zu gering für eine sinnvolle Anpassung ist, soll aber der lineare Ansatz zur Beschreibung der Zusammenhänge der Logarithmen von Spannungen und Zyklenzahlen beibehalten werden.

Mit Hilfe der Trendlinien ist eine vergleichende Beurteilung des Lebensdauerverhaltens der Modellwerkstoffe auf Basis von EPDM auf einfache Weise möglich. Anhand der Geradengleichungen (Gleichungen 8.3 und 8.4) kann rechnerisch abgeschätzt werden, dass EPDM-E1M und EPDM-E2M bei einer maximalen Spannung von $T_{max} = 1,1984 MPa$ die gleiche Anzahl an Schwingspielen erdulden können. Bei höheren Lasten ist EPDM-E1M widerstandsfähiger, bei niedrigeren EPDM-E2M. Unterschiede weisen die beiden Modellmischungen nur beim Rußgehalt und bei der Art des Rußes auf. Nach Mars [Mar04] führt die Verwendung eines feineren Rußes zu einer Verbesserung der Lebensdauer. Für die beiden Modellmischungen trifft dies für kleine Lasten unterhalb des errechneten Schnittpunktes der in Abbildung 8.4 (a) und (b) dargestellten Geraden zu.

Das Lebensdauerverhalten der beiden Naturkautschukmischungen ist in den Abbildungen 8.5 a und b dargestellt.

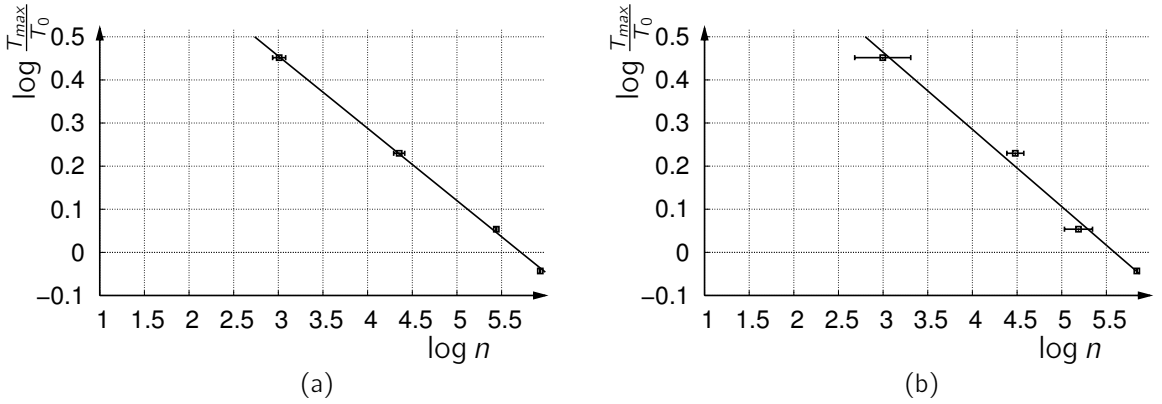


Abb. 8.5: Ermüdungsverhalten unter uniaxialer Zugbelastung für NR-N1M (a) und NR-N2M (b).

Ähnlich wie für die Mischungen EPDM-E1M und EPDM-E2M kann auch das Lebensdauerverhalten der beiden Naturkautschukmischungen jeweils durch eine Gerade approximiert werden.

NR-N1M:

$$\log\left(\frac{T_{max}}{T_0}\right) = -0,1677 \cdot \log\left(n_{N1M}\right) + 0,9584 \tag{8.5}$$

NR-N2M:

$$\log\left(\frac{T_{max}}{T_0}\right) = -0,1790 \cdot \log\left(n_{N2M}\right) + 1,001 \tag{8.6}$$

Bei einem R-Verhältnis von null und einer Maximallast von $T_{max} = 2,1203MPa$ weisen die Approximationsgeraden für das Lebensdauerverhalten der beiden Modellmischungen auf Naturkautschukbasis rechnerisch zwar einen Schnittpunkt auf, das Lebensdauerverhalten unter zyklischer Zugbelastung ist im untersuchten Bereich jedoch fast identisch. Die Verwendung feineren Rußes in NR-N2M führt im Vergleich zum gröberen Ruß in NR-N1M zu keinem nennenswerten Unterschied beim Lebensdauerverhalten der Modellmischungen unter uniaxialer Zugbelastung.

8.2 Lebensdauerverhalten unter einfacher Scherung

Für die Untersuchungen des Lebensdauerverhaltens der vier Modellmischungen unter einfacher Scherung wird die in Kapitel 6.2.1 entwickelte Probekörpergeometrie verwendet. Die Besonderheit einfacher Scherdeformationen liegt darin, dass sowohl die Lastamplitude als auch die Lastrichtung moduliert wird. Bei einfachen Scherversuchen werden somit zwei für die Ermüdung des Materials relevante Schädigungsformen realisiert.

8.2.1 Versuchsbeschreibung: Einseitige und beidseitige einfache Scherung

Die Untersuchung des Lebensdauerverhaltens unter einfacher Scherung sind im Gegensatz zu den durchgeführten Untersuchungen unter uniaxialem Zug deformationsgesteuert. Dies ergibt sich konstruktionsbedingt aus den Randbedingungen des Versuchsstandes. Dieser Umstand ist günstig, da die einfache Scherung als solche über den Deformationsgradienten definiert ist (siehe Abschnitt 5.1.1) und die Versuchsrandbedingungen somit direkt erfasst werden können.

Für die Lebensdaueruntersuchungen werden drei Lastniveaus vorgegeben. Die Lastniveaus entsprechen Schermaßen von $s_1 = 1,25$, $s_2 = 1,5$ und $s_3 = 1,75$ und können jeweils über Verschiebungen von $5mm$, $6mm$ und $7mm$ am Scherprobekörper umgesetzt werden.

Die Auswahl dieser Lastniveaus basiert auf zwei Randbedingungen:

1. Bauteilfestigkeit des Versuchsstandes im Rahmen der Sicherheitsfaktoren und im Vergleich mit den Simulationsergebnissen mit Hilfe der optimierten Probekörpergeometrie. Hierbei soll eine Vergleichbarkeit der Versuche unter einfacher Scherung und einfacher Scherung mit rotierenden Achsen gewährleistet werden.

2. Kurze Versuchslaufzeiten.

Mit Hilfe von FEM-Simulationen wurde das maximale Schermaß so festgelegt, dass die aus der Simulation der Probekörper resultierenden Kräfte die Hälfte der maximal vom Versuchsstand erduldbaren Last (siehe Kapitel 6.3) nicht überschreiten und zur Vereinfachung einem ganzzahligen Verschiebungswert in mm entspricht. Für die anderen beiden Lastniveaus wurde die für die Initiierung der einfachen Scherdeformation notwendige Verschiebung jeweils um $1mm$ reduziert. Aufgrund der fehlenden Datengrundlage wurden diese Werte im Vorfeld unter Vorbehalt abgeschätzt und sind erst nach Abschluss der ersten Versuchsreihe endgültig festgelegt worden.

Für die Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher einseitiger Scherung entsprechen Mittellast und Amplitude jeweils dem halben Schermaß s_i, bei der beidseitigen einfachen Scherung ist die Mittellast null und das Schermaß s_i entspricht den jeweiligen Amplituden. Für diese Anordnung der Lastniveaus erscheint zunächst eine Unterteilung mit Hilfe des R-Verhältnisses (siehe Gleichung 4.1) sinnvoll. Bei Deformationsprozessen wie der einfachen Scherung muss jedoch bedacht werden, dass sich gleichzeitig mit der Amplitude auch die Belastungsrichtung verändert. Das R-Verhältnis ist daher nicht mehr in der Form anwendbar, wie es bei richtungskonstanten Lasten der Fall ist. Es ist zum Beispiel eine beidseitige einfache Scherbelastung denkbar, deren maximal gedehnte Faser bei einer Scherung in die eine Richtung senkrecht zur maximalen Dehnung einer Faser bei einer Scherung in die andere Seite steht. Rein rechnerisch ergibt sich für diesen Fall ein R-Verhältnis von -1, tatsächlich handelt es sich jedoch um zwei Belastungsrichtungen mit einem R-Verhältnis ungleich -1. Aufgrund der Mehrdeutigkeit des R-Verhältnisses bei einfachen Scherdeformationen soll auf dessen Anwendung für diese Fälle verzichtet werden.

Für die Untersuchungen werden stets zwei Proben in einer so genannten Double-Sandwich-Anordnung in eine Klemmvorrichtung eingespannt.

Diese Einspannvorrichtung wird samt Probekörpern in einer servohydraulischen Versuchsanlage vom Typ MTS 831.50 montiert. Durch eine Verschiebung der an den Enden der Einspannvorrichtung befestigten Hubzylinder der Versuchsanlage wird eine einfache Scherverformung in den Probekörpern induziert.

8.2.2 Ausfallkriterium - Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherbelastung

Ähnlich wie beim Versagen der Proben unter uniaxialer Zugbelastung, ist es bei den Proben für einfache Scherverformungen ebenfalls nicht möglich, messtechnisch einen genauen Ausfallzeitpunkt zu bestimmen. Wie bei den Zugproben findet das Versagen über einen Zeitraum statt, der theoretisch mit der ersten Belastung beginnt und mit dem vollständigen Durchreißen der Probe endet. Folglich ist es auch für die Untersuchung des Ermüdungsverhaltens unter einfacher Scherung erforderlich, ein Ausfallkriterium zu definieren, dass die Probe für eine bestimmte Konstellation von Ermüdungsphänomenen als ausgefallen definiert. Gemäß den Überlegungen in Kapitel 8.1.2 soll auch für die Untersuchungen unter einfacher Scherbelastung ein Abfall der Probensteifigkeit K^* zur Bestimmung eines repräsentativen Versagenszeitpunktes t_V herangezogen werden. Analog zum Vorgehen bei den Ermüdungsuntersuchungen unter uniaxialer Zugbelastung gilt eine Probe unter einfacher Scherbelastung als ausgefallen, wenn die nach 2000 Lastspielen gemessene Gesamtsteifigkeit K^* um 10% gesunken ist.

8.2.3 Ergebnisse der Lebensdauerversuche: einfache Scherung - einseitig

Für die Untersuchung des Lebensdauerverhaltens der vier Modellmischungen unter einfacher einseitiger zyklischer Scherbelastung wurden die Punkte für die Wegvorgaben von $s_3 = 1,75$ und $s_2 = 1,5$ mit einer Statistik von drei und für $s_1 = 1,25$ mit einer Statistik von eins erstellt. Die Charakterisierung der Lebensdauer erfolgt über eine Darstellung der Schermaße s_i in Abhängigkeit der erduldbaren Lastspiele. Abbildung 8.6 zeigt das Ermüdungsverhalten der beiden EPDM-basierten Modellwerkstoffe unter einseitiger einfacher Scherbelastung.

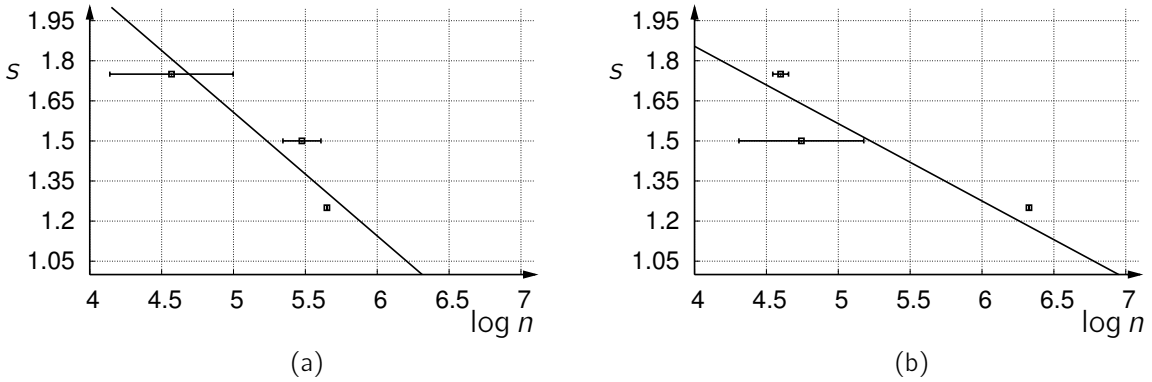


Abb. 8.6: Ermüdungsverhalten unter einseitiger einfacher Scherung für EPDM-E1M (a) und EPDM-E2M (b).

Die Trendlinien zur Beschreibung der Ermüdungsverhaltens für EPDM-E1M und EPDM-

E2M werden, wie auch bei den Untersuchungen unter uniaxialer Zugbelastung, durch Geraden angenähert. Hierbei sei jedoch anzumerken, dass aus Darstellungsgründen die Logarithmierung nur auf die Anzahl der erduldbaren Lastspiele n angewendet wurde.

EPDM-E1M:

$$s = -0,4625 \cdot \log\left(n_{E1M}\right) + 3,9194 \tag{8.7}$$

EPDM-E2M:

$$s = -0,2894 \cdot \log\left(n_{E2M}\right) + 3,0120 \tag{8.8}$$

Anhand der Trendlinien ist zu erkennen, dass EPDM-E1M für Belastungen oberhalb eines Schermaßes von $s = 1,5$ eine bessere Lebensdauer aufweist, als EPDM-E2M. Für Belastungen unterhalb von $s = 1,5$ ist EPDM-E1M schlechter. In gleicher Weise lassen sich die Ergebnisse der Lebensdaueruntersuchungen unter einseitiger einfacher Scherung für die NR-Mischungen darstellen.

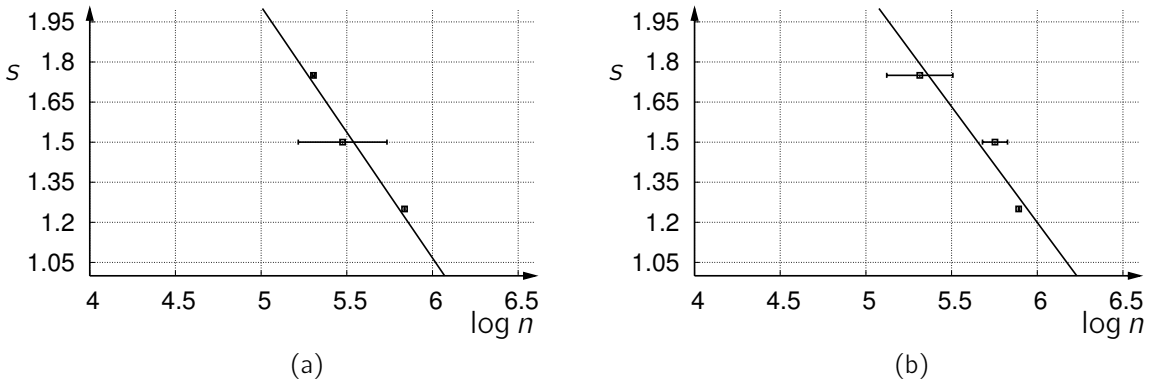


Abb. 8.7: Ermüdungsverhalten unter einseitiger einfacher Scherung für NR-N1M (a) und NR-N2M (b).

Den in Abbildung 8.7 dargestellten Trendlinien für die NR-basierten Modellmischungen liegen nachfolgende Gleichungen zugrunde.

NR-N1M:

$$s = -0,9407 \cdot \log\left(n_{N1M}\right) + 6,7109 \tag{8.9}$$

NR-N2M:

$$s = -0,8666 \cdot \log\left(n_{N2M}\right) + 6,3991 \tag{8.10}$$

Anhand der Trendlinien ist erkennbar, dass die Lebensdauer von N1M im untersuchten Bereich durchweg niedriger ist als die von N2M.

8.2.4 Ergebnisse der Lebensdauerversuche: einfache Scherung - beidseitig

Zur Verdeutlichung der Richtungsabhängigkeit des Lebensdauerverhaltens technischer Gummiwerkstoffe sind zusätzlich zu den Ermüdungsuntersuchungen unter einseitiger einfacher Scherung auch Versuche unter beidseitiger einfacher Scherung durchgeführt worden. Wie bei einseitiger einfacher Scherung kombinieren beidseitige einfache Scherdeformationen eine Modulation der Lastamplitude mit einer Richtungsmodulation. Die Richtungsmodulation bei beidseitiger einfacher Scherung umfasst jedoch einen doppelt so großen Winkel, wie bei der einseitigen einfachen Scherung. Bei gleicher maximaler Auslenkung ist der Einfluss der Richtungsmodulation also theoretisch doppelt so groß.

Die Ergebnisse der Ermüdungsuntersuchungen unter beidseitiger einfacher Scherung werden in gleicher Weise wie die Ergebnisse der Ermüdungsuntersuchungen unter einseitiger einfacher Scherung dargestellt. Jeder Punkt basiert auf drei Messungen. Auf der Abszisse ist die resultierende Lebensdauer als Logarithmus der Anzahl der erduldbaren Schwingspiele aufgetragen, auf der Ordinate sind die maximal auftretenden Schermaße ersichtlich. Abbildung 8.8 zeigt das Lebensdauerverhalten der EPDM-Werkstoffe unter beidseitiger einfacher Scherbelastung.

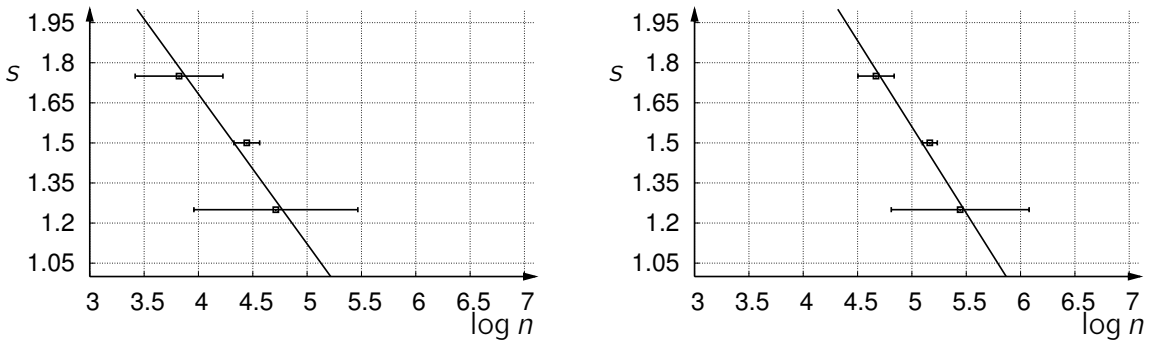


Abb. 8.8: Ermüdungsverhalten unter beidseitiger einfacher Scherung für EPDM-E1M (a) und EPDM-E2M (b).

Die aus den Messpunkten resultierenden Trendlinien werden durch die Gleichungen 8.11 und 8.12 beschrieben.

EPDM-E1M:

$$s = -0,5612 \cdot \log\left(n_{E1M}\right) + 3,9279 \tag{8.11}$$

EPDM-E2M:

$$s = -0,6464 \cdot \log\left(n_{E2M}\right) + 4,7880 \tag{8.12}$$

Ausgehend von den Trendlinien kann für die EPDM-basierten Werkstoffe ausgesagt werden, dass EPDM-E2M im untersuchten Bereich und für beidseitige einfacher Scherbelastungen ein günstigeres Lebensdauerverhalten aufweist als EPDM-E1M.

Die Ergebnisse der Naturkautschuke unter beidseitiger einfacher Scherbelastung sind einschließlich der dazugehörenden Trendlinien in Abbildung 8.9 dargestellt.

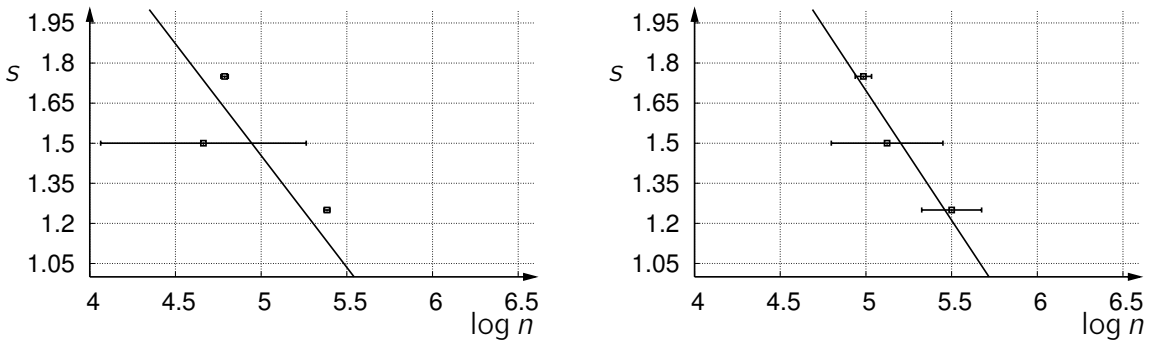


Abb. 8.9: Ermüdungsverhalten unter beidseitiger einfacher Scherung für NR-N1M (a) und NR-N2M (b).

Die Berechnung der Verläufe der beiden Trendlinien in den Abbildungen 8.9 (a) und 8.9 (b) erfolgte mit den Gleichungen 8.13 und 8.14.

NR-N1M:

$$s = -0,8366 \cdot \log\left(n_{N1M}\right) + 5,6370 \tag{8.13}$$

NR-N2M:

$$s = -0,7680 \cdot \log\left(n_{N2M}\right) + 5,1829 \tag{8.14}$$

Wie bei den EPDM-Mischungen unter beidseitiger einfacher Scherung ist auch bei den Naturkautschukmischungen die Mischung mit dem feineren Ruß (NR-N2M) im untersuchten Bereich hinsichtlich des Ermüdungswiderstandes besser als die Mischung mit dem groben Ruß (NR-N1M).

8.3 Lebensdauerverhalten unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen

Ausgehend von den Lebensdaueruntersuchungen unter uniaxialer Zugbelastung wurde der Anteil der Richtungsmodulation am Deformationsprozess mit den Versuchen unter einseitiger und beidseitiger einfacher Scherung schrittweise angehoben. Die Experimente unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen weisen nun gar keine Amplitudenmodulation mehr auf; der Deformationsprozess basiert, abgesehen von der zu Beginn des Rührversuchs initiierten einfachen Scherung, ausschließlich auf einer reinen Richtungsmodulation.

Wie bei allen anderen Lebensdaueruntersuchungen findet auch bei der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen das Versagen eines Probekörpers über einen längeren, nicht genau definierten Zeitraum hinweg statt. Daher muss auch für diese Untersuchungen ein Ausfallkriterium gefunden werden, das im Versagensprozess bei Erreichen einer bestimmten Konstellation von Eigenschaften die Probe als ausgefallen definiert. Analog zum Vorgehen bei einseitiger und beidseitiger einfacher Scherung soll nach 2000 Lastzyklen ein Zustand erreicht sein, der als Referenz zur Bestimmung des Ausfalls dient. Aufgrund der fehlenden Modulation der Lastamplitude bei reiner Richtungsmodulation ist die Bestimmung einer Steifigkeit im Falle der einfachen Scherung mit rotierenden Achsen jedoch nicht direkt möglich. Stattdessen soll der Abfall der Radialkraft F_R betrachtet werden. Wird diese geringer als 90% des Referenzwertes bei 2000 Umdrehungen, so gelten die Proben ab diesem Zeitpunkt als ausgefallen. Es sei anzumerken, dass durch die Double-Sandwich-Anordnung das Kriterium stets auf zwei Probekörper angewendet wird. Die Wahrscheinlichkeit ist sehr gering, dass beide Probekörper zum gleichen Zeitpunkt das Ausfallkriterium erfüllen. Vielmehr ist bei Erfüllung des Ausfallkriteriums in den meisten Fällen mit einer Konstellation zu rechnen, bei der ein Probekörper den als ausgefallen definierten Zustand noch nicht erreicht hat und der zweite bereits viele Umdrehungen im versagten Zustand erduldet. Für die Untersuchungen bedeutet dies dass die ermittelte Lebensdauer im Durchschnitt geringer ist, als dargestellt.

Zur Bestimmung des Ermüdungsverhaltens der vier Modellmischungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen werden drei Lastamplituden vorgegeben, entsprechend denen die Proben zu Beginn des Versuchs ausgelenkt werden. Die Lastamplituden entsprechen den vorgegebenen Schermaßen aus den Kapiteln 8.2.3 und 8.2.4 ($s_1 = 1,25$, $s_2 = 1,5$ und $s_3 = 1,75$). Als Probekörper wird die in Kapitel 6.2 vorgestellte und für einfache Scherverformungen optimierte Probekörpergeometrie verwendet. Nach Erreichen der vorgegebenen Auslenkung werden die Probekörper so lange durch eine zyklische einfache Scherung mit rotierenden Achsen belastet, bis das Versagenskriterium durch die fortschreitende Zermürbung des untersuchten Materials erfüllt ist. Die Anzahl der Umdrehungen bis zum Versagen wird gezählt und jeweils für das vorgegebene Schermaße in ein Diagramm eingetragen. Die Ergebnisse für dieses Vorgehen für die beiden EPDM-basierten

Werkstoffe sind in der Abbildung 8.10 dargestellt.

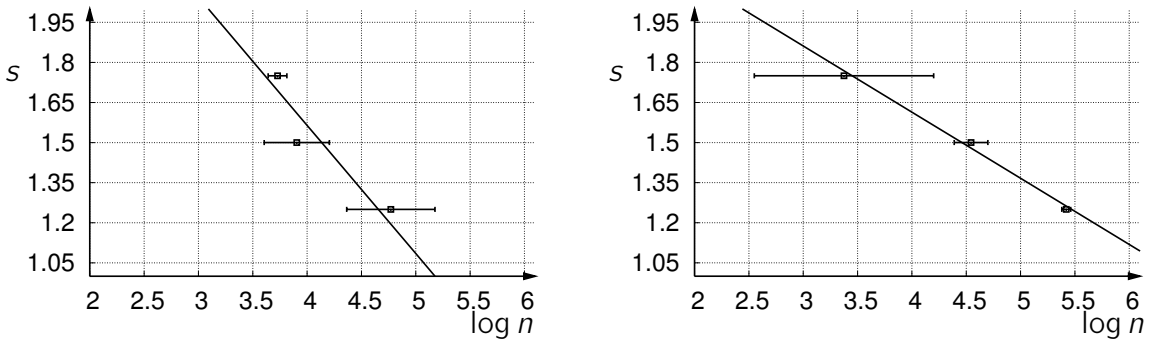


Abb. 8.10: Ermüdungsverhalten unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für EPDM-E1M (a) und EPDM-E2M (b).

Die Funktionsgleichungen der zugehörigen Trendlinien lauten wie folgt.
EPDM-E1M:

$$s = -0,4796 \cdot \log\left(n_{E1M}\right) + 3,4828 \tag{8.15}$$

EPDM-E2M:

$$s = -0,2444 \cdot \log\left(n_{E2M}\right) + 2,5870 \tag{8.16}$$

Anhand des durch die Trendlinien rechnerisch abgeschätzten Ermüdungsverhaltens wird deutlich, dass EPDM-E2M bis zu einem Schermaß von ca. $s = 1,8$ einen besseren Ermüdungswiderstand aufweist als EPDM-E1M. Für einfache Scherdeformationen größer als $1,8$ ist EPDM-E1M widerstandsfähiger gegenüber einer richtungsmodulierten Belastung.

Die Ergebnisse der Ermüdungsuntersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für die Naturkautschukmischungen sind in den beiden nachfolgenden Diagrammen dargestellt.

Anhand der Messpunkte lassen sich die Trendlinien für Naturkautschuk unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen bestimmen.

NR-N1M:

$$s = -0,4283 \cdot \log\left(n_{N1M}\right) + 3,5760 \tag{8.17}$$

NR-N2M:

$$s = -0,5101 \cdot \log\left(n_{N2M}\right) + 4,1936 \tag{8.18}$$

Im gemessenen Bereich wird anhand der Trendlinien deutlich, dass NR-N2M, das Polymer mit dem feineren Füllstoff, auch für einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen ein durchweg besseres Lebensdauerverhalten aufweist als NR-N1M.

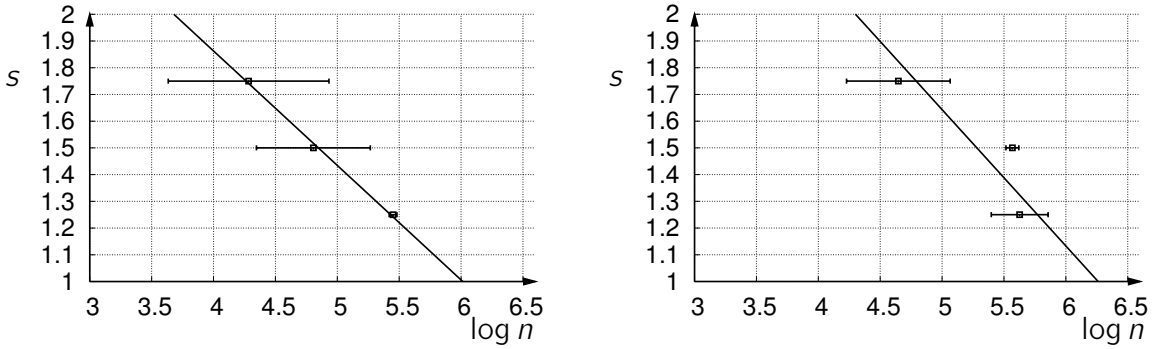


Abb. 8.11: Ermüdungsverhalten unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen für NR-N1M (a) und NR-N2M (b).

8.4 Diskussion der Ergebnisse der verschiedenen Lebensdaueruntersuchungen

Mit Hilfe der im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Lebensdauerversuche existiert eine Datenbasis, die es ermöglicht, den Einfluss rotierender Belastungsrichtungen auf die Lebensdauer technisch genutzter Elastomere zu zeigen und darüber hinaus von einer Ermüdung, basierend auf einer reinen Amplitudenmodulation, abzugrenzen. Ausgangspunkt hierfür sind die Ermüdungsuntersuchungen unter uniaxialem Zug, bei denen keine Richtungsmodulation vorliegt. Diese Untersuchungen stehen im Gegensatz zu den Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen, bei denen die Schädigung ausschließlich durch eine Modulation der Belastungsrichtungen hervorgerufen wird. Der Übergang von reiner Amplitudenmodulation zu reiner Richtungsmodulation wird über Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherung dargestellt, die einer

Kombination aus Last- und Richtungsmodulation entsprechen. Hierbei weist eine beidseitige einfache Scherung bei gleicher Amplitude einen vergleichsweise größeren Anteil an Richtungsmodulation auf, als eine einseitige einfache Scherung.

Die Untersuchungen zeigen, dass sowohl eine Modulation der Belastungsamplitude als auch eine reine Veränderung der Belastungsrichtung zu einer Ermüdung bis zum Ausfall der Probe führen. Der Einfluss der Richtungsmodulation liegt, bei einem direkten Vergleich der Zahlenwerte für die von den Modellmischungen erduldbaren Schwingspiele bei einfachen Scherdeformationen und den erduldbaren Umdrehungen bei einfacher Scherung mit rotierenden Achsen in der gleichen Größenordnung. Die schädigende Wirkung rotierender Belastungsrichtungen für gefüllte Gummiwerkstoffe ist somit nachgewiesen.

Ein Vergleich der Streubreiten zeigt, dass die Ergebnisse von Ermüdungsuntersuchungen, die mit Hilfe der Hantelprobekörper gewonnen wurden, nicht so stark variieren wie die Untersuchungen mit der optimierten Scherprobekörpergeometrie. Die vorhandene Datenbasis ist zwar nicht ausreichend, um die nachfolgend beschriebenen Zusammenhänge zu belegen, dennoch sollen verschiedene mögliche Ursachen für dieses Phänomen aufgezeigt werden.

Der die Lebensdauer einer Probe beendende makroskopische Riss hat seinen Ursprung häufig an einer von vielen Fehlstelle im Material. Diese Fehlstellen haben geometrisch bedingt häufig eine Orientierung, was dazu führt, dass Belastungen in eine Richtung für diese Fehlstellen besonders schädigend sind und Belastungen in eine andere Richtung quasi keinen Einfluss haben. Bei Zugversuchen ist die Belastung richtungskonstant, für die Schädigung sind somit nur Fehlstellen in Zugrichtung relevant. Bei Versuchen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen können Fehlstellen verschiedener Ausrichtungen relevant sein, da im Verlauf einer Umdrehung viele Richtungen belastet werden. Dies zeigt auch die Art der Risse, die sich kreisförmig ausbilden (siehe Abbildung 8.12).

Bei der Charakterisierung der Lebensdauer unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen gibt es potentiell mehr Fehlstellen, die zu einem Ausfall führen können, als im Vergleich zu Zugversuchen. Dies bedeutet aber auch, dass es potentiell mehr große Fehlstellen gibt, die einen sehr frühen Ausfall der Probe herbeiführen und somit die Streubreite bei Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen vergrößern.

Bei der Ermittlung der Lebensdauereigenschaften sind bei den Zugversuchen Kräfte und bei den Scherversuchen Scheramplituden vorgegeben worden. Dies hat einen Einfluss auf die Größe der Ausfallbreite: bei kraftgesteuerten Untersuchungen wird die Probe stets gleich belastet, der Mullins-Effekt, Setzen des Material oder bleibende Deformationen aufgrund von Ermüdung spielen hierbei nur eine untergeordnete Rolle. Dies steht im Gegensatz zu weggesteuerten Untersuchungen. Effektiv nimmt die in einem Materialpunkt wirkende Dehnung ab, sobald das Material eine bleibende Verformung erfährt. Auch Effekte, die mit anwachsender Ermüdung auftreten (z. B. kleine Risse) führen zu einer Verringerung der im Materialpunkt wirkenden Dehnung. Dies führt dazu, dass die Belastung im Material, je nach

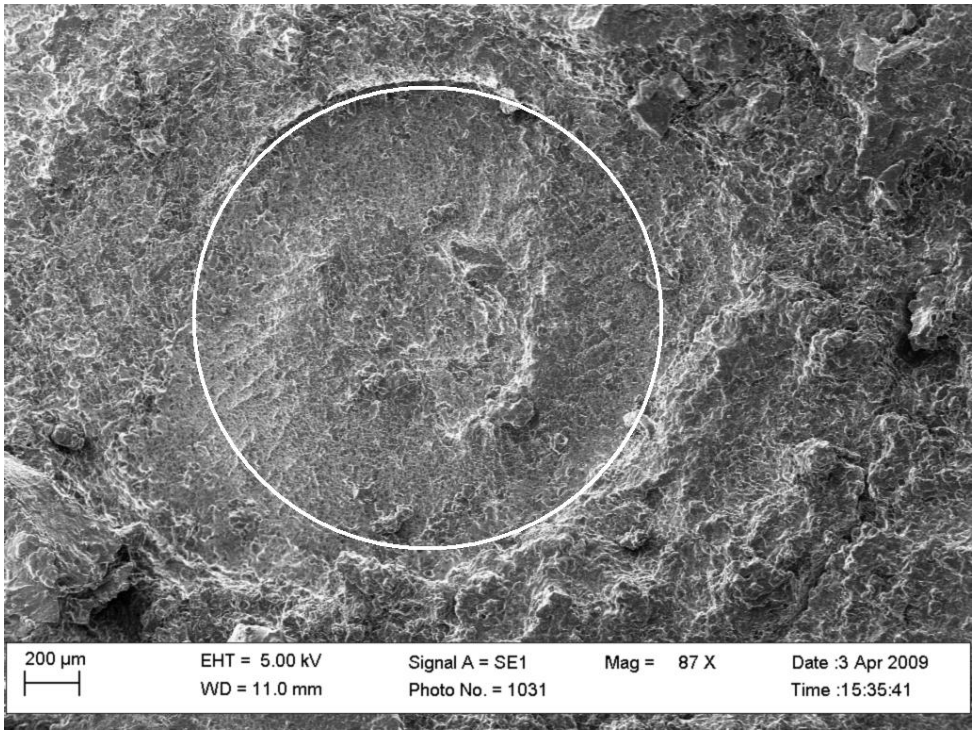


Abb. 8.12: Kreisförmiger Riss einer versagten Probe für einfache Scherung mit rotierenden Achsen.

den Gegebenheiten, abnimmt. Aus diesen Gründen fällt die Streuung bei kraftgesteuerten Versuchen, wie zum Beispiel bei den Zugversuchen, geringer aus.

9 Konzept zur Lebensdauervorhersage auf Basis einer tensoriellen Schädigungsgröße

Zur Vorhersage der Lebensdauer eines technischen Bauteils gibt es verschiedenste Vorgehensweisen. Das Ziel jeder Vorgehensweise ist es jedoch stets, einen komplexen Belastungsprozess in eine für eine Schadenshypothese geeignete Form umzurechnen. In diesem Kapitel soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, wie ein derartiges Konzept für eine Schädigungshypothese zur Akkumulation eines tensoriellen Schädigungsmaßes aussehen kann.

Für optimale Ergebnisse bei der Lebensdauerprognose eines technischen Gummibauteils ist es theoretisch erforderlich, die gesamte Belastungsgeschichte des Bauteils mithilfe einer Simulation darzustellen. Hierbei ist jedoch der zeitliche Aufwand problematisch, da die Simulation eines einzigen Schwingspiels häufig um ein Vielfaches länger dauert,als der reale Belastungsprozess selbst.

Viele Verfahren beschränken sich daher entweder auf die Untersuchung weniger kritischer Punkte im Bauteil oder treffen vereinfachende Annahmen für die Prognose wie zum Beispiel eine zyklische Belastung mit klar definierten Schwingspielen und einer harmonisch oszillierender Amplitude, um nur ein Schwingspiel vollständig rechnen zu müssen. Abhängig davon, wie stark sich die getroffenen Annahmen für die Schädigungsrechnung von den realen Bedingungen unterscheiden, ist der Einfluss auf das Ergebnis der Rechnung. Dies gilt sowohl für skalare als auch tensorielle Schädigungsrechnungen.

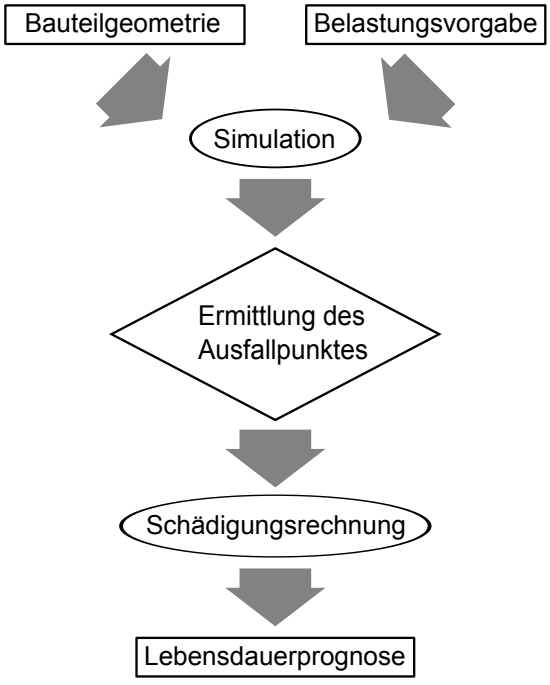


Abb. 9.1: Herkömmliche Vorgehensweise für eine Lebensdauerprognose

Ein herkömmliches Verfahren zur Prognose der Lebensdauer eines technischen Gummibauteils ist in Abbildung 9.1 zusammenfassend in einem Flussdiagramm dargestellt. Mit Hilfe der Geometrie des Bauteils und einer Belastungsvorgabe kann mittels FEM eine Strukturanalyse durchgeführt werden. Die Belastungsvorgabe kann anhand von Messungen unter realen Bedingungen oder aber durch eine Abschätzung der für das Bauteil im Einsatz relevanten Lasten bestimmt werden. Die Belastungsvorgabe ist zeitlich deutlich kürzer als die Belastungen im realen Einsatz und umfasst in den meisten Fällen nicht mehr als ein Schwingspiel. In Abhängigkeit der Komplexität der Belastungsvorgabe können eine

oder mehrere Simulationen durchgeführt werden. Anhand der Simulationsergebnisse wird der Punkt mit der höchsten Ausfallwahrscheinlichkeit im Bauteil bestimmt. Der Einfachheit halber wird hierfür in vielen Fällen der Punkt mit der höchsten Last in Form von maximalen Dehnungs- oder Spannungswerten ausgewählt. Dieses Vorgehen führt jedoch nicht zwingend zum richtigen Ergebnis, da für die Bestimmung des Schadenseintrages sowohl die Lastamplitude als auch deren Häufigkeit eine Rolle spielen. So ist es zum Beispiel durchaus möglich, dass eine niedrigere Last aufgrund deren Häufigkeit zu einer höheren Schadenssumme führt und somit für die Auslegung der Lebensdauer kritischer ist, als ein Punkt mit einer höheren Last. Für den Punkt mit der höchsten Ausfallwahrscheinlichkeit wird im Anschluss eine vollständige Lebensdauerrechnung durchgeführt, die eine in Abhängigkeit zur Belastungsvorgabe stehende Schadenssumme ermittelt. Durch eine Multiplikation des Schadens mit der Häufigkeit des Vorkommens der Belastung kann der durch die Belastung im realen Einsatz initiierte Schaden abgeschätzt und eine Lebensdauerprognose durchgeführt werden.

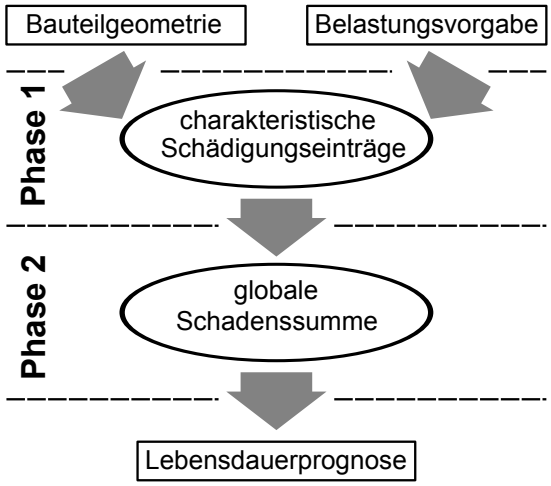


Abb. 9.2: Vorgehensweise für eine Lebensdauerprognose unter Verwendung des 2-Phasen-Ansatzes.

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellte Konzept basiert auf *repräsentativen* oder *charakteristischen* Belastungsprozessen, die anstelle der aus dem Lastkollektiv extrahierten Belastungsvorgaben in Form einzelner Schwingspiele der Schädigungsrechnung zugrunde gelegt werden. Hierbei handelt es sich um Deformationsprozesse, die entweder im unbelasteten Zustand oder bei einer Startkonfiguration (zum Beispiel eine Zug-Vorlast oder die bei einfachen Scherdeformationen mit rotierenden Achsen eingangs initiierte einfache Scherung) beginnen und bei derselben Konfiguration wieder enden. Der Deformationsprozess zwischen diesen beiden charakteristischen Konfigurationen wird erfasst und dessen Schadenseintrag möglichst genau bestimmt. Dieser repräsentative Schadenseintrag bildet die Grundlage für die anschließende Lebensdauerprognose. Vereinfachende Annahmen, wie zum Beispiel eine zyklische Belastung mit harmonisch oszillierender Amplitude, müssen bei diesem Vorgehen nicht mehr getroffen werden. Eine Schädigungsrechnung kann auf beliebig vielen charakteristischen Deformationsprozessen basieren. Eine präzise Bestimmung des Schadenseintrags in Form äquivalenter, zu den jeweiligen Deformationsprozessen zugehörigen Schadensstensoren stellt die erste Phase der Schädigungsrechnung dar. In der zweiten Phase werden die Teilschädigungen entsprechend ihrer (geschätzten) Häufigkeit zu einer Gesamtschädigung aufsummiert und eine Lebensdauerprognose durchgeführt. Der

Ablauf ist schematisch in Abbildung 9.2 dargestellt. Aufgrund der Unterteilung des Ansatzes in eine Phase zur Berechnung der charakteristischen Schädigungen und eine Phase zur Aufsummierung der charakteristischen Schädigungen zu einer Gesamtschädigung wird der Ansatz als 2-Phasen-Ansatz bezeichnet. Der Unterschied zu herkömmlichen Schädigungsrechnungen ist die präzise Berücksichtigung eines gesamten (repräsentativen) Deformationsprozesses zur Berechnung eines Schadens anstelle eines einzelnen Spannungs- oder Dehnungswertes aus einem Wöhlerdiagramm.

Phase 1 umfasst die Ermittlung einer tensoriellen Größe $\underline{\underline{s}}$ zur Beschreibung der Schädigung im Raum in Abhängigkeit vorgegebener Belastungsprozesse. Die Herleitung von $\underline{\underline{s}}$ wird in Kapitel 9.2 beschrieben. In diesem Zusammenhang soll nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass es sich bei $\underline{\underline{s}}$ um eine künstliche Größe handelt, die viele Eigenschaften von realer Ermüdung im Raum imitiert und die sich daher für Beschreibung des Lebensdauerverhaltens technischer Gummiwerkstoffe gut eignet. $\underline{\underline{s}}$ ist jedoch eine rein phänomenologische Größe. Im weiteren Verlauf wird mit $\underline{\underline{s}}$ exemplarisch als Anwendungsbeispiel für Phase 2 eine lineare Schadensakkumulation durchgeführt, um die Eigenschaften des tensorbasierten Schädigungsmodells für Last- und Richtungsmodulation aufzuzeigen. Es besteht jedoch die Möglichkeit in der 2. Phase eine nichtlinearen Schadensakkumulation unter Verwendung von $\underline{\underline{s}}$ durchzuführen. Dies soll jedoch nur einen Ausblick auf Möglichkeiten des 2-Phasen-Ansatzes geben.

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Ansätze zur Lebensdauerprognose sind bewusst modular aufgebaut, um eine nachträgliche Erweiterung oder Umgestaltung in Abhängigkeit neuer Erkenntnisse zu ermöglichen. Dies ist erforderlich, da die messtechnische Datenbasis zu gering für eine detaillierte Modellierung ist. Aus diesem Grund erfolgt eine Beurteilung des Modells auch ausschließlich qualitativ.

9.1 Simulationsrandbedingungen

Zur Beschreibung des Ermüdungsverhaltens technischer Gummibauteile mit Hilfe der Finite Elemente Methode ist zusätzlich zu einer adäquaten Schädigungshypothese eine möglichst genaue Simulation des strukturmechanischen Materialverhaltens erforderlich. Außerdem sind für die Modellierung des Lebensdauerverhaltens neben der Kenntnis von Spannungs- und Verzerrungsgrößen energetische Größen von Bedeutung. Insbesondere der Energiedurchsatz pro Materialpunkt in Abhängigkeit der erduldeten Belastung ist für die tensorielle phänomenologische Beschreibung eines räumlichen Schädigungszustandes wichtig, wie in Kapitel 9.2 gezeigt wird. Nachfolgend wird eine Möglichkeit aufgezeigt, einen Schadenstensor zur berechnen und anhand dessen eine Aussage über die Lebensdauer in einem Materialpunkt zu treffen.

Die messtechnische Erfassung des Lebensdauerverhaltens basiert auf der Annahme homogener Spannungs- und Verzerrungszustände. Bei der Simulation der für die Lebens-

dauermessung verwendeten Probekörper zur Überprüfung einer Schadenshypothese ist es wichtig, dass die aus der Simulation resultierenden Spannungs- und Verzerrungszustände mit den aus den Annahmen der Messungen resultierenden Größen übereinstimmen. Ist dies nicht der Fall, wird bereits an dieser Stelle ein von der Schädigungshypothese unabhängiger Fehler in die Rechnung eingebracht; Denn gerade bei der Modellierung einer räumlichen Schädigungsgröße ist eine Konsistenz von Spannungs- und Verzerrungsmaßen und den daraus resultierenden energetischen Größen für deren Überprüfung von großer Bedeutung. Um potentiellen aus der strukturmechanischen Simulation resultierenden Fehlern vorzubeugen, sollen mit Hilfe eines geeigneten Stoffgesetzes künstlich Lebensdauerdaten erzeugt werden, so dass die vorausgesetzten Randbedingungen der (künstlichen) Lebensdauerkenngrößen exakt mit Hilfe der Finite Elemente Methode wiedergegeben werden können. Auf diese Weise können Fehler, die auf dem Zusammenspiel von Materialbeschreibung und Schädigungshypothese fußen, bei der Modellbildung ausgeschlossen werden. Als Stoffgesetz wird das in Kapitel 4.1, Abbildung 4.2 schematisch dargestellte Maxwell-Modell verwendet. Die verwendeten Parameter lauten wie folgt.

Verwendete Maxwell-Parameter nach MSC [MSC11]

Nummer i	Zeit τ_i	Deviatorischer Multiplikator
1	0,1	0,15
2	0,01	0,15
3	0,001	0,15
4	0,0001	0,15

Die elastische Feder wird durch das Materialmodell nach Ogden , Kapitel 4.1, Gleichung 4.4 wiedergegeben. Zur Beschreibung des Materialverhaltens werden nachstehende Parameter verwendet.

Materialparameter das Stoffgesetz nach Ogden [Ogd72] und MSC [MSC11]

Term Nummer i	Modul A	Exponent B
1	0,444	2
2	0,2	-2

Zur Überprüfung der wesentlichen qualitativen Eigenschaften des Stoffgesetzes wird eine Simulation einer einfachen Scherung mit rotierenden Achsen durchgeführt. Das zugehörige Modell besteht aus einem Würfel mit einer Kantenlänge von einem Millimeter. Die Randbedingungen sind derart gewählt, dass die gegenüberliegenden Seiten des Würfels stets planparallel zueinander verbleiben. Auf diese Weise wird eine homogene Verformung sichergestellt. Ähnlich wie bei der mechanischen Charakterisierung der Modellwerkstoffe wird der Würfel rotiert und anschließend stufenweise in Scherrichtung ausgelenkt, wodurch eine

homogene einfache Scherung mit rotierenden Achsen bei verschiedenen Scheramplituden simuliert wird. Anders als bei der mechanischen Charakterisierung der Modellmischungen wird jede Laststufe nicht für zehn Minuten, sondern für zwei Umdrehungen konstant gehalten. Die Verläufe der simulierten Scher- und Tangentialkraft sowie der Phasenwinkel sind in Abbildung 9.3 dargestellt. Bei einem Vergleich von FEM-Rechnung und Messung muss berücksichtigt werden, dass für die Simulation zur Sicherstellung der Homogenität ein Einheitswürfel aus nur einem Element verwendet wurde. Die Beträge der resultierenden Kräfte fallen im Vergleich zur Messung daher deutlich niedriger aus. Der Vergleich ist aus diesem Grund rein qualitativer Natur. Dies gilt gleichermaßen für den Verlauf des Phasenwinkels, der anhand der berechneten Verläufe von Scher- und Tangentialkraft ermittelt werden kann.

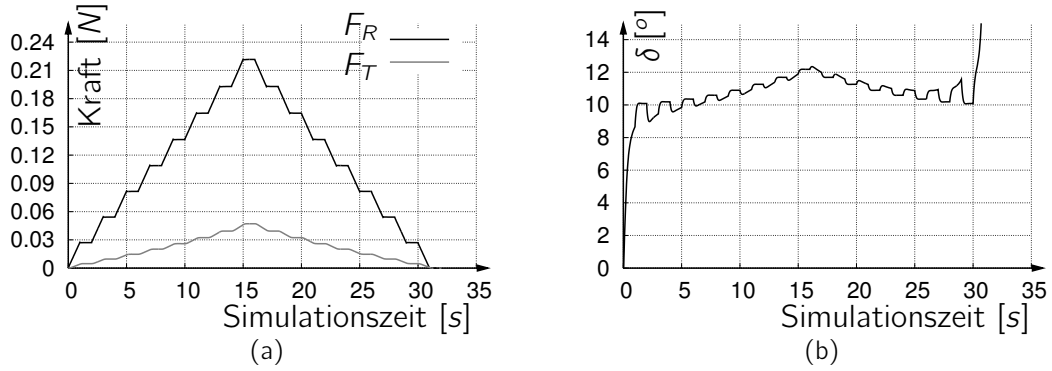


Abb. 9.3: Simulationsergebnisse: Scher- und Tangentialkraft sowie der zugehörige Phasenwinkel in Abhängigkeit der Zeit.

Die Simulationsergebnisse ähneln den Ergebnissen der realen mechanischen Charakterisierung unter Verwendung einfacher Scherung mit rotierenden Achsen (siehe hierzu Kapitel 7.4.2) - sowohl Scherkraft als auch Tangentialkraft wachsen bei steigender Scheramplitude an. Dennoch können bei genauerer Betrachtung Unterschiede aufgezeigt werden. So sind zum Beispiel die Kraftniveaus bei der Simulation im Verlauf des Belastungspfades identisch mit den Kraftniveaus im Verlauf des Entlastungspfades. Dies ist bei den Messungen nicht der Fall und ist auf den Umstand rückführbar, dass das verwendete Stoffgesetz nicht in der Lage ist, den Mullins-Effekt abzubilden. Zudem erscheinen die Übergänge von einer Scheramplitude zur nächsten bei der Simulation flacher als bei den Messungen. Die Ursache liegt in der Zeit, welche die Laststufen jeweils konstant gehalten werden. Im Vergleich zur Messung sind diese bei der Simulationsrechnung sehr kurz, wodurch der Wechsel von einem Lastniveau zum nächsten im Verhältnis zur Messung länger dauert und der Kraftverlauf daher im Diagramm flacher ausfällt. Die größten Unterschiede zeigen sich bei den aus den Kräften resultierenden Phasenwinkeln. Bei der Messung sinkt der Phasenwinkel bei steigender Scheramplitude, bei der Simulationsrechnung steigt er jedoch an. Bei etwa

30 Sekunden steigt der Phasenwinkel nochmals an. In diesem Bereich sind Scher- und Tangentialkraft in der Größenordnung von Null. Dementsprechend ist der Phasenwinkel als Quotient der Beträge von Scher- und Tangentialkraft in diesem Bereich sehr ungenau und nimmt sehr große Werte an.

Trotz der qualitativen Unterschiede zwischen Simulation und Messung ist das verwendete Stoffgesetz hinreichend gut für die Generierung künstlicher Lebensdauerdaten geeignet, da sowohl das Spannungs-Streckungsverhalten als auch ein Phasenwinkel abgebildet werden können. Der Umstand, dass das Phasenwinkelverhalten nicht exakt dem bei einfacher Scherung mit rotierenden Achsen beobachteten Verhalten entspricht, soll im Verlauf der weiteren Untersuchungen vernachlässigt werden. Wichtig ist es, die Basis für ein Schädigungsmodell zu schaffen, dass inelastische Effekte berücksichtigt und den Schaden in tensorieller Form darstellt. Hierzu reicht die gezeigte Beschreibung des mechanischen Materialverhaltens mit Hilfe generalisierter Maxwell-Modelle aus. Für die künstlich erzeugten Lebensdauerdaten werden die Ergebnisse der Lebensdauermessungen unter uniaxialer Zugbelastung des Materials NR-N2M herangezogen. Als Grundlage dient die Anzahl der erduldeten Schwingspiele in Abhängigkeit der Streckung. Auf diese Weise ergeben sich die nachfolgend dargestellten Punkte als Grundlage zur Beschreibung des Ermüdungsverhaltens des durch das Stoffgesetz repräsentierten virtuellen Materials.

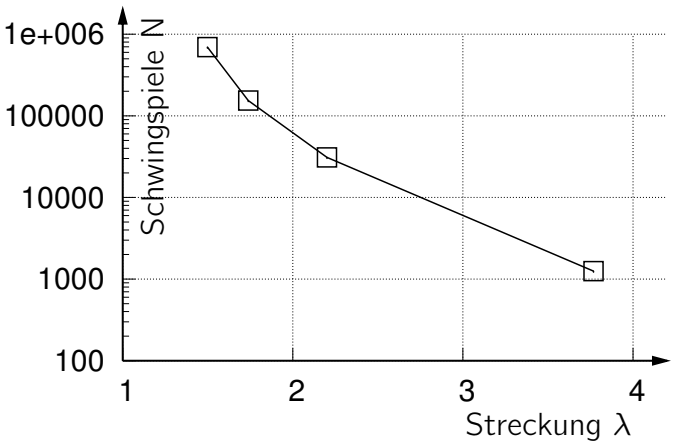


Abb. 9.4: Künstlich erzeugte Lebensdauerdaten für uniaxialen Zug: Anzahl der erduldbaren Schwingspiele in Abhängigkeit der maximalen Streckung in Anlehnung an NR-N2M.

Die Anzahl der erduldbaren Schwingspiele in Abhängigkeit der maximal auftretenden Streckung lässt sich im dargestellten Bereich sich wie folgt berechnen.

$$N_{N2M,uniax} = 8224312 \cdot \lambda^{-6,6128} \tag{9.1}$$

Die Werte für die Streckungen der in Abbildung 9.4 dargestellten Punkte werden mit Hilfe der Finite Elemente Methode und dem vorgestellten viskoelastischen Stoffgesetz nachgerechnet. Anhand der Simulationsergebnisse kann für jeden Punkt die für die Erreichung

der vorgegebenen Streckungen benötigte Verformungsenergiedichte bestimmt werden. Abbildung 9.5 zeigt die Anzahl der erduldbaren Schwingspiele für NR-N2M unter uniaxialer Zugbelastung in Abhängigkeit der künstlich erzeugten Werte für maximale Energiedichte im homogen verformten Bereich.

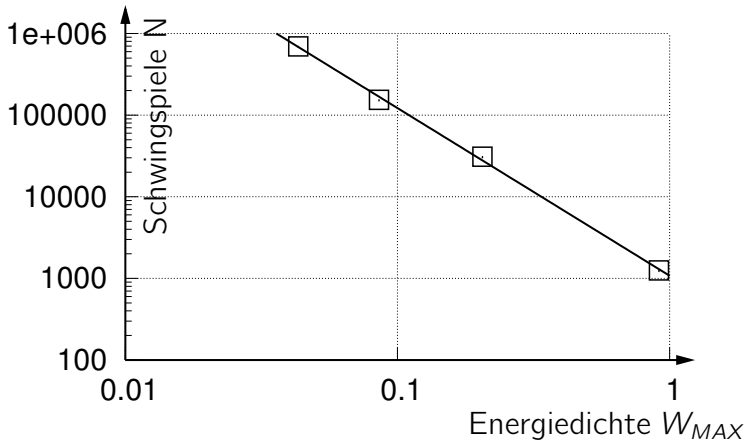


Abb. 9.5: Künstlich erzeugte Lebensdauerdaten für uniaxialen Zug: Anzahl der erduldbaren Schwingspiele in Abhängigkeit der maximal errechneten Energiedichte für NR-N2M.

Der Zusammenhang zwischen Energiedichte und Schwingspielen kann über die Gleichung 9.2 angenähert werden.

$$N_{N2M,k} \approx 1077,84 \cdot W_{MAX}^{-2,05} \tag{9.2}$$

Gleichung 9.2 wird im Folgenden als Grundlage zur Modellierung einer tensoriellen Schädigungsgröße verwendet.

9.2 Tensorielles Schadensmaß

Das Ermüdungsverhalten technischer Gummiwerkstoffe zeigt eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Belastungsrichtung. Aus diesem Grund kann die Ermüdung nicht durch eine skalare und entsprechend isotrope Schädigung beschrieben werden, wie es bei anderen Werkstoffen, wie zum Beispiel Stahl (siehe Miner [Min45]) üblich ist. Stattdessen gilt es, eine Größe zu finden, die einen Schädigungszustand räumlich beschreibt, also ein tensorielles Schadenssmaß. Selbstverständlich ist auch die Schädigung in elastisch-isotropen Materialien räumlicher Natur und könnte mit einem tensoriellen Schadensmaß beschrieben werden. Aufgrund der Isotropie handelt es sich bei der räumlichen Schädigung in diesem Zusammenhang jedoch um einen Zustand, der in allen drei Raumrichtungen die gleiche Ausprägung aufweist und demzufolge mit einem Kugeltensor zweiter Stufe beschrieben werden kann. Der Einfachheit halber wird bei isotropen Materialien jedoch nur ein skalarer Wert verwendet, der dem Betrag eines der Diagonalelemente des Kugeltensors entspricht.

Der einfachste Ansatz zur Bestimmung eines tensoriellen Schadenssmaßes ist die räumliche Verteilung eines akkumulierbaren Wertes entsprechend des induzierten Schadens. In herkömmlichen Akkumulationsansätzen wird die Anzahl der erduldeten Belastungszyklen in Schadensbeiträge umgerechnet und diese zu einem Gesamtschaden akkumuliert, wie zum Beispiel von Flamm [Fla02] oder [Fla03] beschrieben. Problematisch erweist sich hierbei, dass ausschließlich vollständige Belastungszyklen aufsummiert werden können. Bei komplexeren Belastungsreihenfolgen finden sich jedoch in den wenigsten Fällen geschlossene Belastungszyklen, bei denen Be- und Entlastungspfad äquivalent sind. Stattdessen kommen häufig Lastverläufe vor, bei denen auf dem Weg zur maximalen Belastung zwischenzeitlich wieder entlastet wird, bevor letzten Endes die maximale Last erreicht wird. Eine Beispiel solcher Belastungszyklen ist repräsentativ in Abbildung 9.6 dargestellt.

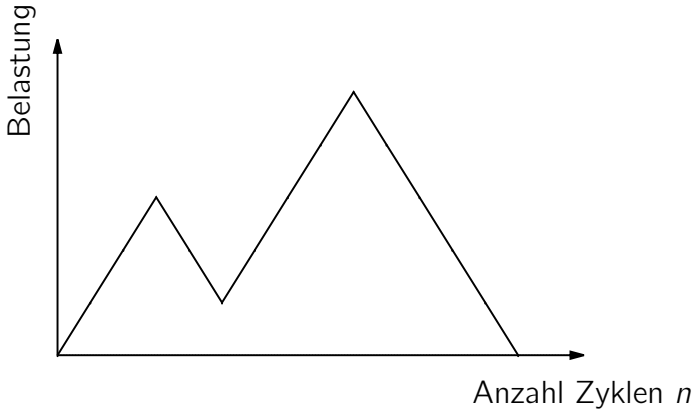


Abb. 9.6: Beispiel für einen nicht geschlossenen Belastungszyklus.

Eine sinnvolle Aussage über das Ermüdungsverhalten bei den dargestellten Beanspruchungsverläufen ist schwierig. Vorab müssen aus den unregelmäßigen Belastungsverläufen äquivalente, geschlossene Belastungszyklen bestimmt werden, die für eine Schadensabschätzung nutzbar sind. Dieser Vorgang verändert jedoch den ursprünglichen Beanspruchungsverlauf, so dass die Lebensdauerprognose verfälscht werden kann. Für ausschließlich einachsige Belastungen sind Verfahren wie zum Beispiel das Rainflow-Zählverfahren anwendbar (siehe hierzu Downing [Dow82]). Für mehrachsige komplexe Belastungspfade im Raum versagen solche Zählverfahren jedoch.

Zur Vermeidung der beschriebenen Unstimmigkeiten bei der Lebensdauerprognose gilt es, ein räumliches Schädigungsmaß zu finden, dass unabhängig von vollständig abgeschlossenen Belastungszyklen den Schaden in einem Materialpunkt akkumulieren kann.

9.2.1 Ellipsoidrepräsentation von Schädigungstensoren

Auf Grundlage der im Rahmen der vorliegenden Arbeit nachgewiesenen Abhängigkeit des Ermüdungsverhaltens technischer Gummiwerkstoffe sowohl von der Last- als auch von der

Richtungsmodulation der Belastungsrichtung, lassen sich für ein geeignetes Schadensmaß die nachfolgenden Attribute ableiten.

Beschreibung von Schädigung im Raum

Die Charakterisierung der Lebensdauer unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen zeigt, dass eine reine Richtungsmodulation der Last zu einem ermüdungsbedingten Versagen gefüllter elastomerer Werkstoffe führen kann. Aus den Versuchen unter einfacher einseitiger Scherung und einfacher beidseitiger Scherung kann außerdem abgeleitet werden, dass die Ermüdung eine gerichtete Größe ist, da die Lebensdauereigenschaften für diese beiden Fälle sonst nahezu identisch sein müssten. Die Schädigungszustände in zwei senkrecht zueinander stehenden Richtungen in einem Materialpunkt sind unabhängig voneinander. Daraus folgt, dass für die Beschreibung der Schädigung in einem Materialpunkt eine räumliche Größe, zum Beispiel ein Tensor 2. Stufe, erforderlich ist.

Akkumulierbarkeit

Zur Beschreibung des Ermüdungszustandes eines Materialpunktes im Verlauf von dessen gesamter Lebensdauer ist es notwendig, eine akkumulierbare Größe zu finden. Im Normalfall führt eine Belastung zu einer Erhöhung der Schädigung bzw. zu einer Abnahme der Lebensdauer. Die Zunahme der Ermüdung ist hierbei nicht ausschließlich von der Belastung abhängig, sondern auch vom aktuellen Schadenszustand. Im Umkehrschluss muss der aktuelle Schaden die Information über die gesamte Belastungsvorgeschichte berücksichtigen. Unter der Annahme, dass ein Schaden in einem realen Materialpunkt durch Erdulden einer Belastung nur zu- aber nicht abnehmen kann, muss für das tensorielle Schadensmaß in ähnlicher Weise gefordert werden, dass es über den gesamten Belastungsverlauf nur zunehmen kann.

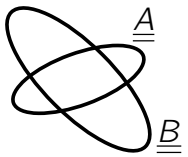
Berücksichtigung von Richtungsmodulation

Eine Ermüdung aufgrund einer rein richtungsmodulierten Belastung erfordert nicht nur ein räumliches Schädigungsmaß, sondern auch die Abhängigkeit des Schädigungsmaßes von der Modulation der Belastungsrichtung selbst. Der Schaden muss also bei einer rein richtungsmodulierten Belastung weiter anwachsen und ist somit abhängig vom Belastungspfad.

Die Anforderungen an ein geeignetes Schadensmaß werden von einem positiv definiten symmetrischen Tensor zweiter Stufe erfüllt. Der Nachweis hierzu erfolgt über die Ellipsoidrepräsentation von Tensoren nach Besdo [Bes04], derzufolge ein Tensor 2. Stufe geometrisch als Ellipsoid dargestellt werden kann. Die Eigenwerte entsprechen hierbei den geometrischen Abmessungen des Ellipsoids. Gleichzeitig repräsentieren die Ausrichtung des maximalen und minimalen Eigenwertes sowie der Vektor senkrecht zu diesen beiden Richtungen die Eigenvektoren des zugehörigen Tensors. Weitere Informationen bezüglich der Ellipsoidrepräsentation von Tensoren finden sich in Abschnitt 9.2.1.

Zur Erfüllung der Forderung, dass der Schaden eines Materialpunktes nur zunehmen kann ist ein Verfahren notwendig, dass eine Klassifizierung des tensoriellen Schädigungsmaßes in *größer* und *kleiner* im Vergleich zu einer Referenz ermöglicht. Die Anwendung des Verfahrens ist auf das Schädigungsmaß beschränkt. Daher reicht es aus, ausschließlich symmetrische, positiv definite Tensoren unterscheiden zu können. Für die Definition der Relation zweier Tensoren zueinander kann das kleinste, die beiden Tensoren umfassende Ellipsoid genutzt werden (siehe Ihlemann [Ihl14]. Das Verfahren zur Bestimmung des kleinsten zwei Tensoren umfassenden Ellipsoids wurde erstmals in Besdo [Bes04] vorgestellt. In der nachfolgenden Beschreibung werden die Begriffe *Ellipsoid* und *Tensor* äquivalent verwendet. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass beide Begriffe in diesem Zusammenhang für symmetrische positiv definite Tensoren stehen. Zur Vereinfachung der Darstellung werden in den nachfolgenden Darstellungen Ellipsen anstelle von Ellipsoiden gezeigt. Die dargestellten Zusammenhänge können jedoch ohne weiteres auf räumliche Probleme übertragen werden.

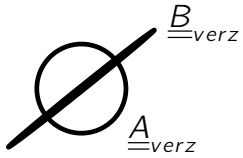
Gegeben seien zwei symmetrische und positiv definite Tensoren $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$. Für dieses Beispiel sind alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der beiden Tensoren verschieden.



$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \qquad \text{mit} \qquad EW(\underline{\underline{A}}) > 1 \tag{9.3}$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}^T \qquad \text{mit} \qquad EW(\underline{\underline{B}}) > 1 \tag{9.4}$$

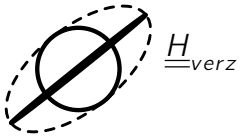
Zur Generierung des kleinsten umfassenden Ellipsoids werden beide Tensoren mit dem Inversen von einem der beiden Tensoren verzerrt. In diesem Fall werden $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ mit $\underline{\underline{A}}^{-1}$ verzerrt. Auf diese Weise entspricht der verzerrte Tensor $\underline{\underline{A}}_{verz}$ dem Einheitstensor.



$$\underline{\underline{B}}_{verz} = \sqrt{\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}} \tag{9.5}$$

$$\underline{\underline{A}}_{verz} = \sqrt{\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}} = \underline{\underline{E}} \tag{9.6}$$

In der verzerrten Konstellation ist es über einen Vergleich der Eigenwerte einfach möglich, dass kleinste, die beiden Tensoren umfassende Ellipsoid zu generieren.

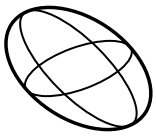


$$EW\left(H_{verz}\right) = MAX\left(EW\left(\underline{\underline{B}}_{verz}\right), 1\right) \tag{9.7}$$

Die Eigenvektoren des verzerrten kleinsten Umfassenden Ellipsoids entsprechen den Eigenvektoren des Tensors $\underline{\underline{B}}_{verz}$.

$$EV\left(H_{verz}\right) = EV\left(\underline{\underline{B}}_{verz}\right) \tag{9.8}$$

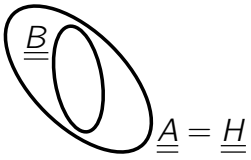
Für die Bestimmung des unverzerrten kleinsten umfassenden Ellipsoids wird $\underline{\underline{H}}_{verz}$ mit $\underline{\underline{A}}$ in die Ausgangskonfiguration von $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ deformiert.



$$\underline{\underline{H}} = \sqrt{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{H}}_{verz} \cdot \underline{\underline{H}}_{verz} \cdot \underline{\underline{A}}} \tag{9.9}$$

Der Algorithmus zur Generierung des kleinsten, zwei Ausgangsellipsoide $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ umfassenden Tensors soll als Hüllalgorithmus oder kurz als $H\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right)$ bezeichnet werden. Dass es sich bei dem mit dem vorgestellten Verfahren erstellten Ellipsoid tatsächlich um das kleinste umfassende Ellipsoid handelt, wird von Ihlemann [Ihl14] und Klauke [Kla05] gezeigt.

Mit Hilfe der Ellipsoidrepräsentation von Tensoren und dem kleinsten umfassenden Ellipsoid kann die Unterscheidung von *größer* und *kleiner* anschaulich und in Anlehnung an die Arbeit von Ihlemann [Ihl14] wie folgt definiert werden: Ein Tensor $\underline{\underline{A}}$ ist größer als ein Tensor $\underline{\underline{B}}$, wenn die Ellipsoidrepräsentation des Tensors $\underline{\underline{B}}$ vollständig innerhalb der Ellipsoidrepräsentation des Tensors $\underline{\underline{A}}$ liegt. Das kleinste, die beiden Tensoren umfassende Ellipsoid entspricht dem größeren der beiden Tensoren.

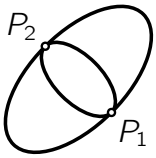


$$\underline{\underline{A}} > \underline{\underline{B}} \qquad \text{(größer als)} \tag{9.10}$$

Neben den Eigenwerten spielen aber auch die Eigenrichtungen eine maßgebliche Rolle beim Größenvergleich zweier Tensoren. So ist zum Beispiel ein Tensor $\underline{\underline{A}}$ denkbar, der die gleichen Abmessungen wie Tensor $\underline{\underline{B}}$ in der Skizze zu Gleichung 9.10 aufweist, jedoch in der dargestellten Ebene um 90° gedreht ist. In diesem Fall läge Tensor $\underline{\underline{B}}$ nicht vollständig innerhalb von Tensor $\underline{\underline{A}}$, obgleich die Eigenwerte unverändert sind. Auf diesen Fall wird jedoch noch gesondert im weiteren Verlauf dieses Abschnitts eingegangen. Umgekehrt zur Zuordnung *größer als* gilt selbstverständlich auch, dass Tensor $\underline{\underline{B}}$ *kleiner als* Tensor $\underline{\underline{A}}$ ist. Solche absoluten Aussagen sind nur dann möglich, wenn das kleinste, die beiden Ausgangstensoren umfassende Ellipsoid einer der beiden Tensoren selber ist.

$$\boxed{\underline{\underline{A}} > \underline{\underline{B}}} \qquad \text{wenn} \qquad H\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right) = \underline{\underline{A}} \tag{9.11}$$

Neben der eindeutigen Zuordnung eines Tensors $\underline{\underline{A}}$, der größer ist als ein Referenztensor $\underline{\underline{B}}$, ist auch der Zustand *größer gleich* möglich. Im Gegensatz zur ursprünglichen mathematischen Bedeutung gilt in diesem Fall nicht, dass ein Tensor entweder größer oder gleich einem zweiten Tensor ist, sondern beide Zustände gleichzeitig gültig sind. In der nachstehenden Abbildung ist dieser Fall mit Hilfe von zwei Ellipsen dargestellt.

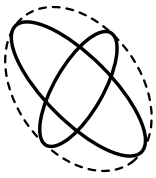


$$\underline{\underline{A}} \geq \underline{\underline{B}} \qquad \text{(größer-gleich)} \tag{9.12}$$

Bei dieser tensoriellen Ungleichung wird deutlich, dass Tensoren aufgrund ihrer drei Eigenrichtungen und den dazugehörigen Eigenwerten mehr als eine Ungleichungsbedingung

auf einmal erfüllen können. Die Bedingung *größer-gleich* bzw. *kleiner-gleich* ist genau dann erfüllt, wenn die Ellipsoidrepräsentationen der Tensoren sich berühren, sich jedoch nicht durchdringen. In diesem Fall ist das kleinste die beiden Tensoren umfassende Ellipsoid immer noch identisch mit einem der beiden Tensoren. Beim Eigenwertvergleich können jedoch nicht ausschließlich die Eigenwerte eines Tensors herangezogen werden, um den verzerrten Hülltensor zu bestimmen. Die Punkte P_1 und P_2 markieren die Stellen, bei denen beide Tensoren die Abmessungen des Hüllellipsoids bestimmen, ohne dass sich das Hüllellipsoid ändert.

Sobald die Ellipsoidrepräsentationen der zu vergleichenden Tensoren sich schneiden und nicht nur berühren, gilt keine der oben genannten Relationen.



$$\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{B}} \qquad \text{(ungleich)} \tag{9.13}$$

Das kleinste die beiden Ausgangstensoren umfassende Ellipsoid entspricht in diesem Falle nicht mehr einem der beiden Ausgangstensoren. Stattdessen kann aus den beiden Ausgangsellipsoiden ein neues Hüllellipsoid bestimmt werden, dass in der Skizze gestrichelt dargestellt ist.

Mit Hilfe der geometrischen Darstellung von Tensoren durch Ellipsoide und unter Verwendung von Hüllellipsoiden sind weitere tensorielle Ungleichungen denkbar, die sich aus der jeweiligen Konstellation von Eigenvektoren und Eigenwerten ableiten lassen. Diese Ungleichungen sind jedoch bei der Suche nach einem geeigneten tensoriellen Schädigungsmaß nicht zielführend, so dass an dieser Stelle auf die Herleitung verzichtet werden soll.

9.2.2 Hüllellipsoide bei Last- und Richtungsmodulation

Mit den Definitionen tensorieller Ungleichungen und des kleinsten, zwei Tensoren umfassenden Ellipsoids besteht nun die Möglichkeit, sowohl eine Schädigung für eine reine Lastmodulation als auch eine Schädigung für eine reine Richtungsmodulation zu modellieren. Hierbei ist die Art, wie ein geeigneter Schädigungstensor aus einer mechanischen Last quantifiziert und berechnet wird, zunächst unerheblich. Nachfolgend sollen die Entwicklung der Hüllellipsoide für eine richtungskonstante Last mit anwachsender Amplitude und eine amplitudenkonstante Last mit rotierender Belastungsrichtung untersucht werden.

Richtungskonstante anwachsende Last

Zunächst soll untersucht werden, wie sich der Hüllalgorithmus verhält, wenn die Belastungsrichtungen konstant bleiben, die Belastungsamplitude jedoch ansteigt. Zu diesem Zweck wird der Hüllalgorithmus nacheinander für jeweils zwei Tensoren $\underline{\underline{A}}_i$ und $\underline{\underline{B}}_i$ ausgewertet. Der Index i steht hierbei als Zähler für die Reihenfolge der Auswertung. Mit

ansteigendem i wird schrittweise ein Eigenwert von $\underline{\underline{A}}_i$ erhöht. Gleichzeitig entspricht $\underline{\underline{B}}_i$ dem Hülltensor aus dem Schritt zuvor. Es gilt $\underline{\underline{B}}_i = H(\underline{\underline{A}}_{i-1}, \underline{\underline{B}}_{i-1})$. Die nachstehenden Abbildungen zeigen von a nach d für ein aufsteigendes i (hervorgehoben) den Hülltensor vom aktuellen Schritt, den Hülltensor vom Schritt zuvor sowie (gestrichelt) die den zum jeweiligen Schritt den Tensor $\underline{\underline{A}}_{i-1}$ repräsentierende Ellipse.

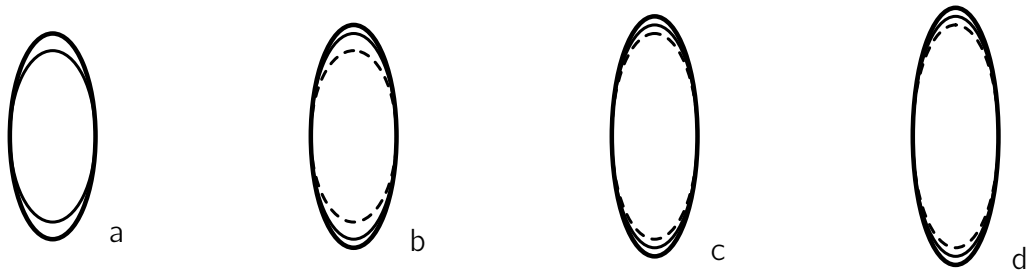


Abb. 9.7: Entwicklung des Schädigungsellipsoids bei anwachsender richtungskonstanter Last

Anhand der Abbildung ist erkennbar, dass das Hüllellipsoid für eine richtungskonstante Belastung ebenfalls richtungskonstant ist. Gleichzeitig steigt mit anwachsender Belastung der Eigenwert in Richtung der Belastung. Dies gibt einen Hinweis darauf, dass der Hüllalgorithmus auch zur Beschreibung von amplitudenmodulierten Belastungen geeignet sein kann, wie zum Beispiel bei uniaxialen Zugversuchen für die Erstellung von Wöhlerkurven.

Richtungsmodulation

Für die Untersuchungen der Abhängigkeit des Hülltensors von einer rein richtungsmodulierten Belastung wird der Hüllalgorithmus auf die Tensoren $\underline{\underline{a}}$ und $\underline{\underline{b}}$ angewendet. $\underline{\underline{a}}$ entspricht dabei dem um einen Winkel α rotierten Tensor $\underline{\underline{b}}$

$$\underline{\underline{a}}_i = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{b}}_i \cdot \underline{\underline{R}}^T \tag{9.14}$$

Der Index i dient hierbei als Zähler. Für jedes i wird der Rotationswinkel α um 15° erhöht. Anschließend wird der Hüllalgorithmus auf die beiden Tensoren $\underline{\underline{a}}_i$ und $\underline{\underline{b}}_i$ angewendet. Die Ergebnisse dieses Vorgehens sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

In der Abbildung ist das jeweilige Hüllellipsoid hervorgehoben. Eines der Ausgangsellipsoide (dünn) entspricht $\underline{\underline{a}}_i$, das andere zeigt das Hüllellipsoid $\underline{\underline{b}}_{i-1}$. Der Tensor $\underline{\underline{a}}_{i-1}$ ist gestrichelt dargestellt. Mit Hilfe der die Tensoren repräsentierenden Ellipsen ist erkennbar, dass sich das Hüllellipsoid bei jedem Schritt in seiner Form und Ausrichtung verändert. Dies weist darauf hin, dass der Hüllalgorithmus in der Lage ist, eine reine Richtungsmodulation abzubilden. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Ellipsen wird jedoch deutlich, dass sich nach einer schritweisen Rotation um 180° durch den Hüllalgorithmus ein Kreis bildet, der sich bei einer weiteren Erhöhung des Rotationswinkels nicht mehr ändert. Aus

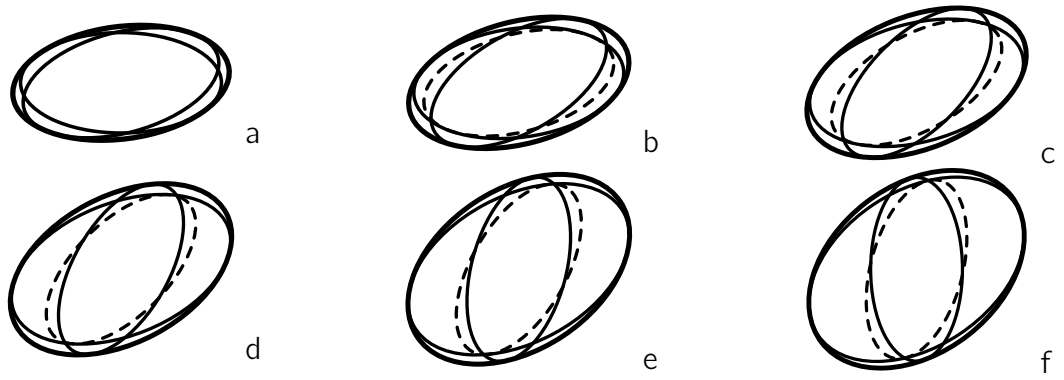


Abb. 9.8: Entwicklung des Schädigungsellipsoids bei rotierenden Belastungsrichtungen

diesem Grund kann der Hüllalgorithmus nicht unmittelbar für eine Schädigungshypothese verwendet werden, da zum Beispiel die Rotationszyklen einer einfache Scherung mit rotierenden Achsen im stationären Zustand nicht mehr voneinander unterschieden werden können. Dennoch wird das kleinste, zwei symmetrische Tensoren umfassende Ellipsoid eine wesentliche Rolle bei der Quantifizierung des induzierten Schadens spielen.

9.2.3 Berechnung von Hülltensoren für positiv semidefinite Tensoren

Der Algorithmus zur Bestimmung des zwei Tensoren umfassend Hülltensors ist auf positiv semidefinite Tensoren nicht ohne weiteres anwendbar, da sich diese Tensoren aufgrund einer oder mehrerer Eigenwerte von null nicht invertieren lassen. Dieses Problem kann jedoch umgangen werden, wenn zu den positiv semidefiniten Tensoren ein Vielfaches des Einheitstensors hinzuaddiert und anschließend vom Hülltensor wieder abgezogen wird. Dies ist jedoch nur dann erlaubt, wenn Gleichung 9.15 allgemein gültig ist.

$$H\left(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}\right) \approx H\left((\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}), \underline{\underline{B}}\right) - d\underline{\underline{E}} \tag{9.15}$$

Der Term $d\underline{\underline{E}}$ entspricht hierbei dem Vielfachen des Einheitstensors. Der Wert für d wird hierbei möglichst gering gewählt, um zwar ein Invertieren positiv semidefiniter Tensoren zu ermöglichen, den Einfluss auf das Ergebnis jedoch so gering wie möglich zu halten. Gleichung 9.15 kann wie folgt umgeformt werden.

$$H\left(\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}, (\underline{\underline{B}})\right) + d\underline{\underline{E}} \approx H\left((\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}), \underline{\underline{B}}\right) \tag{9.16}$$

Wird Tensor $\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}$ vollständig von $\underline{\underline{B}}$ umschlossen, ist der resultierende Hülltensor $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{B}} - d\underline{\underline{E}}$. Für Gleichung 9.18 und für ausreichend kleine d ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\underline{\underline{B}} - d\underline{\underline{E}} \approx \underline{\underline{B}}. \tag{9.17}$$

Für den Fall, dass $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ die gleichen Eigenrichtunge aufweisen, gilt Gleichung 9.18 sogar ohne Einschränkungen.

$$H\left(\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}, (\underline{\underline{B}})\right) + d\underline{\underline{E}} = H\left((\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}), \underline{\underline{B}}\right) \tag{9.18}$$

Für weiteren Konstellationen verändert das Hinzuaddieren von $d\underline{\underline{E}}$ zwar das Ergebnis, je kleiner d jedoch gewählt wird, desto geringer ist der Einfluss. Aufgrund der Tatsache, dass der resultierende Hülltensor stets die beiden Ausgangstensoren vollständig umschließt, ist es nicht möglich durch das nachgeschaltete Subtrahieren von $d\underline{\underline{E}}$ negative Eigenwerte zu erzeugen. Zusätzlich zu Gleichung 9.18 gilt folgende Aussage.

$$H\left(\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}, (\underline{\underline{B}})\right) + d\underline{\underline{E}} \leq H\left((\underline{\underline{A}} + d\underline{\underline{E}}), \underline{\underline{B}}\right) \tag{9.19}$$

9.2.4 Der Schadenstensor

In diesem Kapitel soll anhand phänomenologischer Betrachtungen ein Schadenstensor hergeleitet werden, mit dessen Hilfe Schädigung im Raum beschrieben und daraus eine Lebensdauer in einem Materialpunkt abgeleitet werden kann. Zu diesem Zweck wird zunächst eine tensorielle Formulierung für amplitudenmodulierte Belastungen vorgestellt. Im Anschluss wird dieser Ansatz erweitert, um den Einfluss rotierender Belastungsrichtungen abzubilden. Zur Überprüfung des Ansatzes wird der Schadenstensor für einfache Scherdeformationen bestimmt, die eine Kombination aus Last- und Richtungsmodulation darstellen.

Für das tensorielle Schädigungsmaß soll die Arbeit als akkumulierbare Größe herangezogen werden, die während des Belastungsprozesses aufgewendet wird. Der Grund hierfür ist, dass das System im Verlauf der Belastung auf einen energetisch ungünstigeren Zustand gezwungen wird. In Anlehnung an das Prinzip von Le Chatelier, (Le Chatelier: Übt man auf ein chemisches System im Gleichgewicht einen Zwang aus, so reagiert es, indem sich der Zwang verkleinert), stellt das Speichern von Energie durch zum Beispiel eine Verformung einen Zwang dar. Die „Verkleinerung des Zwanges“erfolgt durch lokale Schädigungen im Materialgefüge, die ihrerseits zur Ermüdung des Materials führen. Im Verlauf des Entlastungsprozesses befindet sich das System bereits auf dem Weg zu einem energetisch günstigeren Zustand, also einem Zustand mit einem geringerem Zwang. Für die Modellierung des Ermüdungsverhaltens soll in diesem Fall daher keine weitere Erhöhung der Schädigung vorgesehen werden, obgleich Schädigungen in geringem Umfang durchaus vorstellbar sind. Diese Schädigungen sind jedoch nur bei sehr langsamen, quasistatischen Deformationsprozessen relevant für die Materialermüdung und dem daraus resultierenden Materialversagen. Der Schädigungseintrag im Verlauf der Entlastung wird daher im vorgestellten Modell nicht berücksichtigt. Für die Modellierung des Ermüdungsverhaltens wird

dementsprechend ausschließlich die im Verlauf des Belastungspfades aufgewendete Energie herangezogen. Die Arbeit W_{21}, die für die Belastung von einem Zeitpunkt t_1 zu einem Zeitpunkt t_2 aufgewendet werden muss, lässt sich näherungsweise wie folgt beschreiben.

$$W_{21} = W(t_2) - W(t_1) \tag{9.20}$$

Hierbei gilt $t_2 > t_1$. Der Unterschied zwischen t_1 und t_2 muss hinreichend klein sein, so dass der Verlauf von W_{21} mit ausreichender Genauigkeit beschrieben wird. Ist W_{21} größer als null, findet eine Belastung statt, für $W_{21} < 0$ eine Entlastung. Die Vernachlässigung der energetischen Beiträge im Verlauf der Entlastung geschieht automatisch bei der Modellierung der Schädigung im Raum, die im weitern Verlauf dieses Kapitels beschrieben wird.

Die anteilige räumliche Verteilung der im Verlauf der Belastung aufgewendeten Energie erfolgt über den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{\widetilde{T}}}$. Hierbei ist sicherzustellen, dass der mit Hilfe des Spannungstensors berechnete Schadenseintrag stets positiv ist. Mit Hilfe einer Tensorfunktion mit tensorwertigen Argumenten wird der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor modifiziert, so dass die Eigenwerte stets positiv sind. Die modifizierten Spannungen werden mit $\underline{\underline{\widetilde{T}}}_{mod}$ bezeichnet.

$$\underline{\underline{\widetilde{T}}}_{mod} = m\left(\left(\underline{\underline{\widetilde{T}}}\right)\right) \tag{9.21}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Verlauf der Modifikationsfunktion auf Grundlage einer Parabelgleichung.

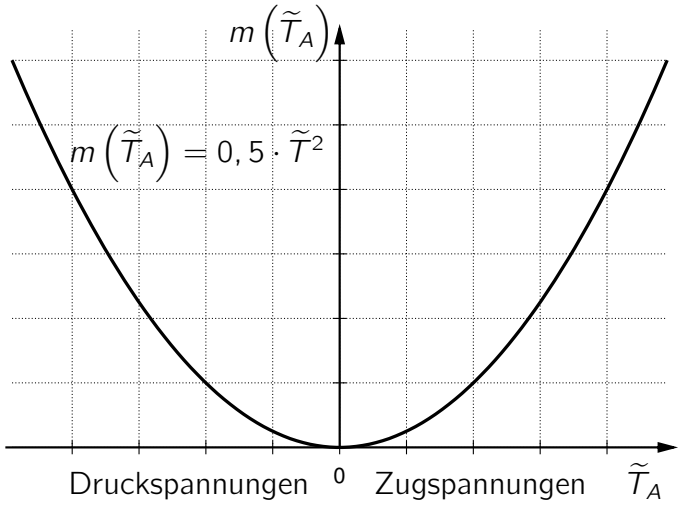


Abb. 9.9: Verlauf der Funktion zur Wichtung des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors

Die Gleichung der Tensorfunktion mit tensorwertigen Argumenten lautet dementsprechend wie folgt.

$$m\left(\left(\underline{\underline{\widetilde{T}}}\right)\right) = 0,5 \cdot \underline{\underline{\widetilde{T}}} \cdot\cdot \underline{\underline{\widetilde{T}}} \tag{9.22}$$

Bei der Beschreibung der Schädigung im Raum mit Hilfe von modifizierten 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren soll darüber hinaus berücksichtigt werden, dass ausschließlich dann ein Schaden entsteht, wenn die Spannungen im Sinne der Beschreibungen in Kapitel 9.2.1 anwachsen. Hierzu wird der Hüllalgorithmus aus Gleichung 9.9 auf zwei zeitlich aufeinander folgende Spannungstensoren angewendet. Aus $\underline{\underline{\widetilde{T}}}_1 = \underline{\underline{\widetilde{T}}}(t_1)$ und $\underline{\underline{\widetilde{T}}}_2 = \underline{\underline{\widetilde{T}}}(t_2)$, $(t_2 > t_1)$ wird der gemeinsame Hülltensor $\underline{\underline{H}}_{12}$ gebildet. Hierbei ist zu beachten, dass die Eigenwerte des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors null werden können, wie zum Beispiel im Verlauf einer uniaxialen Zugbelastung. In diesem Fall ist der Hüllalgorithmus nicht ohne weiteres anwendbar, da positiv semidefinite Tensoren nicht invertiert werden können. Für eine sinnvolle Anwendung des Hüllalgorithmus auf positiv semidefinite Spannungstensoren wird daher jeweils ein Vielfaches des Einheitstensors $\underline{\underline{E}}$ zu den Spannungstensoren addiert und im Anschluss vom Hülltensor wieder abgezogen. Weitere Informationen zu dieser Vorgehensweise finden sich im Kapitel 9.2.3.

$$\underline{\underline{H}}_{12} = H\left(\left(\underline{\underline{\widetilde{T}}}_{1,mod} + d\underline{\underline{E}}\right), \left(\underline{\underline{\widetilde{T}}}_{2,mod} + d\underline{\underline{E}}\right)\right) - d\underline{\underline{E}} \tag{9.23}$$

Zur Bestimmung des Schadenseintrages geht die Differenz von $\underline{\underline{H}}_{12}$ und $\underline{\underline{\widetilde{T}}}_{1,mod}$ in die Berechnung mit ein (Gleichung 9.24).

$$\Delta\underline{\underline{H}}_i = \underline{\underline{H}}_{i,i-1} - \underline{\underline{\widetilde{T}}}_{i-1} \tag{9.24}$$

Auf diese Weise wird sichergestellt, dass der Schädigungseintrag stets null oder positiv ist (bzw. $\underline{\underline{0}}$ entspricht oder ausschließlich positive Eigenwerte aufweist). Hierbei wird ausgenutzt, dass $\underline{\underline{H}}_{12} = \underline{\underline{\widetilde{T}}}_{1,mod}$ ist, wenn im Sinne von Gleichung 9.10 die Beziehung $\underline{\underline{\widetilde{T}}}_{1,mod} > \underline{\underline{\widetilde{T}}}_{2,mod}$ gilt.

Die Eigenwerte von $\Delta\underline{\underline{H}}_i$ sollen bei der Bestimmung des Schadenseintrages keine Rolle spielen. Aus diesem Grund wird $\Delta\underline{\underline{H}}_i$ normiert. Die Normierung erfolgt, indem der Tensor durch die Summe seiner Eigenwerte geteilt wird, um einen relativen Wichtungstensor für die Richtungsinformationen zu bekommen. Aus jedem positiv definiten Tensor zweiter Stufe kann auf diese Weise ein Wichtungstensor erstellt werden, der entsprechend seiner Ausrichtung eine relative Bewertung von Größen im Raum ermöglicht. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

$\underline{\underline{X}}$ sei ein positiv definiter Tensor zweiter Stufe mit den Eigenwerten $EW(\underline{\underline{X}})$: X_I, X_{II}, X_{III}. Die Bestimmung des Wichtungstensors $\overline{\underline{\underline{X}}}$ erfolgt über das Teilen von $\underline{\underline{X}}$ durch dessen erste Invariante.

$$\overline{\underline{\underline{X}}} = \frac{\underline{\underline{X}}}{I_1(\underline{\underline{X}})} \tag{9.25}$$

Als geeigneter Wichtungstensor muss die Summe der Eigenwerte eins ergeben. Die Summe der Eigenwerte entspricht wiederum der ersten Invariante des Wichtungstensors.

$$I_1(\overline{\underline{\underline{X}}}) \stackrel{!}{=} 1 \tag{9.26}$$

Die erste Invariante kann über das Doppelpunktprodukt des Tensors mit dem Einheitstensor ausgedrückt werden.

$$1 \stackrel{!}{=} \left(\frac{\underline{\underline{X}}}{\underline{\underline{X}} \cdot\cdot \underline{\underline{E}}} \right) \cdot\cdot \underline{\underline{E}} \tag{9.27}$$

Gleichung (9.27) kann im System der Eigenrichtungen von $\underline{\underline{X}}$ betrachtet werden.

$$1 \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} \frac{X_I}{X_I+X_{II}+X_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{X_{II}}{X_I+X_{II}+X_{III}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{X_{III}}{X_I+X_{II}+X_{III}} \end{bmatrix} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \cdot\cdot \underline{\underline{E}} \tag{9.28}$$

Eine Ausführung des Doppelpunktproduktes zeigt, dass die erste Invariante des Wichtungstensors $\overline{\underline{\underline{X}}}$ stets eins ist.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{X_I}{X_I + X_{II} + X_{III}} + \frac{X_{II}}{X_I + X_{II} + X_{III}} + \frac{X_{III}}{X_I + X_{II} + X_{III}} \\ &= \frac{X_I + X_{II} + X_{III}}{X_I + X_{II} + X_{III}} = 1 \end{aligned} \tag{9.29}$$

Diese Methode zur Ermittlung eines Wichtungstensors wird nun auf $\Delta\underline{\underline{H}}_i$ angewendet, so dass sich die Berechnung eines inkrementellen Schadenseintrages $\underline{\underline{s}}_i$ wie folgt beschreiben lässt.

$$\boxed{\underline{\underline{s}}_i = \Delta\overline{\underline{\underline{H}}}_i \cdot W_{i,i-1}} \tag{9.30}$$

Somit ist es möglich, die im Verlauf der Belastung aufgewendete Energie anteilig verschiedenen Raumrichtungen zuzuordnen und einen inkrementellen Schadenstensor zu generieren. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass dieses Verfahren nur auf hinreichend kleine Teilausschnitte eines Belastungsprozesses anwendbar ist, eine zu grobe Diskretisierung eines Lastverlaufes führt, wie bei anderen numerischen Verfahren auch, zu einer Verfälschung

des Ergebnisses. Es sei angemerkt, dass $\underline{\underline{s}}_i$ lediglich eine phänomenologische Größe darstellt. Über die Existenz oder die Sinnhaftigkeit einer physikalisch herleitbaren gerichteten energetischen Größe soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit keine Aussage getroffen werden.

9.2.5 Amplitudenkorrektur und Rotationskorrektur

Die Summe aller inkrementellen Schadensbeiträge entspricht dem Gesamtschaden für den charakteristischen Belastungsprozess. Besteht der charakteristische Belastungsprozess aus N Inkrementen, so lässt sich der zugehörige Gesamtschaden nach Gleichung 9.31 berechnen.

$$\underline{\underline{S}}_{ges} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{S}}_i \tag{9.31}$$

Der Tensor $\underline{\underline{s}}_{ges}$ repräsentiert den durch den charakteristischen Belastungsprozess induzierten Schaden. Bei einem Lebensdauerversuch unter uniaxialer Zugbelastung entspräche dies zum Beispiel dem Schaden eines Schwingspiels. Die tensorielle Schadenssumme $\underline{\underline{D}}$ beim Versagen des Materials kann im einfachsten Fall entsprechend einer linearen Schadensakkumulation aus der Anzahl der erduldbaren Schwingspiele J und dem charakteristischen Schaden berechnet werden.

$$\underline{\underline{D}} = J \cdot \underline{\underline{S}}_{ges} \tag{9.32}$$

Hierbei ist es jedoch erforderlich, den Schadenseintrag in Abhängigkeit von dessen Belastungsintensität zu wichten, um sicherzustellen, dass das Material stets bei der gleichen Schadenssumme versagt. Um die Notwendigkeit einer Wichtungsfunktion aufzuzeigen wird das Verfahren zur Bestimmung von $\underline{\underline{D}}$ auf die Simulationsergebnisse eines Zugversuchs angewendet und der maximal erduldbare Schaden in Abhängigkeit der maximalen Belastungsamplitude berechnet. Hierzu wird die tensorielle Schadenssumme nach 9.32 gebildet. Der Graph D_{MAX} *ungewichtet* in Abbildung 9.10 zeigt den maximalen Eigenwert von $\underline{\underline{D}}$ für einen harmonisch oszillierenden Zugversuch in Abhängigkeit der maximal auftretenden Cauchy-Spannungen. Der für die Bestimmung von $\underline{\underline{D}}$ zugrunde gelegte inkrementelle Schaden $\underline{\underline{s}}_i$ ist hierbei unabhängig von der Intensität der im Materialpunkt vorherrschenden Belastung.

Es ist erkennbar, dass das Versagen abhängig von der maximalen Belastungsamplitude für unterschiedliche maximale Schadenssummen auftritt. Dies ist jedoch nicht sinnvoll. Stattdessen ist ein Verhalten anzustreben, bei dem das Versagen unabhängig von der maximalen Belastungsamplitude und stets bei erreichen eines vorgegebenen maximalen Wertes für $\underline{\underline{D}}$ eintritt. Hierzu muss der inkrementelle Schadenseintrag in Abhängigkeit

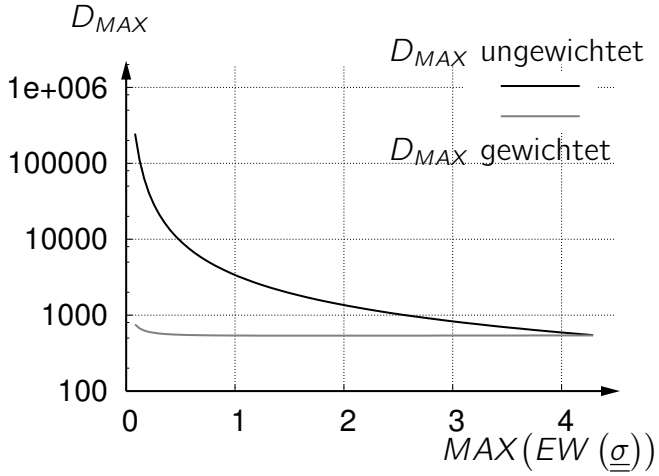


Abb. 9.10: Berechneter maximal erduldbarer Schaden in Abhängigkeit der maximal auftretenden Amplitude.

der im Materialpunkt wirksamen Belastungsintensität mit Hilfe eines Wichtungsfaktors a_{korr} korrigiert werden. Die Wichtung erfolgt in Abhängigkeit des elastischen Anteils der Energiedichte und wird als *Amplitudenkorrektur* bezeichnet.

$$a_{korr} = W_{el}^{p_3} \tag{9.33}$$

Zur Wichtung des inkrementellen Schadenseintrages wird dieser mit der Amplitudenkorrektur multipliziert.

$$\underline{\underline{s}}_{i,mod} = \underline{\underline{s}}_i \cdot a_{korr} \tag{9.34}$$

Der Tensor der Schadenssumme lässt sich für J Schwingspiele dementsprechend wie folgt berechnen.

$$\boxed{\underline{\underline{D}} = J \cdot \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{s}}_{i,mod}} \tag{9.35}$$

Mit einem Wert von $p_3 = 1,08$ für a_{korr} kann die Abhängigkeit des maximal erduldbaren Schadens von der maximalen Belastung stark reduziert werden. Der maximal erduldbare Schaden unter Berücksichtigung von $\underline{\underline{s}}_{i,mod}$ und in Abhängigkeit der maximal auftretenden Belastung ist in Abbildung 9.10 mit der Bezeichnung D_{MAX} *gewichtet* dargestellt. Unter Verwendung des Korrekturfaktors (Gleichung 9.33) ist der beim Versagen aufsummierte Schaden weitestgehend konstant. Lediglich bei kleinen Belastungen wird der inkrementelle Schadenseintrag zu niedrig bewertet, so dass die Schadenssumme beim Versagen größer ist als bei großen Belastungen. Dies ist jedoch als unkritisch zu bewerten, da die rechnerisch bestimmte Lebensdauer für kleine Amplituden stets ungünstiger ausgelegt wird als in der Realität. Dieser Umstand kann als automatischer Sicherheitsaufschlag bei kleinen Belastungen angesehen werden.

Für rein amplitudenmodulierte Belastungen wird die Lebensdauer nach Gleichung 9.35 hinsichtlich der Reproduzierbarkeit der Wöhlerkurve in ausreichender Genauigkeit wiedergegeben. Gleichzeitig muss sichergestellt werden, dass das errechnete Versagen bei einer rein richtungsmodulierten Belastung ebenfalls nur bei Erreichen eines maximalen Schadens eintritt, das Versagen also unabhängig von der Belastungsart ist. Dies ist bei einer Lebensdauerabschätzung nach Gleichung 9.33 nicht der Fall, wie eine rechnerische Ermüdungsuntersuchung für einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen zeigt. Hierzu wird das Modell nach Gleichung 9.35 auf einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen angewendet und die berechnete Anzahl der erduldbaren Umdrehungen in Abhängigkeit des initiierten Schermaßes bestimmt (Abbildung 9.11). Die Anzahl der erduldbaren Umdrehungen ergibt sich aus dem Quotienten des Wertes für den maximal erduldbaren Schaden und des maximalen Eigenwertes des im Verlauf einer Umdrehung aufsummierten Schadenstensors.

$$N_{N2M} = \frac{D_{MAX}}{MAX\left(EW\left(\underline{\underline{s}}_{ges}\right)\right)} \tag{9.36}$$

Für die Beschreibung des mechanischen Materialverhaltens wird das im Kapitel 9.1 beschriebene viskoelastische Stoffgesetz verwendet.

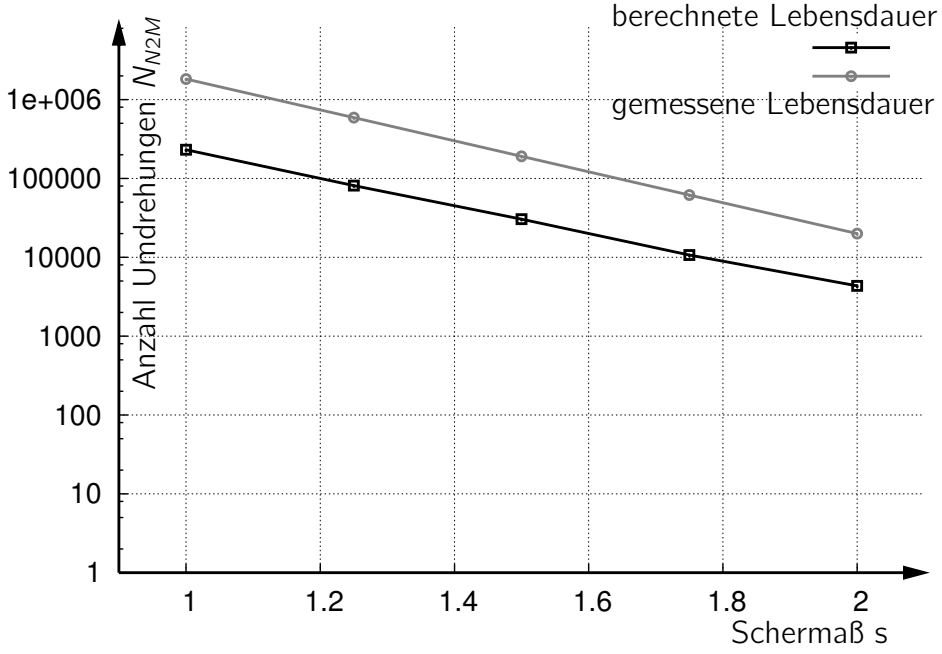


Abb. 9.11: Berechneter maximal erduldbarer Schaden für einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen in Abhängigkeit der maximal auftretenden Scheramplitude und unter Berücksichtigung von $\underline{\underline{s}}_{i,mod}$.

Qualitativ zeigen die Ergebnisse der Schädigungsrechnung ein ähnliches Verhalten, wie die Messergebnisse. Quantitativ unterscheiden sich die beiden Kurven jedoch um einen Faktor von etwa 10. Dies erfordert eine weitere Anpassung der Gleichung zur Bestimmung des Schadenstensors. Ähnlich wie bei der Amplitudenmodulation soll diese Anpassung auch in diesem Fall mit einem Faktor durchgeführt werden. Durch den Rotationskorrekturfaktor r_{korr} kann der den Schadenseintrag bei rotierenden Belastungsrichtungen nun stärker bewertet werden. Die Wichtung des Schadenseintrages bei rotierenden Belastungsrichtungen geschieht in Abhängigkeit des Doppelpunktproduktes der beiden modifizierten Spannungstensoren $\underline{\underline{\widetilde{T}}}_1$ und $\underline{\underline{\widetilde{T}}}_2$ und in Abhängigkeit der im Material gespeicherten Verformungsenergiedichte. Mit

$$r_{korr} = 0,4034 \cdot \ln\left(\underline{\underline{\overline{\widetilde{T}}}}_{mod,1} \cdot \cdot \underline{\underline{\overline{\widetilde{T}}}}_{mod,2}\right) + 0,3192 \tag{9.37}$$

ergibt sich die Berechnungsvorschrift zur Bestimmung des inkrementellen Schadenstensors für beliebige Belastungen wie folgt.

$$\boxed{\underline{\underline{S}}_{i,mod} = \underline{\underline{S}}_i \cdot a_{korr} \cdot r_{korr}} \tag{9.38}$$

Die nachfolgende Abbildung zeigt das mit Hilfe der Rotationskorrektur r_{korr} berechnete Lebensdauerverhalten im Vergleich mit den Messergebnissen für NR-N2M sowie mit der Rechnung ohne Rotationskorrektur.

Mit Hilfe der Rotationskorrektur wird der Einfluss rotierender Belastungsrichtungen auf die Lebensdauer vor allem im Bereich kleiner Belastungen gut wiedergegeben. Bei größeren Belastungen wird der Schadenseintrag überbewertet, so dass die abgeschätzte Lebensdauer geringer ausfällt, als in der Realität. Wie bei der Amplitudenkorrektur ist dies jedoch als nicht kritisch einzustufen, da auch bei der Abschätzung der Lebensdauer bei Belastungsprozessen mit rotierenden Belastungsrichtungen die Abweichungen von Rechnung und Messung einem Sicherheitsaufschlag gleichkommen. Zudem ist zu beachten, dass das verwendete Stoffgesetz den Phasenwinkel nicht korrekt wiedergibt, da dieser mit anwachsender Amplitude ebenfalls ansteigt. Die Berechnung der Lebensdauer bei rotierenden Belastungsrichtungen basiert jedoch ausschließlich auf dem rein dissipativen Energieanteil, der proportional zum Phasenwinkel ist. Eine Verbesserung der Modellierung des Dissipationsverhaltens führt daher automatisch zu einer Verbesserung der Berechnungsergebnisse hinsichtlich der Lebensdauer bei rotierenden Belastungsrichtungen, insbesondere bei großen Lasten.

Zur Überprüfung der Schädigungshypothese wird die Lebensdauer für eine zyklische einseitige einfache Scherung berechnet. Eine einfache Scherung ist, wie bereits in Kapitel 5.1.1 beschrieben, ein kombinierter Deformationsprozess, der sowohl Amplituden- als auch

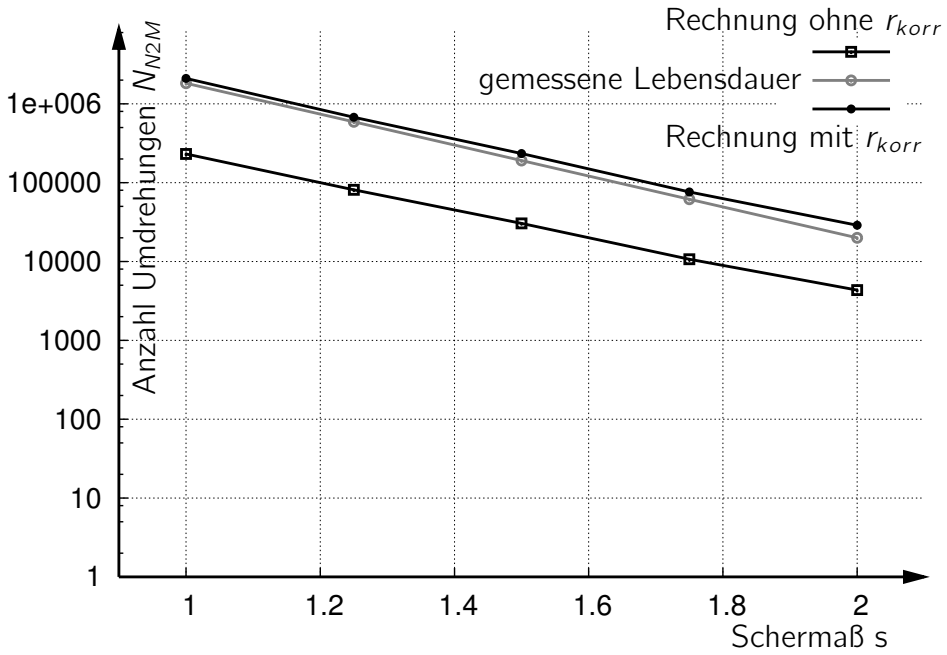


Abb. 9.12: Berechneter maximal erduldbarer Schaden für einfache Scherdeformationen mit rotierenden Achsen in Abhängigkeit der maximal auftretenden Scheramplitude und unter Berücksichtigung von $\underline{\underline{s}}_{i,mod}$.

Richtungsmodulation aufweist. Die Parameter für die Amplituden- und Rotationskorrekturfaktoren werden aus den vorangegangenen Untersuchungen übernommen, so dass die Informationen über die Lebensdauer unter einfacher Scherung aus den Anpassungen an die künstlichen Lebensdauerdaten für uniaxialen Zug und einfacher Scherung mit rotierenden Achsen hervorgehen. Abbildung 9.13 zeigt die berechnete Lebensdauer im Vergleich mit der die Ergebnisse der Lebensdaueruntersuchungen für eine einseitige einfache Scherung in Abhängigkeit vom maximal auftretenden Schermaß s repräsentierende Trendlinie. Im Falle der einfachen Scherung müssen keine künstlichen Lebensdauerdaten vorgegeben werden, da sowohl Messung als auch Simulation über die Deformation vorgegeben werden.

Die Trendlinie und die errechnete Lebensdauer passen gut zueinander, obgleich die Anpassung der für die Lebensdauerrechnung wichtigen Parameter nicht auf Grundlage von einfacher Scherung, sondern über Zugversuche und unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen vorgenommen wurde. Unterschiede zeigen sich vornehmlich bei kleinen Scheramplituden. Hier sagt das Modell eine deutlich höhere Lebensdauer voraus, als die Trendlinie. Gleichzeitig muss jedoch beachtet werden, dass sich die Trendlinie in diesem Bereich auf keine Daten mehr stützt und das beschriebene Materialverhalten außerhalb des Messbereiches liegt. Die Trendlinie beschreibt das Lebensdauerverhalten in diesem Bereich nur noch sehr ungenau. Für Scheramplituden $s \geq 1,2$ liegen die Trendlinie und das mit Hilfe des Modells vorhergesagte Lebensdauerverhalten dicht beieinander, wobei nun das

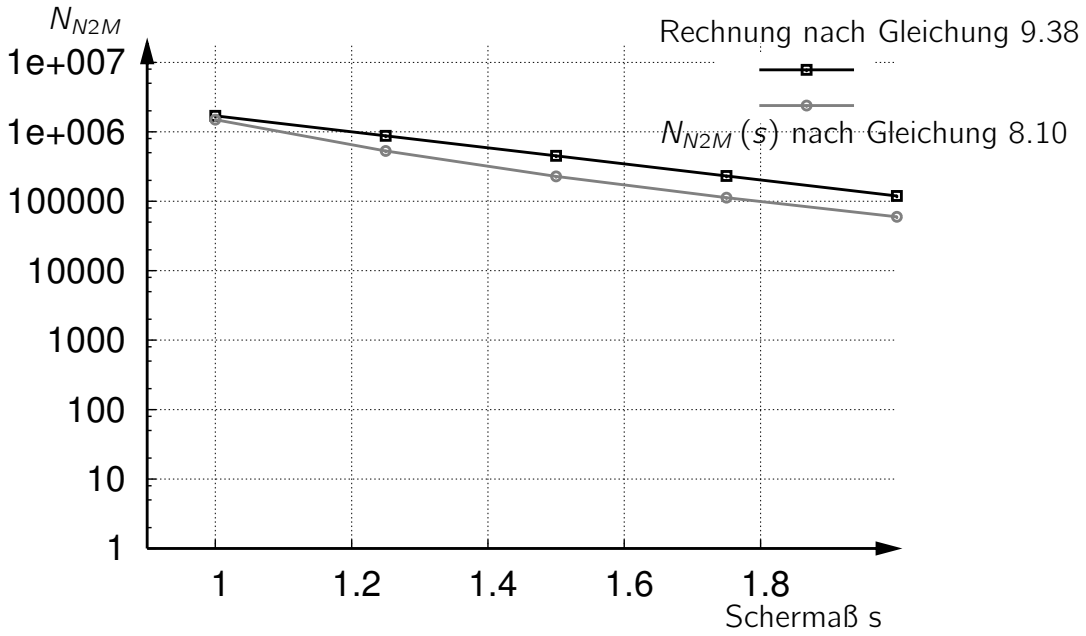


Abb. 9.13: Künstlich erzeugte Wöhlerlinie für NR-N2M für eine einseitige einfache Scherung auf Basis von Anpassungen an uniaxialen Zug und einfache Scherung mit rotierenden Achsen.

Modell eine geringere Lebensdauer vorhersagt, als die Trendlinie. In diesem Bereich stützt sich die Trendlinie auf Messpunkte. Qualitativ unterscheiden sich die Simulationsergebnisse und die Trendlinie: die mit Hilfe der inkrementellen Schädigung errechnete Lebensdauer weist in der in Abbildung 9.13 dargestellten Form eine Linkskrümmung auf, wohingegen die Trendlinie eine konstante Steigung hat. Theoretisch ist es denkbar, dass die verwendete Trendlinie zur Beschreibung des Lebensdauerverhaltens von NR-N2M unter einseitiger einfacher Scherung nicht die richtige Wahl ist und dass das tatsächliche Lebensdauerverhalten eher den Ergebnissen der Simulation entspricht. Für eine solche Aussage ist die zugrunde gelegte Datenbasis jedoch zu klein.

9.2.6 Der Schadenstensor und das R-Verhältnis

Die bislang vorgestellten Lebensdauerabschätzungen sind bei einem R-Verhältnis von 0 erstellt worden. Bei der Lebensdauervorhersage von realen Bauteilen ist ein R-Verhältnis von 0 jedoch selten gegeben, stattdessen finden sich in Lastkollektiven meist viele Belastungszyklen, die über einen längeren Zeitraum oszillieren, ohne dabei einen Zustand vollständiger Entlastung zu erreichen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Eigenschaften des im Kapitel zuvor vorgestellten Schadenstensors in Bezug auf das R-Verhältnis zu untersuchen.

Bei der ersten Untersuchung wird die Lebensdauer für einen uniaxialen Zugversuch in Abhängigkeit verschiedener Dehnungen berechnet. Die Dehnungsamplitude bleibt hierbei

konstant, die mittlere Dehnung wird jedoch schrittweise angehoben. Für die Wöhlerkurve ergeben sich somit folgende Stützstellen.

Unterlast, Oberlast und R-Verhältnis für uniaxialen Zug

Unterlast [%]	Oberlast [%]	R-Verhältnis
0	100	0
10	110	0,0909
20	120	0,1667
...	...	...
90	190	0,4737
100	200	0,5

Die Ergebnisse der Lebensdauerabschätzung nach den Vorgaben aus Tabelle 9.2.6 sind in Abbildung 9.14 dargestellt. Hierbei ist die Anzahl der erduldbaren Schwingspiele bis zum errechneten Versagen in Abhängigkeit der Maximallast dargestellt. Zu Vergleichszwecken ist die Lebensdauer nach Gleichung 9.1 ebenfalls im Diagramm dargestellt. Zum besseren Verständnis sind die das minimale und maximale R-Verhältnis in der Abbildung angezeigt.

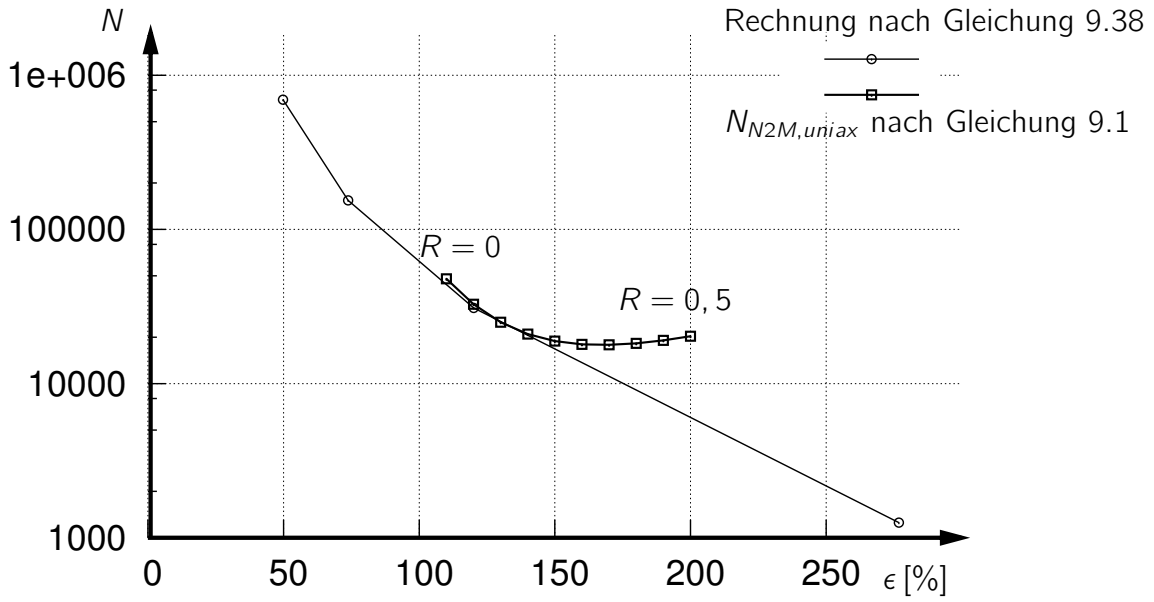


Abb. 9.14: Errechnete Lebensdauer bei konstanter Dehnungsamplitude und variabler Mittellast.

Für kleine R-Verhältnisse liegen die beiden Kurven noch relativ dicht beieinander, mit anwachsendem R-Verhältnis verbessern sich jedoch gemäß dem Schadenstensor die Lebensdauereigenschaften. Bei einem Wert von $R = 0,5$ wird rechnerisch sogar eine höhere

Lebensdauer ermittelt, als bei der Belastungsstufe zuvor. Der Schadenstensor zeigt somit für uniaxiale Zugbelastungen eine Abhängigkeit vom R-Verhältnis. Zur Verdeutlichung dieser Abhängigkeit ist die Lebensdauer für eine Dehnungsamplitude von $\epsilon = 100\%$ nach Tabelle 9.2.6 in Abhängigkeit des R-Verhältnisses in Abbildung 9.15 dargestellt.

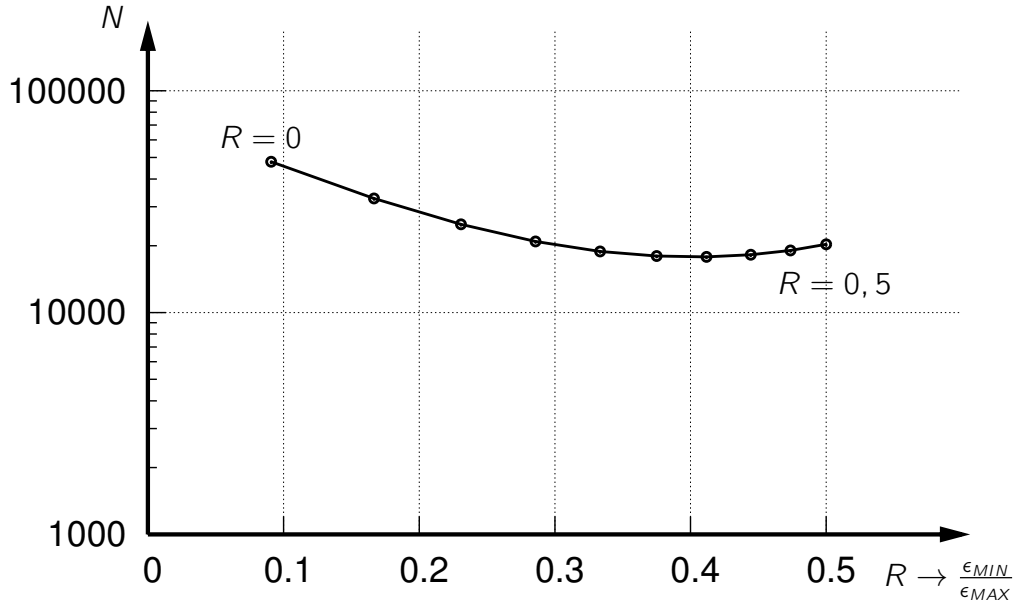


Abb. 9.15: Errechnete Lebensdauer bei konstanter Dehnungsamplitude in Abhängigkeit vom R-Verhältnis.

Es ist erkennbar, dass die errechnete Lebensdauer bei konstanter Dehnungsamplitude in Abhängigkeit des R-Verhältnisses ein Minimum ausbildet. Aus Sicht der Lebensdauer bei konstanten Dehnungsamplituden ist dies der denkbar ungünstigste Fall. Aufgrund der fehlenden Datenbasis in diesem Zusammenhang kann kein Vergleich zu realen Messungen gemacht werden. Anhand von Literaturergebnissen (z. B. Abraham [Abr01] und [Abr02]) lässt sich jedoch feststellen, dass der Schadenstensor zumindest tendenziell richtige Ergebnisse hinsichtlich der Abhängigkeit von R-Verhältnis zeigt.

Zusätzlich zu den Untersuchungen bei konstanter Amplitude soll auch der Einfluss des R-Verhältnisses auf die Lebensdauer bei konstanter maximaler Amplitude aufgezeigt werden. Hierzu wurde die Lebensdauer für uniaxiale Zugbelastungen jeweils mit einer Maximallast von $\epsilon_{MAX} = 200\%$ berechnet. Gleichzeitig wurde die Minimallast in zehn Schritten von 0% auf 100% erhöht. Die Anzahl der erduldbaren Schwingspiele ist in Abhängigkeit des aus den Belastungsvorgaben resultierenden R-Verhältnisses in Abbildung 9.16 dargestellt.

Bei konstanter Maximallast zeigt sich, dass ein R-Verhältnis von $R = 0$ für die Lebensdauer am ungünstigsten ist. Dies deckt sich mit Beschreibungen aus der Literatur, wie zum

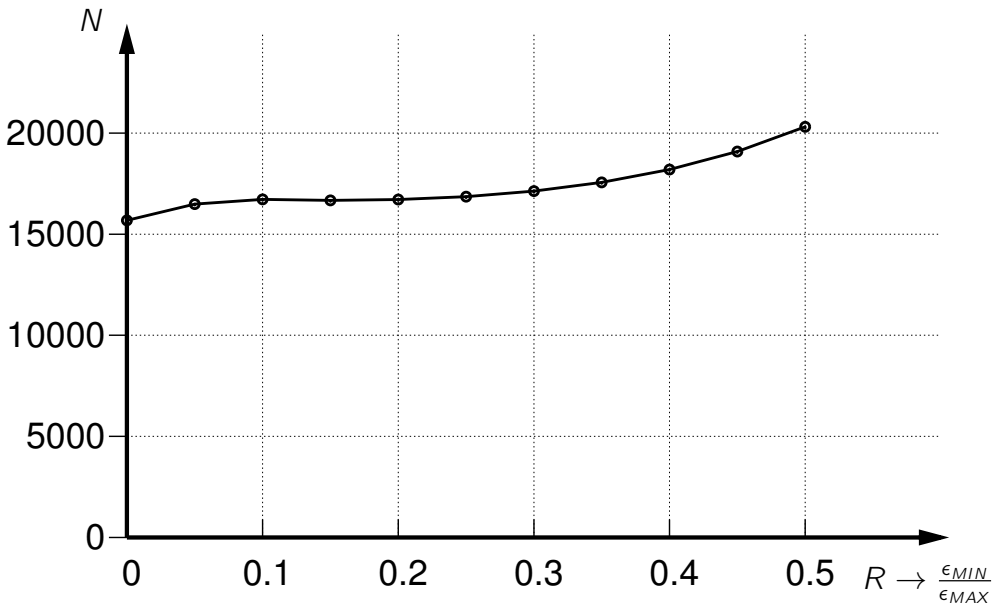


Abb. 9.16: Errechnete Lebensdauer bei konstanter Maximallast und in Abhängigkeit vom R-Verhältnis.

Beispiel bei Cadwell [Cad40]. Unklar ist, ob der bei einem R-Verhältnis von $R = 0,2$ auftretende Krümmungswechsel der Realität entspricht oder ob die Lebensdauer an dieser Stelle aufgrund der tensoriellen Schadenshypothese oder aufgrund des ungenauen Stoffgesetzes nicht richtig wiedergegeben wird.

Zusammenfassend zeigt sich, dass mit Hilfe des Schadenstensors die Lebensdauer in einem Materialpunkt sowohl für amplitudenmodulierte Belastungen als auch für konstante Lasten mit rotierenden Belastungsrichtungen sinnvoll wiedergegeben werden kann. Gleichzeitig zeigen Untersuchungen des Schadenstensors für uniaxiale Belastungen eine ausgeprägte Abhängigkeit der Lebensdauer vom R-Verhältnis, wobei eine Validierung aufgrund der unzureichenden Datenbasis noch aussteht.

9.3 Die 2. Phase - ein Ausblick

Bei einem Lasthorizont aus M verschiedenen charakteristischen Deformationen kann $\underline{\underline{D}}$ aus der Summe der jeweiligen charakteristischen Schäden und deren Häufigkeit berechnet werden. In diesem Zusammenhang ist es denkbar, die Schadenseinträge entsprechend ihrer Reihenfolge und in Abhängigkeit des bis dahin aufsummierten Schadens zu wichten. Die Grundlage hierfür bilden die Untersuchungen von Sun [Sun00], die einen Einfluss der Reihenfolge der Belastungsvorgeschichte auf die Reißfestigkeit von vorab ermüdeten Gummiproben aufgezeigt haben. Hierbei ist eine schrittweise ansteigende Belastung für die

Lebensdauer des Materials deutlich ungünstiger, als eine schrittweise abfallende Belastung. Für das Ermüdungsverhalten bedeutet dies, dass ein bestimmter Schadenseintrag in einem Materialpunkt abhängig vom vorherrschenden Ermüdungszustand bewertet werden muss. Ist das Material unbelastet, ist der Schadenseintrag nicht so schwerwiegend. Hat der Materialpunkt hingegen schon viel Schaden erdulden müssen, so ist der gleiche Schadenseintrag viel stärker zu bewerten. Diese zusätzliche Bewertung der Schadenseinträge kann in der zweiten Phase des 2-Phasen-Ansatzes realisiert werden. Bei linearer Schadensakkumulation und bei M verschiedenen charakteristischen Schadenanteilen, die J_k mal vorkommen ergibt sich die Schadenssumme wie folgt.

$$\underline{\underline{D}} = \sum_{k=1}^{M} J_k \cdot \underline{\underline{s}}_{ges,k} \tag{9.39}$$

Zur Bewertung der jeweiligen Schadenanteile in Abhängigkeit des vorherrschenden Ermüdungs-zustandes wird die tensorielle Schadenssumme in eine rekursive Folge umgewandelt und die einzelnen Glieder der Folge in Abhängigkeit des vorangegangenen Folgegliedes bewertet. Der Schadenstensor im k-ten Folgeglied ist dementsprechend Abhängig vom $k-1$-ten Folgeglied. Zusätzlich wird der k-te Schadenanteil anhand des $k-1$-ten Schadenstensors bewertet. In ganz allgemeiner Form ist das wie folgt möglich.

$$\underline{\underline{D}}_k = J_k \cdot \underline{\underline{s}}_{ges,k} \cdot C_k + \underline{\underline{D}}_{k-1} \tag{9.40}$$

C_k ist hierbei der vom vorangegangen Schadenstensor abhängige Wichtungsfaktor. Mit p_4 als Parameter zur Anpassung des Wichtungsfaktors wäre zum Beispiel die nachfolgende Formulierung für C_k denkbar.

$$C_k = p_4 \cdot MAX\left(EW\left(\underline{\underline{D}}_{k-1}\right)\right) \tag{9.41}$$

Hierbei ist zu beachten, dass Gleichung 9.41 nur in Abhängigkeit der unterschiedlichen Schadensklassen wichtet. Bei wenigen Schadensklassen ist dieses Vorgehen sehr ungenau und für eine einzige Schadensart ungeeignet. Es besteht jedoch die Möglichkeit, jeden einzelnen charakteristischen Schaden als eigene Klasse zu betrachten und so eine angepasste und sehr genaue Wichtung vorzunehmen. Aus k Anteilen entstehen l Anteile.

$$L = \sum_{k=1}^{M} J_k \tag{9.42}$$

Somit ergibt sich die rekursive Folge zur Bestimmung der Lebensdauer entsprechend der nachfolgenden Gleichung.

$$\underline{\underline{D}}_L = \underline{\underline{s}}_{ges,L} \cdot C_L \tag{9.43}$$

Mit Gleichung 9.43 besteht theoretisch die Möglichkeit zum Beispiel bei der Abschätzung der Lebensdauer einer uniaxialen Zugbelastung jedes einzelne Schwingspiel gesondert zu bewerten und somit eine nichtlineare tensorielle Schadensakkumulation durchzuführen.

10 Zusammenfassung

Die Abschätzung der Lebensdauer von Bauteilen aus technischen Gummiwerkstoffen führt in vielen Fällen zu unbefriedigenden Ergebnissen. Mit den Resultaten der Untersuchungen des Lebensdauerverhaltens technischer Gummiwerkstoffe unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen kann nun gezeigt werden, dass über die aktuellen Verfahren hinaus weitere Aspekte bei der Charakterisierung technischer Gummiwerkstoffe berücksichtigt werden müssen, wobei die wesentliche Erkenntnis für inelastische Werkstoffe die Tatsache ist, dass eine reine richtungsmodulierte Belastung eine nicht vernachlässigbare Ermüdung herbeiführt. Dieser wichtige Umstand ist bei der Auslegung von Bauteilen aus technischen Gummiwerkstoffen bislang nicht berücksichtigt worden. Die eigens für diese Untersuchungen entwickelte, gefertigte und eingerichtete Versuchsanlage ermöglicht nun eine labortechnische Trennung von Last- und Richtungsmodulation für die Erforschung dieser wichtigen und bislang nicht beachteten Gesichtspunkte bei der Beurteilung des Lebensdauerverhaltens gefüllter Elastomerwerkstoffe und eröffnet neue Möglichkeiten bei der Gestaltung und Auslegung von Gummibauteilen.

Der für die Durchführung der erforderlichen Experimente entwickelte und konstruktiv umgesetzte Versuchsstand für Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher Scherung mit rotierenden Achsen stellt die Grundlage für die im weiteren Verlauf der Arbeit vorgestellten Ergebnisse dar. Nach der Fertigstellung der mechanischen Komponenten der Versuchsapparatur wurde ein eigens für den Versuchsstand entwickeltes Messsystem eingerichtet. Für die Datenerfassung ist eine entsprechende Schnittstelle bereitgestellt worden. Die Realisierung der erforderlichen Rotationsbewegung für die einfache Scherdeformation mit rotierenden Achsen geschieht über einen geeigneten Antrieb mit einem einstellbaren Frequenzumrichter. Die softwaretechnische Aufbereitung der Messdaten erfolgt über mehrere selbst verfasste Programme, die eine Anwendung verschiedener Rechenoperationen auf große Datenmengen ermöglichen.

Neben der Funktionalität der Versuchsanlage hat auch die Güte der Probe einen maßgeblichen Einfluss auf die Qualität der Messergebnisse. Hier spielen sowohl fertigungstechnische Aspekte als auch die Geometrie der Probe eine wesentliche Rolle. Aus diesem Grund wurde eigens für den neuen Versuchsstand eine neuartige Probekörpergeometrie von Freund [Fre06] entwickelt, die eine Initiierung einer nahezu homogenen Scherdeformation ermöglicht. Gleichzeitig ist die Belastung im Probekörper derart ausgelegt worden, dass ein ermüdungsbedingter Ausfall im Inneren des Geometrie am wahrscheinlichsten ist. Die Herstellung der Proben erforderte den Entwurf und die Fertigung einer geeigneten Vulkanisationsform sowie die Findung und Erprobung einer entsprechenden Gummi-Metall-Verbindung. Zur Wiederverwertung der metallischen Teile der Proben wurde zudem ein Verfahren zur Aufbereitung der Probenbasen ausgearbeitet.

Mit der optimierten Probekörpergeometrie wurden beidseitige einfache Scherversuche nach Muhr, vorgestellt von Besdo [Bes03] durchgeführt, um die Modellmischungen zu charakterisieren. Es konnte gezeigt werden, dass auch mit Hilfe der neuen Versuchsanlage eine mechanische Charakterisierung sehr gut möglich ist. Hierbei ist es ein wesentlicher Vorteil, dass mit der Versuchsanlage zwar dynamische Messungen durchgeführt werden, die Messgrößen jedoch quasistatischen Charakter haben.

Für ausgewählte Modellmischungen wurden vergleichende Lebensdaueruntersuchungen unter einfacher einseitiger und einfacher beidseitiger Scherung, uniaxialem Zug sowie einfacher Scherung mit rotierenden Achsen durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass eine reine Richtungsmodulation zu einer Ermüdung von technischen Gummiwerkstoffen führt, die im Vergleich zu einer reinen Lastmodulation nicht vernachlässigt werden darf. Ausgehend von diesen Erkenntnissen wurde ein Modell zur Lebensdauervorhersage entwickelt, das auf tensoriellen Größen basiert und eine vollständig dreidimensionale Erfassung des Schädigungszustandes in einem Materialpunkt erlaubt. Dies beinhaltet sowohl eine Schädigung auf Grundlage von Amplitudenmodulation als auch eine durch Richtungsmodulation induzierte Schädigung.

Der Versuchsstand für einfache Scherungen mit rotierenden Achsen ist inzwischen Teil des Maschinenparks des Deutschen Instituts für Kautschuktechnologie e. V. geworden und wird dort für Lebensdaueruntersuchungen und für die mechanische Charakterisierung technischer Gummiwerkstoffe verwendet.

11 Ausblick

Die Nutzung der neuen Versuchsanlage für eine mechanische Charakterisierung von technischen Gummiwerkstoffen hat gezeigt, dass wesentliche Eigenschaften der Modellmischungen wie Mullins-Effekt, der Phasenwinkel zwischen Kraft und Verschiebung und eine Temperaturänderung aufgrund von Dissipationseffekten mit Hilfe einer einfachen Scherbelastung mit rotierenden Achsen wiedergegeben werden können. In diesem Zusammenhang besteht ein großes Potential, mit wenig Aufwand viel über einen Werkstoff zu erfahren. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen stellen jedoch nur einen ersten Schritt zur Nutzung des Versuchsstandes für die mechanische Charakterisierung von Werkstoffen dar. Weitere Forschungsarbeiten zur Entwicklung eines nutzbringenden und einfachen Verfahrens zu Werkstoffcharakterisierung unter Verwendung einfacher Scherdeformationen mit rotierenden Achsen sind wünschenswert. Aufgrund der Tatsache, dass dynamische Belastungen zu quasistatischen Messgrößen führen und dass Effekte der belastungsinduzierten Anisotropie nahezu eliminiert sind, bietet sich hier eine kostengünstige und neuartige Methode zur Werkstoffcharakterisirung an.

Die durchgeführten Untersuchungen zur Charakterisierung der Lebensdauer technischer

Gummiwerkstoffe sind nur ein kleiner Beitrag zur Berücksichtigung neuer Aspekte bei der Bestimmung des Ermüdungsverhaltens von gefüllten Elastomeren. Dennoch wird deutlich, dass eine Untersuchung der Streubreite in Abhängigkeit verschiedener Parameter eine wesentliche Hilfe bei der Beurteilung der Messwerte darstellen kann. Es erscheint daher sinnvoll, die Ursachen für die Entstehung von Streuungen bei Lebensdauerexperimenten zu untersuchen, zu bewerten und Lösungsansätze zur Verminderung der Streubreite auszuarbeiten. Hierbei sollten sowohl anlagenseitige Aspekte als auch verfahrens- und herstellungstechnische Gesichtspunkte berücksichtigt werden. Ein erstrebenswertes Ziel wäre es, allgemeine, auf beliebige Ermüdungsuntersuchungen anwendbare Parameter herauszuarbeiten, die eine gezielte Verringerung der Streubreite der Messungen ermöglichen.

Einfache Scherungen mit rotierenden Achsen stellen einen grundlegenden homogenen Deformationsprozess dar. Zum besseren Verständnis des daraus resultierenden, neu entdeckten Schädigungsmechanismus sollten kombinierte Belastungsfälle untersucht werden. Mögliche Konstellationen sind:

- Einfache Scherung und Druck.
- Einfache Scherung und Zug.
- Einfache Scherung mit rotierenden Achsen und wechselnde Lastamplituden $\rightarrow$ Phasenwinkelmodulation.

Darüber hinaus muss geklärt werden, ob Richtungswechsel der Rotation bei einfacher Scherung einen Einfluss haben. Hierzu könnten Lebensdauerversuche durchgeführt werden, bei denen ein Teil der Lebensdauer durch Rotation in die eine und der Rest durch Rotation in die andere Richtung verbraucht wird. Auch Kreisbogenschwingungen könnten mit Hilfe des Versuchsstandes untersucht werden.

Literatur

[Abr01] Abraham, F., Alshuth, T. & Jerrams, S. Ermüdungsbeständigkeit von Elastomeren - Teil 1 . *KGK - Kautschuk Gummi Kunststoffe Vol. 12*, 2001. S. 643 - 647.

[Abr02] Abraham, F., Alshuth, T. & Jerrams, S. Ermüdungsbeständigkeit von Elastomeren - Teil 2 . *KGK - Kautschuk Gummi Kunststoffe Vol. 12*, 2002. S. 674 - 678.

[And08] Andriyana, A. & Saintier, N. Multiaxial fatigue life prediction of rubber using configurational mechanics and critical plane approaches: a comparative study. *In Boukamel, Laiarinandrasana, Méo & Verron (eds), Constitutive Models for Rubber V*, 2008. S. 191 - 196.

[And10] Andriyana, A., Saintier, N. & Verron, E. Configurational Mechanics and Critical Plane Approach: Concept and application to fatigue failure analysis of rubberlike materials. *International Journal of Fatigue, Vol. 32*, 2010. S. 1627 - 1638.

[Bae88] Baehr, H. D. *Thermodynamik, 6. Auflage*. Springer-Verlag, 1988. ISBN: 0-387-18073-7.

[Bar56] Bartenev, G. M. & Galil-Ogly, F. A. Dynamic Fatigue of Rubber and the Mechanism of Failure by Repeated Deformations. *Rubber Chemistry and Technology, Vol. 29, Iss. 2*, 1956. S. 504 - 508.

[Bat84] Batzer, H. *Polymere Werkstoffe in drei Bänden. Band III: Technologie 2*. Georg Thieme Verlag, 1984. ISBN: 3-13-648301-4.

[Bau09] Baumer Holding AG. *Technisches Datenblatt - Distanz Sensor OADM 12U6430/S35A*. http://sensor.baumer.com, 2009.

[Bei01] Beitz, W. & Grote, K. -H. (Hrsg.). *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau, 20. Auflage*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001. ISBN: 3-540-67777-1.

[Ben11] Benton, R. E. Jr. Double-Linear Cumulative-Damage Reliability Method. *Proc. of the 67th Annual Forum of the American Helicopter Society*, 2011.

[Bes03] Besdo, D., Ihlemann, J., Kingston, J.G.R. & Muhr, A.H. Modelling inelastic stress-strain phenomena and a scheme for efficient experimental characterization. *In J.J.C. Busfield & A.H. Muhr (eds), Constitutive models for rubber III*, 2003. S. 309-317. Lisse: Swets & Zeitlinger.

[Bes04] Besdo, D. & Ihlemann, J. Ellipsoidrepräsentation von Anisotropietensoren. *PAMM Vol. 4, Issue 1*, 2004. S. 240 - 241.

[Bra99] Brandup, J., Immergut, E. H. & Grulke, E. A. *Polymer Handbook, 4th Edition*. John Wiley & Sons, Inc., 1999. ISBN: 978-0471166283.

[Bro06] Brown, R. *Physical Testing of Rubber*. Springer Verlag, 2006. ISBN: 978-0-387-28286-2.

[Cad40] Cadwell, S. M., Merrill, R. A., Sloman, C. M. & Yost, F. L. Dynamic Fatigue Life of Rubber. *Industrial and Engineering Chemistry, Vol. 12, No. 1*, 1940. S. 19 - 23.

[Cau27] Cauchy, A. -L. De la pression ou tension dans un corps solide. *Exercices de Mathématiques, Vol. 2*, 1827. S. 42.

[Cie99] Ciesielski, A. *An Introduction to Rubber Technology*. Rapra Technology Limited, 1999. ISBN: 1-85957-150-6.

[Cof54] Coffin, L. F. Jr. A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Trans. ASME. 76:931-50*, 1954.

[Cof56] Coffin, L. F. Jr. Design aspects of high-temperature fatigue with particular reference to thermal stresses. *Trans. ASME.*, 1956. S. 527 - 532.

[Dec06] Decker, K.-H., Kabus, K., Rieg, F., Engelken & G. Wiedermann, F. *Decker Maschinenelemente: Funktion, Gestaltung und Berechnung*. Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG, 2006. ISBN: 3346426086.

[Dow82] Downing, S. D. & Socie, D. F. Simple rainflow counting algorithms. *International Journal of Fatigue, Vol. 4, Issue 1*, 1982. S. 31 - 40.

[Dui09] Duisen, F. Angewandte Betriebsfestigkeitsrechnungen an ein- und zweiachsig belasteten Fahrwerkslagern. *DVM-Bericht 576, Elastomerbauteile DVM-Tagung, Deutscher Verband für Materialforschung und -prüfung e. V.*, 2009.

[Fat85] Fatemi, A. *Fatigue and deformation under proportional and nonproportional biaxial loading*. PhD thesis, Universität of Iowa, 1985.

[Fat98] Fatemi, A. & Yang, L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue, Vol. 20 No. 1.*, 1998. S. 9 - 34.

[Fla02] Flamm, M., Steinweger, T. & Weltin, U. Schadensakkumulation bei Elastomeren. *KGK - Kautschuk Gummi Kunststoffe Vol. 12*, 2002. S. 665 - 668.

[Fla03] Flamm, M., Steinweger, T. & Weltin, U. Festigkeitshypothesen in der rechnerischen Lebensdauervorhersage bei Elastomeren. *KGK - Kautschuk Gummi Kunststoffe Vol. 11*, 2003. S. 582 - 586.

[Fle53] Fletcher, W. P. & Gent, A. N. Non-Linearity in the Dynamic Properties of Vulcanised Rubber Compounds. *Trans. Inst. Rubber Ind. Vol. 29*, 1953. S. 266 - 280.

[Fre06] Freund, M. *Optimierung einer Probekörpergeometrie für einfache Scherdeformationen*. Institut für Kontinuumsmechanik, 2006. Masterarbeit.

[Fre13] Freund, M. *Verallgemeinerung eindimensionaler Materialmodelle für die Finite-Elemente-Methode*. Berichte aus der Professur Festkörpermechanik, Technische Universität Chemnitz, 2013. Düsseldorf: VDI.

[Gai02] Gaier, C. . Verfahren zur Berechnung der Lebensdauer nichtproportional beanspruchter Bauteile, 2002.

[Gen60] Gent, A. N. Simple rotary dynamic testing machine. *British Journal of Applied Physics Vol. 11*, 1960. S. 165 - 167.

[Gen03] Gent, A. N. & Hartwell, J. A. Effect of Carbon Black on Crosslinking. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 76*, 2003. S. 517 - 532.

[Grö94] Grötschel, M. Lineare Optimierung (Algorithmische Diskrete Mathematik II). *Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin*, 1994. Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2003/2004.

[GTM08] GTM Gassmann Testing and Metrology GmbH. *Technisches Datenblatt - Kraftaufnehmer der K-Serie*. http://www.gtm-gmbh.com, 2008.

[Har02] Hartung, J., Elpepelt, B. & Klösener, K.-H. . *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*. Oldenburg Wissenschaftsverlag, 2002. ISBN: 3486259059.

[Hau02] Haupt, P. . *Continuum Mechanics and Theory of Materials, Second Edition*. Springer-Verlag, 2002. ISBN: 1439-2674.

[Hei05] Heimes, T. Der Mullins-Effekt: Experimente, Materialtheorie und FE-Simulation. *PAMM Vol. 5, Iss. 1*, 2005.

[Hoi03] Hoischen, H. *Technisches Zeichnen*. Cornelsen Verlag GmbH + Co. KG, 2003. ISBN: 3464480097.

[Ihl03] Ihlemann, J. *Kontinuumsmechanische Nachbildung hochbelasteter technischer Gummiwerkstoffe*. Universität Hannover, Institut für Mechanik, 2003. Düsseldorf: VDI.

[Ihl14] Ihlemann, J. *Beobachterkonzepte und Darstellungsformen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik*. Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 18, Mechanik, Bruchmechanik, 2014. Düsseldorf: VDI.

[Jau12] Jaunich, M. *Tieftemperaturverhalten von Elastomeren im Dichtungseinsatz*. Universität Berlin, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, 2012. Dissertationsschrift.

[Kar05] Karolczuk, A. & Macha, E. A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials. *International Journal of Fracture Vol. 134*, 2005. S. 267 - 304.

[Kin07] Kingston, J. G. R. & Muhr, A. H. Effect of strain crystallisation on cyclic fatigue of rubber, 2007.

[Kla05] Klauke, R. *Modifikation eines Ansatzes zur Nachbildung der anisotropen Entfestigung von Gummiwerkstoffen*. Universität Hannover, Institut für Kontinuumsmechanik, 2005. Unveröffentlichte Projektarbeit.

[KTR12] KTR / Rotex. Rotex - drehelastische Kupplungen mit T-PUR, 2012.

[Lin93] Lindgren, B. W. . *Statistical Theory, Fourth Edition*. Chapman & Hall/CRC, 1993. ISBN: 0412041812.

[Lio06] Lion, A. Dynamische Modellierung von Elastomeren Bauteilen. *Tagungsband zum Seminar „Geräusch- und Schwingungskomfort von Kraftfahrzeugen“*, 2006. Haus der Technik, Essen.

[Lod82] Lodge, A. S., Armstrong, R. C., Wagner, M. H. & Winter, H. H. Constitutive equations from gaussian molecular network theories in polymer rheology. *Pure & Appl. Chem. Vol. 54*, 1982. S. 1349 - 1359.

[Man66] Manson, S. S. Interfaces between fatigue, creep and fracture. *International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 2*, 1966. S. 328 - 363.

[Man81] Manson, S. S. & Halford, G. R. Practical implementation of the double linear damage rule and damage curve approach for treating cumulative fatigue damage. *International Journal of Fracture, Vol. 17, No. 2*, 1981. S. 169 - 192.

[Mar01] Mars, W. V. *Multiaxial Fatigue of Rubber*. PhD thesis, Universität of Toledo, Ohio, 2001.

[Mar04] Mars, W. & Fatemi, A. Factors that affect the fatigue life of rubber: a literature survey. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 77 (3)*, 2004. S. 391 - 412.

[Mar06a] Marckmann, G. & Verron, E. Comparison of Hyperelastic Models for Rubber-like Materials. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 79 (5)*, 2006. S. 835 - 858.

[Mar06b] Mars, W. & Fatemi, A. Multiaxial stress efffects on fatigue behavior of filled natural rubber. *International Journal of Fatigue Vol. 28*, 2006. S. 521 - 529.

[Min45] Miner, A. Cumulative Damage in Fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, September 1945. S. A-159 - A-164.

[Moo40] Mooney, M. A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics Vol. 11, Iss. 9*, 1940. S. 582 - 592.

[MSC11] MSC. *MARC 2011 Volume A: Theory and User Information*. MSC.Software Corporation, 2011. www.mscsoftware.com.

[Muh92] Muhr, A. H. Modelling the Stress-Strain Behavior of Rubber. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 78*, 1992. S. 319 - 425.

[Mul48] Mullins, L. Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 21*, 1948. S. 281 - 300.

[Mul69] Mullins, L. Softening of Rubber by Deformation. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 42, Iss. 1*, 1969. S. 339 - 362.

[Nas10] Nasdala, L. *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik*. Vieweg+Teubner GWV Fachverlage GmbH, 2010. ISBN: 978-3-8348-0980-3.

[Nat98] National Instruments. LabView Kurzanleitung, 1998.

[Nat06] National Instruments. NI CompactDAQ USB Data Acquisition System, 2006.

[Nat12] National Instruments. NI 9229 Analogeingangsmodul mit 4 Kanälen und 24 bit, 2012.

[Nyc03] Nyce, D. S. *Linear Position Sensors: Theory and Application*. John Wiley & Sons, 2003. ISBN: 0471233269.

[Ogd72] Ogden, R. W. Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. *Mathematical and Physical Sciences, Vol. 326, No. 1567*, 1972. S. 565-584.

[Pah95] Pahl, M., Geißle, W. & Laun, H.-M. *Praktische Rheologie der Kunststoffe und Elastomere*. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf., 1995. 4., überarbeitete Auflage, ISBN: 3-18-234192-8.

[Pal24] Palgrem, A. Die Lebensdauer von Kugellagern. *Verfahrenstechnik Berlin, Vol 68.*, 1924. S. 339 - 341.

[Pay62] Payne, A. R. The Dynamic Properties of Carbon Black-Loaded Natural Rubber Vulcanizates. Part I. *Journal of Applied Polymer Science 6, Issue 19*, 1962. S. 53 - 57.

[Riv48] Rivlin, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. *Philosophical Transactions of the Royal Society fo London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 241(835)*, 1948. S. 379 - 397.

[Röt06] Röthemeyer, F. & Sommer, F. *Kautschuktechnologie: Werkstoffe - Verarbeitung - Produkte*. Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG, 2006. ISBN: 3446404805.

[Rus09] Rust, W. *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen*. Vieweg+Teubner GWV Fachverlage GmbH, 2009. ISBN: 978-3-8351-0232-3.

[San03] Santangelo, P. F. & Roland, C. M. Role of strain crystallization in the fatigue resistance of double network elastomers. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 76*, 2003. S. 892 - 898.

[Sch04] Schaper, M. K. *Unveröffentlichtes Vorlesungsskript: Schadensanalyse*. 2004. Technische Universität Dresden, Fakultät für Maschinenwesen, Professur für Werkstoffzuverlässigkeit.

[Sch05] Schwarz, O. & Ebeling, F. W. (Hrsg.). *Kunststoffkunde, 8. Auflage*. Vogel Industrie Medien GmbH & Co. KG, 2005. ISBN: 3-8023-1987-7.

[Sch07] Schuster, R. H. *Unveröffentlichtes Vorlesungsskript: Kautschuke*. 2007. Deutsches Institut für Kautschuktechnologie e. V.

[SEW06] SEW Eurodrive. Getriebe und Getriebemotoren Ausgabe 07/2006, 2006.

[SEW12] SEW Eurodrive. Operating Instructions MOVITRAC (All Rights Reserverd) B, 2012.

[SKF11] SKF. Interaktiver Lagerkatalog - Überschlägige Ermittlung des Reibungsmomentes. Stand: 08. Januar 2011. www.skf.de.

[Soc99] Socie, D. F. & Marquis, G. B. *Multiaxial Fatigue*. Society of Automotive Engineers U. S., 1999. ASIN: 0768004535.

[Sta03] Stanfield, G. Discussion on „The strength of metals under combined alternating stresses“. *In H. Gough & H. Pollard (Eds.) Proceedings of the institution of mechanical engineers, Vol. 131*, 2003. S. 93.

[Sto04] Stolk, J., Verdonschot, N., Murphy, B. P., Prendergast, P. J. & Huiskes, R. Finite element simulation of anisotropic damage accumulation and creep in acrylic bone cement. *Engineering Fracture Mechanics Vol. 71*, 2004. S. 513 - 528.

[Sun00] Sun, C., Gent, A. & Marteny, P. *Effect of Fatigue Step Loading Sequence on Residual Strength*. 2000. Tire Science and Technology, TSTCA. Vol. 28, Nr. 3. S. 196-208.

[Trä98] Tränkler, H.-R. (Herausgeber) & Obermeier, E. (Herausgeber). *Sensortechnik: Handbuch für Praxis und Wissenschaft*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1998. 1. Auflage, ISBN: 3540586407.

[Wöh70] Wöhler, A. *Über die Festigkeitsversuche mit Eisen and Stahl*. Zeitschrift für Bauwesen Vol. 20, 1870. S. 73 - 106.

[Wil10] Wilker, H. *Weibull-Statistik in der Praxis, Leitfaden zur Zuverlässigkeitsermittlung technischer Komponenten*. Books on Demand, Auflage 2, 2010. ISBN: 3839162415.

[Yan03] Yang, L. & Fatemi, A. Cumulative fatigue damage assessment and life predictions of as-forged vs QT V-based MA steels using two-step loading experiments. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications, Vol. 217, Issue 2*, 2003. S. 145 - 155.

[Yeo93] Yeoh, O. H. Some forms of the strain energy function of rubber. *Rubber Chemistry and Technology Vol. 66 Iss. 5*, November 1993. S. 754 - 771.